

Université du 8 mai 1945 – Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de mastère

Option : Conception et Production Industrielle

Présenté par : FERNANE Fares



=====

***Etude théorique et expérimentale de la
flexion déviée. Mise au point d'une
manipulation.***

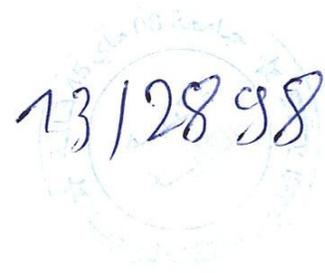
=====

Sous la Direction de :

Dr. BOUTABBA Smaïl et Dr KHAROUBI Mounir

Année universitaire 2012/2013

sommaire



Résumé

Partie I : Recherche Bibliographique

<i>I-1</i> Généralités sur la résistance des matériaux	1
1.1 Introduction	1
1.2 Notion de poutre	2
1.3 Notion de sollicitations	3
1.3.1 Sollicitations Simples	
1.3.1.1 Traction et compression simple	
1.3.1.2 Cisaillement simple	
1.3.1.3 Torsion simple	
1.3.1.4 Flexion pure	
Hypothèses	
Torseur de cohésion	
Contraintes	
Condition de résistance	
1.3.2 Sollicitations composées	
1.3.2.1 Flexion simple	
1.3.2.2 Flexion plane	
1.3.2.3 Flexion + Torsion	
1.3.2.4 Flambage	
1.3.2.5 Flexion déviée	
1.4 Notions de contraintes	9
1.4.1 Vecteur contrainte au point M	
1.4.2 Composantes normales et tangentielles	
1.5 Moments quadratiques	10
1.5.1 Moment quadratique d'une surface par rapport à un axe	
1.5.2 Moment quadratique d'une surface par rapport à un point	
1.5.3 Moments quadratiques de quelques surfaces simples	
<i>I-2</i> Etude de la flexion déviée	12
2.1. Contraintes et déformations	
2.2. Principe de la méthode	
2.3. Exemple 1	14
2.4. Exemple 2	16

Partie I : Etude-expérimentale

<i>I-1</i> Introduction	19
<i>I-2</i> Essai de flexion 3 points	19
2.1. Description de la machine utilisée	
2.1.1 Machine à commande hydraulique (Forme Test SEIDNER)	
<i>I-3</i> Centre de surface G de la cornière	21
<i>I-4</i> Moments quadratiques	21

I-5 Moment produit	22
I-6 Moments quadratiques maximal et minimal	22
I-7 Flexion simple	22
7-1. Poutre en cornière dont les charges sont appliquées dans un plan vertical constituant un plan transversal de symétrie de la poutre	
7-1-1. Hypothèse sur le solide et les charges	
7-1-2. Contraintes normales en un point de la section et équation de déformatio	
I-8 Flexion déviée	23
8-1. valeur maximum des contraintes normales principe de la manipulation	
8-2. Déformation	
I-9 Poutre encastree une extrémite et libre à l'autre est soumise à une charge concentrée P	25
9-1. Manipulation	
9-2. Principe de la manipulation	
9-3. Dimensions de la poutre	
9-4. Moments quadratiques	
9-5. charge maximale admissible	
9-6. calcul de la flèche	
a. Angle de sollicitation fixe avec une charge variable	
b. Angle fixe avec une charge variable	
9-7. Interprétation des résultats	

Conclusion:

Résumé

Le dimensionnement de certains éléments de construction mécanique est très complexe dû d'une part à la forme des éléments et leurs sections transversales, et d'autre part aux types de chargement. Dans cette étude nous avons exposé les notions sur les différentes sollicitations rencontrées en résistance des matériaux, principalement sur la flexion des poutres et plus particulièrement sur la flexion déviée. Deux exemples que l'on rencontre fréquemment dans la pratique ont été développés : une poutre à section droite rectangulaire chargée en dehors des axes principaux d'inertie et une poutre à ailes inégales pour lesquelles l'étude des contraintes et des déformations a été menée.

Une partie expérimentale est effectuée pour valider les résultats des exemples étudiés :

- L'étude d'une poutre sur deux appuis sous l'action d'une charge concentrée au milieu pour laquelle nous avons utilisé le banc d'essai du Laboratoire de RDM ;
- Et l'étude d'une poutre en porte-à-faux encastrée à une extrémité et soumise à l'action d'une charge concentrée à l'autre extrémité pour laquelle un banc d'essai a été conçu avec les moyens dont nous disposons.

Dans cette partie nous avons étudié l'évolution de la flèche prise par la poutre sous l'action d'une charge variable.

Mots clés : sollicitations simples, flexion déviée, axes d'inertie, contraintes ; déformations.

Partie I

Recherche bibliographique

I-1 Généralités sur la résistance des matériaux

1.1 Introduction

La résistance des matériaux est une discipline d'étude des structures et de leur dimensionnement. C'est une science très particulière de la mécanique des milieux continus qui permet de concevoir et dimensionner une pièce mécanique, un ouvrage d'art ou tout objet utilitaire. Ce dimensionnement fait appel à des calculs qui prévoient le comportement de l'objet dont la conception doit réunir les meilleures conditions de sécurité, d'économie et d'esthétique.

L'objectif principal de la résistance des matériaux est l'étude de la stabilité interne et la déformabilité c'est à dire la détermination des contraintes et des déformations à l'intérieur de la matière et les déplacements des lignes moyennes des structures générés (machines en génie mécanique,). Elle est basée sur des hypothèses simplificatrices vérifiées expérimentalement.

La RDM fait appel à la statique du solide. C'est un maillon essentiel dans le dimensionnement des systèmes mécaniques réels.

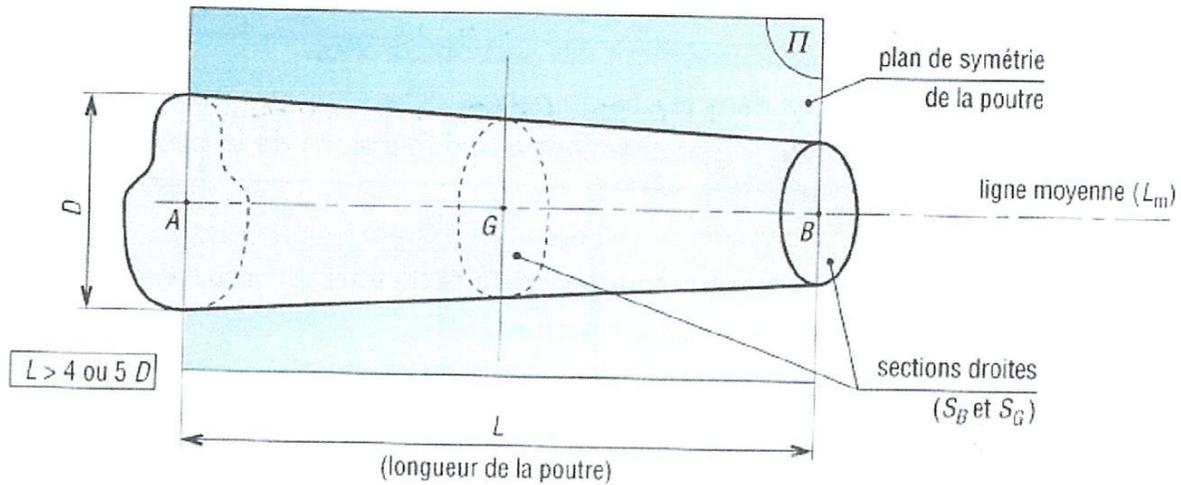
La statique et la résistance des matériaux constituent l'outil indispensable de l'ingénieur constructeur pour concevoir et réaliser des ouvrages économiques qui ne risquent ni de se rompre ni de se déformer excessivement sous les actions qui leur sont appliquées.

L'étude en RDM est une étape nécessaire entre la conception et la réalisation d'une pièce. Elle permet :

- de justifier son dimensionnement
- de déterminer le choix du matériau
- de limiter son coût.

Elle permettra également d'évaluer ses déformations éventuelles, et donc sa durée de vie.

1.2 Notion de poutre



La RDM est une science expérimentale, dont les relations sont établies à partir d'un modèle appelé poutre. On désigne par poutre un solide dont la section varie progressivement.

La ligne moyenne de la poutre est le lieu des centres de surfaces des sections droites successives. Les sections droites sont les sections planes et perpendiculaires à la ligne moyenne de la poutre.

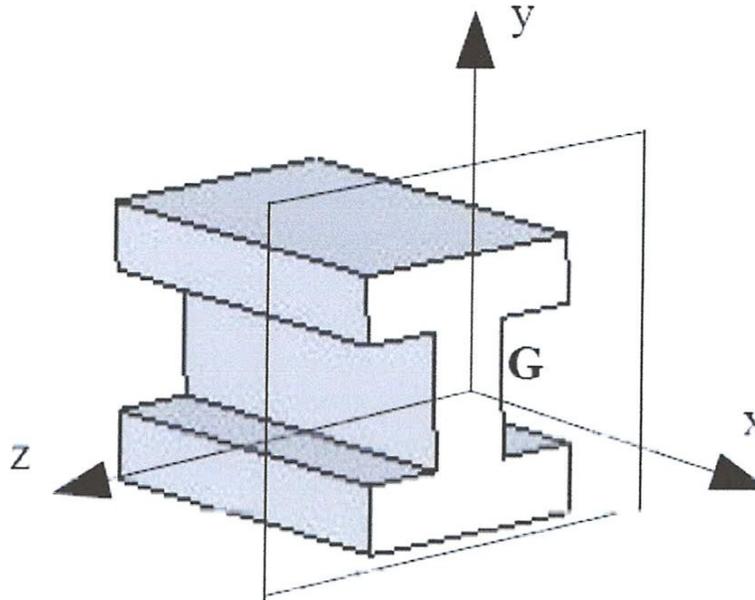
Hypothèses :

- Les matériaux sont homogènes et isotropes (mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions).
- Toutes les forces extérieures exercées sur la poutre sont contenues dans le plan de symétrie.
- Les sections droites restent perpendiculaires à l'axe de la poutre.
- On se place toujours dans le cas de petites déformations, faibles devant les dimensions de la poutre.

Afin de rapprocher le modèle théorique du phénomène réel, on affecte aux résultats des coefficients de sécurité tenant compte du contexte dans lequel évolue la pièce étudiée.

1.3 Notion de sollicitations

La poutre est soumise à des efforts extérieurs. La direction et le sens de ces efforts par rapport à la ligne moyenne définissent le type de sollicitation que subit la poutre.



Afin de déterminer à quel type de sollicitations est soumise cette poutre, on la divise virtuellement en deux tronçons, et on « isole » la partie gauche.

Torseur de cohésion :

L'action du tronçon droit sur le tronçon gauche est une action d'encastrement qui se modélise par un torseur d'inter-effort.

La réduction de ce torseur au point G, centre de la section, est appelé torseur des efforts de cohésion.

La forme générale du torseur de cohésion en G est :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & Mt \\ T_y & Mf_y \\ T_z & Mf_z \end{Bmatrix}$$

N : effort normal Mt : moment de torsion.

T_y : effort tranchant Mf_y : moment fléchissant

T_z : effort tranchant Mf_z : moment fléchissant

1.3.1 Sollicitations simples:

1.3.1.1 Traction et compression simple:

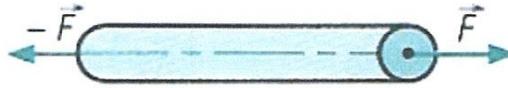


Fig.1- Barre en traction.

Une poutre est sollicitée en traction simple (en compression) lorsqu'elle est soumise à deux forces directement opposées, appliquées au centre des surfaces extrêmes, qui tendent à l'allonger (à la raccourcir).

La traction ou compression correspond à des forces s'exerçant perpendiculairement aux sections des pièces; elle est dite uni-axiale car toutes les forces sont sur un même axe.

Torseur de cohésion dans $(G; x; y; z)$:

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

1.3.1.2 Cisaillement simple

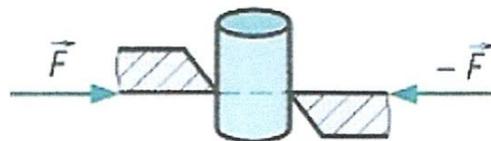


Fig. 3 Forces de cisaillement.

Une poutre est sollicitée au cisaillement si elle est soumise à des actions qui se réduisent à deux forces directement opposées, dans le même plan P perpendiculaire à la ligne moyenne.

Il y a **cisaillement** lorsqu'une pièce est sollicitée par deux forces égales, de même droite d'action mais de sens contraires qui tendent à faire **glisser** l'une sur l'autre des deux parties de la pièce (exemple: action d'une paire de ciseaux sur une feuille de papier, action d'un poinçon sur une tôle, ...).

Torseur de cohésion dans $(G; x; y; z)$:

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$$

1.3.1.3 Torsion simple

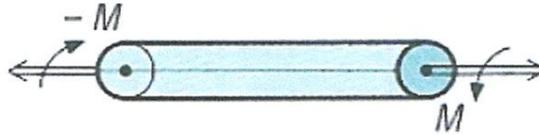


Fig. 7 poutre en flexion

Une poutre est sollicitée à la torsion lorsqu'elle est soumise à ses deux extrémités à des actions mécaniques qui se réduisent à deux couples égaux et opposés dont les moments sont portés par la ligne moyenne (Fig. 7).[2]

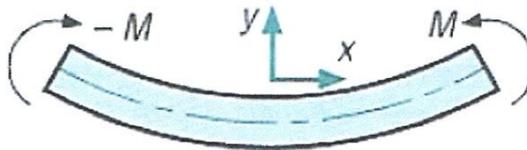
Tenseur de cohésion dans (G, x, y, z) .

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

1.3.1.4 Flexion pure

Hypothèses

- Hypothèses générales de la RDM
- La poutre possède un axe de symétrie longitudinal.
- Les forces extérieures à la poutre sont contenues dans le plan de symétrie.



Cette flexion correspond au cas où les sollicitations dans une section quelconque se réduisent au seul moment fléchissant (pas d'effort tranchant).

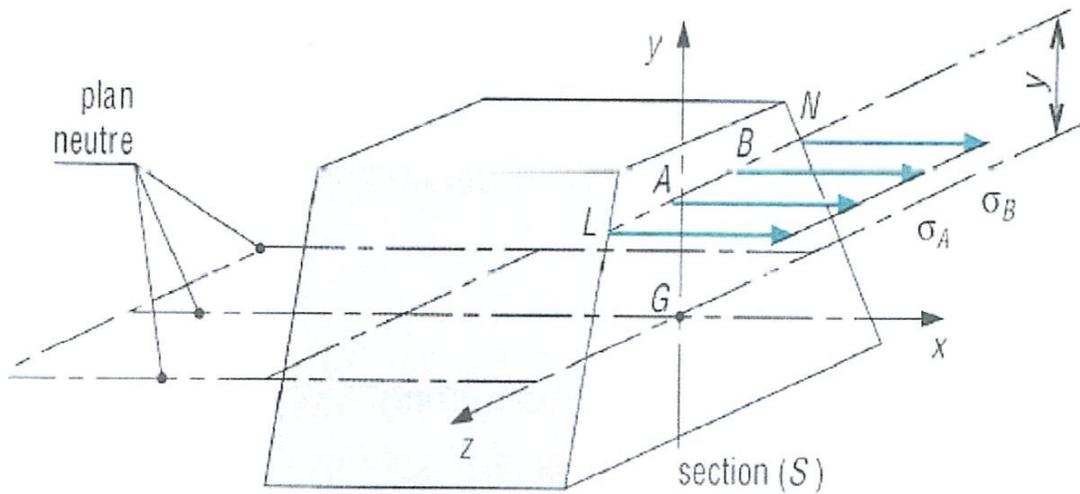
Remarquons que ce cas, bien que très intéressant d'un point de vue théorique car il permet de dissocier les effets du moment fléchissant de ceux de l'effort tranchant, n'apparaît pratiquement jamais dans la réalité.

Torseur de cohésion dans $(G; x; y; z)$

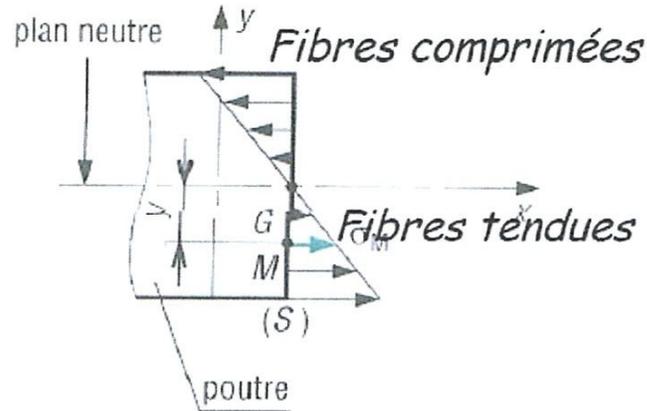
$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}$$

Contraintes

Répartition des contraintes dans la section :



- La contrainte normale σ en un point M d'une section droite est proportionnelle à la distance y entre ce point et le plan moyen passant par G.
- Toutes les fibres situées à la distance y du plan moyen ont même contrainte.
- Si la fibre est tendue, la contrainte est positive. Si la fibre est comprimée, la contrainte est négative.



La fibre la plus sollicitée est également la plus éloignée du plan moyen.

Condition de résistance

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_p$$

ou encore :

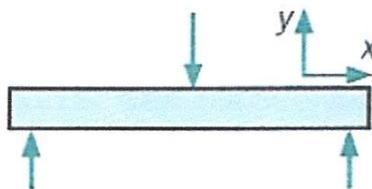
$$\sigma_{\max} = \frac{Mf}{\left(\frac{I_{Gz}}{v}\right)} \leq \sigma_p$$

$\left(\frac{I_{Gz}}{v}\right)$: Module de flexion

v : distance entre le plan moyen et la fibre la plus éloignée ($v = y_{\max}$)

1.3.2 Sollicitations composées

1.3.2.1 Flexion simple

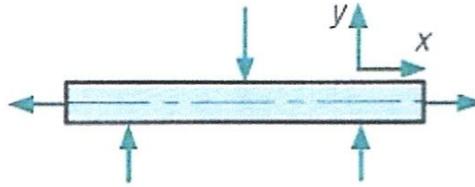


C'est le cas où les sollicitations dans une section s'expriment sous la forme du torseur :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}$$

Dans ce cas, on mettra en évidence par le calcul l'effet de l'effort tranchant associé à celui du moment fléchissant.[3]

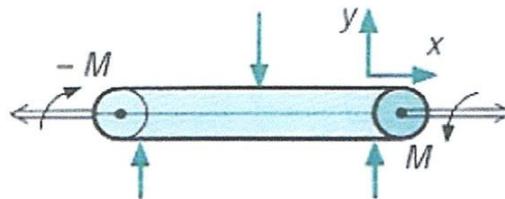
1.3.2.2 Flexion plane



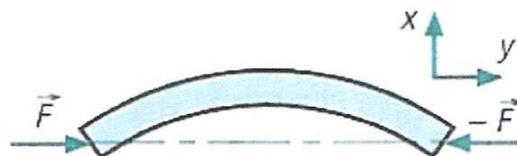
Torseur de cohésion dans $(G; x; y; z)$:

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}$$

1.3.2.3 Flexion + Torsion



1.3.2.4 Flambage



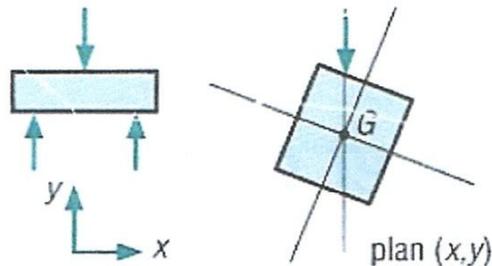
1.3.2.5 Flexion déviée

Les poutres sont parfois chargées de façon complexe et les sollicitations engendrées, appelées sollicitations composées, ne peuvent pas être étudiées et schématisées à l'aide de sollicitations élémentaires ci-dessus.

Cependant, dans un grand nombre de cas, les études peuvent être ramenées à la superposition de plusieurs sollicitations simples. On applique alors le Théorème de SUPERPOSITION, à savoir l'addition d'études de systèmes simples. Ceci concerne :

- les actions extérieures.
- Les contraintes.
- Les sollicitations (efforts normaux, tranchants, moments de torsion et fléchissants)
- les déformations.

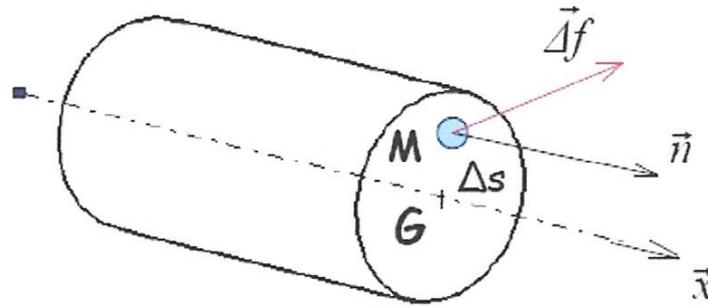
La flexion déviée ou flexion gauche est un mode de flexion tel que le plan du moment fléchissant ne coïncide pas avec un des axes centraux principaux d'inertie de la section droite. Un effort tranchant est associé au moment fléchissant. Les charges ne peuvent entraîner ni effort normal, ni moment de torsion.



1.4 Notions de contraintes

Le torseur de cohésion permet d'exprimer les actions mécaniques internes exercées par le tronçon 2 sur le tronçon 1 de la poutre au point de réduction G, centre de la section. Mais il ne permet pas de définir la répartition de ces efforts dans la surface de la section.

Pour cela, on fait appel à la notion de **contrainte**.



- Δs : élément de surface de centre M .
- $\Delta \vec{f}$: effort élémentaire exercé sur Δs .
- \vec{n} : vecteur unitaire normal à Δs .

1.4.1 Vecteur contrainte au point M

$$\vec{C}(M, \vec{n}) = \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta s} \quad \text{Unité : } 1 \text{ N / mm}^2 = 1 \text{ MPa}$$

1.4.2 Composantes normales et tangentielles

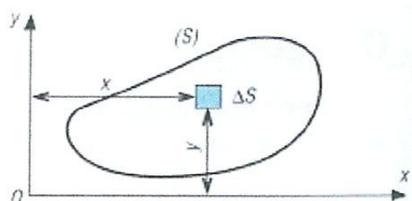
- \vec{n} : vecteur unitaire normal à Δs .
- \vec{t} : vecteur unitaire tangent à Δs . (t appartient au plan de la section).
- σ : contrainte normale
- τ : contrainte tangentielle

$$\vec{C} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$$

1.5 Moments quadratiques

1.5.1 Moment quadratique d'une surface par rapport à un axe

:



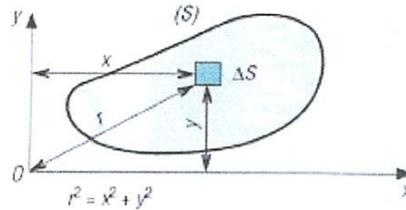
Les moments quadratiques de la surface sont :

$$I_x = \Sigma y^2 \cdot \Delta S = \int y^2 \cdot dS$$

$$I_y = \Sigma x^2 \cdot \Delta S = \int x^2 \cdot dS$$

unités : mm⁴

1.5.2 Moment quadratique d'une surface par rapport à un point



Le moment quadratique polaire de la surface complète S est égal à :

$$I_O = \Sigma r^2 \cdot \Delta S = \int r^2 \cdot dS$$

unités : mm⁴

1.5.3 Moments quadratiques de quelques surfaces simples

SECTION	I_{Gx}	I_{Gy}	$I_O = I_G$
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$
	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{6}$

	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{32}$
	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$

I-2 Etude de la flexion déviée

Une poutre droite est soumise à une flexion déviée (ou flexion oblique) lorsque le plan de symétrie d'application des charges contient le centre de gravité de la section droite, mais ne contient ni un axe de symétrie ni un axe principal de cette section.

2.1 Contraintes et déformations

On réduit la flexion déviée à deux flexions planes; pour cela, les sollicitations agissant dans des plans longitudinaux arbitraires se décomposent en composantes situées dans les plans principaux (z, x) et (z, y).

Dès lors, la résolution est équivalente à "2 fois" ce qui a été fait en flexion simple.

Il faut cependant ne pas oublier de sommer les contraintes obtenues. C'est-à-dire :

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y = \frac{M_{fx}}{W_X} + \frac{M_{fy}}{W_Y}$$

Avec : σ_x : contrainte normale suivant l'axe (z) due au moment fléchissant (M_{fx})

σ_y : contrainte normale suivant l'axe (z) due au moment fléchissant (M_{fy})

W_y : module de résistance à la flexion par rapport à l'axe (x)

W_x : module de résistance à la flexion par rapport à l'axe (y)

Dans la mesure où un effort tranchant est associé au moment fléchissant, il y a apparition de contraintes de cisaillement dans la section droite. Et comme pour les contraintes longitudinales

nous effectuerons la somme des contraintes tangentielles dues aux deux moments tranchants indépendamment.

$$\text{D'où : } \tau = \tau_x + \tau_y = K\tau \frac{T_x}{Acis} + K\tau \frac{T_y}{Acis}$$

Avec : τ_x : contrainte tangentielle suivant l'axe (x) due à l'effort tranchant (T_x)

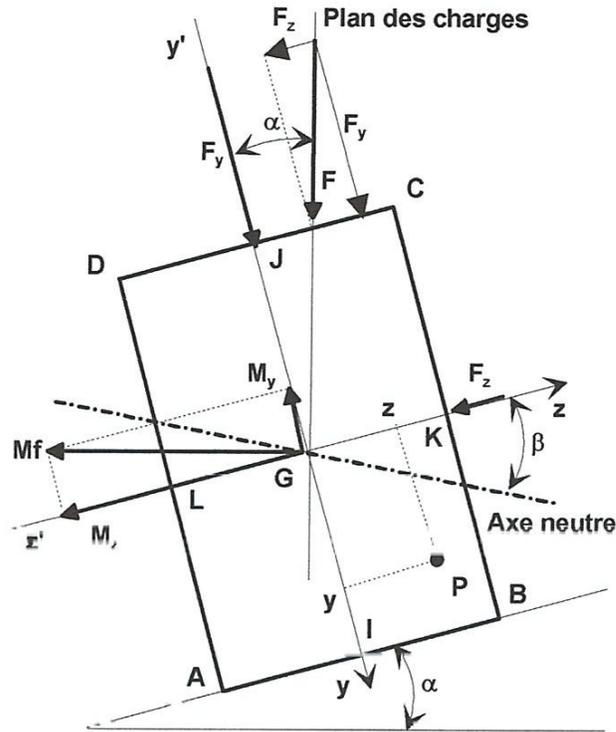
τ_y : contrainte tangentielle suivant l'axe (y) due à l'effort tranchant (T_y)

Ces contraintes (τ) sont généralement inférieures aux contraintes normales. On veillera simplement à vérifier si indépendamment les contraintes normales et tangentielles ne dépassent pas les valeurs admissibles.[4]

2.2 Principe de la méthode

- On détermine les axes centraux principaux de la section droite s'ils ne sont pas connus.
- On projette les charges suivant les directions principales.
- On détermine les effets de chaque moment fléchissant.
- Les contraintes normales dans la section droite résultent de l'addition algébrique des contraintes dues à chaque moment fléchissant.
- On détermine l'axe neutre en posant que c'est le lieu des points où la contrainte normale est nulle.

2.3 Exemple 1



$F_z = F \times \sin \alpha$ les forces F_z donnent un moment fléchissant M_z porté par Gy

$F_y = F \times \cos \alpha$ les forces P_y donnent un moment fléchissant M_y porté par Gz

Si M est le moment dû à F :

$M_z = M \times \sin \alpha$ l'axe neutre de la flexion due à M_z est Gy

$M_y = M \times \cos \alpha$ l'axe neutre de la flexion due à M_y est Gz

Dans le repère (Gz, Gy) soit un point $P(z, y)$ de la section droite subissant le moment M . La contrainte normale due à M est la somme algébrique des contraintes normales dues à M_y et M_z :

$$\sigma = \sigma_z + \sigma_y \quad \text{avec}$$

$$\sigma_z = \frac{M_z \times z}{I_{y'y}} = \frac{M \times \sin \alpha \times z}{I_{y'y}}$$

$$\sigma_y = \frac{M_y \times y}{I_{z'z}} = \frac{M \times \cos \alpha \times y}{I_{z'z}} \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{M \times \sin \alpha \times z}{I_{y'y}} + \frac{M \times \cos \alpha \times y}{I_{z'z}} = M \left(\frac{z \times \sin \alpha}{I_{y'y}} + \frac{y \times \cos \alpha}{I_{z'z}} \right) \quad (1)$$

Dans la portion de section AIGL on a : $\sigma > 0$; et dans CJGK : $\sigma < 0$.

Mais dans les 2 autres portions de la section on ne peut rien dire sur le signe de σ .

Recherche de l'axe neutre

$$\sigma = 0 \quad \text{alors} \quad M \left(\frac{z \times \sin \alpha}{I_{y'y}} + \frac{y \times \cos \alpha}{I_{z'z}} \right) = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{y}{z} = -\frac{I_{z'z}}{I_{y'y}} \times \operatorname{tg} \alpha$$

L'axe neutre est donc un segment de droite de coefficient angulaire :

$$\frac{y}{z} = -\frac{I_{z'z}}{I_{y'y}} \times \operatorname{tg} \alpha$$

En appelant β l'angle formé par l'axe neutre avec $z'z$ on a :

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{I_{z'z}}{I_{y'y}} \times \operatorname{tg} \alpha$$

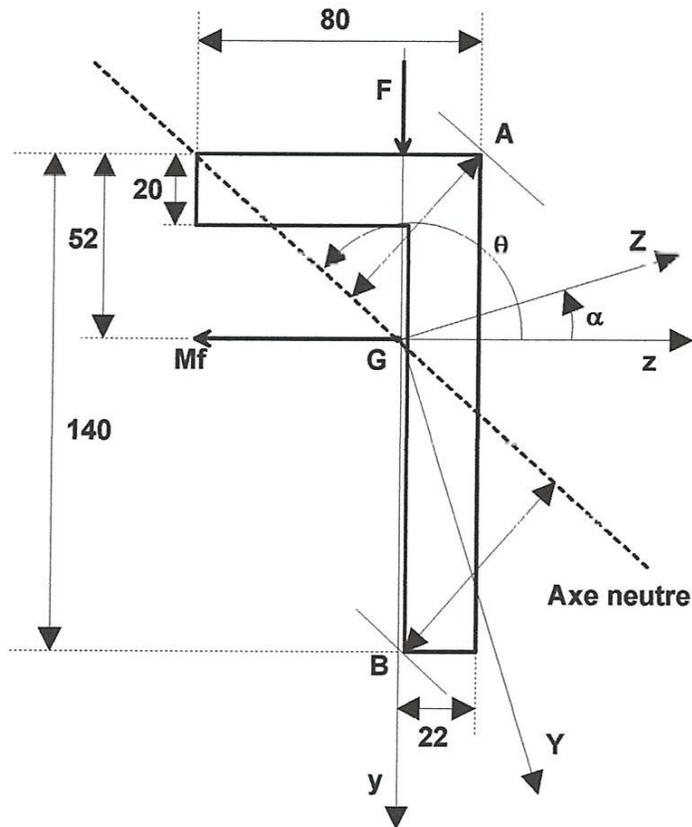
Contraintes maximales

Les points de contraintes maximales sont ceux qui sont les plus éloignés de l'axe neutre. Il suffit de chercher les coordonnées z et y de ces points et d'appliquer la relation (1) donnant la valeur de la contrainte.

2.4 Exemple 2

La section de la poutre ne présente aucun axe de symétrie. Le plan d'application des charges a pour traces Gy et le moment de flexion Mf est porté par Gz .

Les axes centraux principaux sont connus (cornière à ailes inégales)



On ramène le problème à la composition de 2 flexions simples :

$$Mf_z = Mf \times \cos \alpha \quad \text{et} \quad Mf_y = Mf \times \sin \alpha$$

Les contraintes relatives aux 2 composantes du moment sont, au point quelconque $M(Z,Y)$:

$$\sigma_z = \frac{Mf \cos \alpha}{\frac{I_z}{Y}} \quad \text{et} \quad \sigma_z = \frac{Mf \sin \alpha}{\frac{I_y}{Z}}$$

La contrainte résultante est :

$$\sigma = Mf \left(\frac{Y \cos \alpha}{I_Z} + \frac{Z \sin \alpha}{I_Y} \right) = \frac{Mf}{I_Z I_Y} (I_Y \times Y \cos \alpha + I_Z \times Z \sin \alpha)$$

Transformons cette relation en posant :

$$Z = z \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$Y = -z \sin \alpha + y \cos \alpha$$

On a, d'après le cours sur les axes principaux :

$$I_Z = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2 \cos \alpha} = A + B$$

$$I_Z = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2 \cos \alpha} = A - B$$

$$B \sin 2\alpha = -I_{zy}$$

$$B \cos 2\alpha = \frac{I_z - I_y}{2}$$

On obtient :

$$\sigma = Mf \frac{y I_y - z I_{zy}}{I_z I_y - I_{zy}^2}$$

L'équation de la ligne neutre est :

$$\frac{y}{z} = \frac{I_{zy}}{I_y}$$

Application numérique

$$I_z = 764 \text{ cm}^4, \quad I_y = 179 \text{ cm}^4, \quad I_{zy} = -201,6 \text{ cm}^4, \quad (\overline{Gz}, \overline{GZ}) = 17^\circ, \quad Mf = 5000 \text{ mN}$$

Quelle est la position de l'axe neutre et les valeurs de σ_{\max} ?

Axe neutre :

$$\frac{y}{z} = \frac{I_{zy}}{I_y} = -\frac{201,6}{179} = -1,126$$

$$\theta = 138^\circ$$

Au point A :

Recherche bibliographique

$$\sigma_A = 5000 \times 10^3 \times \frac{52 \times 179 \times 10^4 + 22 \times 201,6 \times 10^4}{764 \times 179 \times 10^8 - 201,6^2 \times 10^8} = 70 \text{MPa} \quad (\text{traction})$$

Au point B :

$$\sigma_B = 5000 \times 10^3 \times \frac{(-88) \times 179 \times 10^4 + 2 \times 201,6 \times 10^4}{764 \times 179 \times 10^8 - 201,6^2 \times 10^8} = -78 \text{MPa} \quad (\text{compression})$$

Partie II :

Etude-expérimentale

II.1 Introduction

Pour valider l'étude théorique que nous avons exposée dans la première partie de notre travail, une étude expérimentale de la flexion déviée a été effectuée. Dans cette partie deux bancs d'essai sont utilisés :

- Flexion déviée d'une cornière de grandes dimensions (20x2x15x1200) sur le banc d'essai de flexion 3 points du Laboratoire de RDM ;
- Flexion déviée d'une cornière (20x2x15x600) encastree-libre (encastrement orientable) sur un banc réalisé dans le cadre de ce mémoire

II.2 Essai de flexion 3 points

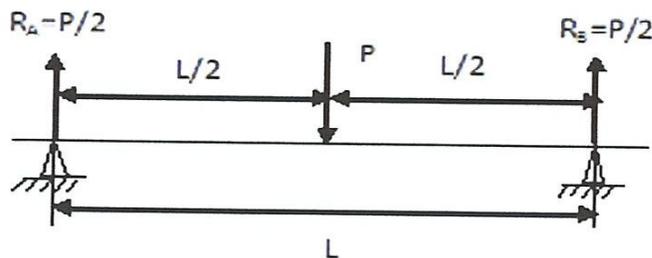


Fig1 flexion 3points

Dans cette partie on réalise un essai de flexion 3 points d'une cornière, dont la section est montrée dans la figure 2, de longueur 1200mm sur deux appuis distants de 1000 mm, une charge variable dont la vitesse d'avance est réglée est appliquée au milieu de la poutre. La flèche au milieu de la poutre est mesurée à l'aide d'un comparateur. On relève les valeurs des efforts appliqués et le déplacement du milieu de la poutre puis on trace les courbes charge-flèche.

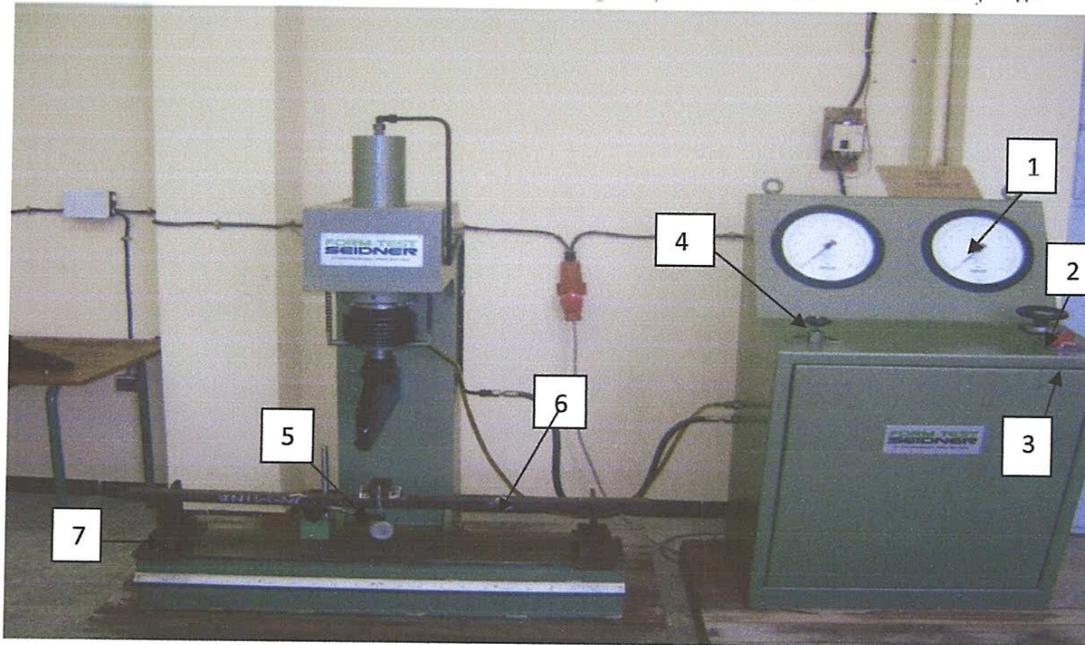
2.1. Description de la machine utilisée

La machine utilisée pour la flexion 3 points est une machine à commande hydraulique (Forme Test SEIDNER) de capacité 50 KN fig2.

Elle est constituée de deux parties, figure 3 :

- la partie de commande hydraulique qui permet de régler la pression exercée sur l'éprouvette. Elle comprend un moteur hydraulique, un levier de compression et décompression et un levier de commande de la vitesse d'avance de la charge.
- une partie d'exécution qui est constituée d'un vérin hydraulique, deux appuis et d'un poinçon.

1.1.1 Machine à commande hydraulique (Forme Test SEIDNER) Fig2



- 1) Cadran indiquant la charge, charge maximale 125N, sensibilité 2N
- 2) Vitesse du déplacement de la charge
- 3) Interrupteur marche-arrêt
- 4) Levier de compression et décompression
- 5) Comparateur
- 6) poutre
- 7) Appuis

II.3 Centre de surface G de la cornière

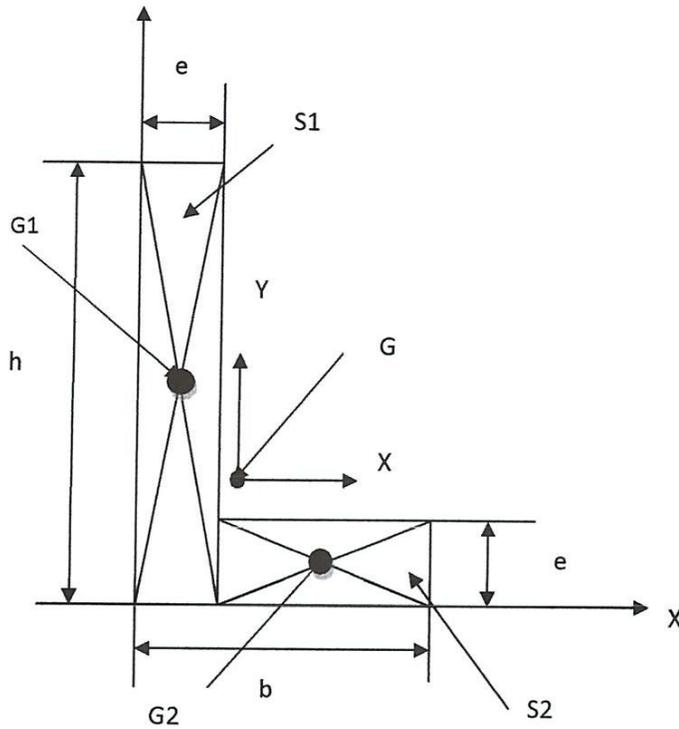


Fig 3 centre de gravité de la cornière

Dimensions de la cornière : prenons pour unité le mm pour faciliter les calculs

$$e = 2 \text{ mm}, \quad h = 20 \text{ mm}, \quad b = 15 \text{ mm}$$

$$S_1 = h \cdot e = 40 \text{ mm}^2$$

$$S_2 = (b - e) \cdot e = 26 \text{ mm}^2$$

$$S = S_1 + S_2 = 66 \text{ mm}^2$$

$$G_1(1,10) \quad \text{et} \quad G_2(8,5,1)$$

$$XG = \frac{\sum xG_i}{\sum S_i} = \frac{xG_1 \cdot S_1 + xG_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2} = 3,3545 \text{ mm} \quad (1)$$

$$YG = \frac{\sum yG_i}{\sum S_i} = \frac{yG_1 \cdot S_1 + yG_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2} = 6,1515 \text{ mm} \quad (2)$$

II.4 Moments quadratiques

$$I(G, \vec{x}) = I_1(G, \vec{x}) + I_2(G, \vec{x}) \quad (3)$$

$$I_1(G, \vec{x}) = \frac{eh^3}{12} + (yG - yG_1)^2 \cdot S_1 = 1836,15 \text{ mm}^4 \quad (4)$$

$$I_2(G, \vec{x}) = \frac{be^3}{12} + (yG - yG_2)^2 \cdot S_2 = 782,21 \text{ mm}^4 \quad (5)$$

$$I(G, \vec{x}) = 2618,36 \text{ mm}^4 \quad (6)$$

$$I(G, \vec{Y}) = I_1(G, \vec{Y}) + I_2(G, \vec{Y}) \quad (7)$$

$$I_1(G, \vec{Y}) = \frac{e h^3}{12} + (x G_1 - x G)^2 \cdot S_1 = 362,49 \text{ mm}^4 \quad (8)$$

$$I_2(G, \vec{Y}) = \frac{b e^3}{12} + (x G_2 - x G)^2 \cdot S_2 = 903,37 \text{ mm}^4 \quad (9)$$

$$I(G, \vec{Y}) = 1265,86 \text{ mm}^4 \quad (10)$$

II.5 Moment produit

$$I(G, \vec{x}, \vec{Y}) = I_1(G, \vec{x}, \vec{Y}) + I_2(G, \vec{x}, \vec{Y}) \quad (11)$$

$$I_1(G, \vec{x}, \vec{Y}) = I_1(G_1, \vec{x}, \vec{Y}) + S_1 (Y G_1 - Y G) \cdot (X G_1 - X G) = -419 \text{ mm}^4 \quad (12)$$

$$I_2(G, \vec{x}, \vec{Y}) = I_1(G_2, \vec{x}, \vec{Y}) + S_2 (X G_2 - X G) \cdot (Y G_2 - Y G) = -644,64 \text{ mm}^4 \quad (13)$$

$$I(G, \vec{x}, \vec{Y}) = -1063,64 \text{ mm}^4 \quad (14)$$

II.6 Moments quadratiques maximal et minimal

$$I_{\max} = \frac{I(G, \vec{x}) + I(G, \vec{Y})}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{[I(G, \vec{x}) - I(G, \vec{Y})]^2 + 4 \cdot [I(G, \vec{x}, \vec{Y})]^2} \quad (15)$$

$$I_{\max} = 3202,52 \text{ mm}^4 \quad (16)$$

$$I_{\min} = \frac{I(G, \vec{x}) + I(G, \vec{Y})}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{[I(G, \vec{x}) - I(G, \vec{Y})]^2 + 4 \cdot [I(G, \vec{x}, \vec{Y})]^2} \quad (17)$$

$$I_{\min} = 681,70 \text{ mm}^4 \quad (18)$$

II.7 Flexion simple

7.1 Poutre en cornière dont les charges sont appliquées dans un plan vertical constituant un plan transversal de symétrie de la poutre

7.1.1 Hypothèse sur le solide et les charges

le matériau est homogène et isotrope sa forme est celle d'une poutre en cornière à axe rectiligne et à section droite constante. Les charges sont appliquées dans un plan vertical constituant un plan de symétrie de la poutre.

La poutre en cornière repose sur 2 appuis définissant un plan horizontal et la charge s'exerce au milieu de la portée.

7.1.2 Contraintes normales en un point de la section et équation de déformation

On sait que la valeur de la contrainte normale σ en point situé à la distance V de la couche neutre est donné par la relation :

$$\sigma = \frac{M_f}{I} \cdot \frac{V}{V} \quad (19)$$

M_f : étant le moment fléchissant par rapport à la section étudiée, du aux forces situées à gauche ou à droite de cette section.

I : le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre.

V : distance du point à la couche neutre.

D'autre part, la flèche Y en un point de la poutre peut être déterminée par l'équation suivante de la « déformée » ou « ligne élastique »

Dans ce cas

$$EI = \frac{d^2 Y}{dx^2} = Mf \quad (20)$$

$$Mf_{max} = \frac{pl}{4} \quad (21)$$

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (22)$$

$$Y_{max} = \frac{pl^3}{48EI} \quad (23)$$

II.8 Flexion déviée

poutre droite dont les charges sont appliquées dans un plan vertical contenant la droite des centres de gravité des sections mais qui ne coïncide pas avec un plan de symétrie de la poutre

Ce mode de chargement est désigné sous le nom de flexion déviée.

Dans le cas de la barre essayée précédemment, on peut réaliser le phénomène de flexion déviée en plaçant ses extrémité sur deux supports comportant des échancrures en V usinées de façon à ce que le coté h , soit incliné de l'angle α sur l'horizontale. L'écartement des 2

Supports, d'axe en axe, sera réglé également à la longueur L

la charge P pouvant se décomposer en 2 charges p_1 et p_2 , situées dans les plans de symétrie de la poutre, on peut appliquer aux charges p_1 et p_2 les lois de la flexion simple. Ainsi la valeur de la contrainte normale de flexion en un point quelconque de coordonnées (X, Y) dans une section pour laquelle le moment fléchissant Mf s'obtient par :

$$\sigma = Mf \left[\frac{x \sin \alpha}{I(G_x)} + \frac{y \cos \alpha}{I(G_y)} \right] \quad (24)$$

8.1 valeur maximum des contraintes normales

La valeur maximum des contraintes normales de compression et d'extension est obtenu aux points les éloignés de l'axe neutre, de coordonnées X et Y, dans la section soumise au moment fléchissant maximum.

D'où :

$$c_{max} = M f_{max} \left[\frac{x \sin \alpha}{I(G_x)} + \frac{y \cos \alpha}{I(G_y)} \right] \quad (25)$$

$$M f_{max} = \frac{pl}{4}$$

8.2 Déformation

Pour déterminer la flèche " Y " prise par la poutre sous l'effet de la flexion déviée par rapport à un plan horizontal de référence, il suffit de projeter sur un axe vertical, les déformations Y_1 et Y_2 provoquées respectivement par $P_1 = P \cos \alpha$ et $P_2 = P \sin \alpha$, on arrivera ainsi à la relation :

$$Y = \frac{PL^3 \cos^2 \alpha}{48EI(G_x)} + \frac{PL^3 \sin^2 \alpha}{48EI(G_y)} \quad (26)$$

Position de la poutre

L : longue de la poutre en $L = 10^3 \text{ mm}$

E° : le moudule de resistance « ou moudule de young »

$E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$

Charge P(N)	Fleche mesurés	Fleche calculées
2	0,30	0,21
4	0,60	0,53
9	1,31	1,12
14	2,05	1,98
24	3,33	2,94
29	4	3,78
39	5,68	4,57
49	7,74	6,96
59	9,59	8,77

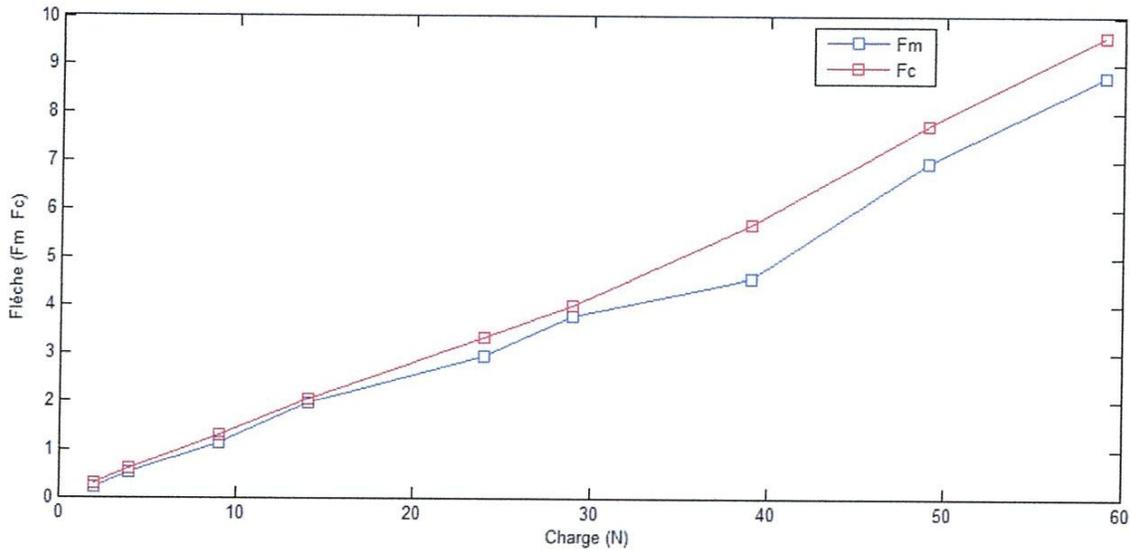


Fig 4: variation de la fleche (f_m) et (f_c) en fonction de la charge

les résultats obtenus montrent que la flèche mesurée et la flèche calculée convergent vers des résultats très rapprochés et qu'elles sont proportionnelles au chargement donc lorsque le chargement (P) augmente la flèche f_m augmente aussi.

II.9 Poutre encastree une extremité et libre à l'autre est soumise à une charge concentrée P

9.1 Manipulation

Dans cette partie on a réalisé un essai de flexion déviée d'un poutre en porte-à-faux d'une cornière de 600 mm de longueur chargée à son extrémité libre par une force concentrée. La cornière est inclinée d'un angle α (20°) par rapport à l'aile inférieure. On mesure ensuite la flèche par l'extrémité libre au niveau de l'arête avec un comparateur au $100^{\text{ème}}$, sous l'action de la charge appliquée dont le support passe par le centre de gravité de la section droite qui a été déterminé auparavant. Ensuite nous traçons la courbe représentant la flèche en fonction de la charge.

9.2 Principe de la manipulation

Ci-dessous le schéma du dispositif utilisé dans la manipulation.

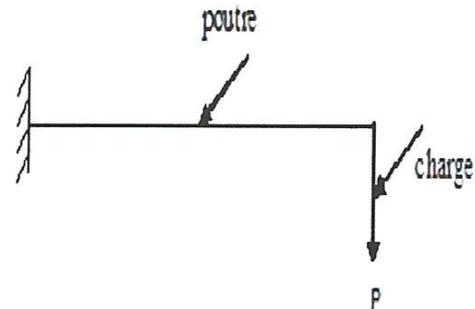


Fig5 : flexion déviée d'une consol chargé à l'extrémité libre

Fig6 : machine de flexion déviée inclinaison de p d'un angle $\alpha = 20^\circ$

l'expression de la flèche est donnée par:

$$F = \frac{P L^3}{3EI}$$

$$F_x = P \cdot \sin \alpha \cdot \frac{L^3}{3EI_y} \quad (27)$$

$$F_y = P \cdot \cos \alpha \cdot \frac{L^3}{3EI_y} \quad (28)$$

9.3 Dimensions de la poutre

$$b = 15 \text{ mm} \quad e = 2 \text{ mm} \quad L = 600 \text{ mm}$$

9.4 Moments quadratiques

On a:

$$I(G, \vec{x}) = 2618,36 \text{ mm}^4$$

$$I(G, \vec{y}) = 1265,86 \text{ mm}^4$$

9.5 Charge maximale admissible :

L'expression de la charge admissible est :

$$\sigma_p = \frac{\sigma_e}{\Delta}$$

De plus, on a : $\sigma_e = 250 \text{ daN/mm}^2$

D'où $\sigma_p = 125 \text{ daN/mm}^2$

9.6 Calcul de la flèche

a-Angle de sollicitation fixe avec une charge variable

nous avons fixé l'angle de sollicitation à $\alpha = 20^\circ$

$\alpha = 20^\circ$	P(N)	2	4	9	14	24	29	39	49	59
	Fm	0,32	0,67	1,54	2,44	3,33	4,23	5,10	7,88	9,79

b-Angle fixe avec une charge variable

nous avons fixé l'angle de sollicitation à $\alpha = 20^\circ$

$\alpha = 20^\circ$	P(N)	2	4	9	14	24	29	39	49	59
	Fx(mm)	0,19	0,38	0,78	1,35	2,32	2,81	3,78	4,75	5,72
	Fy(mm)	0,53	1,06	2,40	3,73	6,40	7,74	10,41	13,08	15,75

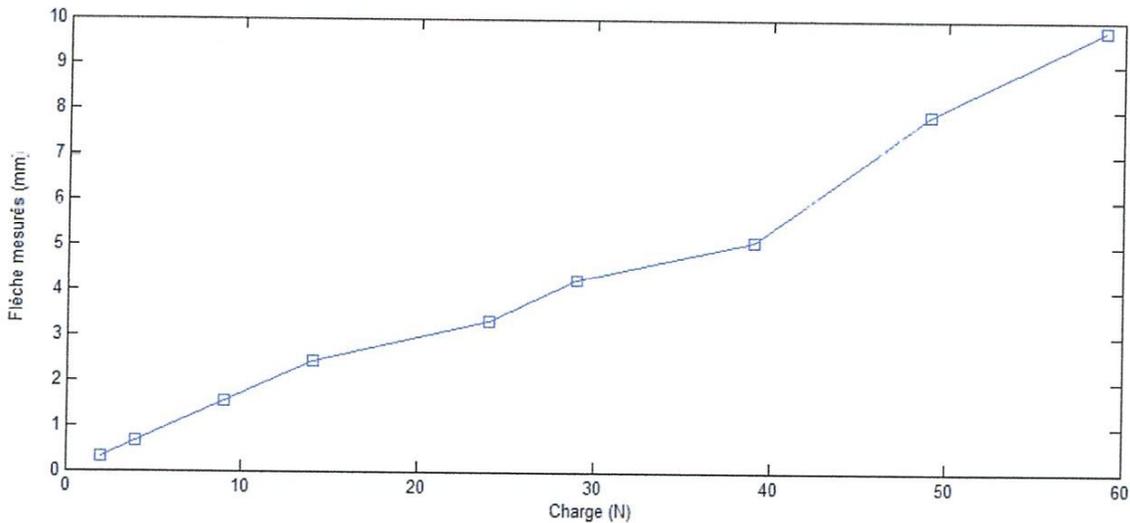


Fig 7: variation de la fleche en fonction de la charge inclinée à $\alpha = 20^\circ$

la flèche augmente lentement au début de chargement ensuite augmente de manière considérable

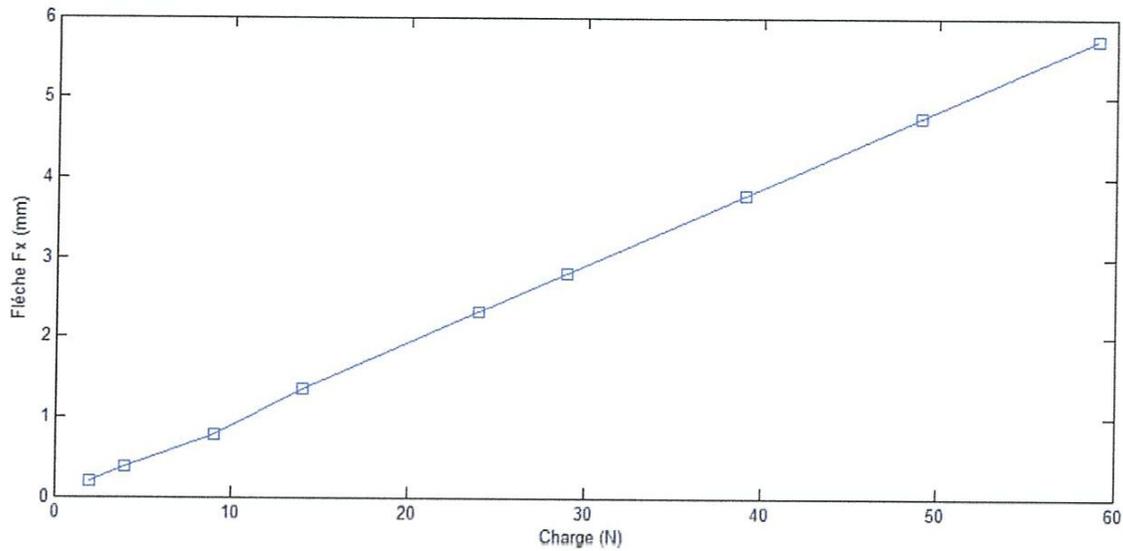


Fig 8: variation de la fleche en(F_x) en fonction de la charge P applique à($\alpha = 20^\circ$)

la flèche augmente lentement au début de chargement ensuite augmente de manière considérable

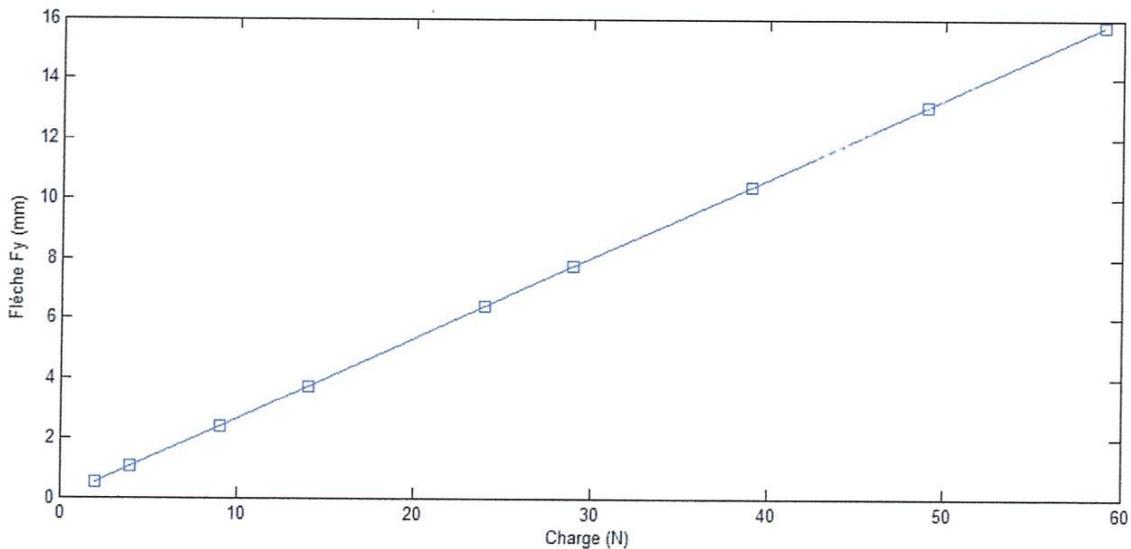


Fig 9: variation de la fleche en(F_y) en fonction de la charge P applique à($\alpha = 20^\circ$)

la flèche augmente lentement au début de chargement ensuite augmente de manière considérable

9.7 Interprétation des résultats

Les résultats obtenus lors de cette manipulation sont pratiquement identiques à ceux obtenus par étude théorique avec quelques erreurs dues aux lectures imparfaites et aux appareils de mesure.

On constate, à partir des courbes tracées ci-dessus, que les flèches F_x et F_y sont des fonctions linéaires de la charge (P). Ainsi, la détermination de la flèche d'une poutre quelconque dans la limite de la charge admissible devient facile.

Résumé

Le dimensionnement de certains éléments de construction mécanique est très complexe dû d'une part à la forme des éléments et leurs sections transversales, et d'autre part aux types de chargement. Dans cette étude nous avons exposé les notions sur les différentes sollicitations rencontrées en résistance des matériaux, principalement sur la flexion des poutres et plus particulièrement sur la flexion déviée. Deux exemples que l'on rencontre fréquemment dans la pratique ont été développés : une poutre à section droite rectangulaire chargée en dehors des axes principaux d'inertie et une poutre à ailes inégales pour lesquelles l'étude des contraintes et des déformations a été menée.

Une partie expérimentale est effectuée pour valider les résultats des exemples étudiés :

- L'étude d'une poutre sur deux appuis sous l'action d'une charge concentrée au milieu pour laquelle nous avons utilisé le banc d'essai du Laboratoire de RDM ;
- Et l'étude d'une poutre en porte-à-faux encastree à une extrémité et soumise à l'action d'une charge concentrée à l'autre extrémité pour laquelle un banc d'essai a été conçu avec les moyens dont nous disposons.

Dans cette partie nous avons étudié l'évolution de la flèche prise par la poutre sous l'action d'une charge variable.

Mots clés : sollicitations simples, flexion déviée, axes d'inertie, contraintes ; déformations.