

M1531.640^d

Université du 8 mai 1945 – Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



Mémoire de fin D'études
Pour l'obtention du diplôme de Master

Option : CPI

Présenté par : Boumaiza Bachir

=====

***Modélisation sous Comsol Multiphysics d'un
système de séchage***

=====

Sous la Direction de :

Dr. FRIHI D & Dr GHERIB S.

Année universitaire 2012/2013

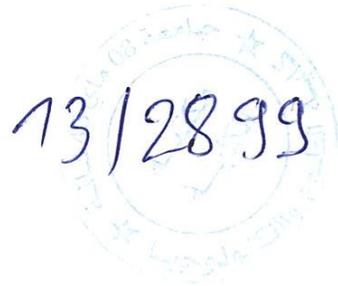
Remerciement

*Je remercie Dieu de m'avoir donné la force et le courage, ainsi que la volonté d'effectuer
mon Mémoire de fin D'études.*

*Je tien à exprimer toute ma reconnaissance a docteur FRIHI Djamel et Madame GHERIB
SAMIA qui sont dirigeant ce travaille avec intérêt et compétences, et sont conseilles moi tout
le long de cette période.*

*J'adresse aussi mes remerciements à tous ceux qui ont participé de près ou de loin à
l'accomplissement de ce mémoire.*

*J'exprime ma gratitude et mes remerciements à mes parents et toute ma famille pour leurs
encouragements.*





DEDICACE



Je dédie ce modeste travail :

A mon encadreur Dr : Frihi Djamel et madame Ghrib

A ma très chère Mère et à mon cher Père HOUCIN.

A mes sœurs menel , samira , hanan , abir.

A mes frères AHMED , SALIM , RABIE.

A toute la famille BOUMAIZA , SAID.

*A tous mes amis surtout: ABDOU , KHALED,
WALID, BILAL, EL-LOUZ, LARGOT, TING, LEZHAR,
AZOU, NASSAR, MEHDI, ELBANANI,
MOUHAMED, AYOUB, ALI.*

A TOUS MES AMIES.



BOUMAIZA
BACHIR

Résumé

Le logiciel Comsol, anciennement appelé FEMLab, est un logiciel avancé pour la modélisation et la simulation de phénomènes physiques comme l'électrostatique, l'écoulement de fluide ou l'échange de chaleur...etc. Ces phénomènes sont décrits par des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) résolus par élément finis. Ce logiciel inclut un éditeur CAO complet ainsi que des solveurs performants qui permettent de traiter des problèmes de taille importante tout en convergeant rapidement vers le résultat.

L'objectif principal de ce travail est la modélisation numérique sous Comsol Multiphysics d'un système de séchage (séchoir domestique). Lors de cette simulation, nous avons pu résoudre simultanément deux équations aux dérivées partielles qui sont l'équation de Navier Stokes qui traduit l'écoulement du fluide à l'intérieur du système ainsi que l'équation de la chaleur régissant l'échange thermique mis en jeu dans le séchoir.

L'exactitude des résultats trouvés (validés et comparés pour le cas de la plaque) ainsi que la rapidité de la résolution ont montré la nature puissante et flexible de Comsol pour la résolution des problèmes scientifiques et techniques, et qui peut être utilisé comme un outil pédagogique et de recherche dans la formation des universitaires.

Mots clés : transfert de chaleur, convection, conduction, température, flux de chaleur, comsol.

Sommaire

	Page
Introduction générale	1
Chapitre I : Equations aux dérivées partielles	
I-1 : définition	3
I-2 : Condition aux limites	4
I-3 : Résolution des équations aux dérivées partielles	5
I-3-1 : Méthode de séparation de variables	5
I-3-2 : Méthode Numériques	6
I-3-2-1 : Méthode des Différences finies	6
I-3-2-2 : Méthode des éléments finis	10
Chapitre II : Equations de base du transfert thermique et de la dynamique des fluides	
II.1 : Équations de conservation	17
II-1-1 : Conservation de la masse	17
II.1.2 : Conservation de la quantité de mouvement	17
II.1.3 : Conservation de l'énergie totale	18
II-2 : Equations de Navier Stokes	18
II-3 : Quelques bases sur les différents modes de transfert thermique	19
II-3-1 : Généralités sur les transferts de chaleur	19
II-3-2 : Formulation d'un problème de transfert de chaleur	21
II-3-2-1 : Transfert de chaleur par conduction	23
II-3-2-2 : Conduction en régime permanent	25
II-3-2-3 : Convection sans changement d'état	26
II-3-3-Rayonnement	32
Chapitre III : Application de comsol multiphysics à l'étude de Distribution de température dans une plaque	
III-1 : Introduction	33
III-2 : Code de calcul utilisé	33
III-2-1 Présentation générale de Comsol	33
III-2-2 : Utilisation de Comsol Multiphysics	34
III-2-3 : Etapes du processus de modélisation	35

III-3 : Modélisation et analyse	36
III-3-1 : Présentation d'un exemple pour validation	36
III-4 : Validation	47
Chapitre IV : Modélisation du système de séchage	
IV-1 : Introduction	48
IV-2 : demarche d'une analyse par la methode des elements finis	48
IV-3 : Position de problème	50
IV-3-1 : Les équations	50
IV-3-2 : Géométrie	50
IV-3-3 : Propriétés physiques	53
IV- 4 : Modélisation	53
IV-4-1 : Présentation du Modèle sur Comsol	53
IV-4-2 : Conditions initiales	55
IV-4-3 : Conditions aux limites	58
IV-5 : Maillage et résolution	59
IV-6-Résultats et analyses	60
IV-6-1 : Visualisation des résultats	60
IV-6-2 : Résultats et discussion	60
IV-6-3 : Effet de la vitesse d'entrée sur les paramètres recherchés	71
Conclusion générale	
	73
Références bibliographiques	
	75

Introduction générale

Dans les dernières décennies la modélisation et la simulation sont devenues des outils indispensables pour la conception, l'optimisation et la recherche. Une partie importante de ces tâches est l'étude de l'influence des différents paramètres qui décrivent un modèle d'un phénomène physique donné.

Comsol Multiphysics est un logiciel de modélisation par éléments finis qui est applicable à tous les domaines de l'ingénierie et de la science.

Il comprend des solutions de modélisations adaptées pour la mécanique des structures, génie chimique et électromagnétique... etc. Il facilite la modélisation de tous les phénomènes physiques basés sur les équations aux dérivées partielles, tels que le transfert de chaleur, l'analyse des contraintes, et l'écoulement du fluide.

Les équations du modèle, peuvent être appliquées sous une forme prête à l'emploi, ou peut être introduites librement pour décrire tout type de phénomène physique (linéaire, non-linéaire ou en fonction du temps). Il est utilisé principalement lorsque les calculs manuels ne peuvent être réalisés. C'est souvent le cas lorsque la géométrie ou le processus en question est très complexe. Lors de la résolution des équations aux dérivées partielles qui décrivent un modèle, Comsol applique la méthode des éléments finis (FEM)

Il fonctionne en conjonction avec un maillage adaptatif et le contrôle d'erreur ainsi qu'une variété de solveur numérique.

Comsol Multiphysics est utilisé dans la recherche, le développement et l'enseignement, dans les domaines tels que: Acoustique, Aéronautique, Biosciences, bio-ingénierie, les réactions chimiques, électromagnétique, sciences de l'environnement, la dynamique des fluides, piles à combustible, de la géophysique, de transfert de chaleur, Math / équations aux dérivées partielles appliquées, la mécanique des structures, des phénomènes de transport, propagation des ondes... etc.

L'objectif principal de ce travail est de reprendre la modélisation d'un séchoir domestique afin de visualiser le champ de vitesse et de température d'un fluide froid qui présente l'air s'échangeant de la chaleur avec des résistances électriques, qui émettent un flux de chaleur (Q_0).

Pour atteindre les objectifs préalablement fixés, nous avons partagé ce travail en quatre chapitres.

Introduction Générale

Le premier chapitre présente les équations aux dérivées partielles avec leurs méthodes de résolutions à savoir méthodes de séparation des variables, méthodes numériques... etc.

Dans le second chapitre nous ⁰un bref aperçu sur les équations de conservation et l'équation de base de mécanique de fluide (équation de Navier stokes) et nous le terminons par la présentation des équations de base de transfert de chaleur pour les trois modes d'échange thermique.

Sur le troisième chapitre nous présentons essentiellement, d'une part, le code de calcul utilisé dans notre travail de mémoire. D'autre part, nous exposons un exemple de calcul simple concernant un échange de chaleur par conduction stationnaire dans une plaque carré et cela avec un programme de calcul en Matlab pour validation.

L'aspect modélisation de l'étude est abordé au quatrième chapitre. Dans sa première partie nous présentons les étapes pour la démarche d'une analyse par la méthode des éléments finis. Par contre dans la deuxième partie nous présentons la modélisation du système de séchage, depuis la géométrie jusqu'à l'analyse des résultats.

En fin nous terminons ce travail par une conclusion générale présentant les principaux résultats tirés après cette modélisation.

CHAPITRE I
Equations aux dérivées
partielles

CHAPITRE I

Equations aux dérivées partielles

I-1-Définition :

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont omniprésentes dans toutes les sciences, puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures, mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation ou de l'électromagnétisme (Exemple: les équations de Maxwell). Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, la prévision météorologique, la démographie, ou les finances. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des EDP. Ce sont des équations indispensables pour la résolution de presque la totalité des problèmes dans ces domaines.

Nous pouvons citer par exemple:

1. l'équation de Schrödinger indispensable à la mécanique quantique.
2. l'équation d'advection qui décrit comment une quantité est transportée dans un courant (par exemple un polluant dans de l'eau).
3. l'équation de Black-Scholes utilisée en finances.
5. L'équation de Fourier ou équation de la chaleur qui décrit l'évolution de la température en

fonction du temps et de l'espace: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}$ Le nombre α est appelé diffusivité thermique du milieu.

Certaines de ces EDP ont été résolues analytiquement et leurs solutions sont connues. Toutefois, un nombre important d'autres existent sans solutions analytiques. C'est dans cette optique que les recherches se sont penchées sur les méthodes numériques pour arriver à approximer les solutions de ces équations.

En mathématiques, plus précisément en calcul différentiel, une équation aux dérivées partielles ou équation différentielle partielle (EDP) est une équation dont les solutions sont les fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles. C'est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante (u dans les cas suivants) des variables indépendantes $(x, y, \dots) \in \mathbb{R}^n$ et une ou plusieurs dérivées partielles qu'on peut écrire sous la forme:

$$F(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots) = 0 \quad (I-1)$$

I-2 : Condition aux limites :

1) Condition aux limites Dirichlet :

En mathématiques, une **condition aux limites de Dirichlet** est imposée à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les *valeurs* que la solution doit vérifier sur les frontières/limites du domaine.

- Pour une équation différentielle, par exemple : $y'' + y = 0$

La condition aux limites de Dirichlet sur l'intervalle $[a, b]$ s'exprime par :

$$y(a) = \alpha \text{ et } y(b) = \beta \quad \text{Où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux nombres donnés.}$$

Pour une équation aux dérivées partielles, par exemple : $\Delta y + y = 0$

Où Δ est le Laplacien (opérateur différentiel), la condition aux limites de Dirichlet sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'exprime par : $y(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$

Où f est une fonction connue définie sur la frontière $\partial\Omega$

Il existe d'autres conditions possibles. Par exemple la condition aux limites de Neumann, ou la condition aux limites de Robin, qui est une combinaison des conditions de Dirichlet et Neumann.

$$y(a) = \alpha \text{ et } y(b) = \beta$$

1) Condition aux limites Neumann :

En mathématiques, une **condition aux limites de Neumann** (nommée d'après Carl Neumann) est imposée à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs des dérivées que la solution doit vérifier sur les frontières/limites du domaine.

- Pour une équation différentielle, par exemple : $y'' + y = 0$

la condition aux limites de Neumann sur l'intervalle $[a, b]$ s'exprime par :

$$y'(a) = \alpha \text{ et } y'(b) = \beta$$

Où α et β sont deux nombres donnés.

Pour une équation aux dérivées partielles, par exemple : $\Delta y + y = 0$

Où Δ est le Laplacien (opérateur différentiel), la condition aux limites de Neumann sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'exprime par : $\frac{\partial y}{\partial \vec{n}}(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$

Où f est une fonction scalaire connue définie sur la limite $\partial\Omega$ et \vec{n} est le vecteur normal à la frontière $\partial\Omega$. La dérivée normale dans le membre de gauche de l'équation, est définie par :

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{n}}(x) = \overrightarrow{\text{grad}} y(x) \cdot \vec{n}(x)$$

Il existe d'autres conditions possibles. Par exemple la condition aux limites de Dirichlet, ou la condition aux limites de Robin, qui est une combinaison des conditions de Dirichlet et Neumann.

I-3 : Résolution des équations aux dérivées partielles :

I-3-1 : Méthode de séparation de variables :

Les méthodes de réduction de modèle sont basées sur des techniques de séparation de variables. En effet, la recherche du champ inconnu u est basée sur une technique de séparation de variables temps/espace. Il s'agit d'une problématique très ancienne : dès la seconde moitié du XVIIe siècle, le domaine mathématique de l'analyse numérique connut une avancée prodigieuse grâce aux travaux de Newton et de Leibniz en matière de calcul différentiel (les équations différentielles, les équations aux dérivées partielles,...). En 1797, Sylvestre-François Lacroix publie le "Traité du calcul différentiel et de calcul intégral" qui se veut une synthèse des travaux d'analyse du XVIIIe siècle avec un chapitre consacré à la séparation des variables dans les équations différentielles du premier ordre. La méthode de séparation des variables constitue l'une des méthodes de résolution des équations différentielles partielles et ordinaires, lorsque l'algèbre permet de réécrire l'équation, de sorte que chacune des deux variables apparaisse dans un membre distinct de l'équation. Pour le premier ordre, l'équation différentielle du premier degré s'écrit de la forme :

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{I-2}$$

Et le moyen de résoudre cette équation a été de chercher à séparer les variables, c'est à dire ramener l'équation (I-2) à la forme : $Xdx + Ydy = 0$

Où x (respectivement y) est une fonction dépendant uniquement de x (respectivement y).

Différents auteurs se sont intéressés à la mise en œuvre de ces techniques d'un point de vue

numérique pour construire des méthodes de réduction de modèles. Contrairement aux travaux antérieurs, il ne s'agit plus alors d'aboutir à une solution analytique. Nous la considérerons donc comme un outil mathématique de résolution des problèmes de dimensions élevées.

I-3-2 : Méthode Numériques

On aborde à partir de ce chapitre les méthodes de résolution des EDP. Celles-ci n'ont généralement pas de solutions exactes et on utilise donc des méthodes numériques. Les méthodes numériques s'intéressent à la recherche de valeurs de la fonction en des endroits particuliers. Autrement dit, on ne cherche pas l'écriture d'une fonction qui vérifie l'équation, mais par quelles valeurs passe la fonction en des abscisses particulières (c'est la méthode des différences finies), ou bien on recherche sur des éléments du domaine étudié l'écriture d'une fonction simple qui approxime au mieux la solution recherchée (c'est la méthode des éléments finis).

I-3-2-1 : Méthode des Différences finies :

➤ Principe de la méthode

Ce principe se décline en plusieurs étapes.

a - Le domaine étudié est maillé. On parle de **discrétisation du domaine**.

Exemple de maillage d'un domaine 1D. Ce maillage peut être régulier ou non, c'est-à-dire que le pas du maillage peut être constant ou non

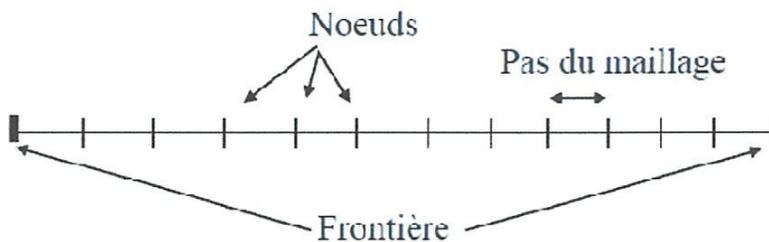


Figure I-1 : Exemple de maillage d'un domaine 2D (on n'en a représenté qu'une partie)

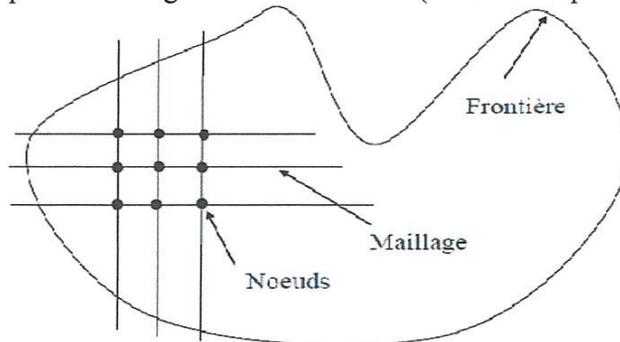


Figure I-2 : Méthode des différences finies recherche une solution aux nœuds du maillage.

b – On **discrétise également l'EDP**, c'est-à-dire qu'on va écrire en chaque nœud une approximation algébrique de l'équation d'origine.

c – On écrit autant d'équations algébriques qu'il y a de nœuds où on cherche une solution, ce qui conduit à **écrire un système d'équations**

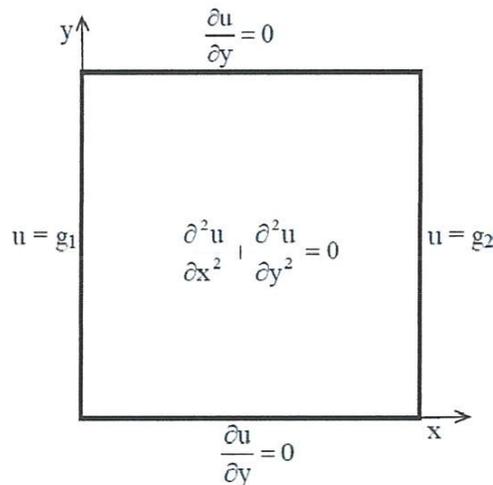
d – on **résout ce système d'équations**

Nous traiterons un exemple simple illustratif de cette méthode.

➤ **Cas d'une EDP elliptique (stationnaire)**

✚ **Cas de conditions de Neumann homogènes**

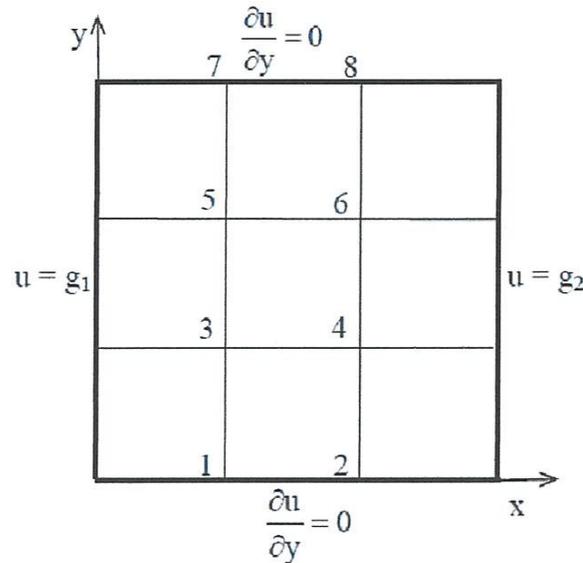
Le problème: un domaine carré, donc 2 dimensions d'espace, où on veut résoudre le problème suivant : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$



Les conditions limites sont de type Dirichlet à droite et à gauche, telles que décrites sur le schéma ci-contre, et de type Neumann homogène (c'est-à-dire nulle) en haut et en bas.

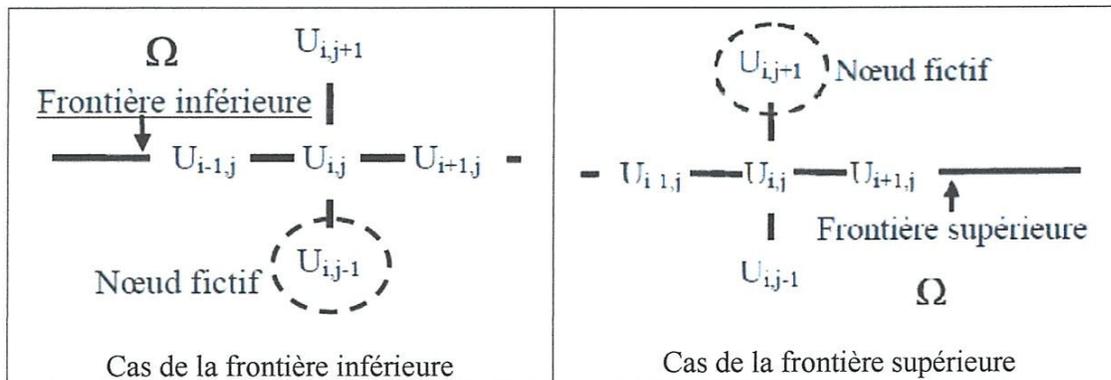
a – Discrétisation du domaine d'étude

Afin de limiter le nombre d'équations à écrire, on adopte le maillage suivant du dessin de droite. Les nœuds inconnus y sont numérotés de 1 à 8. S'il n'y a pas de problème pour les nœuds internes 3 à 6, on peut légitimement s'interroger sur les nœuds frontières 1, 2 et 7, 8. En effet, la valeur de la dérivée est connue en ces nœuds, mais en aucun cas la valeur de la fonction. Ce sont donc bien des nœuds inconnus.



b – Discrétisation de l'équation

On a exactement la même équation que précédemment ; elle peut être approximée par l'expression $U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1} - 4U_{i,j} = 0$ écrite au nœud inconnu $U_{i,j}$. Ceci introduit une difficulté aux nœuds frontières puisque cette discrétisation de l'équation introduit à chaque fois un nœud en dehors du domaine d'étude, qu'on appelle « nœud fictif ».



Pour éliminer les nœuds fictifs de la discrétisation, il suffit de prendre en compte la condition de flux sur la frontière en question. Prenons l'exemple du nœud n°1 et nommons le nœud fictif 3'.

La discrétisation de l'équation au nœud 1 donne $g_1 + u_{3'} - 4u_1 + u_2 + u_3 = 0$

La discrétisation centrée de la condition de flux au nœud 1 s'écrit : $\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_3 - u_{3'}}{2h} = 0$ ce

qui implique que $u_{3'} = u_3$

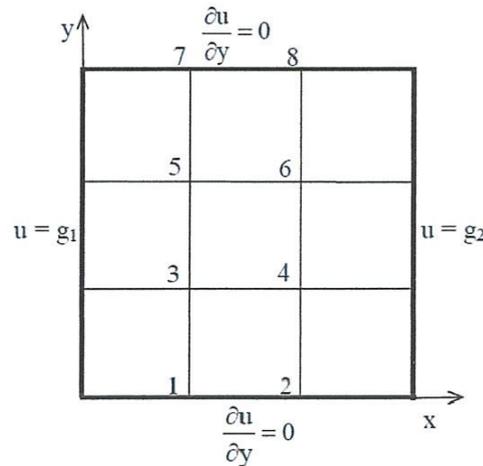
On remplace $u_{3'}$ dans la discrétisation de l'équation $g_1 + u_3 - 4u_1 + u_2 + u_3 = 0$

soit $g_1 - 4u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$ Ceci qui permet d'éliminer le noeud fictif de l'équation écrite au noeud 1. Remarquons que cette discrétisation vérifie simultanément l'équation et la condition limite.

On obtient donc 3 formes différentes de discrétisation selon la position du noeud :

$ \begin{array}{c} 1 \quad - \quad 4 \quad - \quad 1 \\ \\ 2 \end{array} $	$ \begin{array}{c} 1 \\ \\ 1 \quad - \quad 4 \quad - \quad 1 \\ \\ 1 \end{array} $	$ \begin{array}{c} 2 \\ \\ 1 \quad - \quad 4 \quad - \quad 1 \end{array} $
Nœuds frontière supérieure	Nœuds internes	Nœuds frontière inférieure

c – Ecriture du système d'équations



Nœud 1 : $g_1 - 4u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$

Nœud 2 : $g_2 - 4u_2 + u_1 + 2u_4 = 0$

Nœud 3 : $g_1 - 4u_3 + u_1 + u_4 + u_5 = 0$

Nœud 4 : $g_2 - 4u_4 + u_2 + u_3 + u_6 = 0$

Nœud 5 : $g_1 - 4u_5 + u_3 + u_6 + u_7 = 0$

Nœud 6 : $g_2 - 4u_6 + u_4 + u_5 + u_8 = 0$

Nœud 7 : $g_1 - 4u_7 + 2u_5 + u_8 = 0$

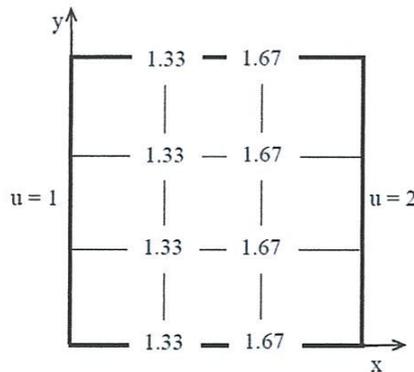
Nœud 8 : $g_2 - 4u_8 + 2u_6 + u_7 = 0$

La mise sous forme matricielle donne :

$$\begin{matrix}
 u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \\
 \begin{bmatrix}
 -4 & 1 & 2 & & & & & \\
 1 & -4 & & 2 & & & & \\
 1 & & -4 & 1 & 1 & & & \\
 & 1 & 1 & -4 & & 1 & & \\
 & & 1 & & -4 & 1 & 1 & \\
 & & & 1 & 1 & 4 & & 1 \\
 & & & & 2 & & -4 & 1 \\
 & & & & & 2 & 1 & -4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 u_4 \\
 u_5 \\
 u_6 \\
 u_7 \\
 u_8
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -\sigma_1 \\
 -\sigma_2 \\
 -\sigma_1 \\
 -\sigma_2 \\
 -\sigma_1 \\
 \sigma_2 \\
 -\sigma_1 \\
 -\sigma_2
 \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

d – Résolution du système d'équations

En prenant $g_1 = 1$ et $g_2 = 2$ dans un domaine carré de 1 mètre de côté, nous obtenons l'image suivante de la solution :



La solution dans cet exemple est un plan entre les valeurs 1 et 2 selon Ox. Ce qui vérifie parfaitement l'équation à résoudre (toutes les dérivées secondes sont nulles, donc leur somme est nulle) et les dérivées premières en y sont nulles.

I-3-2-2 : Méthode des éléments finis

➤ **Généralités :**

Les codes éléments finis font maintenant partie des outils couramment utilisés lors de la conception et à l'analyse des produits industriels. Les outils d'aide à la modélisation devenant de plus en plus perfectionnés, l'utilisation de la méthode des éléments finis s'est largement développée et peut sembler de moins en moins une affaire de spécialistes. Si l'utilisation de la méthode se démocratise de par la simplicité croissante de mise en œuvre, la fiabilité des algorithmes et la robustesse de la méthode, il reste néanmoins des questions essentielles auxquelles l'ingénieur devra répondre s'il veut effectuer une analyse par éléments finis dans de bonnes conditions :

- formaliser les non dits et les réflexions qui justifient les choix explicites ou implicites de son analyse du problème ;

- évaluer la confiance qu'il accorde aux résultats produits ;
- analyser les conséquences de ces résultats par rapport aux objectifs visés. L'objectif de cette partie est de présenter les principes de base de cette méthode en insistant sur l'enchaînement des tâches (démarche et hypothèses associées) qui assurent la cohérence du processus de calcul. Ces connaissances vous seront utiles pour maîtriser les deux principales difficultés de mise au point d'un modèle numérique :

- Problèmes préliminaires à la phase de calcul ;
- Problèmes liés à l'exploitation des résultats et le retour à la conception. Il ne faut pas perdre de vue que l'analyse des résultats nécessite une bonne compréhension des différentes étapes mathématiques utilisées lors de l'approximation, pour pouvoir estimer l'erreur du modèle numérique par rapport à la solution exacte du problème mathématique.

Sans oublier que le modèle numérique ne peut fournir que de résultats relatifs aux informations contenues dans le modèle mathématique qui découle des hypothèses de modélisation. Nous nous limiterons à la présentation de modèles élémentaires utilisés dans le cadre des théories linéaires. Bien que simples ces modèles permettent déjà de traiter un grand nombre d'applications liées aux problèmes de l'ingénieur. Du point de vue pédagogique, ils sont suffisamment complexes pour mettre en avant les difficultés de mise en oeuvre de la méthode. L'idée fondamentale de cette méthode est de discrétiser le problème en décomposant le domaine matériel à étudier en éléments de forme géométrique simple. Sur chacun de ces éléments il sera plus simple de définir une approximation nous permettant d'appliquer les méthodes présentées dans la première partie de ce cours. Il ne reste alors qu'à assembler les formes matricielles élémentaires pour obtenir les équations relatives à la structure à étudier. C'est sous cette forme pragmatique qu'elle est utilisée par les ingénieurs.

➤ Démarche éléments finis :

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis, qui sont détaillées par la suite, sont les suivantes :

- Discrétisation du milieu continu en sous domaines ;
- Construction de l'approximation nodale par sous domaine ;
- Calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème ;
- Assemblage des matrices élémentaires ;
- Prise en compte des conditions aux limites ;
- Résolution du système d'équations

➤ **Discrétisation géométrique :**

Cette opération consiste à procéder à un découpage du domaine continu en sous domaines:

$$D = \sum_{e=1}^{n_e} D_e \quad \text{tel que} \quad \lim_{e \rightarrow 0} (U_e D_e) = D$$

Il faut donc pouvoir représenter au mieux la géométrie souvent complexe du domaine étudié par des éléments de forme géométrique simple. Il ne doit y avoir ni recouvrement ni trou entre deux éléments ayant une frontière commune.

Lorsque la frontière du domaine est complexe, une erreur de discrétisation géométrique est inévitable. Cette erreur doit être estimée, et éventuellement réduite en modifiant la forme ou en diminuant la taille des éléments concernés comme proposé sur la figure 1. Sur chaque élément nous allons chercher à définir une approximation de la fonction solution.

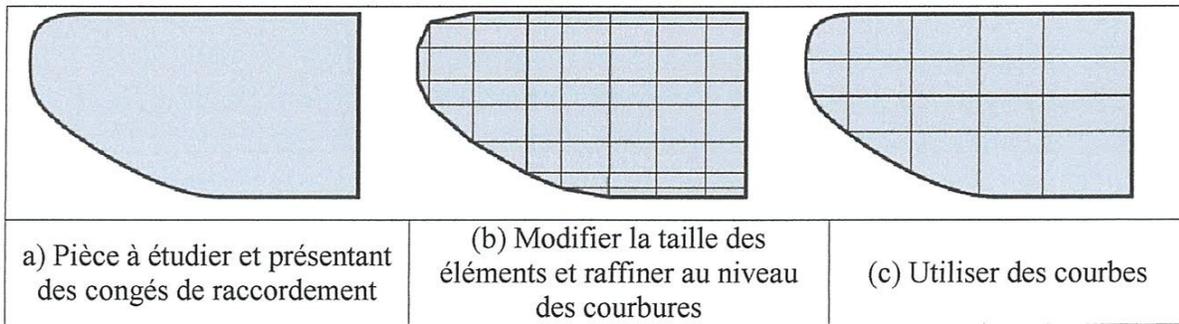


Figure I-3 : Erreur de discrétisation géométrique

➤ **Approximation nodale**

La méthode des éléments finis est basée sur la construction systématique d'une approximation u^* du champ des variables u par sous domaine. Cette approximation est construite sur les valeurs approchées du champ aux nœuds de l'élément considéré, on parle de représentation nodale de l'approximation ou plus simplement d'approximation nodale.

➤ **Définition de l'approximation nodale**

L'approximation par éléments finis est une approximation nodale par sous domaines ne faisant intervenir que les variables nodales du domaine élémentaire D_e :

$$\forall M \in D_e, u^*(M) = N(M)u_n$$

Où $u^*(M)$ représente la valeur de la fonction approchée en tout point M de l'élément et N , la matrice ligne des fonctions d'interpolation de l'élément u_n variables nodales relatives aux nœuds d'interpolation de l'élément.

Dans le cas général le champ à approcher est un champ vectoriel. Nous utilisons alors la notation matricielle suivante $u^*(M) = \mathbf{N}(M)\mathbf{u}_n$. Les nœuds M_i sont des points de l'élément pour lesquels on choisit d'identifier l'approximation u^* à la valeur du champ de variables u .

Nous en déduisons que : $\forall M_i, u^*(M_i) = u_i$

Soit pour l'approximation nodale : $\forall M_i, N_j(M_i) = \delta_{ij}$

➤ Utilisation d'un logiciel éléments finis

Un programme général de type industriel doit être capable de résoudre des problèmes variés de grandes tailles (de mille à quelques centaines de milliers de variables). Ces programmes complexes nécessitent un travail d'approche non négligeable avant d'espérer pouvoir traiter un problème réel de façon correcte. Citons à titre d'exemple quelques noms de logiciels : NASTRAN, ANSYS, ADINA, ABAQUS, CASTEM 2000, CESAR, COMSOL, SAMCEF, etc. Les possibilités offertes par de tels programmes sont nombreuses :

- Analyse linéaire ou non d'un système physique continu
- Analyse statique ou dynamique
- Prise en compte de lois de comportement complexes
- Prise en compte de phénomènes divers (élasticité, thermiques, électromagnétiques, de plasticité, d'écoulement...) pouvant être couplés
- Problèmes d'optimisation, etc.

L'utilisation de tels programmes nécessite une formation de base minimale.

➤ Déroulement d'une étude :

Pour réaliser une étude par éléments finis, il faut que les objectifs de l'étude soient bien définis 4. Le cadre de l'étude, c'est-à-dire le temps et les moyens disponibles, doit être compatible avec les objectifs et la précision cherchée. Supposons toutes ces conditions remplies, l'étude proprement dite est organisée de façon logique selon les étapes suivantes :

➤ Analyse du problème

Cette analyse doit fixer les paramètres du calcul et conduire à la réalisation d'un maillage. Cette phase basée sur l'expérience personnelle acquise dépend de nombreuses considérations. La difficulté essentielle est de trouver un bon compromis entre les paramètres propres au problème et ceux relatifs à l'environnement de travail. L'analyse du problème nous conduit à préciser un certain nombre d'hypothèses, et à effectuer des choix qui conditionnent les résultats.

➤ **Choix du modèle**

En calcul des structures, les plus classiques sont de type : poutre, élasticité plane, axisymétrique, coques mince ou épaisse, tridimensionnel. À ces modèles mathématiques correspondent des familles d'éléments finis.

➤ **Choix du type d'éléments**

Il est fonction de la précision voulue, de la nature du problème, mais aussi du temps disponible. On choisira les éléments les mieux adaptés dans les familles disponibles.

➤ **Choix du maillage**

Il dépend essentiellement de la géométrie, des sollicitations extérieures, des conditions aux limites à imposer, mais aussi des informations recherchées : locales ou globales. Sans oublier bien entendu le type d'outils dont on dispose pour réaliser ce maillage.

➤ **Création et vérification des données**

Cette étape dépend du logiciel utilisé. La syntaxe utilisée pour définir le jeu de données est définie dans le mode d'emploi du bloc fonctionnel correspondant. En sortie, un fichier est créé, qui contient toutes les informations nécessaires à l'exécution des calculs. Les vérifications relatives au jeu de données se font généralement graphiquement, grâce à un module informatique appelé préprocesseur. Différents contrôles peuvent être utilisés pour valider le jeu de données :

- Vérification de la géométrie de la pièce et du maillage;
- Vérification des propriétés physiques utilisées.

Pour des problèmes spécifiques, d'autres contrôles seront envisagés. L'objectif d'éviter de faire tourner un calcul inutilement. Ceci d'autant plus que la recherche d'une solution acceptable pour un problème donné est rarement le résultat d'un seul calcul.

➤ **Exécution du calcul**

Ce bloc, le plus coûteux en temps machine est souvent exécuté en tâche de fond. Un fichier de résultats permet de vérifier que les différentes phases de calculs se sont correctement déroulées :

- Interprétation des données, vérification des paramètres manquants
- Construction des matrices, espace utile pour les gros problèmes
- Singularité de la matrice, problème de conditions aux limites ou de définition des éléments
- Convergence, nombre d'itérations, etc.

Ce fichier peut contenir aussi les résultats du calcul (Déplacements, Températures, Contraintes, Flux...) ce qui lui confère dans ce cas un volume généralement très important. Il peut arriver que le calcul échoue.

➤ **Exploitation des résultats**

Les résultats obtenus et les conclusions relatives aux phénomènes à étudier devront être présentés de façon synthétique : tableaux, courbes, visualisation. Cela justifie largement l'utilisation d'un post-processeur, qui propose des outils pour sélectionner les informations que l'on veut étudier. Attention, lors de l'utilisation de ces outils, il faut savoir ce que cache l'information qui vous est proposée graphiquement, sachant que celle-ci est construite à partir de résultats discrets :

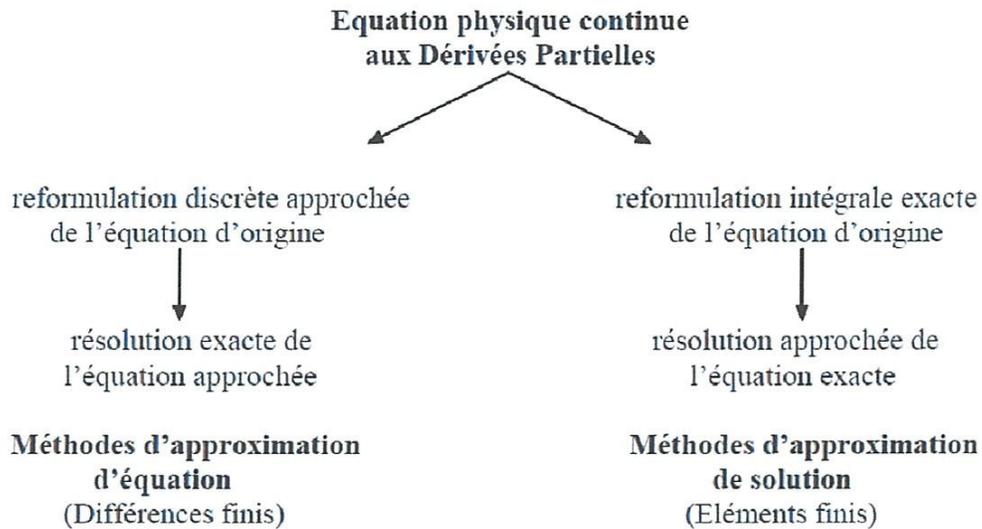
- Valeur moyenne sur un élément : comment est-elle définie ?
- Valeur maximale sur l'élément : comment est-elle calculée ?
- Valeurs aux nœuds (écarts entre les éléments) : à quoi correspondent-elles ?
- Les courbes d'iso-contraintes ont-elles une signification ? etc.

Différentes vérifications doivent être effectuées pour valider les résultats. Elles poussent, dans la plupart des cas, à remettre en cause le modèle pour en créer un nouveau, dont on espère qu'il améliorera la solution précédente. Pour valider une solution, il faut procéder dans l'ordre, en estimant dans un premier temps la précision du modèle. Puis lorsque celle-ci est jugée suffisante, nous procédons à sa validation. Les indicateurs sur la précision du modèle sont généralement locaux. Ils concernent des informations élémentaires calculées aux nœuds ou aux points d'intégration, ces informations sont très souvent fournies en valeur moyenne sur l'élément.

La comparaison des résultats des différents modèles permet d'améliorer puis de valider un modèle *final*. Une fois la fiabilité du modèle assurée, on peut conclure sur l'adéquation entre la géométrie et le cahier des charges. La synthèse de ces calculs préliminaires est indispensable car elle vous permet de justifier et de définir les limites du (des) modèle(s) retenu(s).

➤ Comparaison Différences finies – Eléments finis

Le schéma ci-dessous compare les 2 méthodes en termes de démarche. La méthode des différences finies cherche à résoudre exactement une équation approchée, alors que la méthode des éléments finis cherche une solution approchée à une équation exacte.



CHAPITRE II

**Equations de base du transfert
thermique et de la dynamique des
fluides**

CHAPITRE II

Equations de base du transfert thermique et de la dynamique des fluides

II.1 : Équations de conservation :

Le mouvement d'un fluide est décrit par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

II.1.1 : Conservation de la masse :

Considérons tout d'abord la conservation de la masse sous forme intégrale. Pour cela, on choisit un volume arbitraire fixe de frontière δ et \mathbf{n} , la normale sortante à la frontière. On a alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = - \int_{\delta\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\delta\Omega \quad (\text{II-1})$$

Vitesse de variation de la
masse à l'intérieur de Ω

Flux de masse entrant par la
frontière $\delta\Omega$

où ρ est la masse volumique du fluide et \mathbf{u} sa vitesse. En faisant rentrer la dérivée en temps sous le signe intégral (II-1) dans le terme de gauche et en utilisant le théorème de la divergence sur le terme de droite, on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\text{div} \rho \mathbf{u}) d\Omega = 0 \quad (\text{II-2})$$

Finalement, en utilisant le théorème de localisation, vu que Ω est un volume arbitraire, on en déduit : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{u} = 0$ (II-3)

Ceci est l'équation de conservation de la masse encore appelée équation de continuité.

II.1.2 : Conservation de la quantité de mouvement :

Sous forme intégrale :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} d\Omega = - \int_{\delta\Omega} \rho (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \mathbf{n} d\delta\Omega$$

Vitesse de variation de la
quantité de mouvement à
l'intérieur de Ω

Flux de quantité de mouvement
par le fluide à la frontière
entrant dû au transport δ

$$+ \int_{\delta\Omega} \sigma \mathbf{n} d\delta\Omega + \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} d\Omega \quad (\text{II-4})$$

Flux de quantité de mouvement
entrant dû aux interactions
moléculaires à la frontière $\delta\Omega$

Force volumique exercée par
la gravité sur le fluide

Où σ est le tenseur des contraintes et ρg la force par unité de volume due à la gravité. En utilisant les théorèmes de la divergence et de localisation comme précédemment, on obtient :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = -\text{div} \rho(u \otimes u) + \text{div} \sigma + \rho g \quad (\text{II-5})$$

Ceci est l'équation de conservation de la quantité de mouvement et traduit le bilan des forces par unité de volume.

En prenant le produit scalaire du bilan des forces par le vecteur vitesse, on obtient le bilan d'énergie cinétique :

$$\frac{\partial \frac{1}{2} \rho u^2}{\partial t} = -\text{div} \frac{1}{2} \rho u^2 u + \text{div} \sigma \cdot u + \rho g \cdot u \quad (\text{II-6})$$

Cette équation n'apporte pas d'information supplémentaire par rapport à (II-5) mais est utile car c'est un bilan de puissance (travail des différentes forces par unité de temps) par unité de volume. Il permet également de dériver des formes alternatives des bilans d'énergie.

II.1.3 : Conservation de l'énergie totale :

Sous forme intégrale :

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e}_{\text{Vitesse de variation de l'énergie totale à l'intérieur de } \Omega} = & \underbrace{- \int_{\delta\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right) u \cdot n d\delta\Omega}_{\text{Flux d'énergie totale entrant dû au transport par le fluide à la frontière } \delta\Omega} = \underbrace{- \int_{\delta\Omega} q \cdot n d\delta\Omega}_{\text{Flux d'énergie entrant dû aux interactions moléculaires à la frontière } \delta\Omega} \\ & - \underbrace{\int_{\delta\Omega} \sigma u \cdot n d\delta\Omega}_{\text{Flux d'énergie dû au travail du tenseur des contraintes à la frontière } \delta} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho g \cdot u d\Omega}_{\text{Puissance dû au travail exercé par la gravité sur le fluide}} \end{aligned} \quad (\text{II-7})$$

Où e est l'énergie interne par unité de masse du fluide et q le flux de chaleur dû à la conduction thermique. En utilisant les théorèmes de divergence et de localisation comme précédemment, on

$$\text{obtient : } \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right)}{\partial t} = -\text{div} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right) u - \text{div} q + \text{div} \sigma u + \rho g \cdot u \quad (\text{II-8})$$

qui est l'expression locale (par unité de volume et par unité de temps) de la conservation de l'énergie totale. En soustrayant le bilan d'énergie cinétique et en supposant le tenseur des contraintes symétriques, on peut obtenir le bilan d'énergie interne (qui n'est plus une équation de conservation) :

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} = -\text{div} \rho e u - \text{div} q + \sigma : \nabla u \quad (\text{II-9})$$

II-2 : Equations de Navier Stokes :

Les équations du mouvement pour un élément de fluide sont données par les équations Navier Stokes

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = \rho \cdot f - \nabla p + \nabla(\mu \nabla v) \quad (\text{II-10})$$

Où: μ est la viscosité du fluide, le dernier terme représente l'effet des forces visqueuses.

V : vitesse (m/s)

p : Pression [Pa]

∇ : Nabla

f : la force de volume exercée sur l'élément du fluide

ρ : Densité

Le frottement interne, dû à la nature visqueuse du fluide se manifeste seulement quand une région de fluide se déplace relativement à une autre. Des couches mobiles plus rapides entraînent en mouvements les plus lents de sorte que la force soit transférée à partir du plus rapide aux couches plus lentes. De tels fluides s'appellent les fluides Newtonien. Le vecteur f représente la force de volume exercée sur l'élément du fluide. La pesanteur est un exemple d'une force de volume. L'effet de pesanteur est de grande importance dans la convection normale qui est conduite par la différence de densité de flottabilité et empêchée par l'inertie visqueuse du fluide. La viscosité absorbe l'énergie cinétique tandis que la force de flottabilité libère l'énergie interne.

$$f = -g\rho\beta_T(T - T_0) \quad (\text{II-11})$$

Où: T_0 se rapporte à une température de référence, g est la constante de la gravité.

T : température

ρ : Densité

L'équation ci-dessus, s'appelle l'approximation de Boussinesq. L'approximation de Boussinesq signifie qu'on assume que la densité du fluide est constante, excepté dans le terme de buoyancé dans l'équation de Navier-Stokes (variation au moins de 1% dans tout le fluide).

II-3 : Quelques bases sur les différents modes de transfert thermique

II-3-1 : Généralités sur les transferts de chaleur

II-3-1-1-Introduction

La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre.

La thermique (ou thermocinétique) se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final.

II-3-1-2- Définitions

a- Champ de température

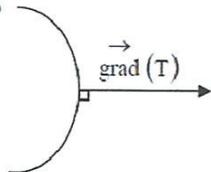
Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température : $T = f(x,y,z,t)$. La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou instationnaire.

b- Gradient de température

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température :

Isotherme T_0



The diagram shows a curved line representing an isotherm labeled 'Isotherme T0'. A small square is drawn at a point on this curve, with a horizontal arrow pointing to the right from its center. This arrow is labeled 'grad (T)'. The arrow is perpendicular to the curve at that point, representing the direction of the temperature gradient.

$$\vec{\text{grad}}(T) = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{II-12})$$

Avec .

\vec{n} : Vecteur unitaire de la normale

$\frac{\partial T}{\partial n}$: Dérivée de la température le long de la normale.

c- Flux de chaleur

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température par conduction des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur :

$$\varnothing = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} \quad (\text{Wm}^{-2}) \quad (\text{II-13})$$

où S est l'aire de la surface (m^2).

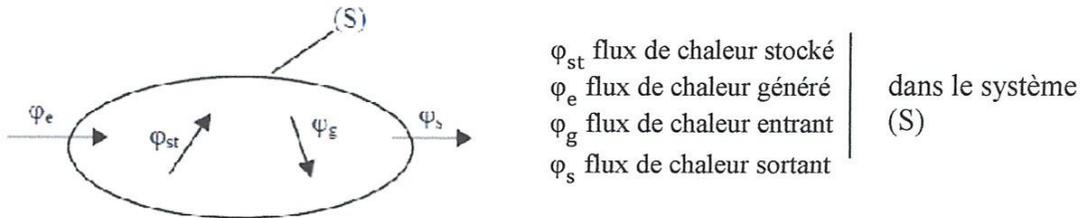
On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps:

$$\varphi = \frac{dQ}{dt} \quad (W) \quad (II-14)$$

II-3-2 : Formulation d'un problème de transfert de chaleur

➤ **Bilan d'énergie**

Il faut tout d'abord définir un système (S) par ses limites dans l'espace et il faut ensuite établir l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système et qui peuvent être:



On applique alors le 1^{er} principe de la thermodynamique pour établir le bilan d'énergie du système (S)

$$\varphi_e + \varphi_g = \varphi_s + \varphi_{st} \quad (W) \quad (II-15)$$

➤ **Expression des flux d'énergie**

Il faut maintenant établir les expressions des différents flux d'énergie. En reportant ces expressions dans le bilan d'énergie, nous obtiendrons l'équation différentielle dont la résolution permettra de connaître l'évolution de la température en chaque point du système.

• **Conduction**

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres.

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (II-16)$$

Ou sous forme algébrique : $\varphi = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial X} \quad (W) \quad (II-17)$

CHAPITRE II

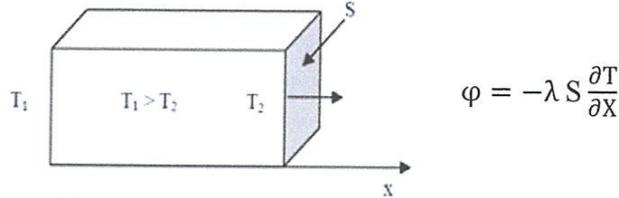
Avec :

ϕ : Flux de chaleur transmis par conduction (W)

λ : Conductivité thermique du milieu ($\text{Wm}^{-1}\text{°C}^{-1}$)

x : Variable d'espace dans la direction du flux (m)

S : Aire de la section de passage du flux de chaleur (m^2)

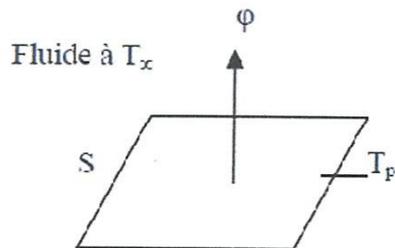


On trouvera dans le tableau ci-après les valeurs de la conductivité thermique λ de certains matériaux parmi les plus courants.

Matériau	λ ($\text{W m}^{-1}\text{°C}^{-1}$)	Matériau	λ ($\text{W m}^{-1}\text{°C}^{-1}$)
Argent	419	Plâtre	0.48
Cuivre	386	Amiante	0.16
Aluminium	204	Coton	0.059
Acier doux	45	Liège	0.044-0.049
Acier inox	14.9	Laine de roche	0.038-0.041
Glace	1.88	Laine de verre	0.035-0.051
Béton	1.4	Polystyrène expansé	0.036-0.047
Bois (feuillu-résineux)	0.12-0.23	Polyuréthane (mousse)	0.030-0.045
Brique terre cuite	1.1	Polystyrène extrudé	0.027
Verre	0.78	Air	0.026

• Convection

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide. Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de NEWTON :



$$\phi = h S (T_p - T_\infty) \quad (\text{W}) \quad (\text{II-18})$$

Avec :

ϕ Flux de chaleur transmis par convection (W)

h Coefficient de transfert de chaleur par convection ($\text{Wm}^{-2}\text{°C}^{-1}$)

T_p Température de surface du solide (°C)

T_∞ Température du fluide loin de la surface du solide (°C)

S Aire de la surface de contact solide/fluide (m^2)

Remarque : La valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection h est fonction de la nature du fluide, de sa température, de sa vitesse et des caractéristiques géométriques de la surface de contact solide/fluide.

- **Stockage d'énergie**

Le stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps d'où (à pression constante) :

$$\varphi_{st} = \rho V c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (W) \quad (II-19)$$

Avec : φ_{st} Flux de chaleur stocké (W)

ρ Masse volumique (kg m^{-3})

V Volume (m^3)

c Chaleur massique ($\text{J kg}^{-1}\text{°C}^{-1}$)

T Température (°C)

t Temps (s)

ρ , V et c sont supposés constants, le produit $\rho V c$ est appelé la **capacitance thermique** du corps.

- **Génération d'énergie**

Elle intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique. Nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$\varphi_g = \dot{q} V \quad (W) \quad (II-20)$$

Avec :

φ_g Flux d'énergie thermique générée (W)

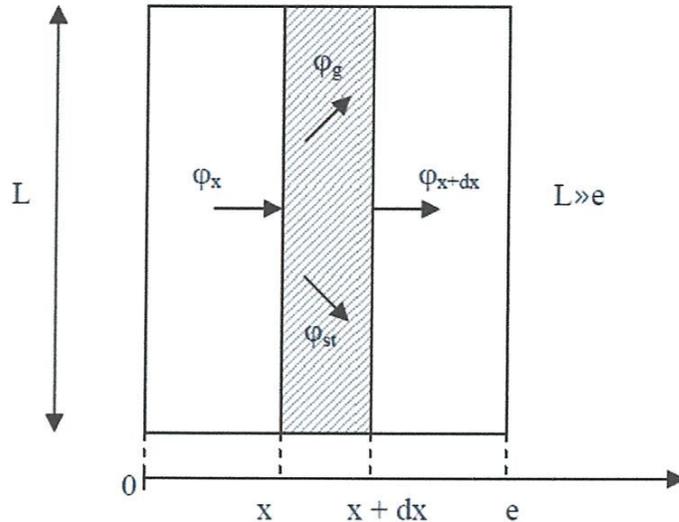
\dot{q} Densité volumique d'énergie générée (W m^{-3})

V Volume (m^3)

II-3-2-1 : Transfert de chaleur par conduction

II-3-2-1-L'équation de la chaleur

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan :



Considérons un système d'épaisseur dx dans la direction x et de section d'aire S normalement à la direction Ox . Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\varphi_x + \varphi_g = \varphi_{x+dx} + \varphi_{st} \quad (\text{II-21})$$

Avec :

$$\varphi_x = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x \quad (\text{II-22})$$

$$\varphi_g = \dot{q} S dx \quad (\text{II-23})$$

$$\varphi_{x+dx} = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} \quad (\text{II-24})$$

$$\varphi_{st} = \rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II-25})$$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par dx nous obtenons :

$$\frac{(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x})_{x+dx} - (\lambda S \frac{\partial T}{\partial x})_x}{dx} + \dot{q} S = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II-26})$$

$$\text{Soit : } \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} S = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II-27})$$

Et dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II-28})$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

a) Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$

b) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : $\dot{q} = 0$

c) Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de T .

Les hypothèses a) + b) + c) permettent d'écrire :

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{d\lambda}{dT} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II-29})$$

d) Si de plus λ est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de

Poisson :
$$a \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II-30})$$

Le rapport $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ est appelé la **diffusivité thermique**.

e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace : $\nabla^2 T = 0$

Par ailleurs, les hypothèses a), c) et d) permettent d'écrire :

- Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II-31})$$

- Equation de la chaleur en coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{q}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II-32})$$

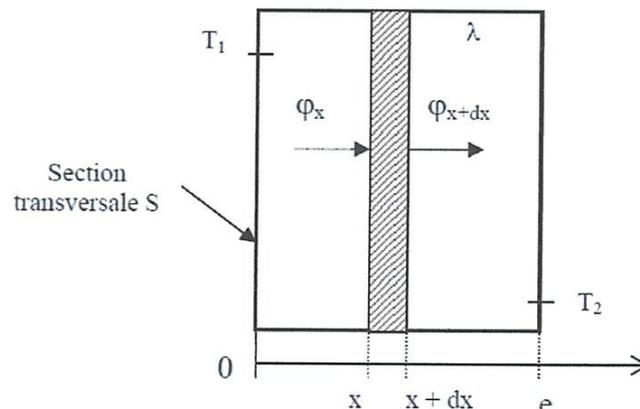
II-3-2-2 Conduction en régime permanent

II-3-2-2-1 : Transfert unidirectionnel

➤ Mur simple

On se placera dans le cas où l'écoulement est unidirectionnel et qu'il n'y a pas de génération ni de stockage d'énergie.

On considère un mur d'épaisseur e , de conductivité thermique λ , et de grandes dimensions transversales dont les faces extrêmes sont à des températures T_1 et T_2 :



En effectuant un bilan thermique sur le système (S) constitué par la tranche de mur comprise entre les abscisses x et $x + dx$ il vient :

$$\phi_x = \phi_{x+dx} \Rightarrow -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_x = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} \quad (\text{II-33})$$

D'où $\frac{dT}{dx} = A$ et $T = Ax + B$

Avec les conditions aux limites : $T(x=0)=T_1$ et $T(x=e)=T_2$

$$D'où : T = T_1 - \frac{x}{e}(T_1 - T_2) \quad (^\circ\text{C}) \quad (\text{II-34})$$

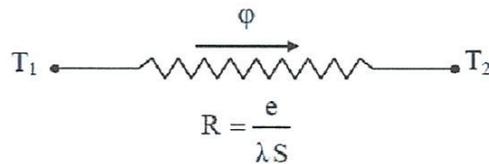
Le profil de température est donc linéaire. La densité de flux de chaleur traversant le mur s'en déduit par la relation : $\phi = -\lambda \frac{dT}{dx}$, d'où

$$(\text{II-35})$$

$$\phi = \frac{\lambda(T_1 - T_2)}{e} \quad (\text{wm}^{-2}) \quad (\text{II-36})$$

La relation (II-36) peut également se mettre sous la forme : $\phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{\lambda S}}$, cette relation est

analogue à la loi d'Ohm en électricité qui définit l'intensité du courant comme le rapport de la différence de potentiel électrique sur la résistance électrique. La température apparaît ainsi comme un potentiel thermique et le terme $\frac{e}{\lambda S}$ apparaît comme la résistance thermique d'un mur plan d'épaisseur e , de conductivité thermique λ et de surface latérale S , on a donc le schéma équivalent suivant :



II-3-2-3 : Convection sans changement d'état

➤ Généralités. Définitions

Les transferts de chaleur qui s'effectuent simultanément avec des transferts de masse sont dits transferts de chaleur par convection. Ce mode d'échange de chaleur existe au sein des milieux fluides dans lesquels il est généralement prépondérant.

II-3-2-3-1 Convection naturelle et forcée

Selon la nature du mécanisme qui provoque le mouvement du fluide on distingue :

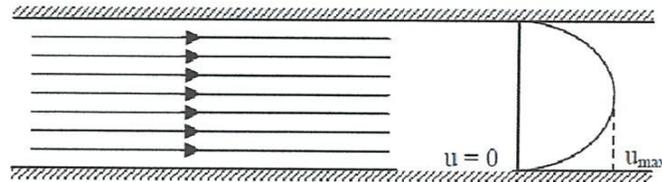
- **La convection libre ou naturelle** : le fluide est mis en mouvement sous le seul effet des différences de masse volumique résultant des différences de températures sur les frontières et d'un champ de forces extérieures (la pesanteur).
- **La convection forcée** : le mouvement du fluide est induit par une cause indépendante des différences de température (pompe, ventilateur...).

L'étude du transfert de chaleur par convection permet de déterminer les échanges de chaleur se produisant entre un fluide et une paroi.

II-3-2-3-2 : Régime d'écoulement

Compte-tenu du lien entre le transfert de masse et le transfert de chaleur, il est nécessaire de considérer le régime d'écoulement. Considérons à titre d'exemple l'écoulement d'un fluide dans une conduite :

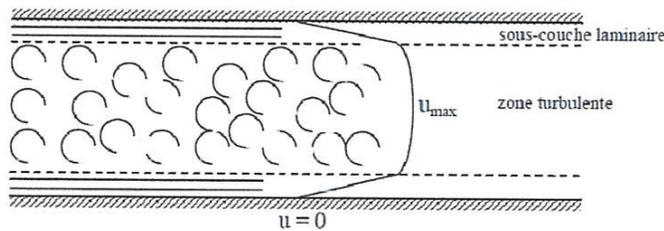
- **En régime laminaire**, l'écoulement s'effectue par couches pratiquement indépendantes. :



Entre deux filets fluides adjacents les échanges de chaleur s'effectuent donc :

- Par conduction uniquement si l'on considère une direction normale aux filets fluides.
- Par convection et conduction (négligeable) si l'on considère une direction non normale aux filets fluides.

- **En régime turbulent**, l'écoulement n'est pas unidirectionnel :



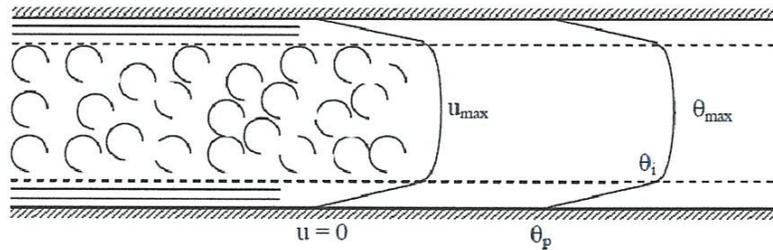
L'échange de chaleur dans la zone turbulente s'effectue par convection et conduction dans toutes les directions. On vérifie que la conduction est généralement négligeable par rapport à la convection.

II-3-2-3-3 : Expression du flux de chaleur

➤ Analogie de Reynolds

De même qu'au niveau moléculaire on explique la viscosité des gaz par la transmission des quantités de mouvement des molécules lors des chocs intermoléculaires, on explique la transmission de la chaleur par la transmission d'énergie cinétique lors de ces mêmes chocs.

Cette liaison intime des phénomènes de viscosité et de transfert de chaleur conduisent à l'analogie de Reynolds : dans un écoulement fluide avec transfert de chaleur dans un tube, le profil des vitesses et le profil des températures sont liés par une relation de similitude :



➤ **Couches limites dynamiques et thermiques**

Quelque soit le régime d'écoulement, il demeure une sous-couche laminaire (couche limite dynamique) dont l'épaisseur est d'autant plus réduite que le nombre de Reynolds est grand. L'épaisseur de cette couche limite varie en fonction de nombreux paramètres : nature du fluide, température, rugosité de la paroi...

L'analogie de Reynolds montre que le gradient thermique est particulièrement important au voisinage de la paroi, c'est à dire dans la sous-couche laminaire. Quelque soit le régime d'écoulement du fluide, on considère que la résistance thermique est entièrement située dans le film laminaire qui joue le rôle d'isolant thermique (couche limite thermique).

➤ **Expression du flux de chaleur**

On considère que cette résistance thermique R est équivalente à celle que le flux de chaleur rencontrerait en conduction à travers une paroi dont l'épaisseur serait celle du film laminaire et qui posséderait les mêmes caractéristiques thermiques que le fluide soit : $R = \frac{e}{\lambda}$ (II-37)

avec : e : épaisseur du film laminaire
 λ : conductivité thermique du fluide

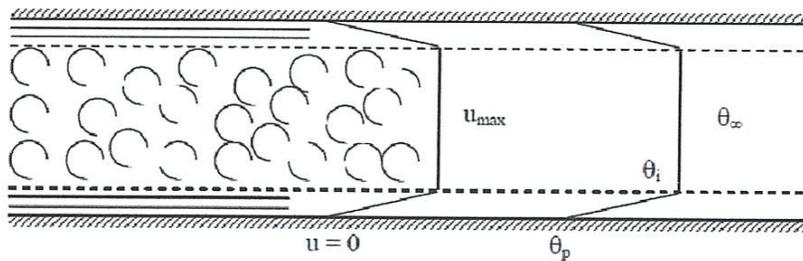
Rigoureusement, le flux de chaleur par unité de surface s'écrit alors :

$$\phi = \frac{\lambda}{e} (\theta_p - \theta_i) \quad (\text{II-38}) \quad \text{Ou } \theta_i \text{ est la température à la limite du film laminaire.}$$

Pour un régime thermique bien établi, on peut considérer en première approximation que par suite des courants de convection la masse fluide au-delà du film laminaire est à une température constante et prendre comme loi de la densité de flux de chaleur la relation :

$$\phi = \frac{\lambda}{e} (\theta_p - \theta_\infty) \quad (\text{wm}^{-2}) \quad (\text{II-39})$$

Avec : θ_∞ : Température du fluide loin de la paroi ($^{\circ}\text{C}$) qui correspond au modèle de Prandtl représenté ci-après à titre d'exemple pour l'écoulement d'un fluide dans une conduite:



θ_{∞} , qui est la température moyenne du fluide dans une section perpendiculaire à l'écoulement dans le cas de la circulation d'un fluide dans une canalisation, dépend du régime d'écoulement. Dans le cas d'un échange paroi fluide, on prendra pour θ_{∞} la température du fluide loin de la paroi.

➤ **Loi de Newton. Valeur du coefficient de transfert**

Cette loi simple présente néanmoins une énorme difficulté dans son application puisque l'on ne connaît pas l'épaisseur e du film laminaire. C'est ce qui amène à définir un coefficient de transfert superficiel ou coefficient de transfert de chaleur par convection par :

$$h = \frac{\lambda}{e} \quad (\text{wm}^{-2}\text{C}^{-1}) \quad (\text{II-40})$$

Quelque soit le type de convection (libre ou forcée) et quelque soit le régime d'écoulement du fluide (laminaire ou turbulent), le flux de chaleur φ est donné par la relation dite loi de newton : $\varphi = h S \Delta\theta$ (W) (II-41)

Le problème majeur à résoudre avant le calcul du flux de chaleur consiste à déterminer h qui dépend d'un nombre important de paramètres : caractéristiques du fluide, de l'écoulement, de la température, de la forme de la surface d'échange,...

On trouvera dans le tableau ci-après l'ordre de grandeur du coefficient de transfert de chaleur par convection pour différentes configurations.

Configuration	$h(\text{wm}^{-2}\text{C}^{-1})$
Convection naturelle	
Plaque verticale de hauteur 0,3 m dans l'air	4,5
Cylindre horizontal de diamètre 5 cm dans l'air	6,5
Cylindre horizontal de diamètre 2 cm dans l'eau	890
Convection forcée	
Courant d'air à 2 m/s sur une plaque carrée de 2 m de côté	12
Courant d'air à 35 m/s sur une plaque carrée de 0,75 m de côté	75
Eau à 0,5 kg/s dans un tube de diamètre 2,5 cm	3500
Courant d'air à 50 m/s perpendiculaire à un tube de diamètre 5 cm	180
Ebullition de l'eau	
Dans un récipient	2500-35000
En écoulement dans un tube	5000-100000
Condensation de l'eau sous 1 atm	
Sur une surface verticale	1000-11000
A l'extérieur de tubes horizontaux	10000-25000

II-3-2-3-4 : Calcul du flux de chaleur en convection forcée

L'application de l'analyse dimensionnelle montre que la relation liant le flux de chaleur transféré par convection aux variables dont il dépend peut être recherchée sous la forme d'une relation entre trois nombres adimensionnels : $Nu=f(Re,Pr)$ (II-42)

Définis par : $Nu = \frac{hD}{\lambda}$ Nombre de Nusselt (II-43)

$Re = \frac{\rho u D}{\mu}$ Nombre de Reynolds (II-44)

$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$ Nombre de Prandtl (II-45)

Le calcul d'un flux de chaleur transmis par convection forcée s'effectue donc de la manière suivante :

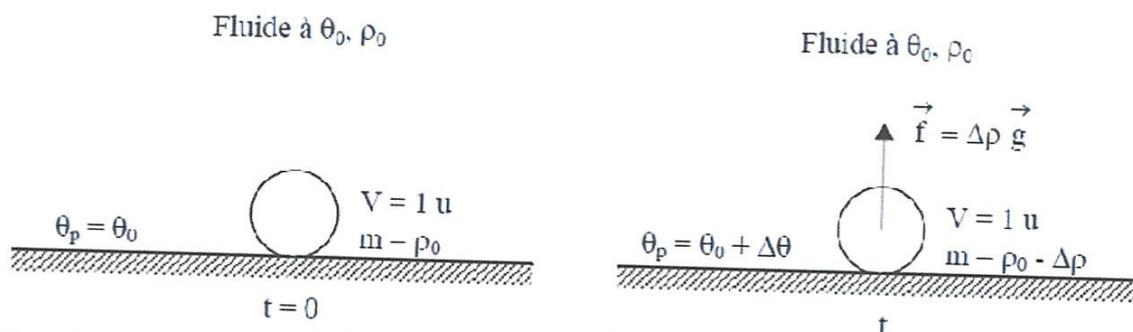
1. Calcul des nombres adimensionnels de Reynolds et de Prandtl.
2. Suivant la valeur de Re et la configuration → choix de la corrélation.
3. Calcul de Nu par application de cette corrélation.

4. Calcul de $h = \frac{\lambda Nu}{D}$ et de $\varphi = h S (\theta_p - \theta_\infty)$ (II-46)

II-3-2-3-5 : Calcul du flux de chaleur en convection naturelle

➤ Mécanisme de la convection naturelle

Considérons un fluide au repos en contact avec une paroi plane à température θ_0 . Si l'on porte la paroi à une température $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$, le fluide au contact de la paroi va s'échauffer par conduction et la masse du volume unité va passer de ρ_0 à $\rho_0 - \Delta\rho$:



Il sera donc soumis à une force ascensionnelle $\vec{f} = -\Delta\rho\vec{g}$. Le principe fondamental de la dynamique permet d'évaluer l'accélération du fluide

Pour un volume unité : $m = \rho$ d'où : $\Delta\rho g = \rho y$ et $y = \frac{\Delta\rho}{\rho} g$ (II-47)

En introduisant le coefficient de dilatation cubique β du fluide défini par $\beta = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta\rho}{\Delta\theta}$ il vient :

$$Y = \beta g \Delta\theta \quad (\text{II-48})$$

$\beta g \Delta\theta$ est donc le module de l'accélération produite par l'expansion thermique due à la variation $\Delta\theta$ de la température θ_0 . Ce mouvement du fluide induit par les différences de masse volumique résultantes des gradients de température va donner naissance aux courants de convection.

Dans le cas d'un transfert de chaleur par convection naturelle le long d'une plaque plane, le coefficient de convection dépend des caractéristiques du fluide : λ , ρ , μ , C_p , β , g , de la paroi caractérisée par la longueur L , et de l'écart de température $\Delta\theta$ aux bornes du film ce que l'on peut traduire par une relation du type : $\phi = f(\lambda, \rho, \mu, C_p, \beta, g, L, \Delta\theta)$ (II-49)

Dans le système M, L, T, θ , Q, cette relation entre 8 grandeurs se réduit à une relation entre trois nombres adimensionnels : $Nu = f(Gr, Pr)$

$$\text{Définis par : } Nu = \frac{hD}{\lambda} \quad \text{Nombre de Nusselt} \quad (\text{II-50})$$

$$Gr = \frac{\beta g \Delta\theta \rho^2 L^3}{\mu^2} \quad \text{Nombre de Grashof} \quad (\text{II-51})$$

$$Pr = \frac{C_p \mu}{\lambda} \quad \text{Nombre de Prandtl} \quad (\text{II-52})$$

► **Calcul du flux de chaleur en convection naturelle**

L'application de l'analyse dimensionnelle montre que la relation liant le flux de chaleur transféré par convection aux variables dont il dépend peut être recherchée sous la forme d'une relation entre trois nombres adimensionnels : $Nu = f(Gr, Pr)$ définis par :

$$Nu = \frac{hD}{\lambda} \quad \text{Nombre de Nusselt}$$

$$Gr = \frac{\beta g \Delta\theta \rho^2 L^3}{\mu^2} \quad \text{Nombre de Grashof}$$

$$Pr = \frac{C_p \mu}{\lambda} \quad \text{Nombre de Prandtl}$$

Le calcul d'un flux de chaleur transmis par convection naturelle s'effectue donc de la manière suivante :

1. Calcul des nombres adimensionnels de Grashof et de Prandtl.
2. Suivant la valeur de Gr et configuration → choix de la corrélation.
3. Calcul de Nu par application de cette corrélation.
4. Calcul de $h = \frac{\lambda Nu}{D}$ et de $\phi = h S (\theta_p - \theta_\infty)$

II-3-3-Rayonnement :

Le rayonnement est un transfert de chaleur par l'émission des ondes électromagnétiques qui portent l'énergie à partir du corps d'émission. La relation gouvernant les corps chauds s'appelle la loi de Stefan Boltzmann : $q = \sigma \epsilon (T^4 - T_a^4)$ (II-53)

Où: ϵ est l'émissivité, $\sigma = 5.6703 \cdot 10^{-8} \text{Watt/m}^2\text{k}^2$ est la constante de Stefan Boltzmann et T_a la température d'environnement. Le rayonnement est la seule forme de transfert de chaleur qui peut se produire en l'absence d'autre forme dans le milieu et car elle est le seul type de transfert de chaleur dans un vide. Le rayonnement thermique est un résultat direct des mouvements des atomes et molécules dans un matériau. Puisque ces atomes et molécules se composent des particules chargées (des protons et des électrons), leurs mouvements ont comme conséquence l'émission du rayonnement électromagnétique, qui porte l'énergie à partir de la surface. Au même temps, la surface est constamment bombardée par rayonnement des environnements, résultant du transfert de l'énergie à la surface. Puisque la quantité de rayonnement émis augmente avec l'augmentation de la température, par conséquent le résultat est un transfert d'énergie net à partir des températures plus élevées à des températures basse.

Chapitre III

**Application de comsol multiphysics à
l'étude de Distribution de température
dans une plaque**

Chapitre III

Application de comsol multiphysics à l'étude de Distribution de température dans une plaque

III-1 : Introduction

Dans le présent chapitre nous présentons essentiellement, d'une part, le code de calcul utilisé dans notre travail de mémoire. Il s'agit du Comsol mutliphysics qui est un logiciel de modélisation multidisciplinaire qui touche la résolution de presque tous les problèmes de la physique. D'autre part, nous exposons un exemple de calcul simple concernant un échange de chaleur par conduction stationnaire dans une plaque carré et cela avec un programme de calcul en Matlab pour validation.

III-2 : Code de calcul utilisé :

III-2-1 Présentation générale de Comsol :

COMSOL a été créée en 1986 à Stockholm en Suède et n'a cessé de grandir pour compter aujourd'hui des bureaux au Danemark, en Finlande, Norvège, Allemagne, France, au Royaume-Uni et deux aux Etats-Unis. Il s'agit d'un programme informatique qui permet de modéliser et de simuler. Il est plus récent que Ansys, Nastron et Abaqus. S'intègre bien avec Matlab (utilise la même syntaxe que Matlab).

Le logiciel Comsol, anciennement appelé FEMLab - qui signifie Finite Elements Modeling Laboratory- est avant tout un outil de résolution d'équations aux dérivées partielles par éléments finis. Sa particularité est de disposer d'une base de données d'équations permettant de modéliser différents phénomènes physiques, comme l'électrostatique, l'écoulement de fluides ou encore la déformation des matériaux.

Développé initialement comme une toolbox de Matlab, il dispose aujourd'hui de son propre environnement graphique permettant à la fois le dessin des géométries et l'affichage de résultats en post-traitement. Sa spécificité est également de permettre de coupler différentes EDP, de manière à décrire des phénomènes multiphysiques, particulières. Il est ainsi possible d'obtenir la déformation d'une membrane due à la pression dans un liquide par exemple. Ou encore l'élévation de température dans un conducteur due au passage d'un courant électrique.

Des fonctions avancées permettent d'entrer manuellement des EDP spécifiques. De plus, les données du logiciel sont accessibles depuis Matlab, ce qui permet la réalisation de scripts .

III-2-2 : Utilisation de Comsol Multiphysics

Comsol utilise des techniques de résolution numérique très avancées pour la modélisation, la simulation et la visualisation des applications de tous les champs de la physique, de la technologie, et des mathématiques appliquées .Il est applicable dans tous les domaines de la science et de l'ingénierie. Un pré conditionneur multi grille optimise les routines de calcul, entraînant une réduction du temps de calcul et de la mémoire nécessaire. Combiné avec la technologie 64-bit, COMSOL traite des problèmes de plusieurs dizaines de millions de degrés de liberté. Par exemple, le calcul du champ électrique d'un réflecteur radar réclame 20 millions de degrés de liberté. Dans le domaine de la mécanique le code COMSOL est un outil puissant devenu partie intégrante des méthodes de conception. Il permet de traiter des problèmes d'élasticité linéaire en statique et dynamique, des problèmes non linéaires (élasto-visco-plasticité, hyperélasticité), la rupture...

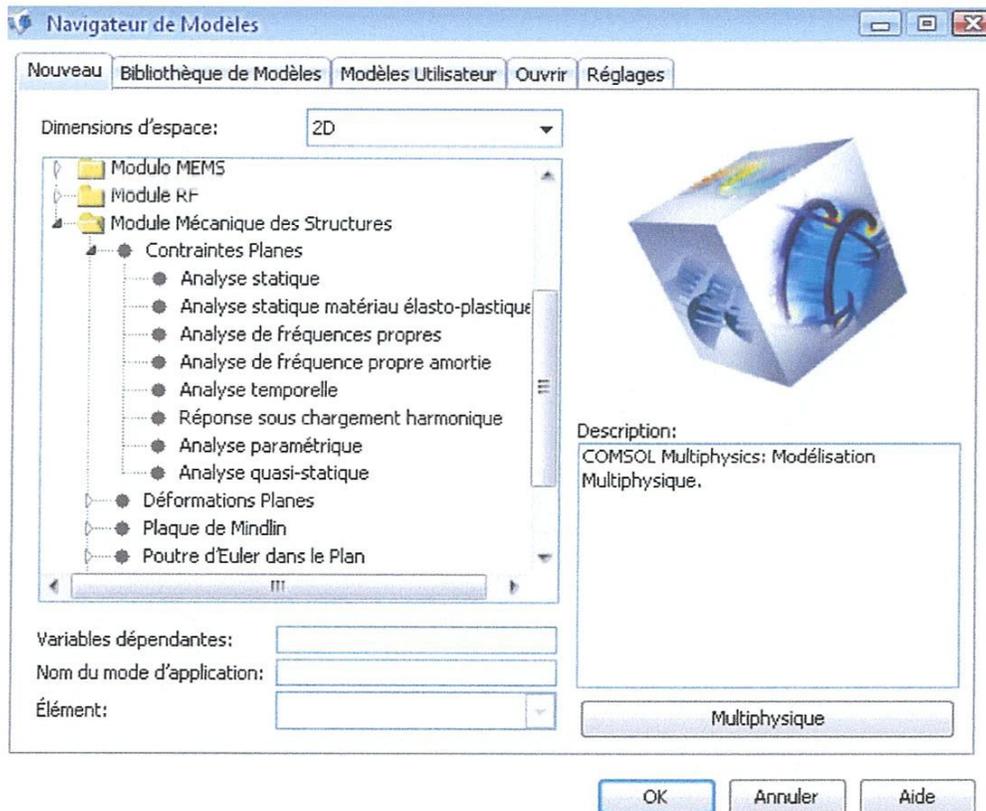


Figure III-1: Fenêtre principale de Comsol

Lors de la conception, il permet d'asseoir le bien-fondé des concepts retenus pour s'assurer d'un dimensionnement correct, aussi bien dans les situations normales que perturbées; il aide à trouver les solutions en cas de défaillance. Ainsi, avec les nouvelles techniques de maillage structuré, l'utilisateur choisit des éléments quadrilatère, hexaèdre ou prisme pour optimiser la discrétisation d'une géométrie donnée. Ces options de maillage améliorent la précision du calcul et réduisent le temps d'exécution. Un modèle peut même combiner plusieurs types de mailles pour parvenir aux résultats par le chemin le plus économe en ressources informatiques.

III-2-3 : Etapes du processus de modélisation

Comsol multiphysics permet de traiter de nombreux problèmes couplés grâce à sa banque intégrée d'équations physiques très variées (électrothermique, thermofluidique, ... etc.) décrits par les équations aux dérivées partielles. Cette approche autorise une simulation numérique au plus près des systèmes réels.

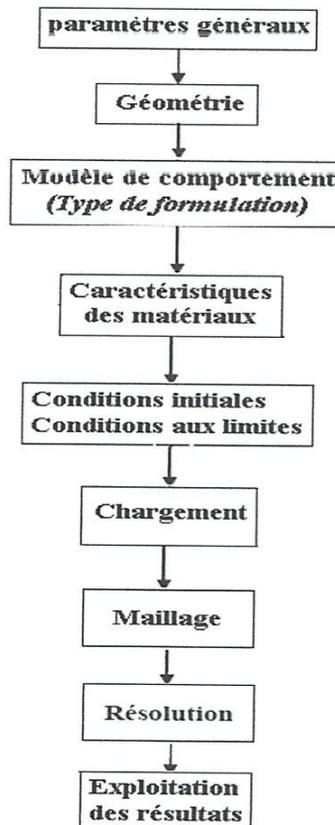


Figure III-2 : Organigramme général pour la résolution d'un problème avec Comsol Multiphysique

Le logiciel Comsol Multiphysiques possède un environnement de programmation (Comsol Script) dans lequel il est possible de modifier le maillage et les équations du problème. Ce logiciel possède de nombreux systèmes de résolution dits «solveurs», pouvant être linéaires ou non, paramétriques ou encore dépendants du temps. En effet, les différentes étapes proposées par cet outil sont:

1- La Construction de la géométrie: la première étape est d'extruder une géométrie 2D vers une géométrie 3D,

2- Le Maillage de la géométrie: Le maillage des domaines est automatique. Il est possible de le raffiner globalement ou de manière localisée,

3- Définition de la physique: définition des constantes et des expressions,

4- Définition des propriétés des matériaux: une bibliothèque de matériaux est à disposition dans Comsol Mutiphysics,

5- Les conditions aux limites: on impose des conditions sur certaines frontières,

6- Exploitation des résultats post-traitement: Lorsque le programme est convergé vers une solution, il bascule automatiquement vers la fenêtre de post-processing, qui permet d'analyser les résultats. Lors de la conception, il permet d'asseoir le bien-fondé des concepts retenus pour s'assurer d'un dimensionnement correct, aussi bien dans les situations normales que perturbées; il aide à trouver les solutions en cas de défaillance. Ainsi, avec les nouvelles techniques de maillage structuré, l'utilisateur choisit des éléments quadrilatère, hexaèdre ou prisme pour optimiser la discrétisation d'une géométrie donnée.

III-3 : Modélisation et analyse :

III-3-1 : Présentation d'un exemple pour validation

Nous présentons dans cette partie du travail les principales étapes pour la résolution d'un problème simple de conduction stationnaire dans une plaque carré. Afin de déterminer le champ de température et de le comparer avec la solution analytique.

Il s'agit à résoudre un problème bidimensionnel de transfert de chaleur par conduction dans un domaine carré en utilisant la méthode des éléments finies.

Ainsi et à travers cet exemple il sera facile de montrer le processus standard de modélisation utilisant un programme en matlab pour la résolution des problèmes de transfert de chaleur.

Ce problème a été choisi tout simplement parce que les solutions analytiques peuvent être facilement obtenues pour la validation du modèle.

a- Position de problème

Une plaque métallique plate de dimensions 1,2 m x 1,2 m est soumise à une température de 100 °C sur une face, 25 °C sur deux côtés et 0 °C sur le quatrième côté, comme il est indiqué sur la figure 3.

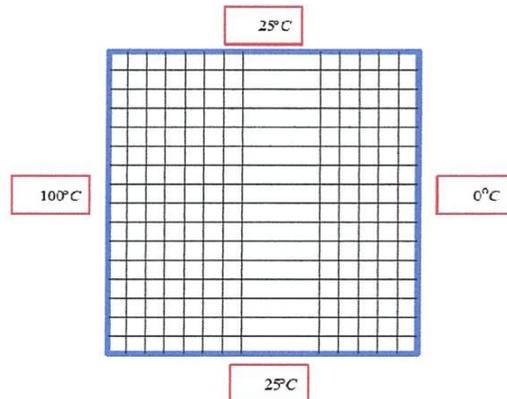


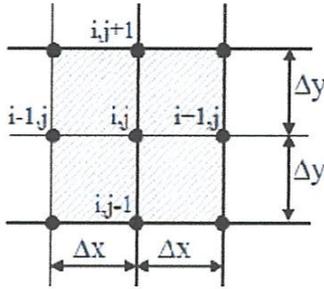
Figure III-3: Illustration graphique du problème

b- Discrétisation de l'équation du transfert de chaleur par conduction à l'aide des différences finies.

Expression de l'équation de Laplace en différences finies

Dans le cas où la méthode du coefficient de forme ne peut pas s'appliquer (surfaces non isothermes par exemple), il faut résoudre l'équation de Laplace numériquement. On utilise une méthode aux différences finies en discrétisant le domaine considéré (espace ou plan).

Nous traiterons dans ce qui suit le cas bidimensionnel, le cas tridimensionnel s'en déduit en rajoutant simplement une dimension d'espace. Considérons un milieu plan sur lequel on a appliqué un maillage de pas Δx et Δy tel que représenté sur la figure ci-après :



Les dérivées partielles de la température T peuvent s'exprimer selon les formules suivantes :

$$\frac{\partial T}{\partial X} \left(i + \frac{1}{2}, j \right) \approx \frac{T(i+1, j) - T(i, j)}{\Delta X} \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial X} \left(i - \frac{1}{2}, j \right) \approx \frac{T(i, j) - T(i-1, j)}{\Delta X}$$

$$\frac{\partial T}{\partial X} \left(i, j + \frac{1}{2} \right) \approx \frac{T(i, j+1) - T(i, j)}{\Delta y} \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial X} \left(i, j - \frac{1}{2} \right) \approx \frac{T(i, j) - T(i, j-1)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} (i, j) \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial X} \left(i + \frac{1}{2}, j \right) - \frac{\partial T}{\partial X} \left(i - \frac{1}{2}, j \right)}{\Delta X} = \frac{T(i+1, j) + T(i-1, j) - 2T(i, j)}{(\Delta X)^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} (i, j) \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial y} \left(i, j + \frac{1}{2} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} \left(i, j - \frac{1}{2} \right)}{\Delta y} = \frac{T(i, j+1) + T(i, j-1) - 2T(i, j)}{(\Delta y)^2}$$

L'équation de Laplace en bidimensionnel : $\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ s'écrit alors :

$$\frac{T(i+1, j) + T(i-1, j) - 2T(i, j)}{(\Delta X)^2} + \frac{T(i, j+1) + T(i, j-1) - 2T(i, j)}{(\Delta y)^2} = 0$$

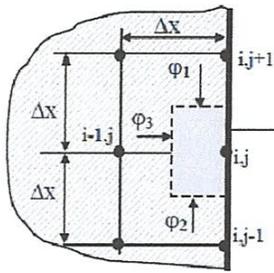
Et si l'on choisit $\Delta x = \Delta y$, on obtient :

$$T(i, j) = \frac{T(i-1, j) + T(i+1, j) + T(i, j-1) + T(i, j+1)}{4}$$

Expression des conditions aux limites en différences finies

Les conditions aux limites imposant sur un bord une température de surface s'expriment simplement en fixant la valeur de la température $T(i, j)$ à la valeur imposée pour tout couple (i, j) représentant un point de ce bord. Les conditions aux limites avec transfert convectif ou flux imposé s'expriment de la manière suivante :

Bord rectiligne



$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = h \Delta x (T_p - T_\infty) \quad \text{ou} \quad \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \phi \Delta x$$

Un bilan thermique appliqué à la surface grise (rectangle de côtés $\Delta x/2$ et Δx) conduit au résultat suivant compte-tenu des formules établies précédemment :

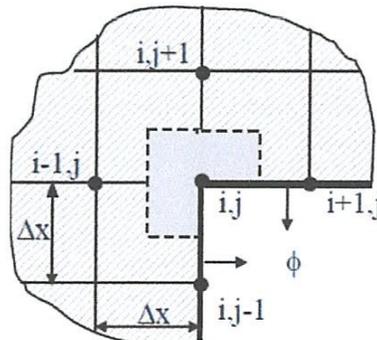
$$\text{Flux imposé } \phi \text{ (en } W.m^{-2}\text{)} : T(i, j) = \frac{T(i-1, j)}{2} + \frac{T(i, j-1) + T(i, j+1)}{4} - \frac{\phi}{2\lambda}$$

$$\text{Coefficient de convection imposé : } T(i, j) = \frac{T(i-1, j) + \frac{T(i, j-1) + T(i, j+1)}{2} + BiT_\infty}{2 + Bi}$$

Où $Bi = \frac{h\Delta x}{\lambda}$ est le nombre de Biot

Un bilan thermique appliqué à la surface grise conduit au résultat suivant compte-tenu des formules établies précédemment : Flux imposé ϕ (en $W.m^{-2}$):

Coin extérieur



Flux imposé :

$$T(i, j) = \frac{T(i-1, j)}{2} + \frac{T(i, j-1) + T(i, j+1)}{4} - \frac{\phi}{2\lambda}$$

Coefficient de convection imposé :

$$T(i, j) = \frac{T(i-1, j) + T(i, j+1) + \frac{T(i+1, j) + T(i, j-1)}{2} + BiT_\infty}{3 + Bi}$$

Méthode de résolution numérique

Soit à résoudre l'équation de Laplace sur un domaine plan (D) limité par un contour (C). On réalise un maillage du système avec un pas Δx en général identique dans les deux directions du plan. On affecte à chaque point du domaine (D) une valeur initiale de la température :

- Egale à la température imposée sur les points du contour où la condition limite impose une température.
- Arbitraire ailleurs mais la plus « réaliste » possible.

La résolution s'effectue par la méthode itérative de Gauss-Siedel. On effectue des itérations successives consistant à remplacer la valeur de la température en chaque noeud du maillage par la valeur calculée par l'équation aux différences finies qui lui est associée. Une itération consiste à effectuer un balayage complet de tous les nœuds, ligne après ligne et de gauche à droite pour chaque ligne par exemple. Les valeurs recalculées sont immédiatement prises en compte pour le calcul de la valeur de la température T aux points d'ordre supérieurs (points situés à droite et en-dessous dans le mode de balayage proposé).

Critère de convergence :

On peut par exemple arrêter le calcul dès que la variation la plus grande de $T(i,j)$ au cours d'une itération reste inférieure à une valeur ε donnée.

Remarques:

- On n'applique aucun calcul sur les points du contour où la température est imposée.
- La valeur de la température sera rangée dans un tableau $T(i,j)$, on pourra utiliser un autre tableau $L(i,j)$ dont les valeurs indiqueront si le point de coordonnées $(i\Delta x, j\Delta y)$ appartient au domaine (D) et le type d'équation aux différences finies qui s'y applique.
- On peut accélérer la convergence en appliquant un coefficient de sur relaxation R ($1 < R < 2$, optimum proche de 1,7) au calcul de $T(i,j)$ de la manière suivante (si on applique l'ordre de balayage proposé):

$$T_{n+1}(i, j) = (1 - R)T_n(i, j) + R \frac{T_{n+1}(i-1, j) + T_n(i+1, j) + T_{n+1}(i, j-1) + T_n(i, j+1)}{4}$$

- On peut noter que la discrétisation décrite ici revient très exactement à simuler un milieu bidimensionnel conducteur de l'électricité par un réseau de résistances reliant chaque nœud à ses voisins.

c- Résolution par Matlab

La méthode de la solution est de parcourir tous les points de grille, en calculant une meilleure approximation de la température à chaque point (i,j) alternativement de l'équation (1) comme, schématiquement, représenté sur la figure 4.

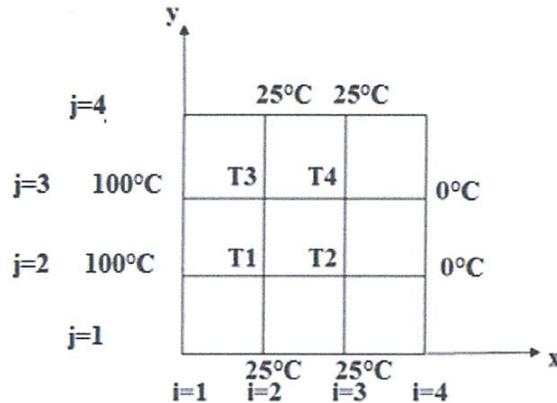


Figure III-4: configuration à deux dimensions par éléments finis différence

- L'équation de Laplace donne le point central de chaque forme moléculaire par l'expression :

$$T_{i,j} = \frac{T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}}{4} \quad \text{(III-1)}$$

Où : $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$, et $j = 1, 2, 3, \dots, n - 1$.

L'équation (III-1) simplifie la méthode d'itération de **Gauss – Seidel**.

Ainsi, il est facile de proposer un programme qui calcule la température ($T_{i,j}$) de la plaque aux points de la grille par itération de Gauss-Seidel.

On suppose que les dimensions L_1 , L_2 permettent ce quadrillage et Theta (θ) la valeur de température

$$L_1 = 1.2\text{m}$$

$$L_2 = 1.2\text{m}$$

CHAPITRE III

Programme de calcul sous matlab permettant de calculer les $T(i,j)$ de la Grille

Résolution d'un système linéaire par
la méthode itérative de Gauss-Seidel

```
clear all, close all
clc;
clf;
eps=1e-4;k1=300;
% Données initiales

L1=input ('Introduire la valeur de L1 :\n');
L2=input ('Introduire la valeur de L2 :\n');
Thetaextbas1=input ('Introduire la valeur de Theta externe bas1:\n');
Thetaextbas2=input ('Introduire la valeur de Theta externe bas2:\n');
Thetaexthaut1=input ('Introduire la valeur de Theta externe HAUT1:\n');
Thetaexthaut2=input ('Introduire la valeur de Theta externe HAUT2:\n');
ThetaextDROIT1=input ('Introduire la valeur de Theta externe droit1:\n');
ThetaextDROIT2=input ('Introduire la valeur de Theta externe droit2:\n');
Thetaextgauche1=input ('Introduire la valeur de Theta externe GAUCHE1:\n');
Thetaextgauche2=input ('Introduire la valeur de Theta externe GAUCHE2:\n');

% Calcul des indices
dx=0.4
m=4;
n=4;
% Température de la paroi externe
T(2,1)=Thetaextbas1;
T(3,1)=Thetaextbas2;
T(4,2)=ThetaextDROIT1;
T(4,3)=ThetaextDROIT2;
T(1,2)=Thetaextgauche1;
T(1,3)=Thetaextgauche2;
T(2,4)=Thetaexthaut1;
T(3,4)=Thetaexthaut2;
% Méthode de Gauss-Seidel (Itérations)
for k=1:k1
for i=2:n-1
for j=2:m-1
T(i,j)=0.25*(T(i-1,j)+T(i+1,j)+T(i,j-1)+T(i,j+1));
end
end
if abs(T(n-1,m-1)-T(2,2))<=eps
fprintf('\n \n');
fprintf('Températures après "%d itérations\n',k);
fprintf('\n \n');
break;
end
end
for i=1:n
fprintf('%5.0f\t',T(i,1:m));
fprintf('\n');
end
% Tracé des courbes de température en 3D
hold off;
if n==m
figure(1);
i=1:n;
j=1:m;
grid on;
```

CHAPITRE III

```
[x,y]=meshgrid((i-1)*dx,(j-1)*dx);  
mesh(x,y,T);  
Title('Evolution de la température dans la plaque');  
xlabel('i');ylabel('j');zlabel('T (en °C)');  
end  
% Tracé des courbes isothermes en 2D  
figure(2);  
i=1:n;j=1:m;  
grid on;  
contour(i,j,T(i,j),15);  
title('Lignes isothermes dans la plaque');  
xlabel('i');ylabel('j');
```

L'exécution de ce programme conduit à la grille de température suivante ($T_{i,j}$) Tableau 1:

	100	100	
25	50	50	25
25	25	25	25
	0	0	

Tableau III-1 : Solution sous Matlab par itération de Gauss-Seidel

D'après les solutions obtenues dans le tableau 1, il serait possible d'obtenir les températures de régime permanent suivant : $T_1=50$, $T_2=25$, $T_3=50$, $T_4=25$.

La figure III-5 représente l'évolution de température dans la plaque suite aux calculs par Matlab.

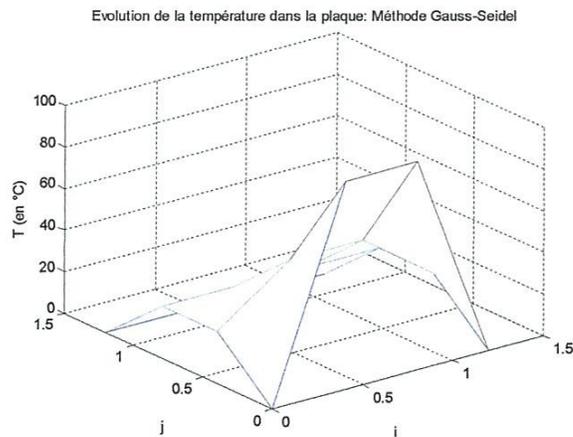


Figure III-5 : Evolution de température dans la plaque

d- Modélisation par Comsol

➤ ALGORITHME POUR LA SOLUTION COMSOL (Voir Figure III-6)

- (a) Démarrer COMSOL, un écran Navigateur de modèle apparaît.
- (b) Sélectionnez un mode d'application à partir du navigateur de modèle.
 - 1: Choisir espace 2D
 - 2: Transfert de chaleur
 - 3: Type de transfert : Conduction
 - 4: Type d'analyse : Stationnaire
 - 5: Ok

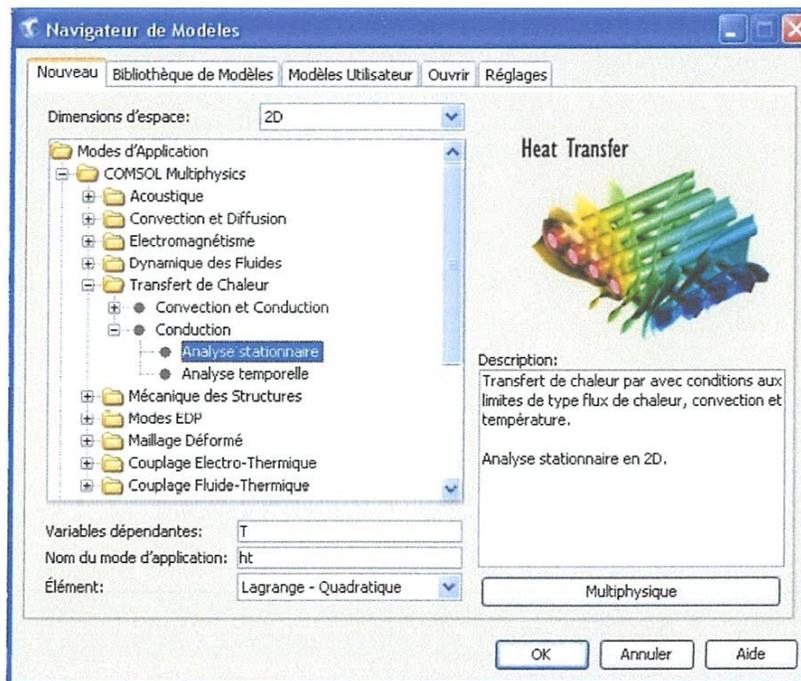


Figure III-6: Interface du navigateur des modèles Comsol

- (c) Dessiner la géométrie dans le mode Dessin : Il s'agit d'un carré de 1.2 m de coté) ou bien (importer la géométrie à partir d'un autre logiciel de dessin (AutoCAD par exemple)
- (d) : Introduction des conditions aux limites (ou conditions initiales) (sous domaine dans le menu principal).
- (e) Maillage de la géométrie : représenté sur la figure III-7

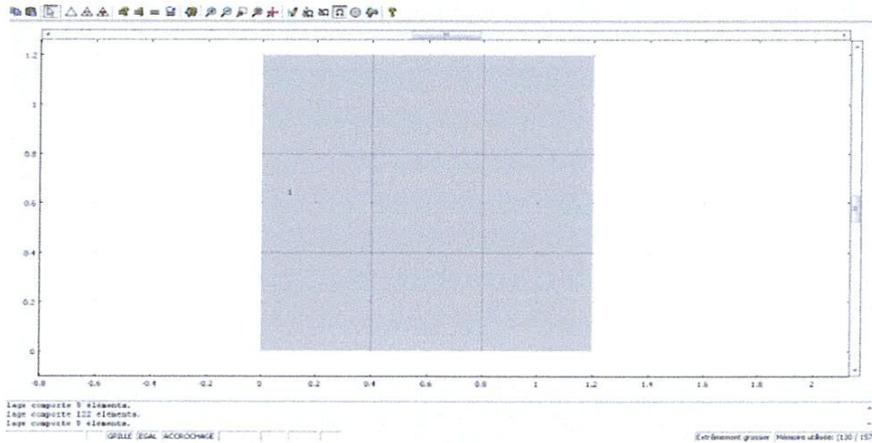


Figure III-7 : maillage de la géométrie

(f) Résolution (Notion Solveur)

(g) Traitement des résultats (exemple) : La distribution de température dans la plaque (aussi généré automatiquement par le programme) est représentée sur la figure III-8.

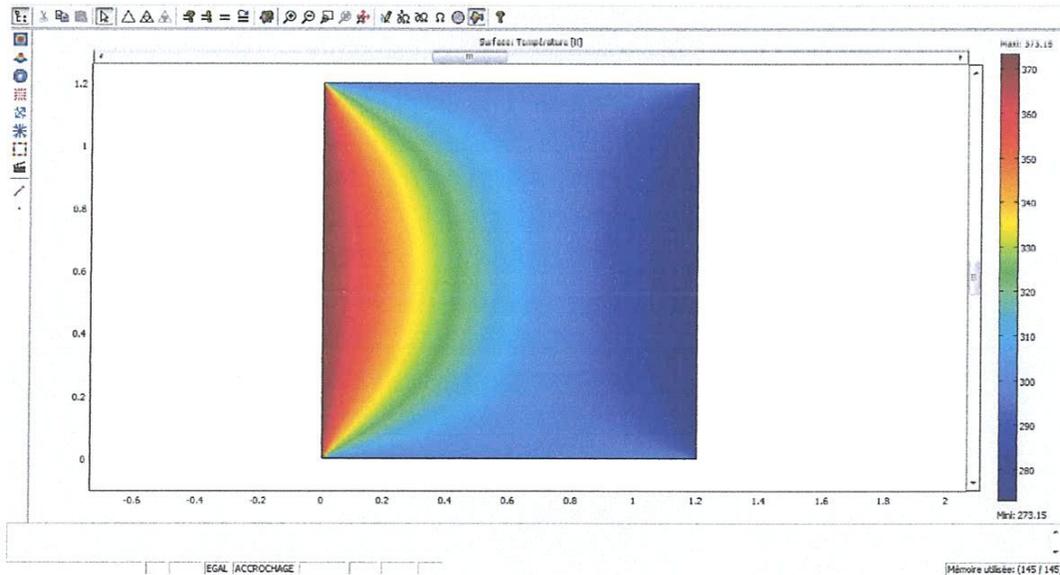


Figure III-8: Répartition de la température résultant des conditions aux limites.

Il est possible également d'étudier le comportement de la plaque en n'importe quel point et pouvoir par la suite déterminer les différentes quantités thermiques contenant dans la post-traitement du modèle ainsi créé sous Comsol Multiphysics.

Sur les deux figures (III-9 et III-10) nous avons présenté les deux températures T_1 et T_3 respectivement :

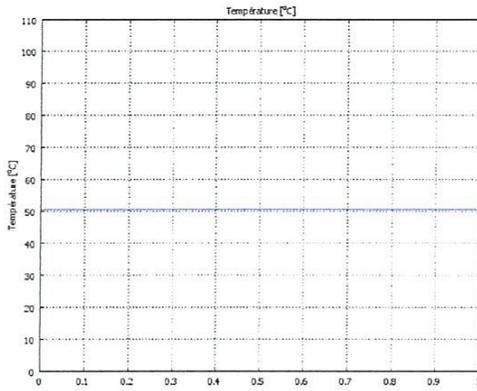


Figure III-9 : la température T1

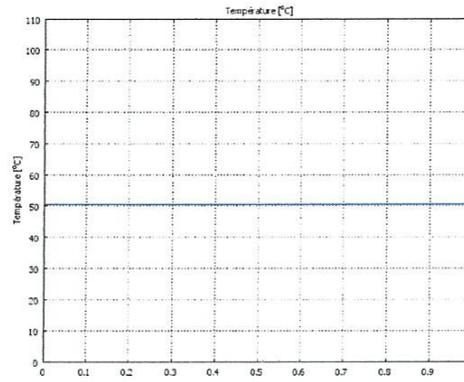


Figure III-10 : la température T3

Même chose pour les deux autres températures T_2 et T_4 (voir figures (III-11 et III-12) nous

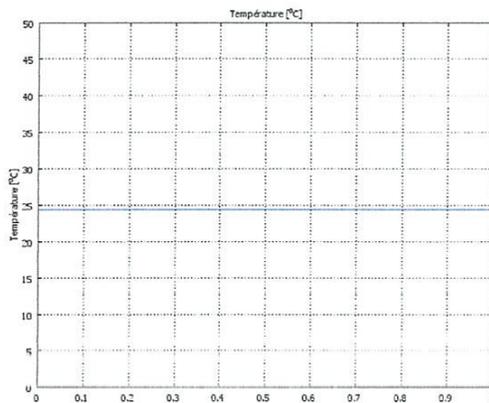


Figure III-11 : la température T2

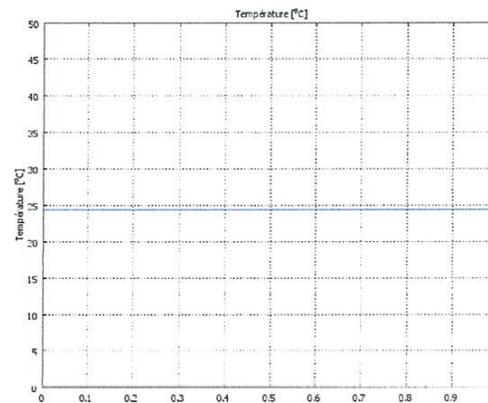


Figure III-12 : la température T4

Maintenant il est clair de dire que les techniques aboutissent aux mêmes résultats

e- Solution analytique

La discrétisation de la plaque par différences finies, sous l'algorithme de Gauss Seidel, nous ramène à résoudre un système de quatre équations à quatre inconnues aux différents nœuds (figure III-4):

$$\text{Nœud 1 : } T_2 + 100 + 25 + T_3 - 4T_1 = 0 \quad (\text{III-2})$$

$$\text{Nœud 2 : } 0 + T_1 + 25 + T_4 - 4T_2 = 0 \quad (\text{III-3})$$

$$\text{Nœud 3 : } T_4 + 100 + T_1 + 25 - 4T_3 = 0 \quad (\text{III-4})$$

$$\text{Nœud 4 : } 0 + T_3 + T_2 + 25 - 4T_4 = 0 \quad (\text{III-5})$$

$$(2) - (5) \Rightarrow 100 - 4T_1 + 4T_4 = 0 \quad \Rightarrow T_1 = T_4 + 25 \quad (\text{III-6})$$

$$(3) - (4) \Rightarrow -100 - 4T_2 + 4T_3 = 0 \quad \Rightarrow T_2 = T_3 - 25 \quad (\text{III-7})$$

On remplacer (6) sur (4) donc : $T_4 + 100 + T_4 + 25 + 25 - 4T_3 = 0$

$$\Rightarrow 2T_4 + 150 - 4T_3 = 0 \quad \Rightarrow T_4 = 2T_3 - \frac{150}{2} \quad (\text{III-8})$$

On remplacer (7) et (8) sur (5) : $T_3 + T_3 - 25 + 25 - 4(2T_3 - \frac{150}{2}) = 0$

$$\Rightarrow 2T_3 - 8T_3 + 300 = 0 \quad \Rightarrow T_3 = \frac{300}{6} \Rightarrow T_3 = 50 \quad (\text{III-9})$$

On remplacer (9) sur (7) : $T_2 = T_3 - 25 \Rightarrow T_2 = 50 - 25 \Rightarrow T_2 = 25 \quad (\text{III-10})$

On remplacer (9) sur (8) : $T_4 = 2T_3 - \frac{150}{2} \Rightarrow T_4 = 2 \times 50 - \frac{150}{2} \Rightarrow T_4 = 25 \quad (\text{III-11})$

On remplacer (11) sur (6) : $T_1 = T_4 + 25 \Rightarrow T_1 = 25 + 25 \Rightarrow T_1 = 50 \quad (\text{III-12})$

Donc la solution analytique donne les températures aux quatre points:

$$T_1 = 50^\circ\text{C}, \quad T_2 = 25^\circ\text{C}, \quad T_3 = 50^\circ\text{C}, \quad T_4 = 25^\circ\text{C}.$$

III-4 : Validation

Ce travail montre l'intérêt du développement d'un outil d'enseignement technique et de recherche qui porte le nom de Comsol Multiphysics. L'étude du cas présenté montre la simplicité, l'efficacité, la fiabilité et l'exactitude des programmes.

L'utilisation des différentes techniques aboutit aux mêmes résultats ce qui montre la bonne corrélation de ces techniques de résolution ainsi que l'intérêt de l'exploitation d'un outil comme Comsol pour sa simplicité et son exactitude.

Chapitre IV

Modélisation du système de séchage

Chapitre IV : Modélisation du système de séchage

IV-1 : Introduction

Dans ce chapitre nous présentons la démarche de l'utilisation du logiciel de modélisation multiphysics basée sur la résolution des équations aux dérivées partielles au moyen de la méthode des éléments finis.

L'objectif de ce travail est de reprendre la modélisation d'un séchoir domestique afin de visualiser le champ de vitesse et de température d'un fluide froid qui présente l'air s'échangeant de la chaleur avec des résistances électriques, qui émettent un flux de chaleur (Q_0).

Ainsi que les différents résultats qui en découlent après résolution du problème de écoulement d'un fluide (air) le long d'une conduite et chauffée par une résistante électrique (il s'agit d'un séchoir domestique).

Donc, en résumé, le chapitre donne une idée sur la résolution de deux équations (couplage : transfert de chaleur et dynamique de fluide) la première c'est l'équation de Navier-Stokes et la deuxième c'est l'équation de chaleur.

IV-2 : DEMARCHE D'UNE ANALYSE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Les calculs analytiques sont de moins en moins utilisés. Parmi toutes les méthodes d'analyse numérique utilisées en calcul des structures, la méthode des éléments finis (MEF) est la plus communément mise en œuvre, ceci grâce à la diversité et la fiabilité d'utilisation de la méthode. Le progrès des méthodes numériques et l'augmentation des performances des ordinateurs permettent, grâce à des simulations de plus en plus détaillées, de prédire le comportement des systèmes complexes ou les propriétés de nouveaux matériaux, de simuler des phénomènes naturels. L'industrie utilise de plus en plus Les codes de calcul pour la simulation des phénomènes physiques présent dans de nombreux domaines de l'industrie. Ces phénomènes physiques sont représentés par des équations dont la complexité peut aller de la simple équation linéaire à des systèmes couplés d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

Quel que soit le logiciel utilisé, une modélisation utilisant la méthode des éléments finis se décompose de façon assez commune en trois étapes :

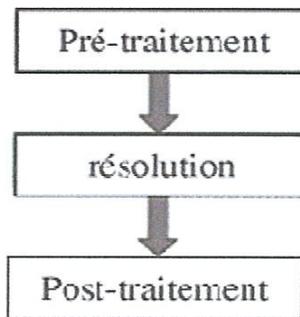


Figure IV-1 : Organigramme des différentes étapes de calcul par la MEF

IV-2-1 Le prétraitement

Le prétraitement a pour fonction de lire les données. Ces données peuvent être classées :

1. Créer le modèle géométrique,
2. Créer le maillage: définir les nœuds et les éléments,
3. Entrer les paramètres physiques,
4. Imposer les conditions aux limites.

IV-2-2 Résolution

La phase de résolution (solution) consiste à définir le choix du type (stationnaire ou transitoire) et des options d'analyse d'autre part. Une fois ceci est réalisé, cette phase offre les fonctions suivantes:

1. Calcul des matrices et vecteurs élémentaires,
2. Assemblage des matrices et vecteurs élémentaires,
3. Prendre en compte les conditions aux limites,
4. Résoudre le système d'équations.

La résolution est dans la majorité des cas gérée par des opérateurs. Elle peut être linéaire ou non linéaire (ça dépend du problème).

IV-2-3 Post-traitement

Cette phase permet la visualisation des résultats sous forme graphique ou tabulaire. Elle permet d'extraire les informations désirées et de les traiter indépendamment.

Lorsque le programme a convergé vers une solution, il bascule automatiquement vers la fenêtre de post-traitement, qui permet d'analyser les résultats.

Il est possible de les visualiser sous forme de remplissage de couleur, de lignes de courant, de champ de flèches, etc...

La résolution des problèmes physiques donne quant à elle la valeur des températures aux nœuds de la géométrie. Il convient alors d'exploiter ces valeurs pour déduire les autres résultats attendus (flux, déformations, contraintes).

IV-3 : Position de problème

Données du problème : il s'agit de modéliser un séchoir domestique afin de visualiser le champ de vitesse et de température d'un fluide froid qui présente l'air s'échangeant de la chaleur avec des résistances électriques, qui émettent un flux de chaleur (Q_0).

Pour ce faire, on va résoudre les équations de Navier-stokes couplées à l'équation de la chaleur.

IV-3-1 : Les équations

➤ Equation de Navier-stokes

$$\rho U \cdot \nabla U = \nabla \cdot [-P I + \mu (\nabla U + (\nabla U))] + F$$
$$\nabla \cdot U = 0$$

ρ = Densité

μ = Viscosité dynamique (Pa.s)

F = force de volume

P = la pression (Pa)

U = vitesse (m/s)

∇ = nabla

➤ Equation de la chaleur : convection et conduction

$$\nabla \cdot (-K \nabla T) = Q - \rho C_p \cdot U \cdot \nabla T$$

ρ = Masse volumique (kg/m³)

C_p = Capacité calorifique à pression constante (J/Kg.K)

K = conductivité thermique (w/m.k)

T = Température (K)

U = vitesse (m/s)

Q = flux de chaleur (W/m²)

∇ = nabla

IV-3-2 : Géométrie

La géométrie de problème est dessinée le séchoir (figure IV-2) avec AutoCAD et importée par Comsol aux moyens des fichiers d'échanges de format **dx**f.

CHAPITRE IV

Au moyen du logiciel AutoCAD (logiciel permettant l'échange des dessins) nous avons dessiné tout d'abord les parties de formes linéaires dont les coordonnées sont données par le tableau 2 :

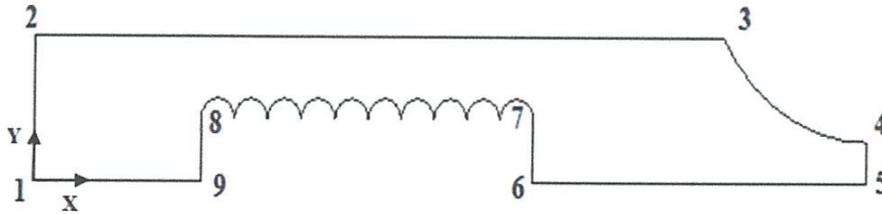


Figure IV-2 Dessin des lignes

Pts	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X	0	0	0.2067	0.25	0.25	0.15	0.15	0.05	0.05
Y	0	0.035	0.035	0.01	0	0	0.015	0.015	0

Tableau IV- 1 : Coordonnées des différents points particuliers des lignes

De même, nous avons procédé, à la représentation des parties curvilignes (résistance et le bout du séchoir : figure IV-3).

Les coordonnées des différents points particuliers sont données par le tableau 2.

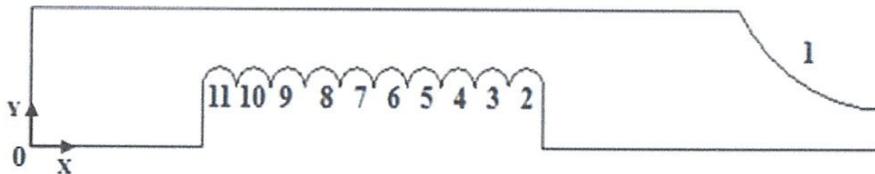


Figure IV-3 Dessin des Arcs

Arc		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Centre	X	0.25	0.145	0.135	0.125	0.115	0.105	0.095	0.085	0.075	0.065	0.055
	Y	0.05996	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015
extrémité	X	0.25	0.14	0.13	0.12	0.11	0.1	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05
	Y	0.01	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015

Tableau IV-2 : Coordonnées des différents points particuliers de la résistance et du bout du séchoir

Le résultat d'insertion des différents points particuliers (tableaux 1 & 2), nous obtenons la configuration suivante au moyen d'AutoCAD en format **dwg** qui sera par la suite convertie en format d'échange **dxf** et sera prête à l'exportation au Comsol-Multiphysics.

La figure suivante (IV-4) représente le séchoir en format dwg avant exportation.

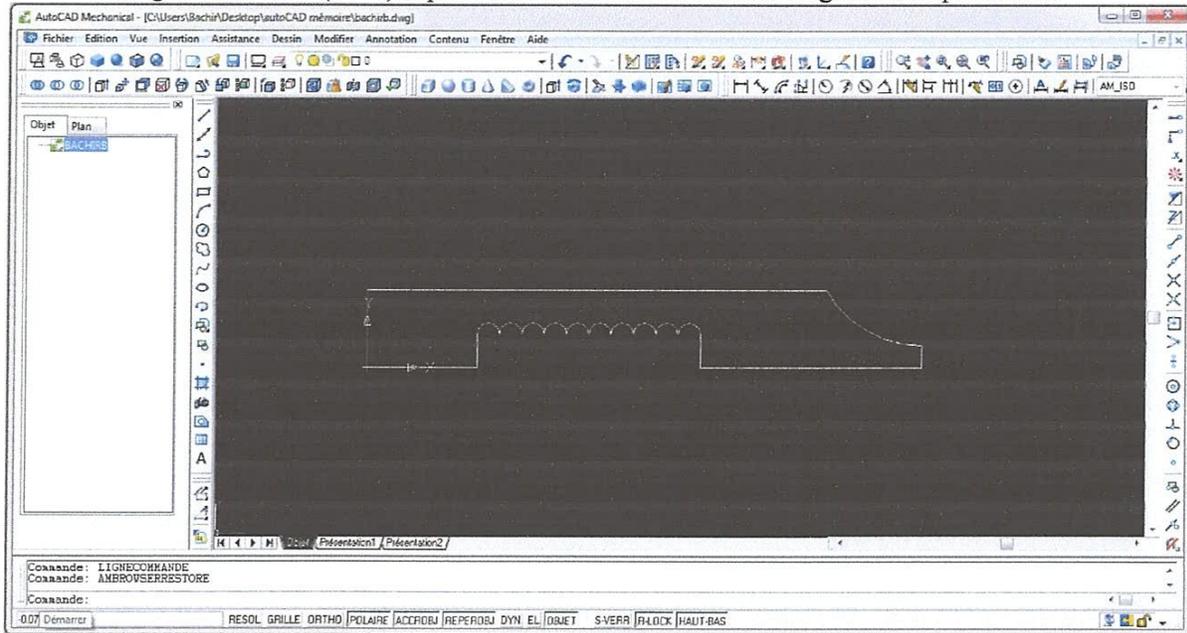


Figure IV-4 : Géométrie sur AutoCAD

Par contre la figure suivante (IV-5) représente le séchoir après importation par Comsol au moyen du fichier dxf. C'est cette géométrie qui sera utilisée comme modèle dans la résolution du problème régissant par les équations (Navier-Stokes et Chaleur)

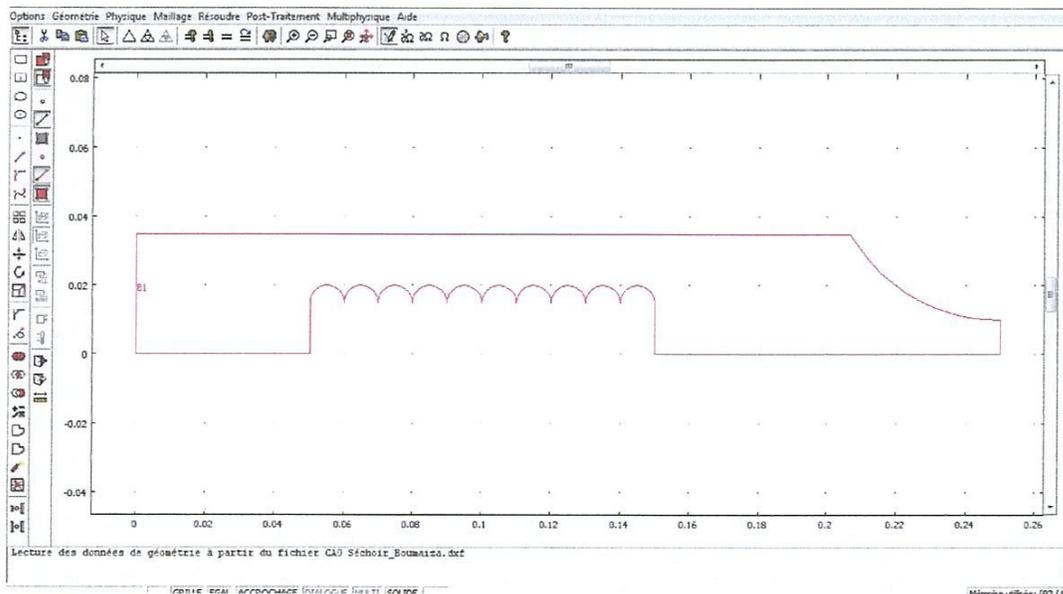


Figure IV-5 Géométrie du séchoir après importation par Comsol Multiphysics

IV-3-3 : Propriétés physiques :

Ce sont les données physiques relatives au fluide en mouvement (air)

Masse volumique de l'air : $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$

Viscosité dynamique de l'air : $\mu = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Pas}$

Conductivité thermique de l'air : $k = 0.026 \text{ w/m.k}$

Capacité calorifique de l'air : $C_p = 1.007 \text{ J/K.g.K}$

➤ Conditions

1- conditions initiales :

Température de l'air : $T_0 = 293\text{K}$

Flux de chaleur : $Q_0 = 25 \text{ W/m}^2$

2- conditions aux limites :

Vitesse d'entrée de l'air sur $x=0 \text{ mm}$, $u=1\text{m/s}$

Pression initiale sur $x=250 \text{ mm}$ (sortie), $P_0 = 0 \text{ Pa}$

IV- 4 : Modélisation

IV-4-1 : Présentation du Modèle sur Comsol

Géométrie sur Comsol

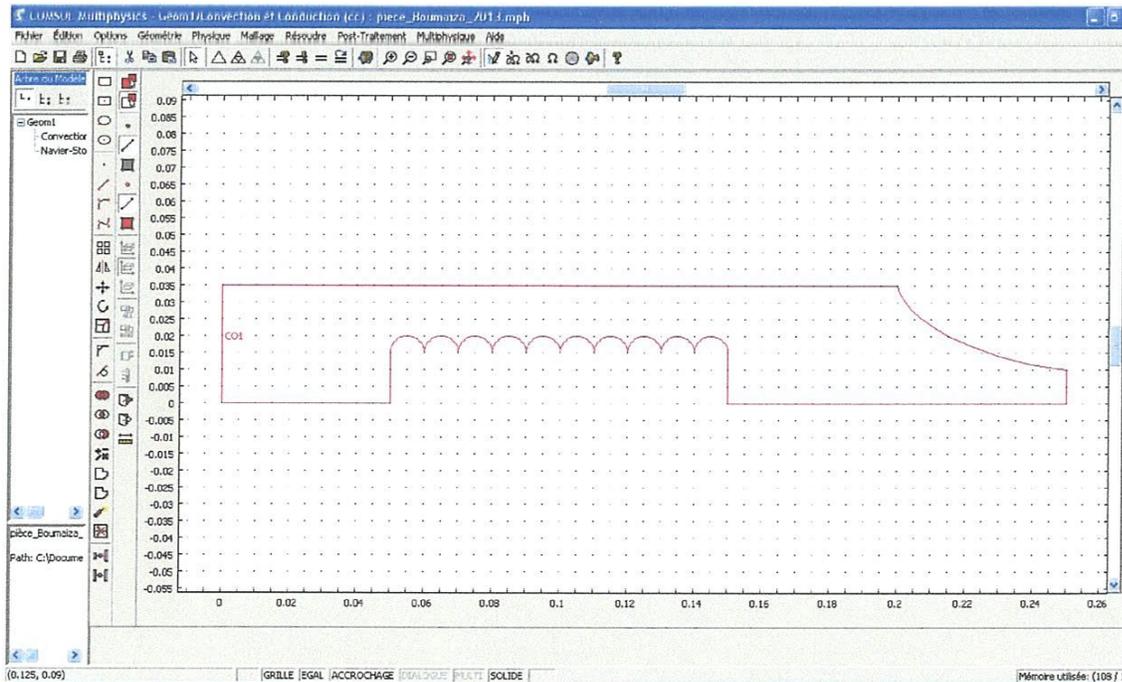


Figure IV-6 : Modèle importé par Comsol depuis AutoCAD

Propriétés physiques du sous domaine:

Sous domaine-Conduction/Convection (CC)

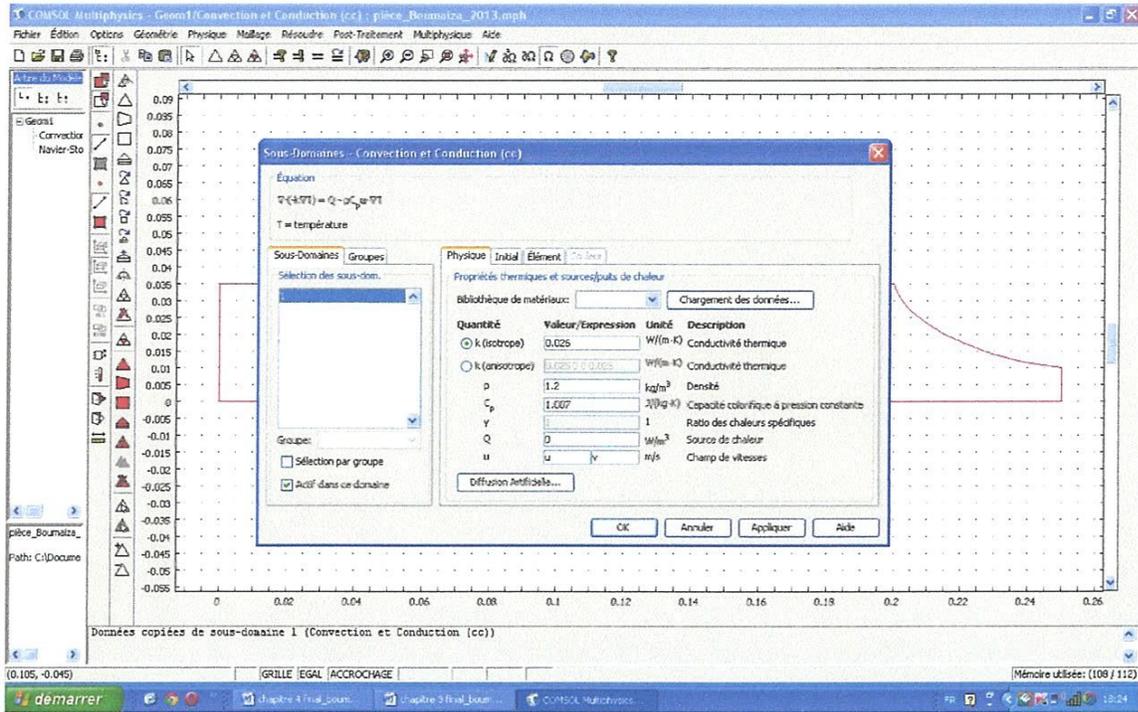


Figure IV-7 : Introduction des propriétés physiques relatives à la Conduction/Convection

Sous domaine-Navier Stokes Laminaire (ns)

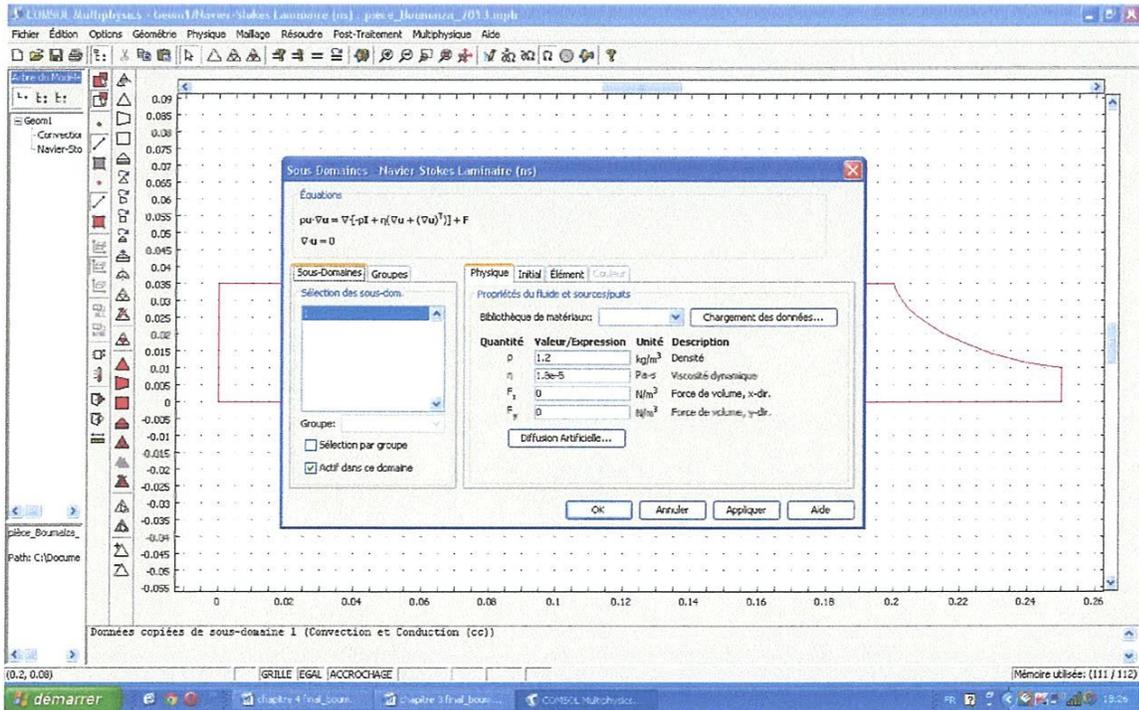


Figure IV-8 : Introduction des propriétés physiques relatives à Navier Stokes

IV-4-2 : Conditions initiales

1 : Navier-Stokes Laminaire (ns)

A l'entrée

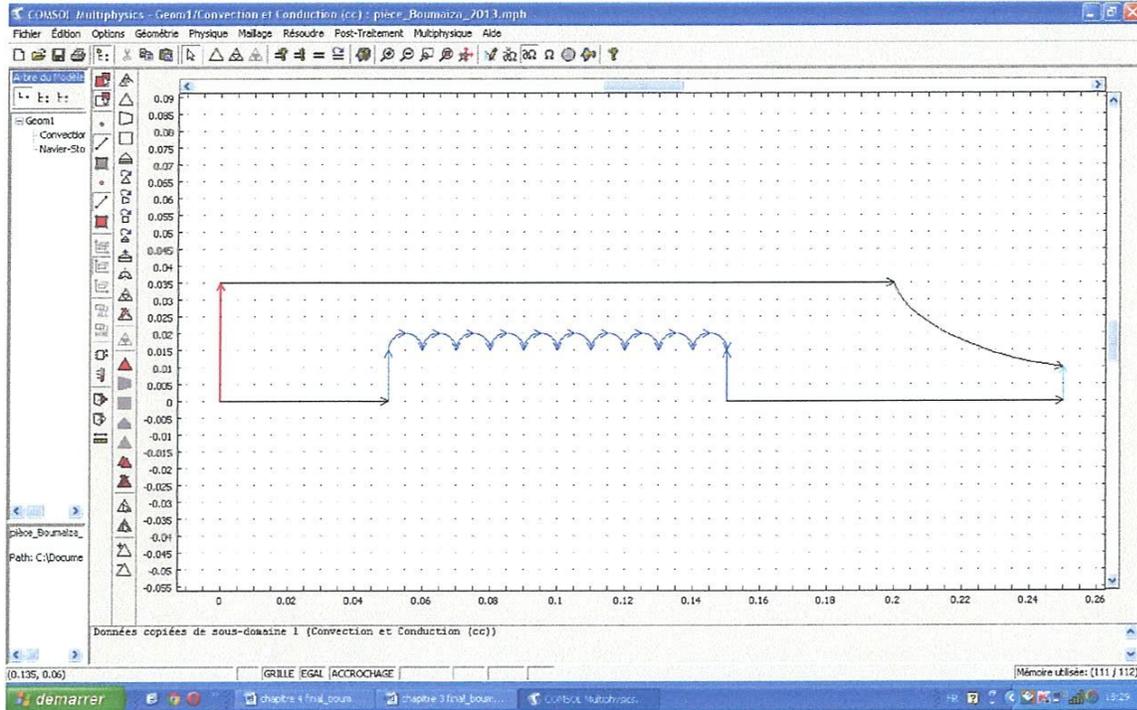


Figure IV-9 : Paroi d'entrée d'air en rouge

Vitesse d'entrée de l'air : $U=1\text{m/s}$ (paroi 1)

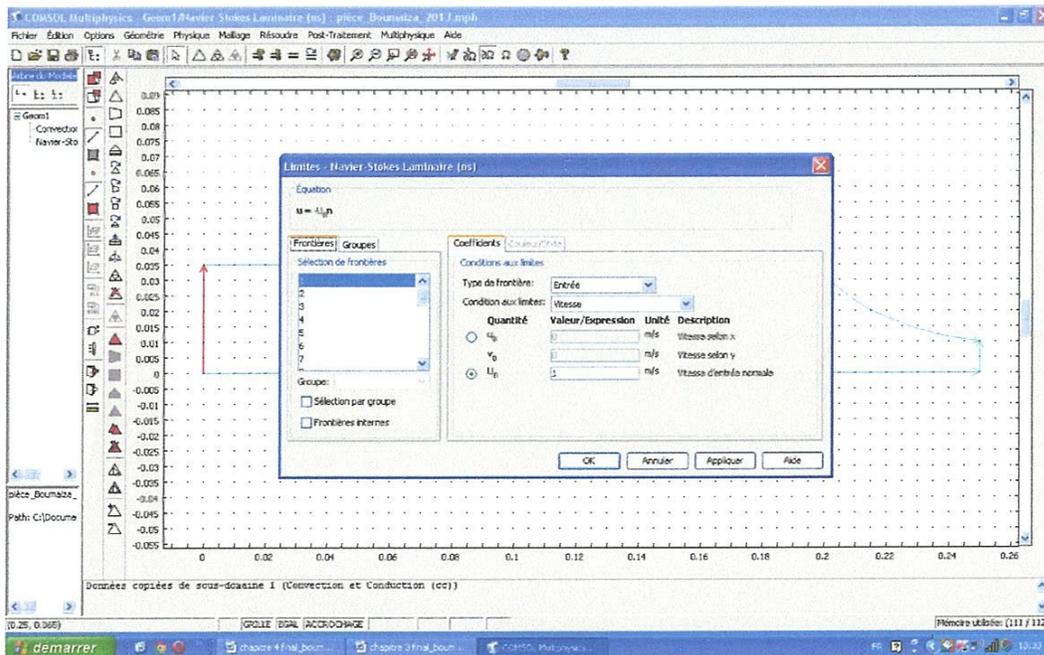


Figure IV-10 : Introduction de la vitesse d'entrée d'air

A la sortie

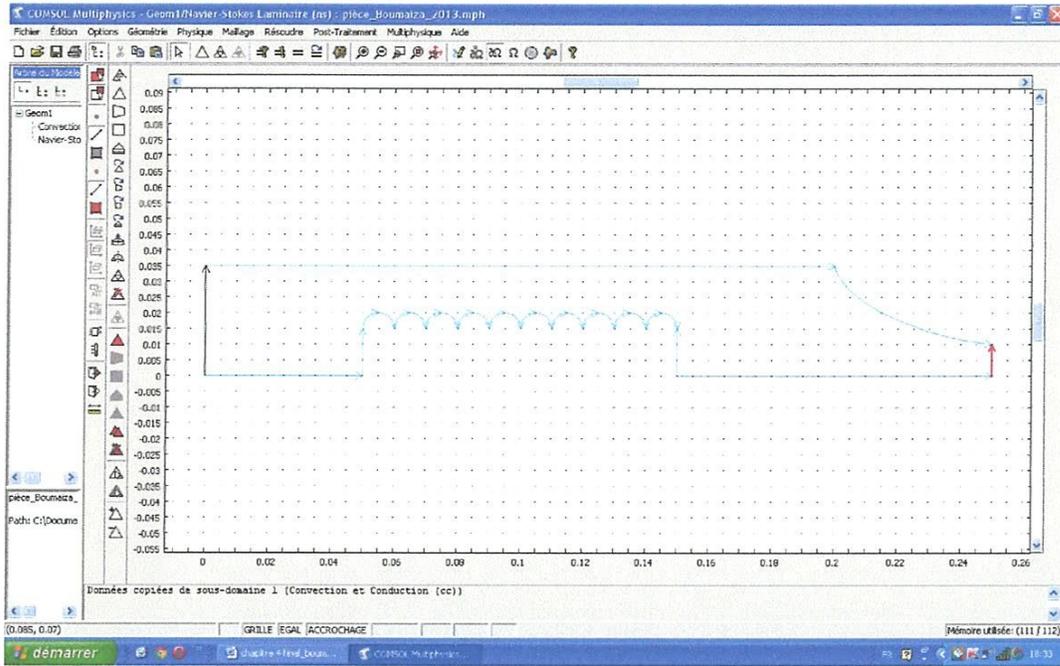


Figure IV-11 : Paroi de sortie en rouge

Pression initiale $P_0 = 0$ Pa (Paroi 7)

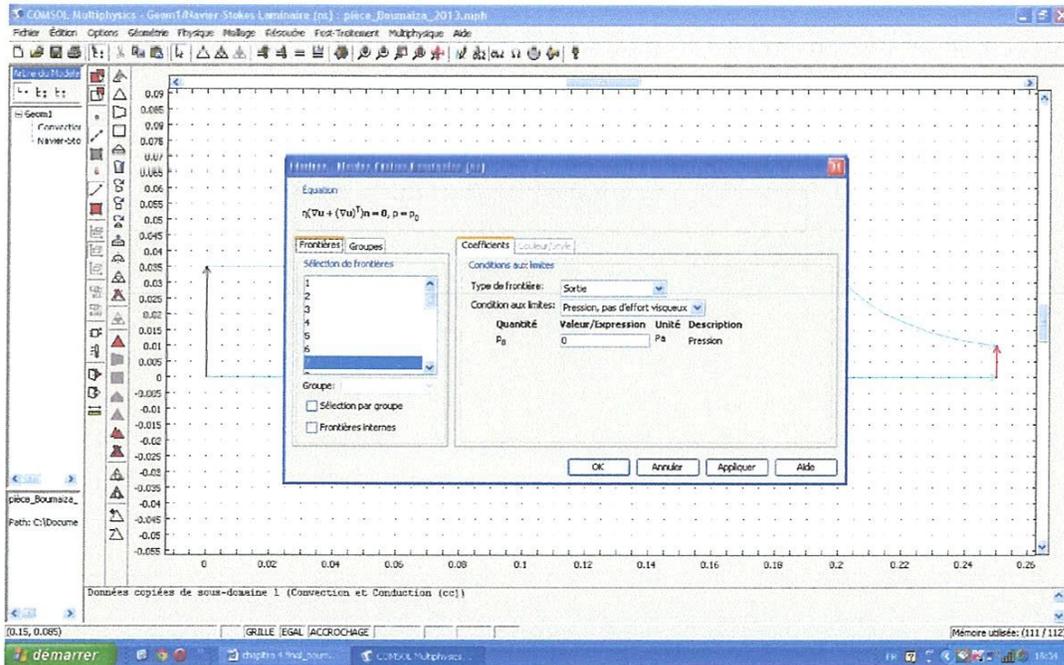


Figure IV-12 : Introduction de la pression à la sortie en rouge

2 : Conduction/Convection (cc)

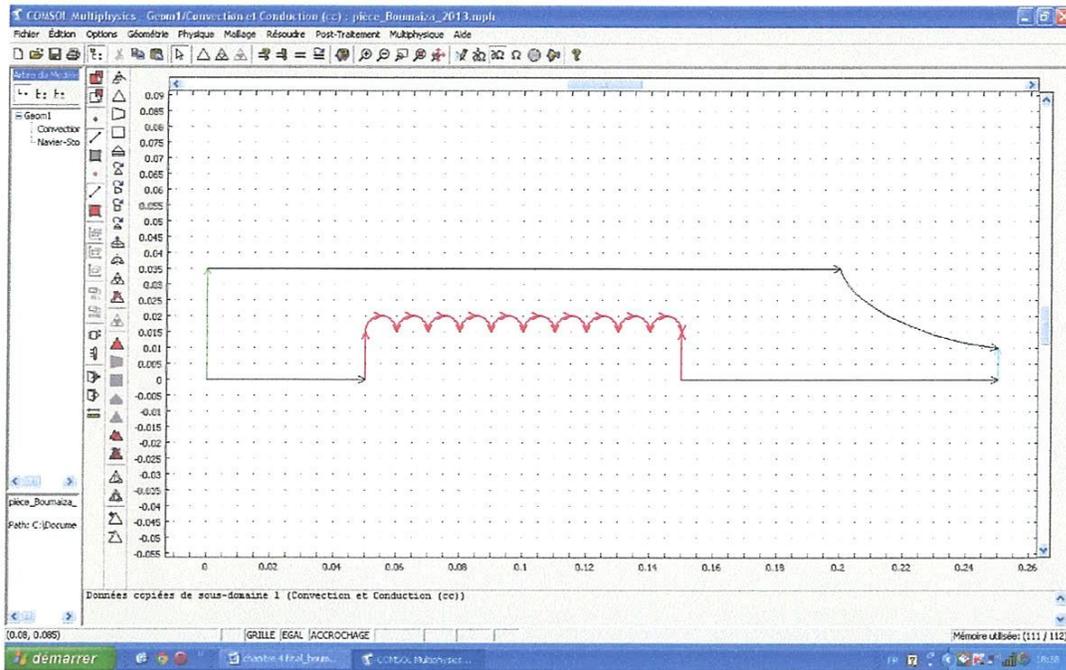


Figure IV-13: Résistance électrique : parois où on applique le flux de chaleur

Le flux de chaleur $Q_0 = 25 \text{ W/m}^2$. (parois 4,5,8 jusqu'au 27)

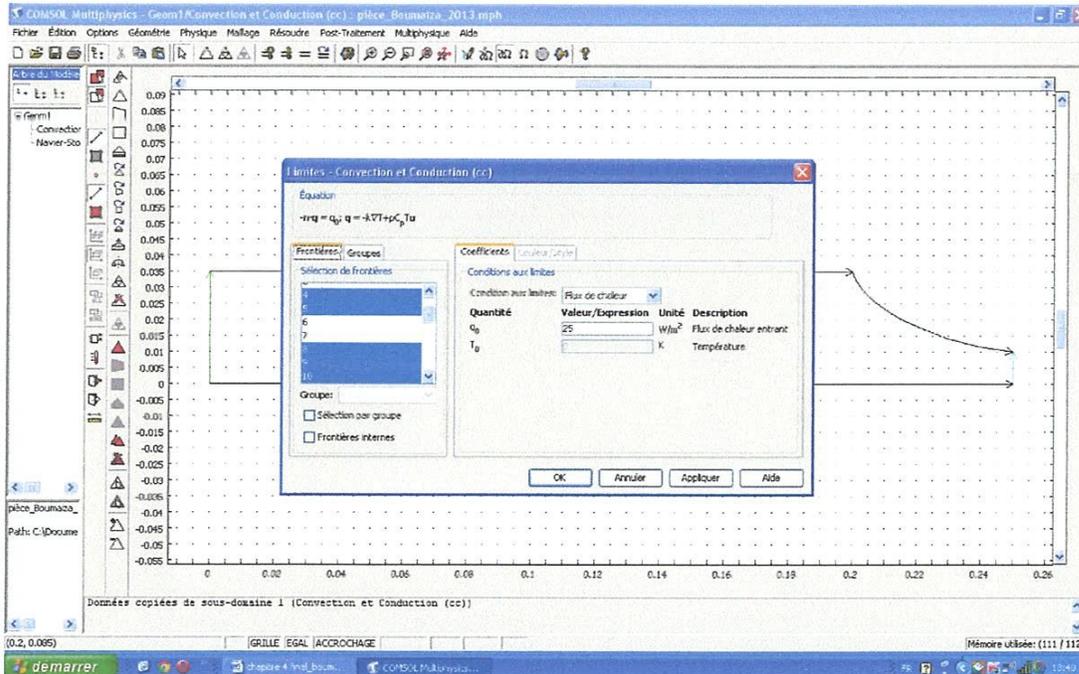


Figure IV-14: Introduction du flux de chaleur

IV-4-3 : Conditions aux limites

1 : Navier-Stokes Laminaire (ns)

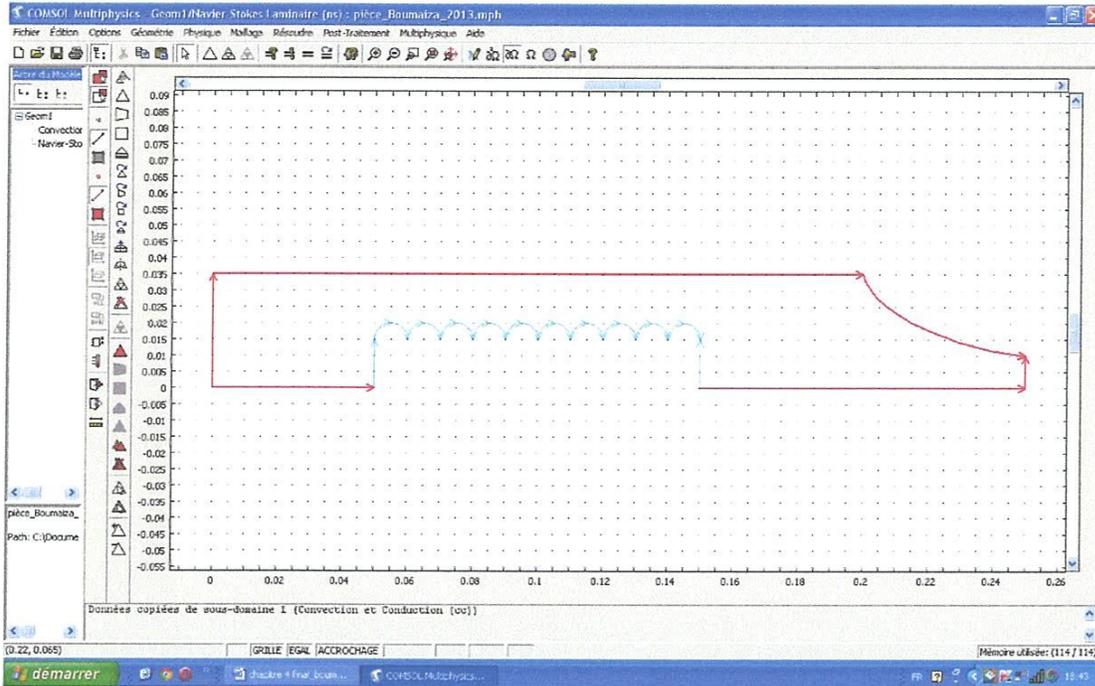


Figure IV-15: Parois pour le non glissement

2 : Conduction/Convection (cc)

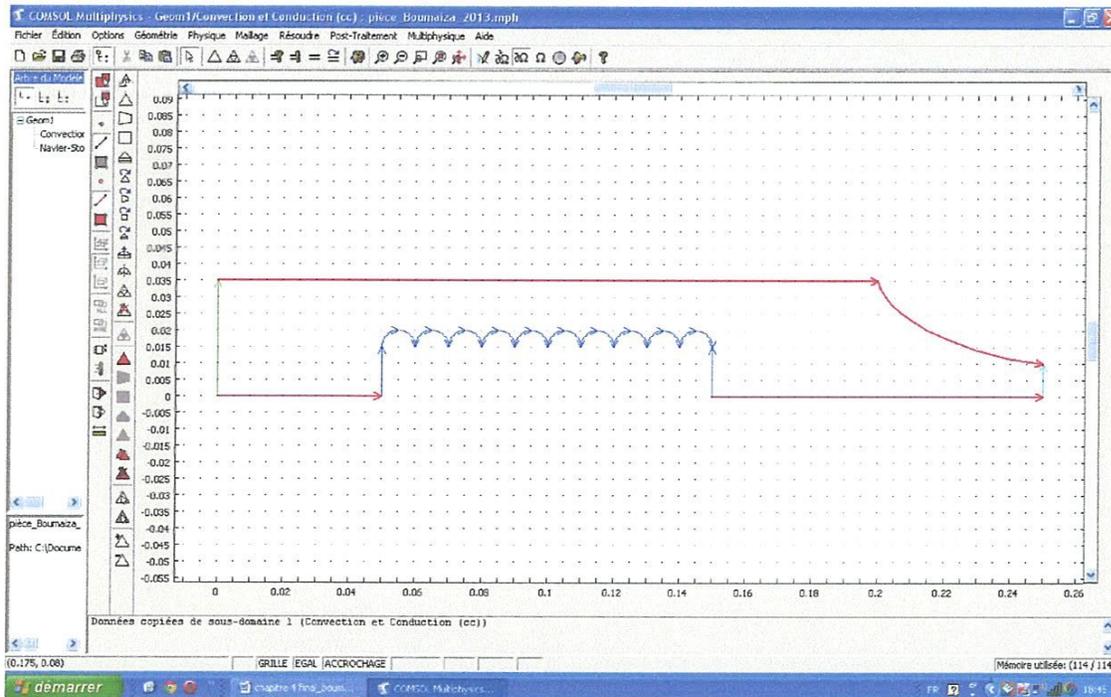


Figure IV-16: Parois pour l'isolation thermique

IV-5 : Maillage et résolution

Dans tout calcul par la méthode des éléments finis le maillage est un délicat. Bien que le cout du calcul augmente parallèlement avec le nombre d'éléments, le maillage ne saurait être trop grossier car la précision des résultats est directement fonction de la dimension des éléments. La finesse du maillage dépend également, pour une bonne part, de la formulation utilisée, permettant d'assurer au mieux la continuité des déplacements, pentes et courbures aux frontières de l'élément et permet d'obtenir des résultats plus précis.

Comsol multiphysics propose plusieurs types de maillage de différentes finesse, de l'extrêmement fin à l'extrêmement grossier. Il suffit de modifier les paramètres pour l'améliorer. Le maillage peut être affiné, selon la complexité de la géométrie du problème, sur un sous domaine, une frontière ou autour d'un point particulier.

Une des spécificités de la modélisation à éléments finis est que plus le nombre d'éléments croît plus le résultat obtenu s'approche d'une solution juste. Cependant le temps de calcul nécessaire augmente considérablement avec le nombre d'éléments.

Le maillage utilisé pour discrétiser la géométrie étudiée est de type lagrangien et les mailles sont de forme triangulaire dans le cas d'un séchoir domestique. Ce maillage automatique grossier puis raffiné le long de toute la structure. Il comporte 5268 éléments avec 35555 degrés de libertés. Dans le cas d'un séchoir domestique le maillage de plus en plus fin autour de la résistance comme représenté sur la figure suivante

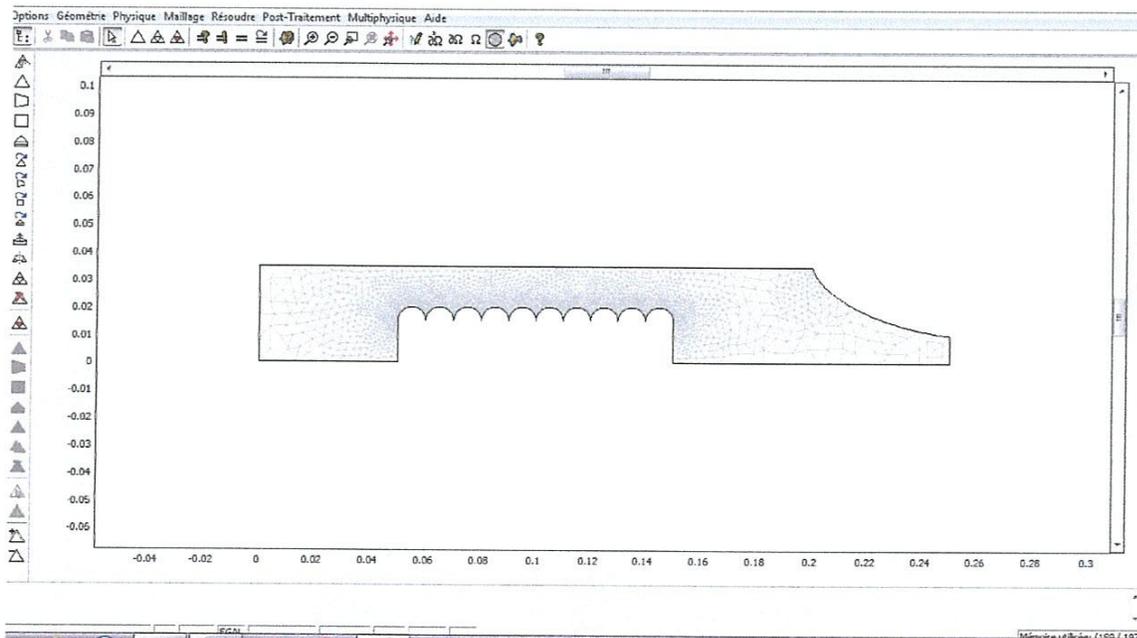


Figure IV-17 Maillage de la géométrie

IV-6-Résultats et analyses

IV-6-1 : Visualisation des résultats

Comsol multiphysique trace les variables obtenues par la simulation. Il dispose de différents types de représentation : Isovaleur, flèche, déformée, frontière,...etc

IV-6-2 : Résultats et discussion

IV-6-2-1 : Champs de vitesses

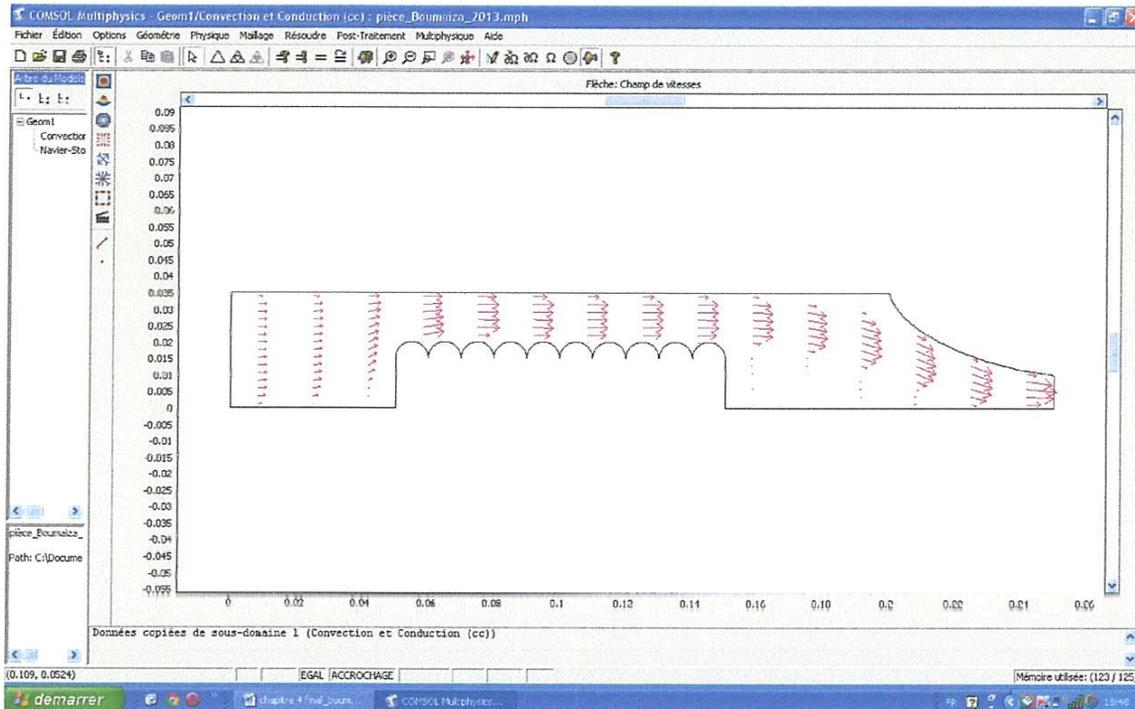


Figure IV-18 : Champs de Vitesses en flèches

Suivant la figure IV-18, on constate bien que le profil de vitesses augmente d'une façon logique depuis l'entrée jusqu'à la sortie en passant par des étranglements dû à la position de la résistance jusqu'au bout du séchoir.

Sur la représentation suivante, on voit clairement que la vitesse passe de 1m/s (entrée) pour atteindre sa valeur maximale à la sortie ce qui est logique.

CHAPITRE IV

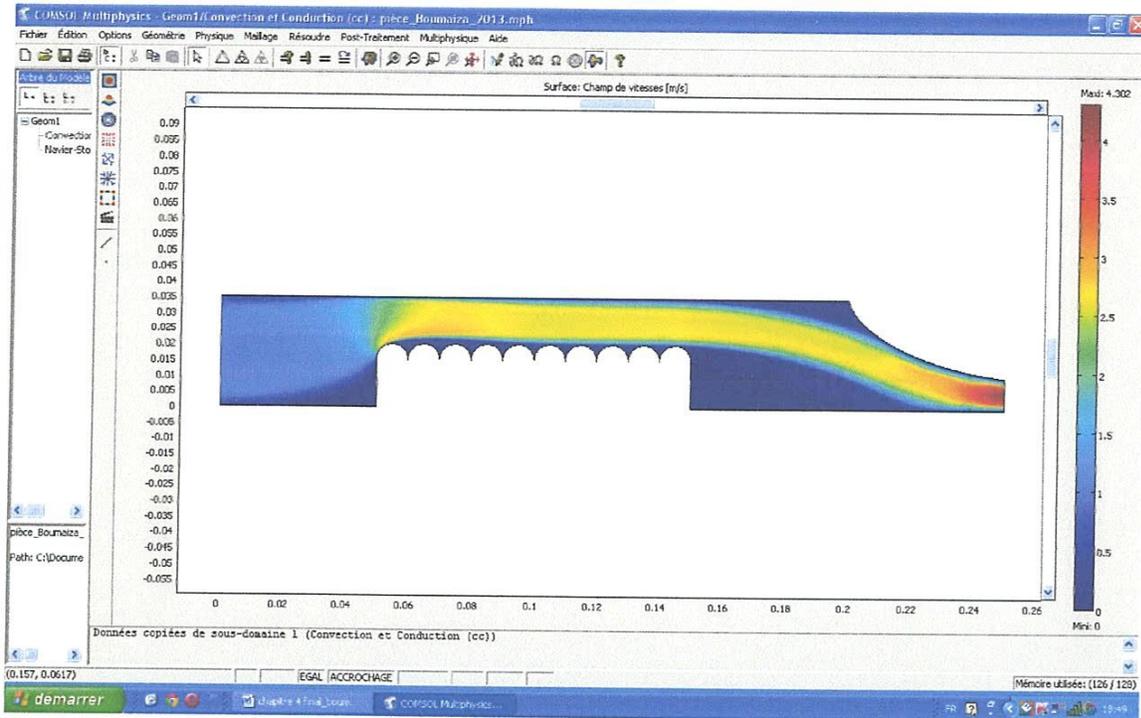


Figure IV-19 : Champs de vitesses en représentation surfacique

IV-6-2-2 : Champs de température

Pour une vitesse d'entrée $U_0=1\text{m/s}$, nous obtenons les distributions de température (Figure IV-20) et de flux de chaleur (Figure IV-22) qui témoignent d'un gradient de température près de la résistance (ondulation)

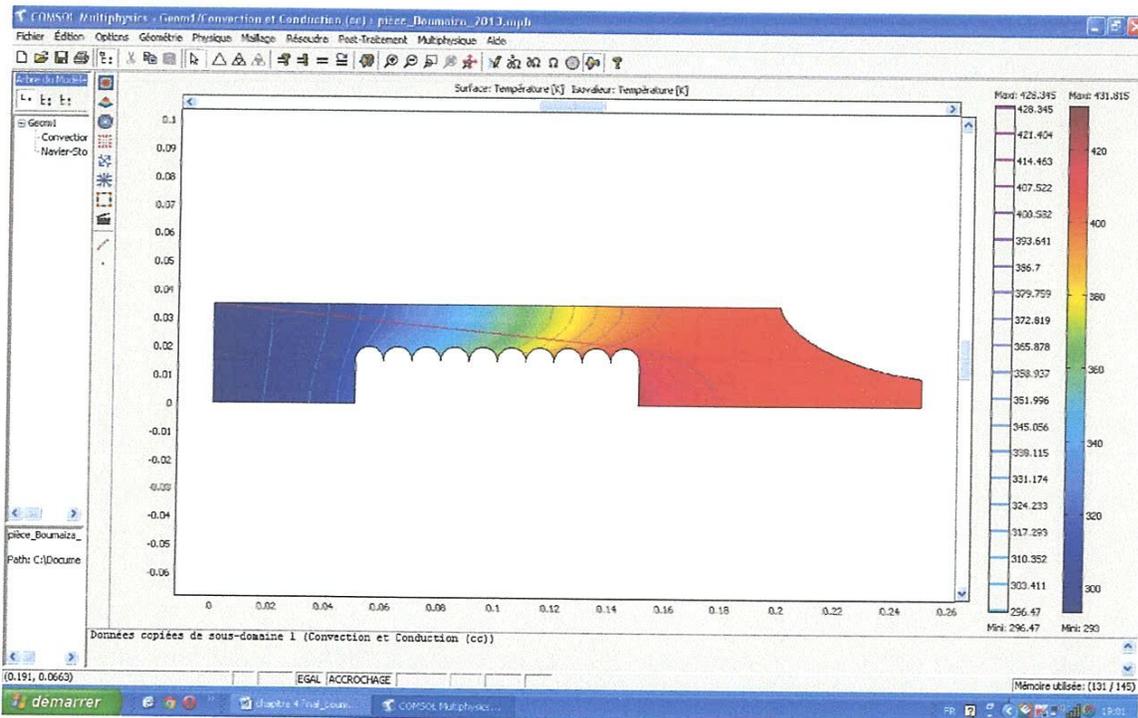


Figure IV-20 : Champs de températures

CHAPITRE IV

Ce profil de température est obtenu pour une ligne de section allant de $P_0(0,0.035)$ à $P_1(0.25,0.01)$ ce sont les coordonnées du point de départ et le point d'arrivée de la droite en rouge sur la figure représentant le champ de température (Figure IV-21)

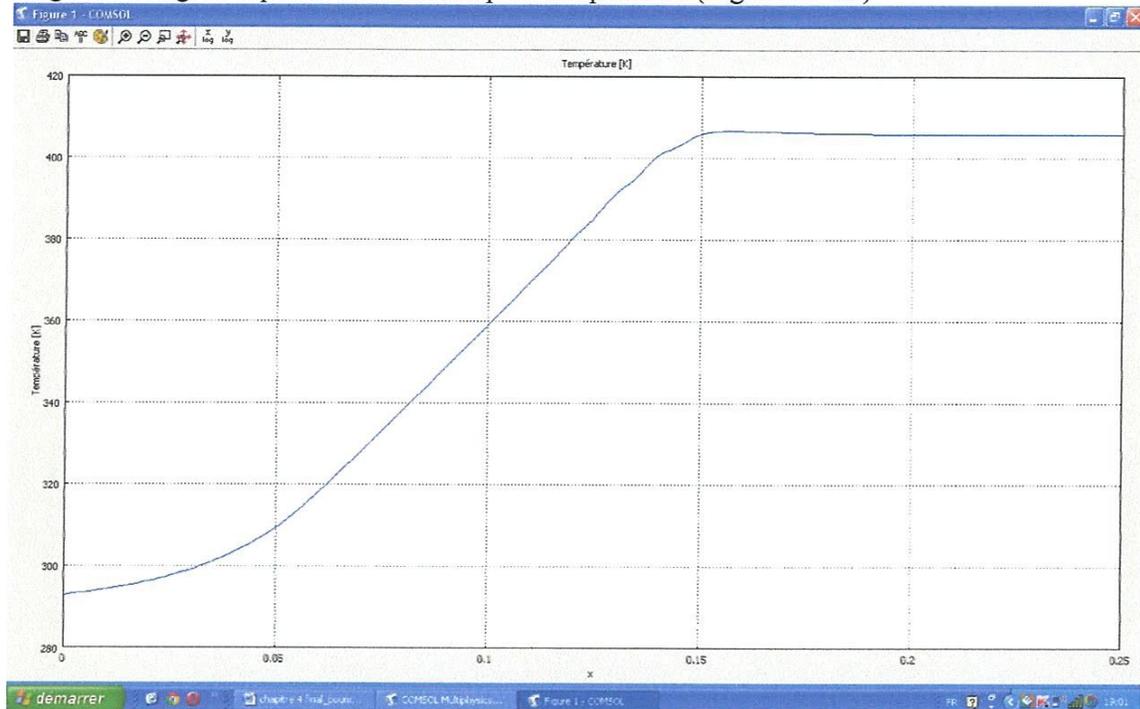


Figure IV-21 : Profil de température sur une ligne de section donnée

IV-6-2-3 : Champs de flux de chaleur

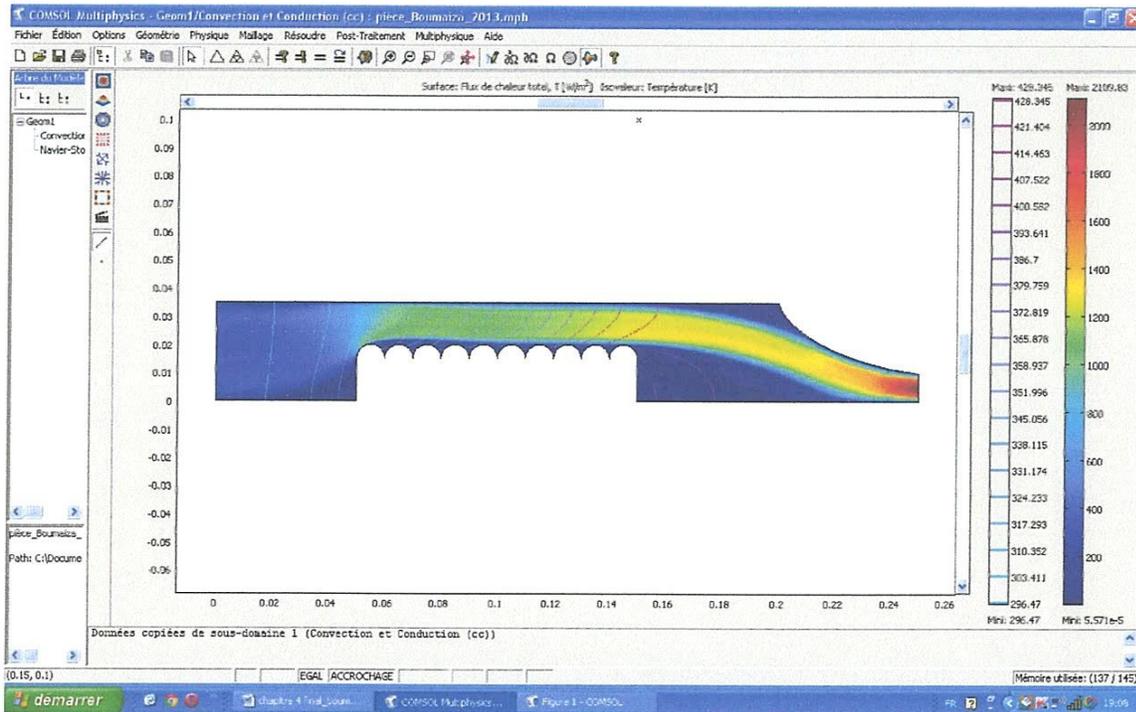


Figure IV-22: Champs de flux de chaleur

CHAPITRE IV

On voit bien que l'air converge (Figure IV-23) en prenant avec lui le flux de chaleur au niveau des résistances vers la sortie, ce qui confirme le rôle de ce système.

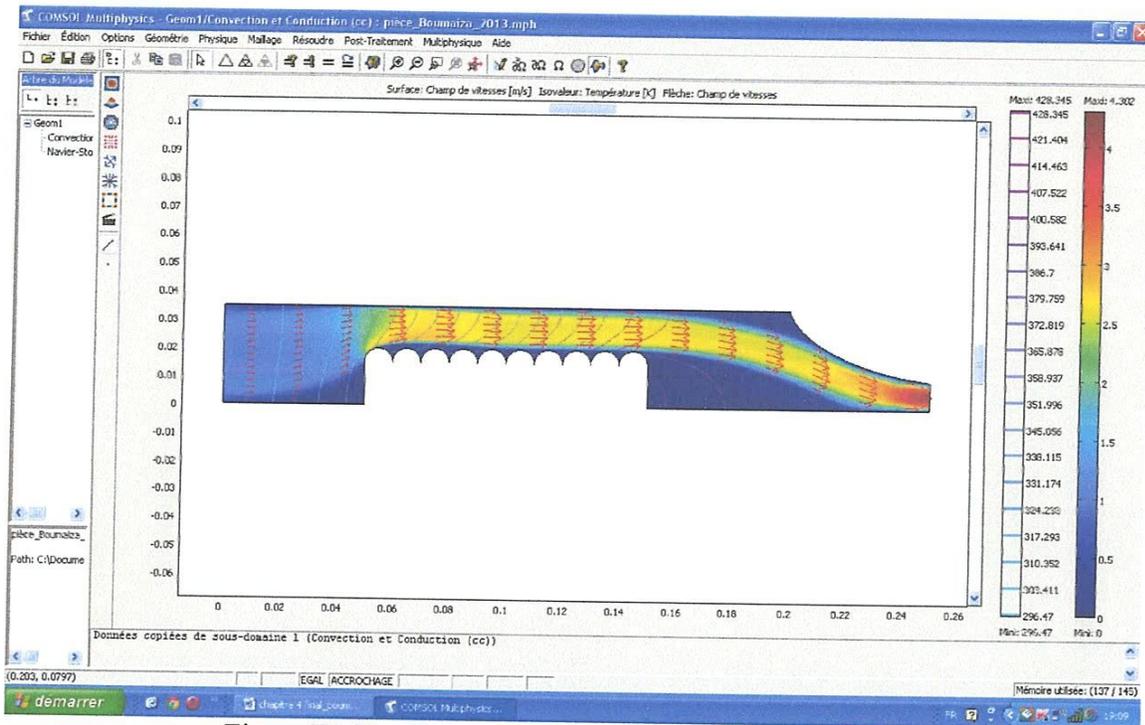


Figure IV-23 : Champs de vitesse et lignes de courant, $U_0 = 1\text{m/s}$

Il apparaît clairement que dans la zone près des parois la couche limite et les perturbations engendrées par la résistance ne sont guère intéressantes. Par contre, en amont de la résistance le coefficient d'échange est augmenté.

La figure IV-24 montre le flux de chaleur total, T dans le séchoir. Par contre les figures IV-25, 26, et 27 montrent la variation de flux de chaleur sur les points $P_1(0.25, 0)$, $P_2(0.12, 0.025)$, $P_3(0.25, 0.005)$ respectivement

On observe bien un changement de flux de chaleur à chaque point du séchoir, le flux de chaleur augmente progressivement à partir d'une valeur minimale

$Q_1 = 4.9968 \times 10^{-5} \text{ W/m}^2$ sur le point P_1 jusqu'à la valeur de flux de chaleur sur le point P_2

$Q_2 \approx 1200 \text{ W/m}^2$ et finalement la valeur maximale sur le point $P_3 \approx 2174.42 \text{ W/m}^2$

CHAPITRE IV

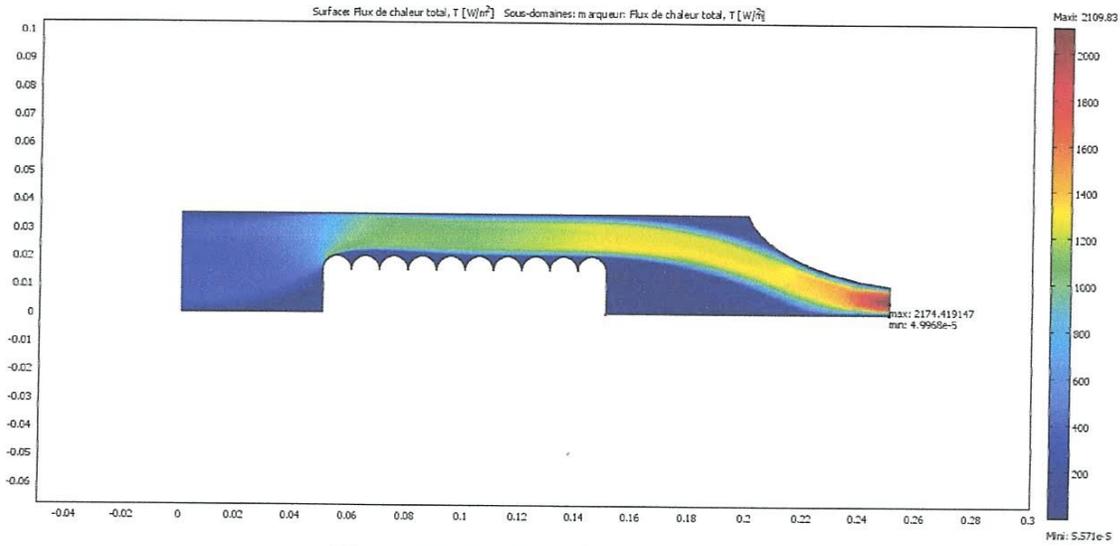


Figure IV-24 : Flux de chaleur total, T

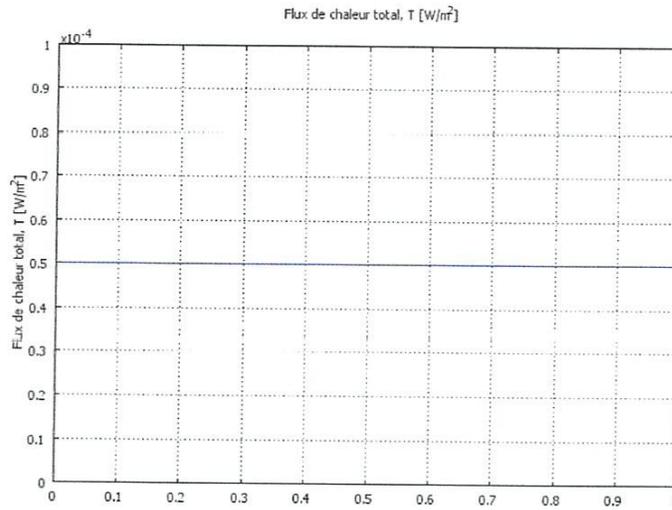


Figure IV-25 : Flux de chaleur sur le point P₁ (minimal)

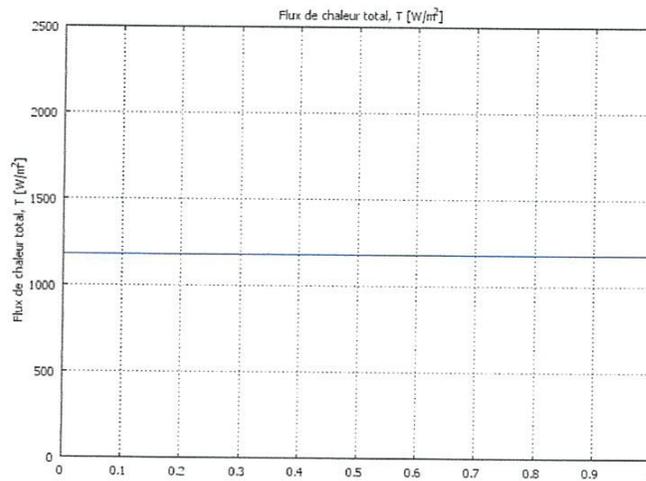


Figure IV-26 : Flux de chaleur sur le point P₂

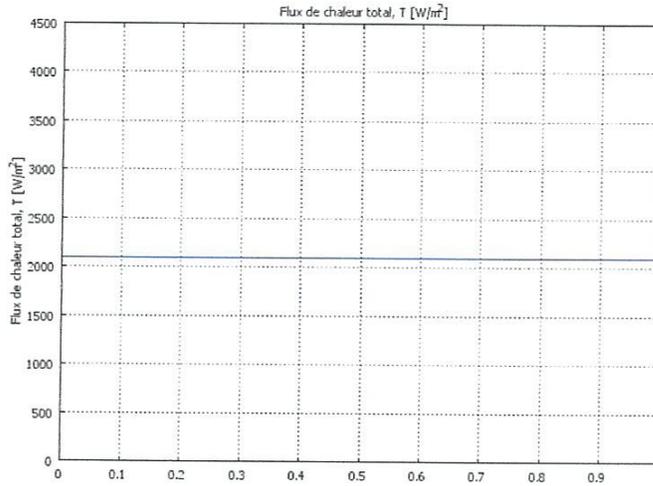


Figure IV-27 : Flux de chaleur sur le point P₃ (maximal)

D'une façon similaire, nous avons comparés les températures de trois points quelconques. La figure IV-28 montre la variation de la température T(°C) dans le séchoir. Par contre les figures IV-29, 30 et 31 montrent les valeurs des températures aux points : P₁(0,3.838 e⁻³), P₂(0.125, 0.025) et P₃ (0.14, 0.015) respectivement

On observe une évolution logique de la température en partant d'une valeur minimale de T₁=19.85°C sur le point P₁ et en passant par une valeur intermédiaire T₂≈130 °C sur le point P₂ pour atteindre une valeur maximale de T₃=158.665°C sur le point P₃.

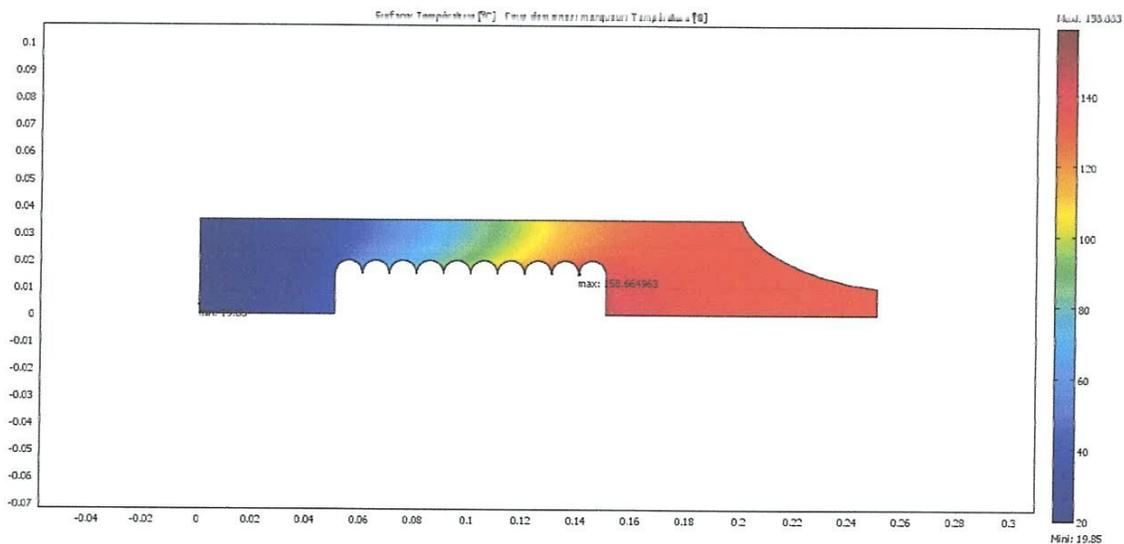


Figure IV-28 : Variation de la température sur le séchoir

CHAPITRE IV

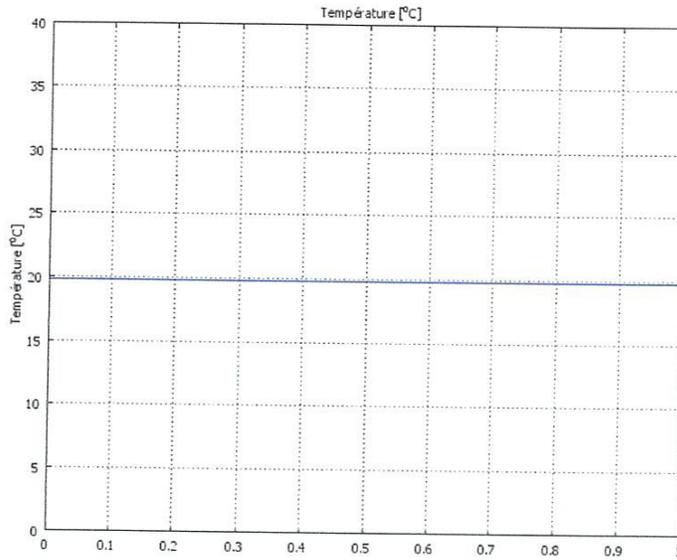


Figure IV-29 : Température sur le point P_1 (température minimal)

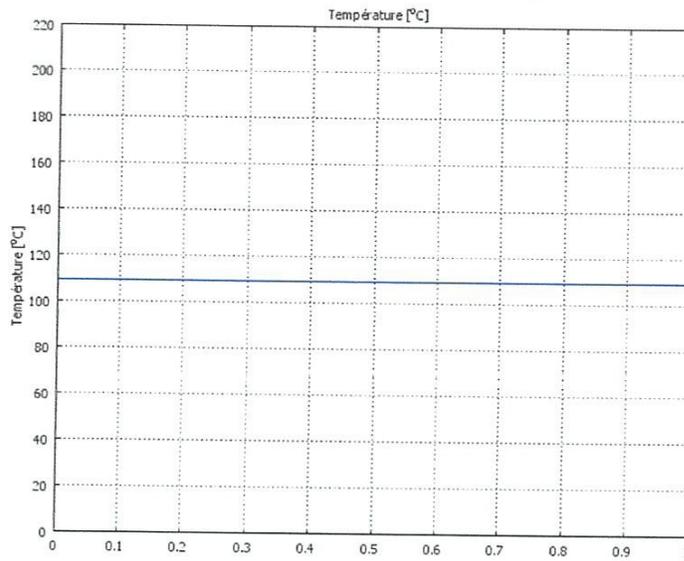


Figure IV-30 : Température sur le point P_2

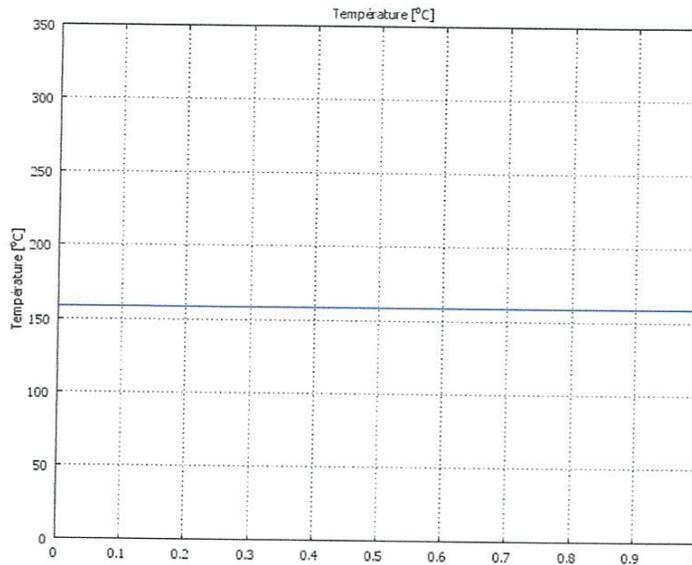


Figure IV-31 : Température sur le point P₃

La figure IV-32 montre la variation du champ de vitesse U (m/s) le long du séchoir, alors que les figures IV-33, 34 et 35 montrent les valeurs des vitesses aux points P₁ (0.11, 0.015) ; P₂ (0.14, 0.025) et P₃ (0.25, 0.004) respectivement

On observe bien un changement sur les valeurs des vitesses sur les différents points du séchoir puisque la vitesse augmente progressivement à partir d'une valeur minimale (très faible mais supérieure à zéro) $U_1 \approx 1.3 \text{ E-}30$ (m/s) sur le point P₁ jusqu'à la vitesse $U_2 \approx 2.7$ (m/s) sur le point P₂ et finalement atteint une valeur supérieure $U_3 \approx 4.433$ (m/s) sur le point P₃

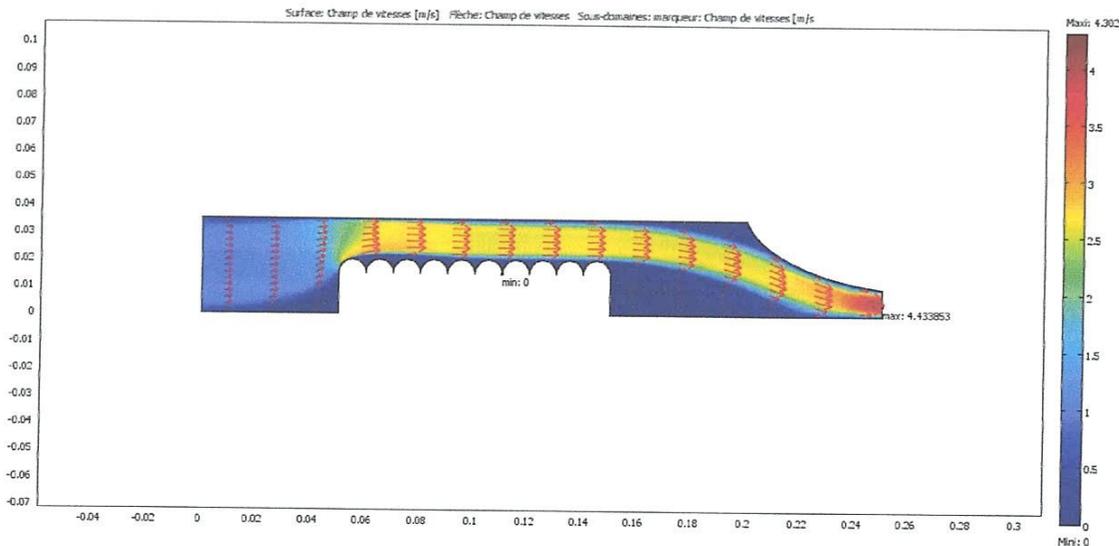


Figure IV-32 : Variation de champ de vitesse

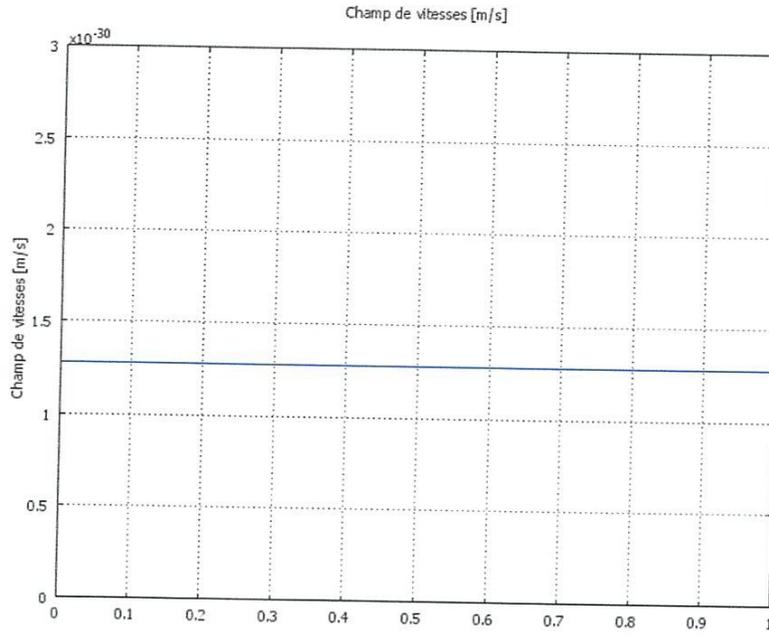


Figure IV-33 : Vitesse sur le point P₁

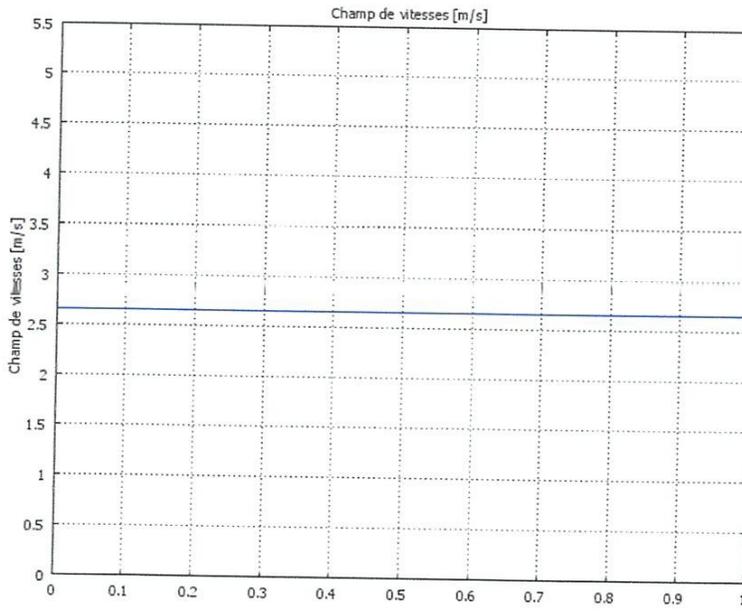


Figure IV-34 : Vitesse sur le point P₂

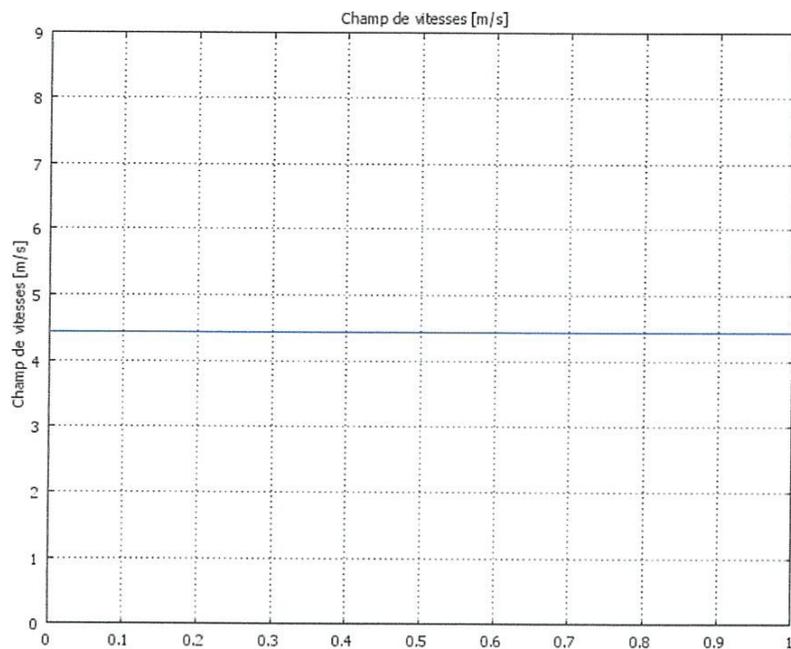


Figure IV-35 : Vitesse sur le point P_3

Le même travail a été réalisé pour la représentation du champ de pression le long du séchoir (Figure IV-36). Nous avons, procédé également de la même manière pour la détermination des différentes valeurs de pression aux points $P_1 (0, 0)$; $P_2 (0.13, 0.025)$; et $P_3 (0.25, 0.01)$ qui sont représentés, respectivement par les figures IV-37, 38 et 39

On observe bien et contrairement à la température et au flux de chaleur la pression début avec une valeur maximale $Pr_1 \approx 9.305(\text{Pa})$ au point P_1 en passant par $Pr_2 = 5.5(\text{Pa})$ au point P_2 pour atteindre une valeur minimale à la sortie $Pr_3 = 0 (\text{Pa})$ au point P_3 .

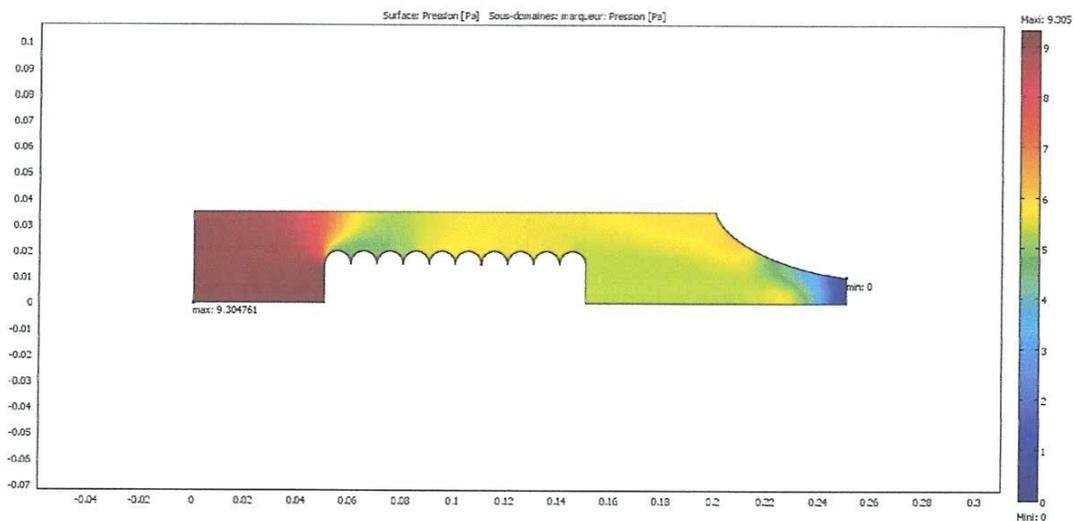


Figure IV-36 : Champ de pression

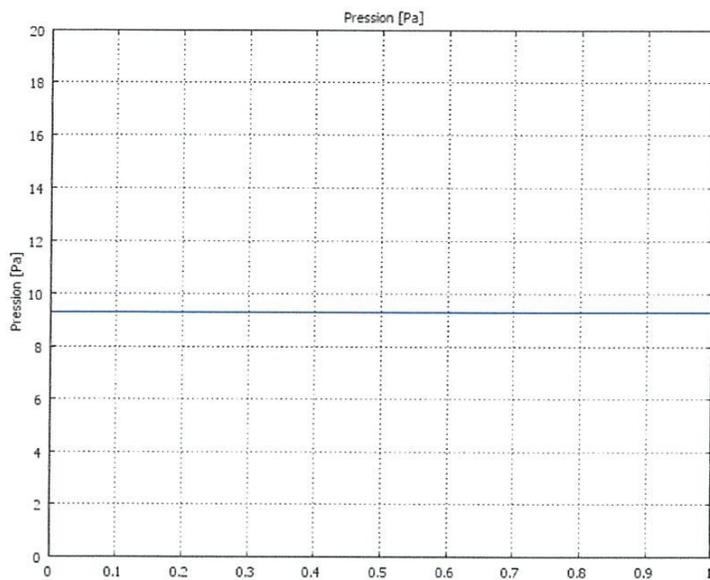


Figure IV-37 : Pression au point P₁

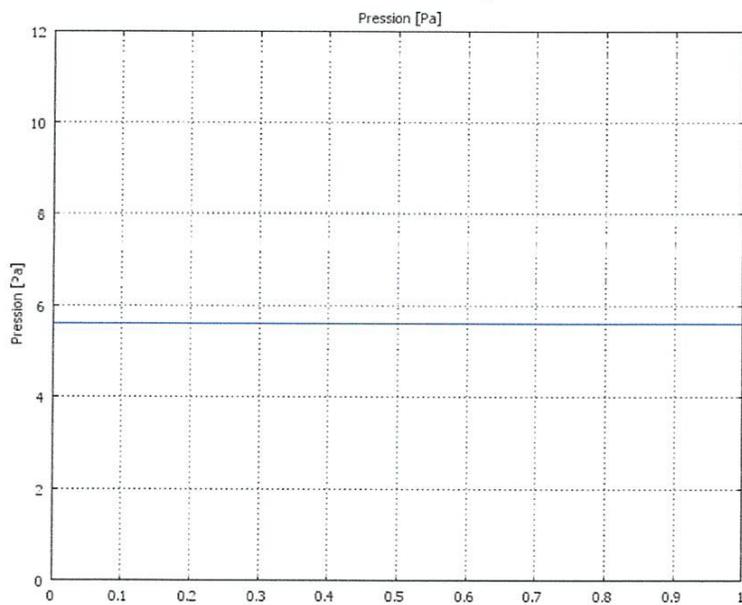


Figure IV-38 : Pression au point P₂

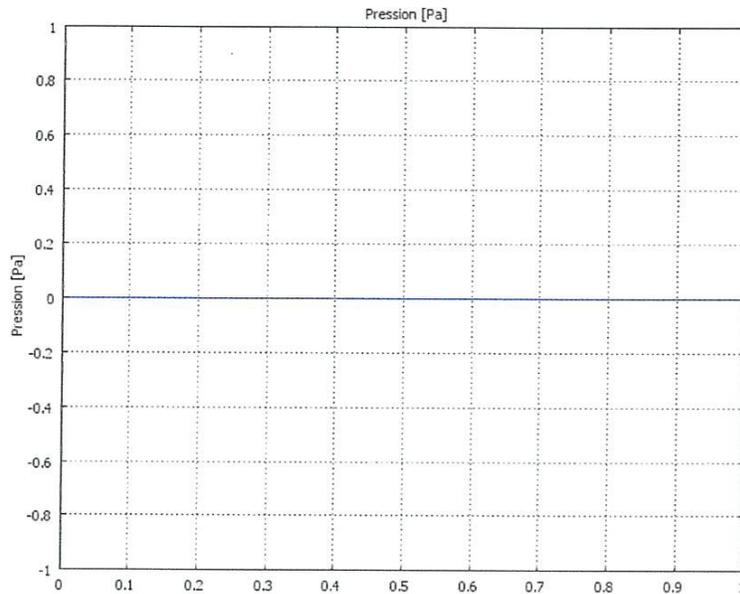


Figure IV-39 : Pression au point P₃

IV-6-3 : Effet de la vitesse d'entrée sur les paramètres recherchés

Afin de mettre en évidence l'effet du type de convection nous déterminé quelques propriétés physiques cette fois ci tout en augmentant la vitesse d'entrée de 50% soit $U_0= 1.5$ m/s et cela aux points dont les coordonnées sont données par le tableau suivant.

Pts	P ₁	P ₂	P ₃
<i>x</i>	0	0.1	0.25
<i>y</i>	0.02	0.025	0.01

Tableau IV-3 : coordonnées des différents points

Tableau comparatif des valeurs de Flux de chaleur, température, Pression et Vitesse déterminées aux points P₁, P₂ et P₃ pour deux vitesses distinctes (1 m/s et 1.5 m/s).

CHAPITRE IV

		$U_0=1\text{m/s}$	$U_0=1.5\text{m/s}$
Flux de Chaleur	Q_1	350 W/m ²	540 W/m ²
	Q_2	1150 W/m ²	1650 W/m ²
	Q_3	2100 W/m ²	2900 W/m ²
Température	T_1	20°C	20°C
	T_2	87°C	65°C
	T_3	135°C	96°C
Pression	Pr_1	9.1 Pa	20 Pa
	Pr_2	5.7 Pa	12.5 Pa
	Pr_3	0 Pa	0 Pa
Vitesse	U_1	1 m/s	1.5 m/s
	U_2	2.6 m/s	4 m/s
	U_3	4.3 m/s	6.5 m/s

Tableau IV-4 : Comparaison des propriétés physiques entre les deux vitesses

a- Flux de chaleur : la variation du flux de chaleur se comporte de la même façon pour les deux cas de vitesses en passant par une valeur moyenne (P_2) depuis la valeur minimale du P_1 pour atteindre une valeur maximale au point P_3 . L'augmentation de la vitesse a un effet logique sur le flux de chaleur puisque nous avons enregistré une augmentation d'une moyenne de 30% pour une élévation de la vitesse de 50%.

b-Température : l'augmentation de la vitesse a pour effet de diminuer les différentes valeurs de la température dans les différents points considérés et cela en partant de l'entrée vers la sortie du séchoir.

c- Pression : l'augmentation de la vitesse a fait que les valeurs de la pression ont augmenté d'au minimum de 50% à l'entrée pour atteindre la pression atmosphérique à la sortie.

d- Vitesse : Mêmes constatations que pour le flux de chaleur.

Conclusion générale

Les codes de calcul sont des outils puissants au service de l'industrie et de la recherche. Ils sont devenus partie intégrante des méthodes de conception. Il est remarquable de noter le rôle fédérateur que joue cette discipline à travers la diversité des sciences et techniques et des acteurs en présence : industriels, exploitants, chercheurs, théoriciens, expérimentateurs. Le calcul Scientifique autorise une réelle synergie dirigée vers la résolution d'un problème concret d'intérêt, besoin de savoir des théoriciens, besoin d'avancer des chercheurs. Le lien qu'il assure entre monde réel et théories est absolument essentiel. Il est à la fois source de progrès technique et économique.

Dans cette optique nous avons procédé à la modélisation (simulation numérique) sous Comsol Multiphysics d'un système de séchage (séchoir domestique). Lors de cette simulation, on essaiera d'introduire les différents types de transferts de chaleur pour voir l'effet de la température sur le phénomène qui en résultent dans le système.

Dans un premier temps, nous avons commencé notre travail par la présentation d'un modèle pour la résolution d'un problème bidimensionnel de transfert de chaleur par conduction dans un domaine carré en utilisant la méthode des différences finies. Le modèle développé a été également vérifié par rapport aux mesures analytiques à l'aide d'un programme sous Matlab pour validation. La même géométrie a été modélisée par Comsol et a abouti à des résultats qui ont donnés une très bonne concordance.

Ainsi, la comparaison des valeurs obtenues avec le modèle développé montre une bonne corrélation ce qui confirme la validité du modèle proposé.

Ensuite, nous avons proposé un modèle d'un système de séchage permettant de résoudre par éléments finis simultanément deux types d'équations aux dérivées partielles, il s'agit de l'équation de Navier Stokes et l'équation de chaleur (conduction et convection).

Donc, avec un modèle assez simple (géométriquement) avec introduction facile des conditions initiales et des conditions aux limites nous avons pu proposer un modèle qui a donné des résultats logique et proche de la réalité et qui a confirmé l'effet de certains

Conclusion Générale

paramètres sur les propriétés physiques mise en jeu lors de l'écoulement de l'air avec un échange de chaleur qui en résulte.

Les résultats obtenus dans configuration permettent d'envisager désormais une étude plus approfondie des conditions favorables à l'intensification des échanges convectifs.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. Taik Cours: Equations aux Dérivées Partielles Méthodes des Différences Finies
[http :laurent.risser.free.frTHESEcoursM11_2006.pdf](http://laurent.risser.free.fr/THESEcoursM11_2006.pdf)
- [2] Sophie CARTEL l'École nationale supérieure des mines de Paris Spécialité « Mécanique
» présentée et soutenue publiquement le 25 novembre 2011
- [3] FN CRES Introduction aux équations aux dérivées partielles et leurs résolutions
numériques [http :foad-2i.edu.org/index.php?option](http://foad-2i.edu.org/index.php?option)
- [4] A., BENMEDDOUR, « Etude et simulations numériques des contraintes
thermomécaniques dans le silicium photovoltaïque », Thèse de doctorat en génie Mécanique,
Université, Mentouri, Constantine, 2010.
- [5] A., BENATI, « Etude de comportement mécanique en traction des élastomères chargés »
Mémoire de master, Université de Guelma 2012
- [6] Hervé Oudin Méthode des éléments finis 28/09/2008
<http://cel.archives-ouvertes.fr/docs00341772/PDF/MEF.pdf>
- [7] S. Gounand1 cours ensta b2-1 introduction à la méthode des éléments finis en mécanique
des fluides incompressibles 26 septembre 2012
- [8] Jean-luc Battaglia, Andrzej Kusiak, Jean-Rodolphe Puiggali introduction aux transferts
thermiques cours et exercices corrigés Dunod, Paris, 2010
- [9] Yves Jannot transferts thermiques 2002
- [10] K. BELLAG, « Calcul du facteur de concentration de contraintes dans les jonctions
Tubulaires soudées soumises à des chargements combinés », Mémoire de Magister,
Université Mentouri Constantine, 2012
- [11] M, HADDADI « Etude numérique avec comparaison expérimentale des propriétés
thermophysiques des matériaux composites à matrice polymère », Mémoire de Master en
Physique, Université de Batna, 2011
- [12] S., A., KOURAS, « Etude et simulation d'un micro-capteur chimique à base de FET »,
Mémoire de diplôme de Magister, Université de Batna, 2011
- [13] OLADEJO K. A, ABU R., M. D. ADEWALE, 'Modélisation et simulation des
problèmes de l'ingénierie sous COMSOL Multiphysics' Volume 2 No.10, October 2012
ISSN 2224-3577 International Journal of Science and Technology
- [14] M. ELTOUKHY, S. ASFOUR, M. ALMAKKY, C. HUANG, 'Instabilité thermo-
élastique dans Freins à disque: Simulation de Problème de génération de chaleur' Excerpt