

**Université 8 mai 1945 de Guelma**  
**Faculté des Sciences et de la Technologie**  
**Département de Génie Mécanique**



**Mémoire de Fin d'études**

Pour l'obtention du diplôme de Master

Présenté par : **CHIHAOUI Naima**

Option : **Maintenance Industrielle**

=====

***Comportement dynamique en flexion d'un  
rotor multi-disques coaxiaux par le logiciel  
ROTORINSA***

=====

Sous la direction de :

**Dr. REZAIGUIA ABDELOUAHAB**

Année universitaire 2013/2014

# Table des Matières

1413029

<b>Introduction Générale.....</b>	<b>01</b>
<b>Chapitre 1 : Recherche Bibliographique .....</b>	<b>03</b>
1.1. Introduction .....	04
1.2. Méthode des éléments finis en dynamique des rotors : état de l'art.....	04
1.3. Quelques logiciels d'éléments finis spécifiques en dynamique des rotors.....	04
1.3.1. Logiciel ROTORINSA.....	04
1.3.2. Logiciel MADYN 2000 .....	09
1.3.3. Logiciel TORSION.....	15
1.3.4. Logiciel MLTIROTOR.....	15
<b>Chapitre 2 : Modélisation des rotors par éléments finis .....</b>	<b>16</b>
2.1. Introduction .....	17
2.2. Eléments finis en dynamique des rotors.....	17
2.2.1. Disque.....	17
2.2.2. Arbre.....	18
2.2.3. Masse du balourd.....	23
2.2.4. Paliers.....	24
2.3. Résolution des équations du mouvement par la méthode pseudo-modale....	25
<b>Chapitre 3 : Comportement dynamique en flexion d'un rotor multi disques coaxiaux : utilisation du logiciel ROTORINSA .....</b>	<b>29</b>
3.1. Introduction .....	30
3.2. Exemple d'application numérique.....	30
3.3. Géométrie du rotor.....	31
3.4. Modèle Éléments Finis du rotor.....	31

3.5. Résultats numériques.....	32
3.6. Influence du nombre de modes.....	38
3.7. Influence du maillage.....	40
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>41</b>
<b>Annexe A</b> Constriction des fonctions de forme d'un élément de poutre en flexion.....	<b>43</b>
<b>Annexe B</b> Étude Numérique Utilisation Du Logiciel ROTORINSA.....	<b>45</b>
<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>47</b>

## Liste des Figures

<b>Figure 1.1</b> Schéma de fonctionnement de ROTORINSA [26].....	06
<b>Figure 2.2</b> Différents modules du Préprocesseur [26].....	06
<b>Figure 1.3</b> Schéma des différents modules de calcul et du Postprocesseur.....	07
<b>Figure 1.4</b> Rotor sur Palier Magnétique Actif.....	07
<b>Figure 1.5</b> Géométrie du rotor.....	08
<b>Figure 1.6</b> Modèle éléments finis du rotor.....	08
<b>Figure 1.7</b> Diagramme de Campbell .....	08
<b>Figure 1.8</b> Exemple de déformés propres d'un système composé d'une turbine et d'un générateur.....	09
<b>Figure1.9</b> Traçage d'une ligne d'arbre en MADYN 2000 avec diverses informations sur l'arbre et de ses sous-objets tels que des masses et supports de paliers .....	11
<b>Figure1.10</b> Mode propre combiné torsion-flexion .....	12
<b>Figure1.11</b> Diagramme de Campbell (fréquence propre et amortissement en fonction de la vitesse de rotation) des vibrations de flexion d'un train d'un turbo-alternateur.....	13
<b>Figure1.12</b> Modes critiques en flexion du train du turbo-alternateur (mode 1 à 6).....	13
<b>Figure1.13</b> Fonctions de transfert et valeurs propres d'une ligne d'arbre à quatre paliers magnétiques.....	14
<b>Figure1.14</b> Déformés propres de la ligne d'arbre à quatre paliers magnétiques.....	14
<b>Figure2.1</b> Degrés de liberté possibles d'un élément de disque.....	17
<b>Figure 2.2</b> Degrés de liberté possibles d'un élément arbre.....	18
<b>Figure 2.3</b> Schématisation du balourd élémentaire.....	23
<b>Figure2.4</b> Amortissement et raideurs de palier.....	24
<b>Figure 3.1</b> Modèle mathématique du rotor multi-disques coaxiaux.....	31
<b>Figure 3.2</b> Géométrie du rotor générée par ROTORINSA.....	31
<b>Figure 3.3</b> Modèle éléments finis du rotor.....	32
<b>Figure 3.4</b> Déformée statique du rotor pour plusieurs cas de chargement statiques.....	33
<b>Figure 3.5</b> Modes de la base modale.....	34
<b>Figure 3.6</b> Diagramme de Campbell.....	35
<b>Figure 3.7</b> Modes en rotation, $N = 4000$ tr/mn.....	36
<b>Figure 3.8</b> Réponse au balourd pour différents nœuds.....	37
<b>Figure 3.9</b> Réponse due à une force asynchrone pour différents nœuds.....	38
<b>Figure 3.10</b> Influence du nombre de modes sur le diagramme de Campbell, $n = 2$ modes, (b) : $n = 4$ modes.....	38
<b>Figure 3.11</b> Influence du nombre de modes sur la réponse au balourd, (a) : $n = 2$ modes, (b) : $n = 4$ modes.....	39
<b>Figure 3.12</b> Différents maillages utilisés pour modéliser le rotor.....	40

## Introduction Générale

L'apparition de la méthode des éléments finis a également et profondément influencée le domaine de la dynamique des rotors. Au départ, les codes de calcul des éléments finis ne peuvent pas être utilisés pour l'analyse de la dynamique des rotors en raison du manque de considération des effets gyroscopiques. Par la suite, la matrice gyroscopique est prise en compte dans la formulation éléments finis. Actuellement, plusieurs fabricants commerciaux utilisent des codes d'éléments finis spécifiques pour la dynamique des rotors tels que les logiciels ROTORINSA et MADYN 2000. Grâce à la modélisation éléments finis, il est possible d'étudier le comportement dynamique des rotors des machines qui tournent à grandes vitesses et contenant plus de détails et par conséquent obtenir des prédictions quantitatives avec un certain degré de précision élevé.

Dans la dynamique des rotors des machines tournantes, les équations de mouvement sont légèrement différentes à celles de la dynamique des structures. Elles ont la forme générale suivante :

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([C] + [G(\Omega)])\{\dot{q}\} + ([K] + [H(\Omega)])\{q\} = \{F\}$$

Où  $\{q\}$  est le vecteur des degrés de liberté contenant les coordonnées généralisées,  $[M]$  est la matrice de masse symétrique,  $[C]$  est la matrice d'amortissement symétrique,  $[G(\Omega)]$  est la matrice gyroscopique antisymétrique,  $[K]$  est la matrice de raideur symétrique,  $[H(\Omega)]$  est la matrice circulatoire antisymétrique et  $\{F\}$  est le vecteur dans lequel toutes les forces sont regroupées. La matrice gyroscopique contient des termes d'inertie qui, dans le cas de la dynamique des rotors, sont strictement liés aux moments gyroscopiques agissant sur les parties tournantes de la machine. Si l'équation est écrite par rapport à un repère non inertiel, les termes liés à l'accélération de Coriolis sont aussi présents dans la matrice gyroscopique. La matrice circulatoire contient des termes non conservatifs liés à l'amortissement des éléments tournants et; si on utilise un modèle linéaire pour les paliers à fluides; à l'amortissement du film fluide entourant le tourillon. Il est bien connu que la présence d'une matrice circulatoire, peut causer l'instabilité et les rotors ne font pas exception à cette règle. Il faut noter que, dans la dynamique des rotors, les matrices gyroscopique et circulatoire sont proportionnelles à la vitesse de rotation  $\Omega$  et quand la vitesse tend vers zéro, les termes antisymétriques disparaissent et l'équation se réduit à celui d'une structure non tournante. En outre, les matrices d'amortissement et de rigidité peuvent dépendre de la vitesse de rotation, souvent avec  $\Omega^2$  et  $[H]$  peut-être une fonction plus complexe de  $\Omega$ .

L'analyse dynamique des rotors n'est pas limitée à la conception : elle peut fournir des outils indispensables pendant le test et le fonctionnement réel des

machines. Il est essentiel d'acquérir une connaissance approfondie des conditions de travail et pour effectuer la maintenance préventive. Actuellement, la dynamique des rotors est un domaine de recherche très actif. Plusieurs chercheurs travaillent non seulement sur la dynamique linéaire des rotors, mais aussi dans la dynamique non linéaire des rotors à vitesses variables et dans le contrôle actif des machines tournantes. Chaque année, de nombreuses conférences et séminaires scientifiques sur la dynamique des rotors sont déroulés. Ainsi que le nombre de documents publiés dans des revues scientifiques et des livres augmente d'une manière importante.

Le but de ce mémoire de fin d'étude est la modélisation éléments finis d'un rotor industriel multi-disques coaxiaux par le logiciel d'éléments finis ROTORINSA, spécifique pour la dynamique des rotors en flexion.

La recherche bibliographique présentée au premier chapitre a pour but de donner une historique sur l'application de la méthode des éléments finis en dynamique des rotors, citer quelques logiciels spécifiques en dynamique des rotors des machines tournantes.

Le deuxième chapitre concerne la modélisation des vibrations de flexion des éléments de rotors des machines tournantes par la méthode des éléments finis. Les matrices élémentaires des différents éléments de rotor sont présentées d'une manière explicite en utilisant les équations de Lagrange. La forme générale des équations du mouvement sous forme matricielle ainsi que la méthode de leurs résolutions sont présentées.

Le troisième chapitre vise à étudier numériquement le comportement dynamique en flexion d'un rotor industrielle multi disques coaxiaux en utilisant le logiciel d'éléments finis ROTORINSA. Ce dernier apporte une solution très précise et fiable pour la dynamique des rotors en flexion. Plusieurs résultats sont présentés et commentés.

Le mémoire est clôturé par une conclusion générale.

# 1

## Recherche Bibliographique

### Sommaire

---

<b>1.1. Introduction .....</b>	<b>04</b>
<b>1.2. Méthode des éléments finis en dynamique des rotors : état de l'art .....</b>	<b>04</b>
<b>1.3. Quelques logiciels d'éléments finis spécifiques en la dynamique des rotors .....</b>	<b>04</b>

---

*Cette recherche bibliographique a pour but de donner une historique sur l'apparition et l'application de la méthode des éléments finis en dynamique des rotors, de citer quelques logiciels avec leurs caractéristiques et capacités, spécifiques en dynamique des rotors des machines tournantes .*

## 1.1 Introduction

La méthode des éléments finis, très utilisée pour le calcul des structures complexes, est également efficace en dynamique des rotors des machines tournantes telles que les turbines, les compresseurs et les turbomachines en générale. Les codes de calcul des éléments finis ne peuvent pas être utilisés directement pour modéliser et analyser les rotors des machines tournantes en raison du manque de considération des effets gyroscopiques, phénomène qui caractérise la dynamique des rotors. Il doit donc être pris en compte et des méthodes de résolution spécifiques peuvent être avantageusement employées.

## 1.2 Méthode des éléments finis en dynamique des rotors : état de l'art

Dans la dynamique des rotors, la méthode des éléments finis (MEF) est plus souvent appliquée pour la discrétisation spatiale des éléments d'un système, telle que discutée par Dokainish [1], Ruhl et al. [2], Nelson et al. [3], Meirovitch [4], Ohga et al. [5], Degen et al. [6], Subbiah et al. [7], et d'autres. Pour un modèle général du système rotor/palier, la MEF est nécessaire pour faire face aux problèmes de fréquences propres complexes et à la dépendance de la vitesse de rotation, ainsi que l'augmentation du nombre d'opérations de calculs nécessaires pour la solution. Si le nombre de degrés de liberté du système est grand, ce qui est généralement le cas, l'analyse consiste à la répétition de la résolution d'un problème de fréquences propres de grande taille pour différentes vitesses de rotation du rotor.

Il existe plusieurs techniques pour réduire la taille du modèle éléments finis, tout en conservant les fréquences et les déformés modales fondamentales du modèle d'origine. Certaines méthodes, telles que la méthode de réduction dynamique généralisée (Schaeffer, [8]), la méthode de Lanczos (Nour-Omid et al, [9]), et la méthode du vecteur de Ritz (Wilson et al, [10]; Arnold et al, [11]), de réduire le nombre de variables modales et directement résoudre le problème aux valeurs et vecteurs propres. La méthode la plus populaire, qui constitue la base pour d'autres méthodes, est celle de réduction du Guyan [12], comme expliquée par exemple par Kidder [13], Rouch et al. [14], Downs [15], Shah et al. [16], Subbiah et al. [17], Kane et al. [18] et Ratan et al. [19]. Les degrés de liberté retenus dans l'algorithme de Guyan sont spécifiquement choisis et le système d'origine est réduit à la taille des degrés de liberté retenus. En plus, le développement des méthodes de réduction a apporté plusieurs améliorations dans les algorithmes de calcul ainsi qu'une plus grande précision dans la représentation des modes, possibilité de manipuler des matrices non symétriques (comme discuté par Kidder [13] et Shah et al. [16]), la présentation de la matrice de masse et la matrice de rigidité réduites et la réduction des matrices d'espace d'état (Kane et al [18]), en balayant les modes indésirables (Kane et al. [18], Fuh et al. [20]).

La Méthode des Matrices de Transfert (MMT), souvent combiné avec la méthode des éléments finis, traite des matrices de plus petite taille que celle dans la méthode des éléments finis. La MMT est utilisée à la fois dans les domaines d'analyse fréquentiel et temporel (Dokainish, [1]; Ohga et al, [5]; Degen et al, [6]; Lund et al, [21]; Mucino et al, [22]; Kumar

## 1.3 Quelques logiciels d'éléments finis spécifiques en la dynamique des rotors

### 1.3.1 Logiciel ROTORINSA

**ROTORINSA** ou **Sysrotor**, est un logiciel d'éléments finis, créé par le Laboratoire de Mécanique des contacts et des Structures de l'INSA de Lyon et le CNRS, destiné à prévoir l'analyse du comportement dynamique des rotors en flexion. Cette version fonctionne sous Windows et comprend trois grands modules : **Préprocesseur**, **Calcul** et **Postprocesseur**. C'est un fonctionnement par projet. Un projet, par exemple : **machine1**, correspond à l'analyse du rotor

associé au fichier courant de données **machine1.dat**. Ce fichier est le fichier de référence. Il contient les informations sur les nœuds, les éléments et les propriétés géométriques et physiques de la machine. Comme **ROTORINSA** est un logiciel d'éléments finis, ceci impose pour la modélisation éléments finis, la nécessité de fournir des données relatives à la géométrie du rotor (coordonnées des nœuds, conditions aux limites, description des éléments : arbre, disque, paliers, éléments supplémentaires), de données mécaniques (caractéristiques des matériaux, de raideur et d'amortissement des paliers en fonction de la vitesse de rotation) et d'informations relatives aux excitations. Les éléments supplémentaires, de type masse, raideur, effet gyroscopique, amortissement permettent la modélisation de nombreuses particularités : accouplements, prise en compte du bâti, de supports... Le logiciel utilisant la méthode pseudo-modale permet la prise en compte d'amortissements modaux. Le logiciel est basé sur la théorie décrite dans la référence [25].

Dans **ROTORINSA**, un élément d'arbre flexible dans deux plans est modélisé par élément de type poutre à 2 nœuds distincts et 4 degrés de liberté par nœud prenant en compte raideurs et masses classiques, force axiale, effet de cisaillement, d'inertie de rotation et gyroscopique. Un élément de type disque rigide a un nœud à 4 degrés de liberté prenant en compte effet de masse et gyroscopique. Un élément de type palier, accouplement, élément supplémentaire ou palier variable peuvent avoir un nœud ou bien deux nœuds prenant en compte les matrices de raideur et d'amortissement symétriques ou non et variables avec la vitesse de rotation. Un élément de type attraction magnétique a deux nœuds correspondant aux deux nœuds d'un élément de type arbre. Un élément de type palier magnétique a deux nœuds. Le premier est le nœud palier et le deuxième le nœud capteur.

Le préprocesseur permet de créer la géométrie du rotor dans le fichier (**\*.int**), et de générer son modèle éléments finis dans le fichier (**\*.dat**). A partir de ce fichier (**\*.dat**), l'utilisateur lance différents calculs en dynamique ou en statique et visualise graphiquement les différents résultats concernant la même machine.

### 1.3.1.1 Organisation du logiciel ROTORINSA

Le schéma de fonctionnement du logiciel est présenté par la **figure 1.1** [25]. Comme mentionner ci dessus, Il est constitué de trois modules : un **Préprocesseur** permettant de créer et visualiser la modélisation effectuée, un **Solveur** et un **Postprocesseur** permettant de visualiser et de tracer les diagrammes de Campbell, les réponses, les modes et les déformées. Actuellement il existe des versions, en français et en anglais, sur PC et stations de travail. Nous disposons seulement d'une **version démonstration 4.0.6** limitée à 4 fréquences et 10 nœuds.

La mise au point des données s'effectue par des allers et retours entre l'option **Préprocesseur** et l'éditeur de texte. Les éléments de la géométrie et les messages d'erreur sont fournis par un fichier de sortie (**trageo.txt**). L'option **Solveur** utilise le fichier de données (**\*.dat**) en entrée et le fichier archive (**\*.arc**) en entrée-sortie, suivant qu'il s'agit d'une reprise ou d'un calcul initial. Le fichier listing (**\*.lis**) contient toutes les données et tous les résultats de calcul ; il peut être consulté à l'écran et imprimé. Le fichier tracé (**\*.tra**) généré contient les informations nécessaires au **Postprocesseur**. Enfin le fichier (**trarot.txt**) garde la trace de l'exécution et contient les messages d'erreur. Les tracés sur papier peuvent être réalisés avec une imprimante couleur ou noir et blanc. Les fichiers de sortie sont notés (**\*.ps**) (format postscript), (**\*.hp**) (format hpgl) ou (**\*.bmp**) (format bitmap). Le fichier (**\*.tri**) garde la trace du triage des fréquences afin d'obtenir le diagramme de Campbell. Le **Solveur** (**figure 2.1**) permet essentiellement le calcul des fréquences, des modes et des réponses.

Le répertoire où se trouve le fichier projet (**\*.prj**) et le fichier de données (**\*.dat**) est le répertoire courant de travail. Tous les fichiers générés durant la session sont stockés dans ce répertoire

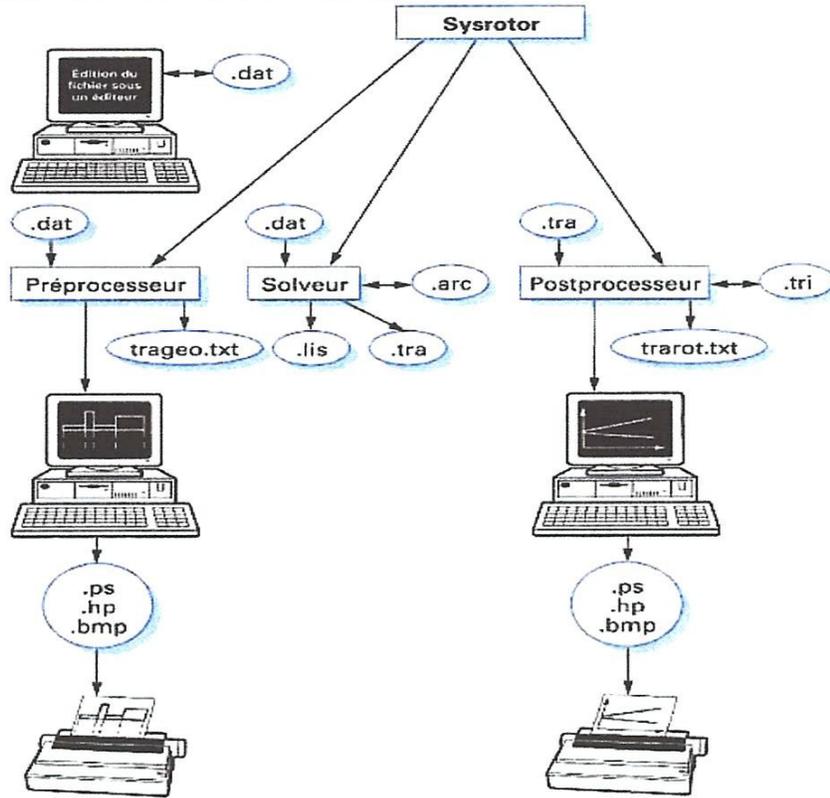


Figure 1.1 : Schéma de fonctionnement de ROTORINSA [26]

Les diagrammes suivants (figure 1.2), présentent les différents modules du préprocesseur, les fichiers d'entrée de chaque module et les fichiers résultats.

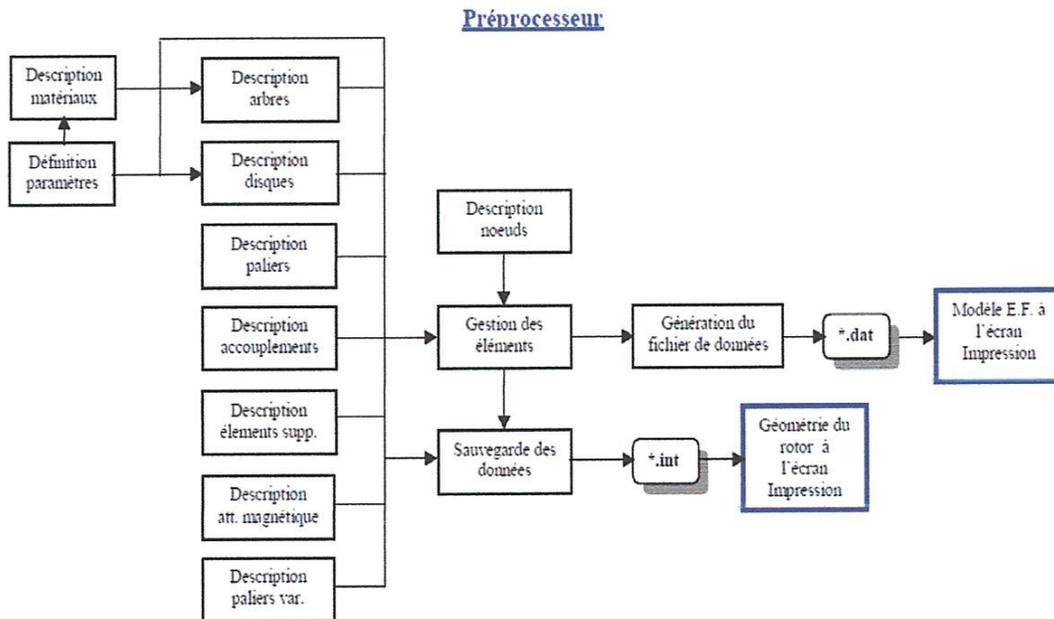


Figure 1.2 : Différents modules du Préprocesseur [26]

Les diagrammes suivants (**figure 1.3**) présentent les différents modules de **Calcul** et du **Postprocesseur**, les fichiers d'entrée de chaque module et les fichiers de résultats.

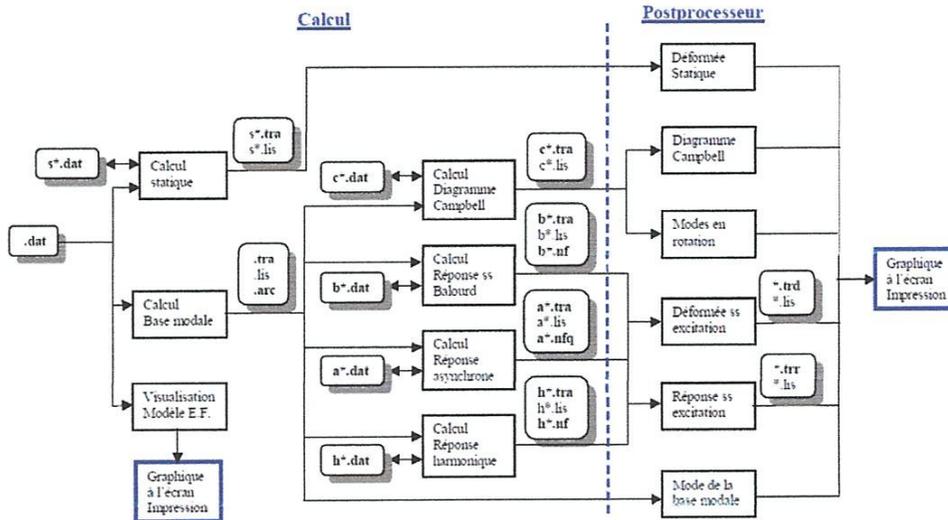


Figure 1.3 : Schéma des différents modules de calcul et du Postprocesseur [26]

### 1.3.1.2 Capacités d'analyse du logiciel

En Statique :

- La déformée due à un champ de gravité et/ou à des forces ponctuelles.

En dynamique :

- Fréquences naturelles et modes en rotation, diagramme de Campbell, instabilités et facteur d'amortissement.
- Réponse aux balourds, aux forces asynchrones, aux forces harmoniques fixes dans l'espace.
- Efforts aux paliers et contraintes dans les arbres.
- Energies cinétiques et de déformation élémentaires.

Voici un exemple avec résultats traités par ROTORINSA [26].

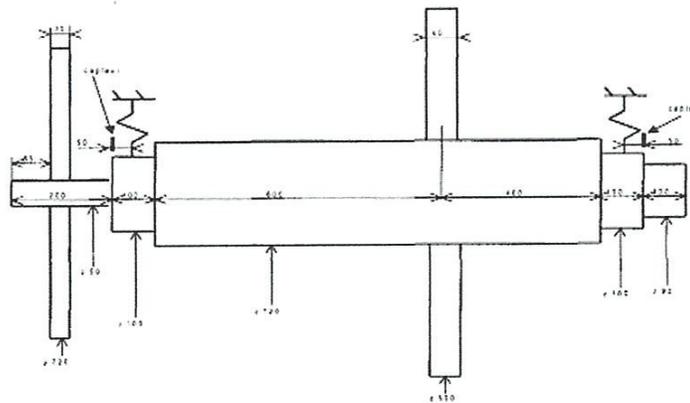


Figure 1.4 : Rotor sur Palier Magnétique Actif.

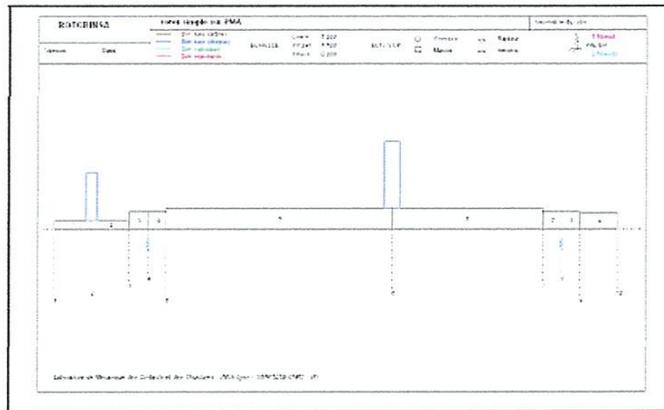
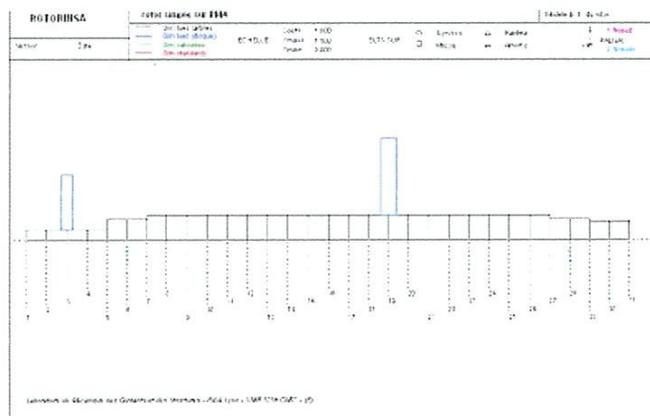
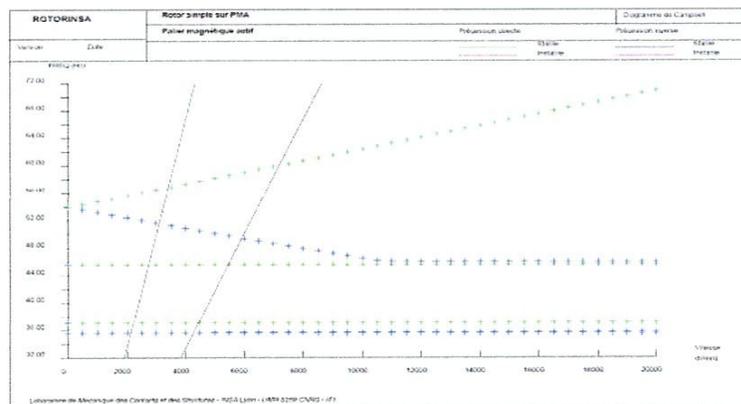


Figure 1.5 : Géométrie du rotor



Figures 1.6 : Modèle élément finis du rotor



Figures 1.7 : Diagramme de Campbell

### 1.3.2 Logiciel MADYN 2000 [27]

MADYN 2000 est un programme étendu de rotor dynamique qui est adapté pour des systèmes généraux rotor-engrenage-palier pour l'analyse des vibrations de flexion, de torsion et les vibrations couplées avec tous types de paliers y compris les paliers magnétiques. Le programme est basé sur une longue expérience industrielle depuis 1983. Elle couvre les besoins d'une large gamme de rotors de petits turbocompresseurs automobiles jusqu'aux grands lignes d'arbre de production d'électricité avec une puissance de plusieurs centaines de milliers de MW. Le module de palier magnétique dans MADYN 2000 remonte à un développement depuis 1998 qui a été lancé pour répondre aux exigences des applications industrielles des paliers magnétiques. MADYN 2000 met l'accent sur les besoins particuliers de la dynamique des rotors. Il se distingue d'autres outils de rotor dynamique par :

- La prise en compte du couplage entre les vibrations latérales, axiales et de torsion comme dans les engrenages.
- Les paliers magnétiques peuvent être modélisés par 'proven controller building blocks' semblables à des systèmes réels. Les paramètres des contrôleurs peuvent être optimisés par rapport à l'amortissement, les forces des paliers et la robustesse. L'analyse de la stabilité du système complet constitué par le rotor et le système de palier magnétique est considéré (aucune solution de substitution itérative avec une raideur et des coefficients d'amortissement du palier).
- La caractéristique non-synchrone due aux paliers à film fluide peut être envisagée.
- Les supports de roulements et des accouplements entre les supports peuvent être considérés par les fonctions de transfert qui peuvent être importées à partir de mesures ou de résultats de modèles éléments finis 3D d'un boîtier par exemple.
- Les caractéristiques non linéaires des films fluides des paliers peuvent être calculées et prisent en compte dans les analyses transitoires.

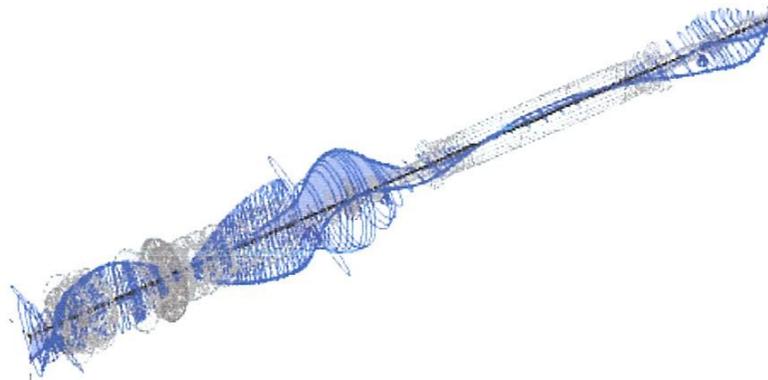


Figure 1.8 : Exemple de déformés propres d'un système composé d'une turbine et d'un générateur

#### 1.3.2.1 Historique de MADYN 2000

Les racines de MADYN remontent à l'Institut de Dynamique des Machines de l'Université Technique de Darmstadt en Allemagne. La recherche fondamentale dans ce programme d'élément finis est étendue sur 20 ans (1970 à 1990). En 1983, une version industrielle de MADYN a été apparue. Cette version a été principalement créée par Dr Heinz Dieter Klement. Au fil des années, les caractéristiques de MADYN ont été renforcées notamment par des analyses non linéaires. En 1998, un complément à MADYN a été créé par DELTA JS afin de répondre aux exigences des

applications de paliers magnétiques. En 2001, le projet MADYN 2000 a commencé avec les objectifs suivants :

- Dynamique des rotors en tenant compte de l'influence des enveloppes et des fondations
- Maintenir la puissance de MADYN concernant la dynamique des rotors
- Intégration d'un module complet pour l'analyse des paliers fluides
- Implémentation de nouvelles fonctionnalités qui sont devenues nécessaires en raison de nouvelles technologies telles que des paliers magnétiques
- Amélioration de la robustesse des solveurs (valeurs propres, intégration temporelle non linéaire)
- Implémentation des interfaces de l'état d'art pour utilisateurs
- Implémentation d'un module pour la présentation et le traçage des résultats
- Implémentation de modules pour la structure de données en utilisant l'orienté objet
- Implémentation d'une architecture d'un programme nécessaire pour atteindre les objectifs mentionnés ci-dessus.

Le module de l'analyse des paliers fluides dans MADYN 2000 remonte au programme ALP3T, qui est le résultat de plus de 20 ans de recherche du Pr. Glienicke.

### 1.3.2.2 Caractéristiques générales

MADYN 2000 possède des interfaces graphiques faciles à utiliser pour

- le modèle étudié,
- l'application des charges,
- définir et commencer les analyses,
- sélectionner et présenter les résultats.

MADYN 2000 a une structure de données orientée objet

- avoir des objets autonomes indépendants tels que : roulements, arbres, engrenages,
- pour la combinaison et le montage de pièces de modèles facile tels que les roulements et les arbres,
- de créer simplement des bibliothèques par le stockage d'objets dans des répertoires appropriés.

Les dessins et les graphiques sont clairs et orientés en pratique. Ils contiennent toutes les données et offre des options importantes pour la présentation d'information très compliquée.

- Module de traçage à différents échelles hiérarchiques : roulements, arbres, accouplements, engrenages, systèmes
- Traçage des déformés pour dus aux forces et aux moments, les contraintes et les déformations
- Présentation claire des déformés dépendantes du temps (les formes des modes complexes)
- Traçage de la résonance avec diverses options de résultats latéraux (directions sélectionnables, axe principal d'orbites, vibration relative)
- Différents diagrammes de fréquences propres
- Différents diagrammes pour des résultats avec variation des paramètres
- Traçage de réponse temporelle en régime à vitesse variable

Un système MADYN 2000 contient toutes les informations : Le modèle, les charges appliquées, les paramètres d'analyse et les résultats. L'explorateur de système permet de contrôler toutes les étapes d'une analyse de la dynamique des rotors. Le comportement du système est intelligent, c'est à dire en cas de changement de modèle, par exemple, les résultats qui sont affectés par le changement sont supprimés. Ainsi, l'uniformité du système est assurée.

Les analyses peuvent être automatisées à l'aide de fichiers de traitement par lots.

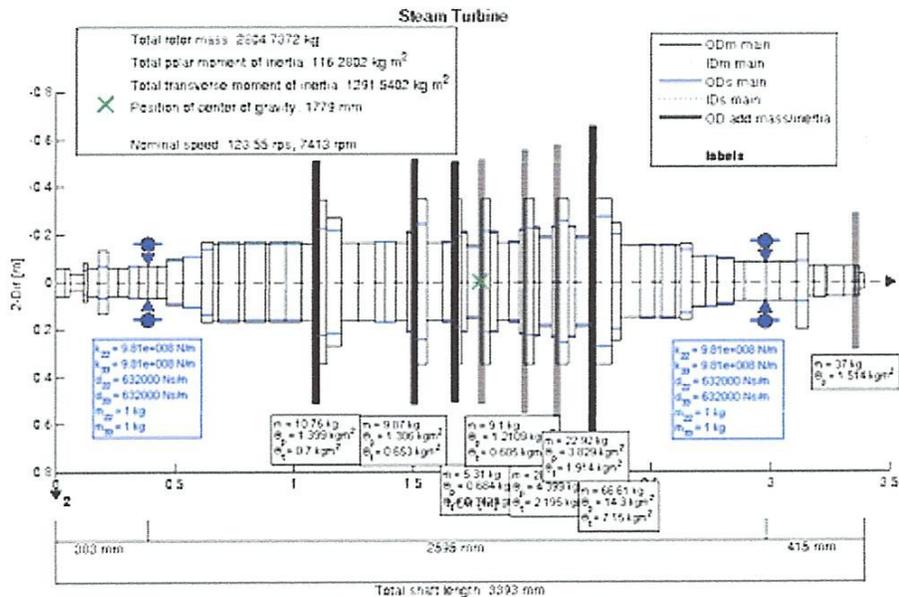


Figure.1.9 : Tracé d'une ligne d'arbre en MADYN 2000 avec diverses informations sur l'arbre et de ses sous-objets tels que des masses et supports de paliers

### 1.3.2.3 Capacités de modélisation

MADYN 2000 possède des capacités de modélisation uniques :

- ✓ Systèmes rotor -engrenage-paliers pour l'analyse des vibrations de torsion, de flexion, de traction – compression et couplés. Plusieurs types de paliers sont possibles à savoir : paliers viscoélastiques, paliers à film fluide, paliers à roulements cylindriques, paliers à attraction magnétiques, etc.
- ✓ Supports de paliers avec des caractéristiques dynamiques : masse –ressort-amortisseur avec des propriétés différentes dans les directions horizontale et verticale, fonctions de transfert générales à partir des mesures ou analyse élément finis, des matrices spatiales qui peuvent être fournies par l'utilisateur à partir d'autres modèles éléments finis, couplage des supports et des directions par des fonctions de transfert.
- ✓ Accouplements flexibles
- ✓ Coefficients des fluides
- ✓ Montage élastique des masses avec un décalage axial de leur centre de gravité
- ✓ Superposition de tronçons d'arbres avec des matériaux différents, par exemple pour modéliser les enroulements du moteur
- ✓ Blocs de modélisation définis par l'utilisateur dans la syntaxe de MADYN
- ✓ Prise en compte des facteurs de premier ordre pour le calcul des contraintes

- ✓ Matériaux dépendant de la température
- ✓ Importation de données de rotor à partir de fichiers ASCII sous forme de tableau via une interface flexible

### 1.3.2.4 Capacités d'analyse

MADYN 2000 possède des capacités d'analyse très puissantes :

- ✓ Analyse statique : forces statiques, forces de gravité, désalignements
- ✓ Valeurs propres amorties
- ✓ Réponse harmonique due au balourd, aux forces (axiaux, latéral) et moments (flexion torsion)
- ✓ Réponse transitoire à des forces et des moments, couples peut être définie comme une fonction de la vitesse et des vitesses en fonction du temps pour exécuter des simulations de démarrage et décélération. Paliers à film fluide non linéaires peuvent être considérés
- ✓ Variation des paramètres: diagramme de vitesse critique non amortie, diagramme de Campbell, raideur et amortissement variables, raideurs de couplage variables
- ✓ Optimisations (paliers magnétiques variables et optimisés)

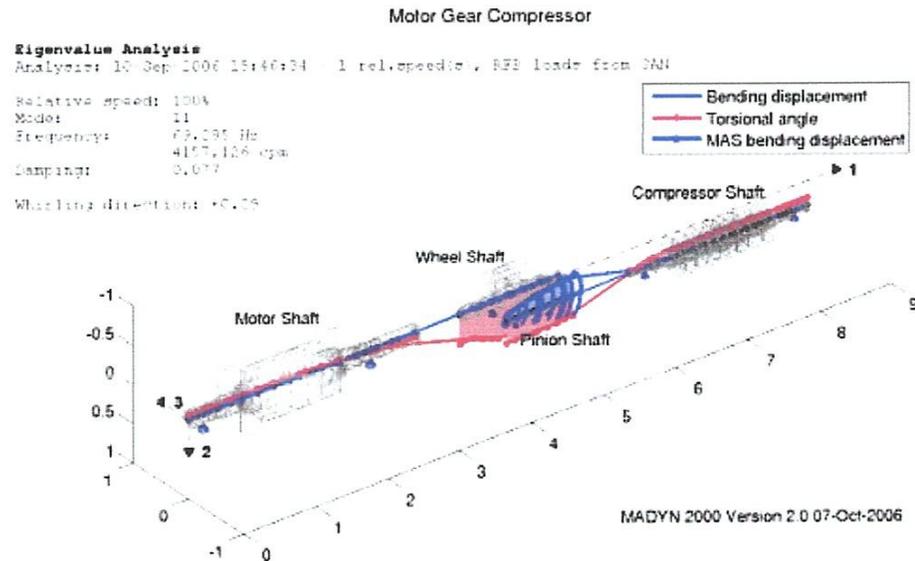


Figure. 1.10: Mode propre combiné torsion-flexion

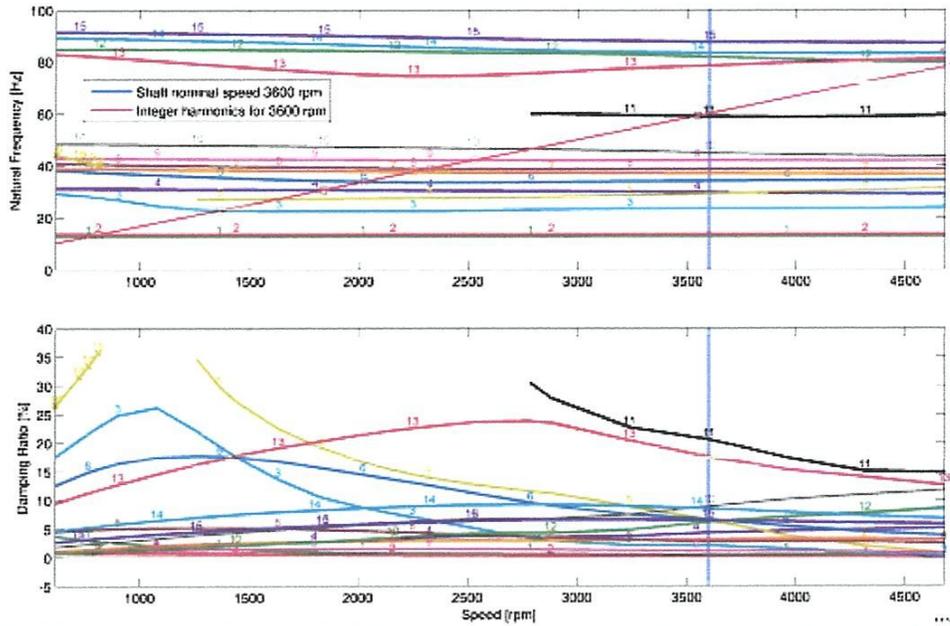


Figure. 1.11: Diagramme de Campbell (fréquence propre et amortissement en fonction de la vitesse de rotation) des vibrations de flexion d'un train d'un turbo-alternateur

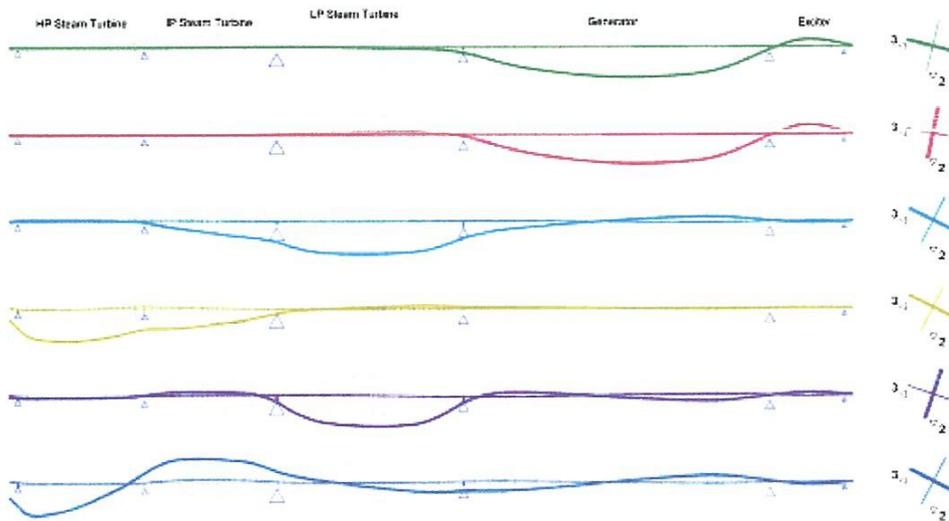
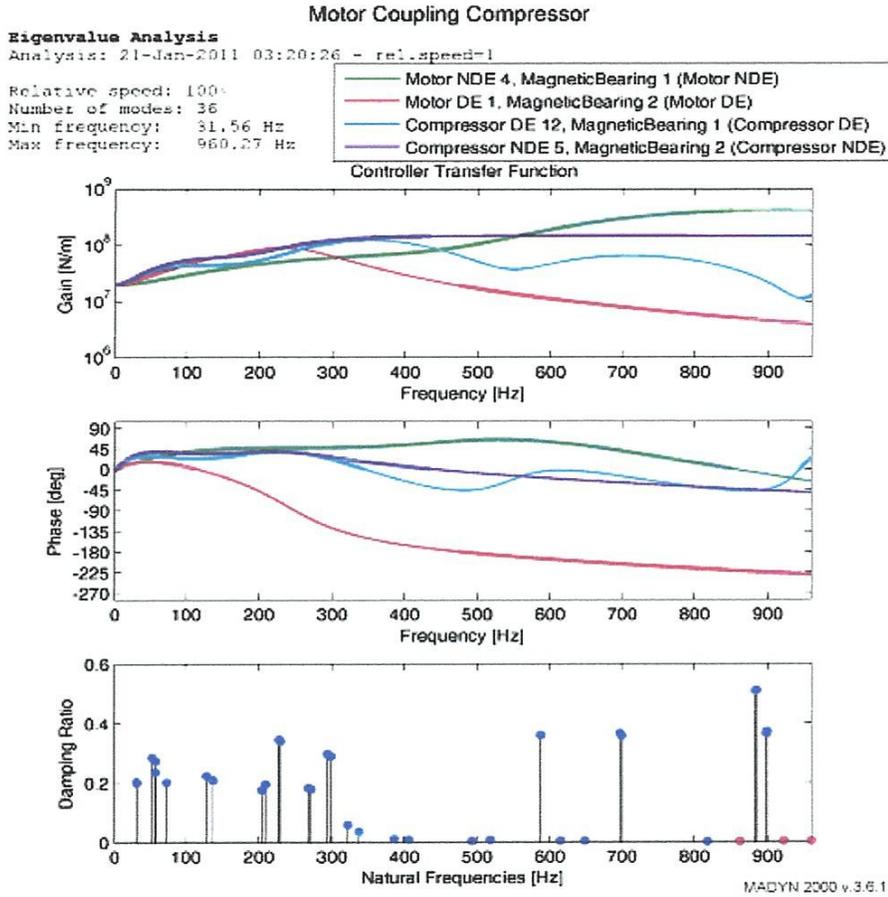


Figure. 1.12: Modes critiques en flexion du train du turbo-alternateur (mode 1 à 6)

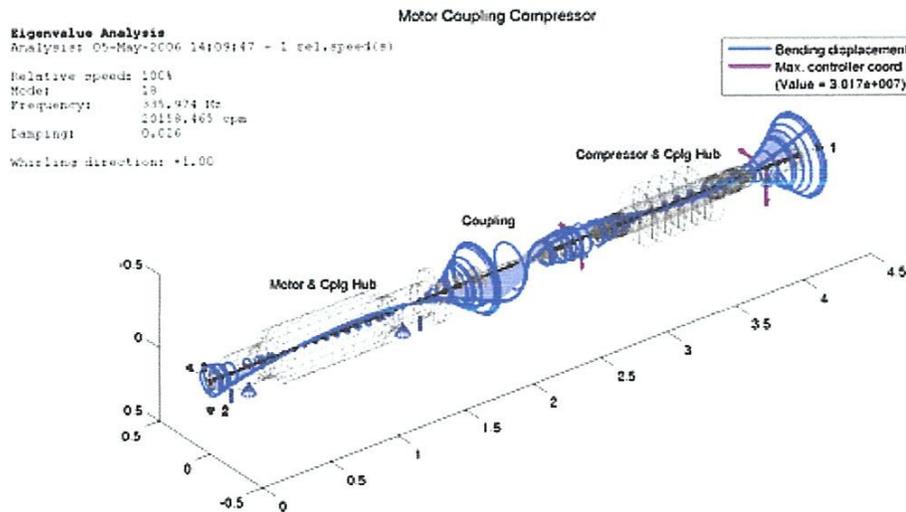
### 1.3.2.5 Paliers magnétiques

Les caractéristiques de paliers magnétiques dans MADYN 2000 sont :

- ✓ Conception de contrôleurs dans le domaine fréquentiel.
- ✓ Modélisation des caractéristiques de roulement synchrone (par exemple des contrôleurs de la force de déséquilibre)
- ✓ Modélisation des capteurs et actionneurs pour n'importe quelle position
- ✓ L'optimisation des paramètres de régulation



**Figure 1.13 : Fonctions de transfert et valeurs propres d'une ligne d'arbre à quatre paliers magnétiques**



**Figure 1.14 : déformés propres de la ligne d'arbre à quatre paliers magnétiques**

### 1.3.3 Logiciel TORSION

Ce logiciel est en cours de développement par Guy FERRARIS, Marie Ange ANDRIANOELY du Laboratoire de Mécanique des contacts et des Structures de l'INSA de Lyon. C'est un logiciel d'éléments finis destiné à prévoir le comportement statique et dynamique en régime permanent et transitoire des multi rotors en torsion. Il est utilisé pour concevoir des machines et pour modifier, si nécessaire l'architecture d'une machine existante.

Dans TORSION, un élément d'arbre est modélisé par élément fini de poutre en torsion à 2 nœuds et deux degrés de liberté par nœud. Un élément de type disque est modélisé par un nœud rigide. Un engrenage est modélisé par une raideur, une inertie et un amortissement supplémentaires.

En statique, le logiciel TORSION permet de calculer la déformée à des couples statiques. En dynamique en régime permanent, il permet de calculer les fréquences et les modes propres, la réponse harmonique et les énergies élémentaires. En régime transitoire, il permet de calculer les couples et les vitesses en fonction du temps [25,28].

### 1.3.4 Logiciel MLTIROTOR

Ce logiciel d'éléments finis est en cours de développement par Guy FERRARIS et Michel LALANNE du Laboratoire de Mécanique des contacts et des Structures de l'INSA de Lyon. Il est destiné à prévoir le comportement dynamique en mouvement permanent des multirotors parallèles en flexion. Il est utilisé pour concevoir des machines, en particulier des moteurs d'avion et pour modifier, si nécessaire leur architecture.

Dans MLTIROTOR, un arbre est modélisé par des éléments poutres à deux nœuds et 4 degrés de liberté par nœud prenant en compte, raideurs et masses classiques, force axiale, effet de cisaillement, effet d'inertie de rotation et effet gyroscopique. Un disque rigide est modélisé par un nœud avec la pris en compte de l'effet de masse et l'effet gyroscopique. Un palier est modélisé par 2 nœuds, les matrices de raideur et d'amortissement symétriques ou non et variables avec la vitesse de rotation. Les éléments particuliers sont modélisés par 2 nœuds. La modélisation des effets spécifiques est prise en compte : accouplements, attraction magnétique, stator, ...

MULTIROTOR prévoit en statique, la déformée due à un champ de gravité et/ou à des forces ponctuelles et en dynamique, les fréquences naturelles et les modes en rotation, le diagramme de Campbell, les instabilités et le facteur d'amortissement, la réponse aux balourds, aux forces asynchrones, aux forces harmoniques fixes dans l'espace, les efforts aux paliers et les contraintes dans les arbres, les énergies cinétiques et de déformation élémentaires [25,29,30].

# 2

## Modélisation des rotors par éléments finis

### Sommaire

---

<b>2.1. Introduction .....</b>	<b>17</b>
<b>2.2. Éléments finis en dynamique des rotors : formulation matricielles des équations du mouvement.....</b>	<b>17</b>
<b>2.4. Résolution des équations du mouvement .....</b>	<b>25</b>

---

*Ce deuxième chapitre concerne la modélisation des vibrations de flexion des éléments de rotors des machines tournantes par la méthode des éléments finis. Les matrices élémentaires des différents éléments de rotor sont présentées d'une manière explicite en utilisant les équations de Lagrange. La forme générale des équations du mouvement sous forme matricielle ainsi que les méthodes de leurs résolutions sont présentées.*

## 2.1. Introduction

Les premiers travaux qui utilisent la méthode des éléments finis en dynamique des rotors ont été publiés en 1976 par Nelson et Vaugh [3]. Ils prennent en compte l'effet gyroscopique, l'effet de l'inertie rotationnelle et l'effet de la force axiale. Cette modélisation à été complétée par Zorzi et Nelson [31] pour prendre en compte l'amortissement interne des parties tournantes.

En s'appuyant sur les expressions des énergies cinétiques et potentielles des différents éléments de rotor ainsi que le travail virtuel des efforts dus aux paliers [25], les matrices élémentaires dans un repère fixe sont construites. La méthode pseudo-modale, utilisée pour la résolution du système d'équations globale après réduction, est présentée.

## 2.2. Eléments finis en dynamique des rotors : formulation matricielles des équations du mouvement

La méthode des éléments finis consiste à **discrétiser** la structure en éléments de **dimensions finis** qui sont réunis en des points appelés points nodaux ou nœuds situés sur leur contour. Il est nécessaire de définir les modèles éléments finis des éléments constitutifs d'un rotor : disque, arbre, paliers et de représenter les forces extérieures et en particulier celles dues aux balourds. Pour cela l'effet gyroscopique doit être pris en considération et des méthodes de résolution spécifiques peuvent être avantageusement employées.

### 2.2.1. Disque

Un nœud du maillage éléments finis pour le disque rigide contient quatre degrés de liberté : deux déplacements latéraux  $u$  et  $w$  selon  $X$  et  $Z$  respectivement, et deux rotations associées  $\theta$  et  $\psi$  autour de  $X$  et  $Z$  respectivement (Fig. 2.1). Ainsi, si un disque est positionné en son centre de masse  $c$ , le vecteur  $\{\delta\}$  des déplacements nodaux s'écrit :

$$\{\delta\} = \langle u, w, \theta, \psi \rangle^T \quad (2.1)$$

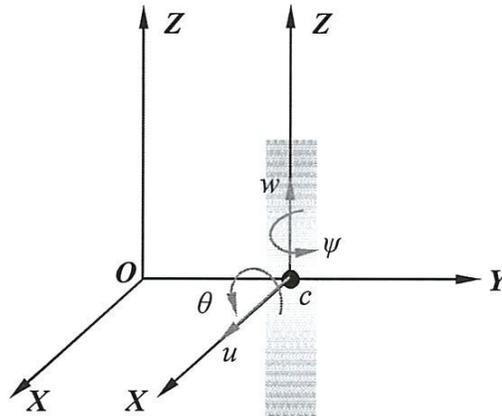


Figure 2.1 : Degrés de liberté possibles d'un élément de disque

L'énergie cinétique du disque correspondant à son mouvement autour du centre de masse  $c$  est calculée en utilisant un repère fixe. Le disque est supposé symétrique, les angles  $\theta$  et  $\psi$  sont petits et la vitesse de rotation ( $\dot{\phi} = \Omega$ ) est constante. L'expression de l'énergie cinétique du disque se simplifie à [25] :

$$T_d = \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi}\theta) \quad (2.2)$$

Avec  $M_d$  est la masse du disque,  $I_{dx}$  et  $I_{dy}$  sont les moments d'inertie axiaux du disque.

La matrice masse et la matrice gyroscopique du disque sont obtenues en appliquant les équations de Lagrange à l'expression (2.2), soit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}_i} \left( \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi}\theta) \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial \delta_i} \left\{ \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi}\theta) \right\}$$

On aura donc :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dx} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de masse } [M_d]} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} + \Omega \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dy} \\ 0 & 0 & I_{dy} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice gyroscopique } [G_d]} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

### 2.2.2. Arbre

L'arbre du rotor peut être modélisé à l'aide d'éléments finis de poutre de Timoshenko de section circulaire constante. L'utilisation de l'élément fini classique qui possède 2 nœuds et 4 degrés de liberté par nœud permet d'aboutir à des matrices élémentaires qui ont 8 degrés de liberté (Fig. 2.2).

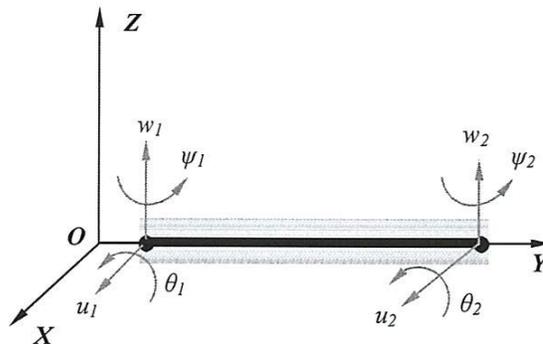


Figure 2.2 : Degrés de liberté possibles d'un élément arbre

L'expression (2.4) exprime les relations entre les pentes et les déplacements :

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} ; \quad \psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.4)$$

L'expression (2.5) présente le vecteur des déplacements nodaux :

$$\{\delta\} = \langle u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2 \rangle^T \quad (2.5)$$

De plus, on définit respectivement les vecteurs  $\{\delta u\}$  et  $\{\delta w\}$  correspondants aux mouvements dans les plans  $(O, X, Y)$  et  $(O, Y, Z)$  respectivement :

$$\{\delta u\} = \langle u_1, \psi_1, u_2, \psi_2 \rangle^T ; \quad \{\delta w\} = \langle w_1, \theta_1, w_2, \theta_2 \rangle^T \quad (2.6)$$

Ensuite, on construit les matrices caractéristiques à partir des expressions (2.7) :

$$u = \langle N_1(y) \rangle \{\delta u\} ; \quad w = \langle N_2(y) \rangle \{\delta w\} \quad (2.7)$$

Où  $\langle N_1(y) \rangle$  et  $\langle N_2(y) \rangle$  sont les fonctions de forme classiques d'une poutre en flexion données par (voir annexe A) :

$$\begin{aligned} \langle N_1(y) \rangle &= \left\langle 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} ; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} ; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} ; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right\rangle \\ \langle N_2(y) \rangle &= \left\langle 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} ; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} ; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} ; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right\rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

### 2.2.1. Énergie cinétique de l'arbre

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est obtenue par extension du cas du disque [25] : l'énergie d'une tranche de poutre, de longueur infinitésimale  $dy$ , est celle d'un disque de même dimension (cf. équation (2.2)). Ainsi, en intégrant cette formule sur la longueur de l'arbre, il vient :

$$T_a = \frac{\rho S_a}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \quad (2.9)$$

Avec  $\rho$  est la masse par unité de volume ;  $S_a$  est l'aire de la section droite de la poutre ;  $I$  est le moment d'inertie diamétral ;  $\frac{\rho S_a}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy$  est l'expression classique de l'énergie cinétique d'une poutre en flexion ;  $\frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy$  est l'effet secondaire d'inertie de rotation (poutre de

Timoshenko) ;  $\rho I L \Omega^2$  est un terme constant représentant l'énergie de rotation de l'arbre et n'a pas d'influence sur les équations du mouvement ;  $2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy$  représente l'effet gyroscopique.

Après substitution des expressions (2.4) et (2.7), ainsi que leurs dérivées dans l'équation (2.9), on obtient pour un élément d'arbre :

$$\begin{aligned}
 T_a = & \frac{\rho S_a}{2} \int_0^L \left[ \langle \delta \dot{u} \rangle \{N_1\} \{N_1\} \langle \delta \dot{u} \rangle + \langle \delta \dot{w} \rangle \{N_2\} \{N_2\} \langle \delta \dot{w} \rangle \right] dy \\
 & + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[ \langle \delta \dot{u} \rangle \left\{ \frac{dN_1}{dy} \right\} \left\{ \frac{dN_1}{dy} \right\} \langle \delta \dot{u} \rangle + \langle \delta \dot{w} \rangle \left\{ \frac{dN_2}{dy} \right\} \left\{ \frac{dN_2}{dy} \right\} \langle \delta \dot{w} \rangle \right] dy \quad (2.10) \\
 & + \rho I L \Omega^2 - 2\rho I \Omega \int_0^L \left[ \langle \delta \dot{u} \rangle \left\{ \frac{dN_1}{dy} \right\} \left\{ \frac{dN_2}{dy} \right\} \langle \delta \dot{w} \rangle \right] dy
 \end{aligned}$$

Et en tenant compte des fonctions de forme classiques d'une poutre en flexion données par les expressions (2.8) et de leurs dérivées, l'expression (2.10) prend la forme compacte suivante :

$$\begin{aligned}
 T_a = & \frac{1}{2} \left( \langle \delta \dot{u} \rangle [M_1] \langle \delta \dot{u} \rangle + \langle \delta \dot{w} \rangle [M_2] \langle \delta \dot{w} \rangle + \langle \delta \dot{u} \rangle [M_3] \langle \delta \dot{u} \rangle \right. \\
 & \left. + \langle \delta \dot{w} \rangle [M_4] \langle \delta \dot{w} \rangle + 2\Omega \langle \delta \dot{u} \rangle [M_5] \langle \delta \dot{w} \rangle \right) + \rho I L \Omega^2 \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Avec  $[M_1]$  et  $[M_2]$  représentent les matrices classiques de masse ;  $[M_3]$  et  $[M_4]$  représentent l'effet secondaire d'inertie de rotation de la section par rapport à un diamètre ;  $[M_5]$  représente l'effet gyroscopique et  $\rho I L \Omega^2$  est le terme constant.

Par application des équations de Lagrange sur la forme compacte de l'énergie cinétique de l'arbre (2.11), et en tenant compte que le terme constant a une contribution nulle, on aboutit à l'expression suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_a}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_a}{\partial \delta_i} = ([M] + [M_s]) \{\ddot{\delta}\} + [C] \{\dot{\delta}\} \quad (2.12)$$

Avec  $[M]$  est déduite de  $[M_1]$  et  $[M_2]$  ;  $[M_s]$  est déduite de  $[M_3]$  et  $[M_4]$  ;  $[C]$  vient de  $[M_5]$ . De ce fait, les matrices  $[M]$ ,  $[M_s]$  et  $[C]$  sont donnés par les expressions suivantes :

$$[M] = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$[M_s] = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$[C] = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

### 2.2.2. Énergie de déformation de l'arbre

L'énergie de déformation n'est pas affectée par le mouvement du support car elle ne dépend que des contraintes et donc de la déformée de l'arbre par rapport au support. Seules les déformations dues à la flexion sont prises en compte (les effets du cisaillement sont négligés). L'énergie de déformation d'une poutre de Timoshenko en rotation pour le cas le plus courant est donnée par [25] :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (2.16)$$

Dérivons (2.7) par rapport à  $y$  et remplaçons dans (2.16), il vient :

$$U_a = \frac{EI}{2} \left[ \langle \delta u \rangle \left( \int_0^L \left\{ \frac{d^2 N_1}{dy^2} \right\} \left\{ \frac{d^2 N_1}{dy^2} \right\} dy \right) \{ \delta u \} + \langle \delta w \rangle \left( \int_0^L \left\{ \frac{d^2 N_2}{dy^2} \right\} \left\{ \frac{d^2 N_2}{dy^2} \right\} dy \right) \{ \delta w \} \right] \quad (2.17)$$

Après intégration, l'expression (2.17) sous forme plus compacte s'écrit :

$$U_a = \frac{1}{2} \langle \delta u \rangle [K_1] \{ \delta u \} + \frac{1}{2} \langle \delta w \rangle [K_2] \{ \delta w \} \quad (2.18)$$

Avec  $[K_1]$  et  $[K_2]$  sont les matrices classiques de raideur :

$$[K_1] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.19) \quad [K_2] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Il est nécessaire de prendre en considération l'effet de cisaillement  $a$  qui modifie la matrice classique de raideur. Il a comme expression :

$$a = \frac{12 E I}{G S_r L^2} \quad (2.21)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.22)$$

Avec  $G$  représente le module de cisaillement ;  $\nu$  : représente le coefficient de Poisson ;  $S_r \approx S$  est la section réduite.

Finalement, la matrice de raideur avec l'effet de cisaillement est comme suit :

$$[K] = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

En l'absence de l'effet de cisaillement, l'expression (2.23) prend la forme (2.24) :

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

### 2.2.3. Masse du balourd

Le balourd est dû à une masse  $m_b$  située à la distance  $d$  du centre géométrique  $c$  du disque et son énergie cinétique  $T_b$  doit être calculée. On suppose que la masse  $m_b$  reste dans un plan perpendiculaire à l'axe  $(O,Y)$  et sa coordonnée selon cet axe est constante [Figure 2.3]. Comme la masse  $m_b$  est négligée devant la masse du rotor, l'énergie cinétique du balourd peut se mettre sous la forme approchée [25] :

$$T_b \approx m_b \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (2.25)$$

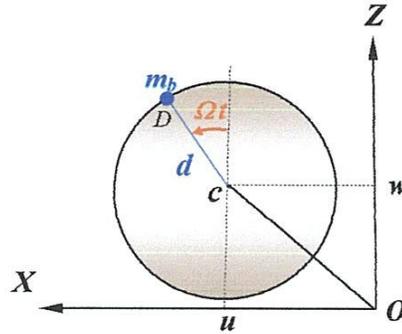


Figure 2.3 : Schématisation du balourd élémentaire

L'application des équations de Lagrange sur l'expression générale de l'énergie cinétique due à un balourd (2.25), donne l'équation (2.26) :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_b}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_b}{\partial \delta_i} = -m_b d \Omega^2 \begin{Bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Avec :

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

L'expression (2.26) correspond à la masse du balourd dans un plans perpendiculaire à  $(O,Y)$  au temps  $t=0$ . Quand des rotors industriels sont étudiés, l'influence de plusieurs masses de balourds agissent simultanément doit être considérée. Pour une masse de balourd au  $t=0$ , située à une position angulaire  $\alpha$  selon l'axe  $z$ , la force devient :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = -m_b d \Omega^2 \begin{Bmatrix} \sin (\Omega t + \alpha) \\ \cos (\Omega t + \alpha) \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

Qui peut être sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = \{F_2\} \sin (\Omega t) + \{F_3\} \cos (\Omega t) \quad (2.29)$$

Avec :

$$\{F_2\} = m_b d \Omega^2 \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{Bmatrix} \quad (2.30) \quad \{F_3\} = m_b d \Omega^2 \begin{Bmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

### 2.2.4. Paliers

D'une manière générale, les paliers qui induisent des forces extérieures agissantes sur l'arbre comportent des caractéristiques de raideurs et d'amortissement qui sont supposées connues. Ces caractéristiques sont sur le plan de la section droite selon les directions montrées sur la figure 2.4. Dans celle-ci on a :  $k_{xx}$ ,  $k_{zz}$ ,  $c_{xx}$ ,  $c_{zz}$  sont les rigidités et les amortisseurs selon les directions  $x$  et  $z$  respectivement,  $k_{xz}$ ,  $k_{zx}$ ,  $c_{xz}$ ,  $c_{zx}$  sont les rigidités et les amortissements dans une direction ( $x$  ou  $z$ ) mais affectés par l'autre direction. Ils représentent des constantes de couplage.

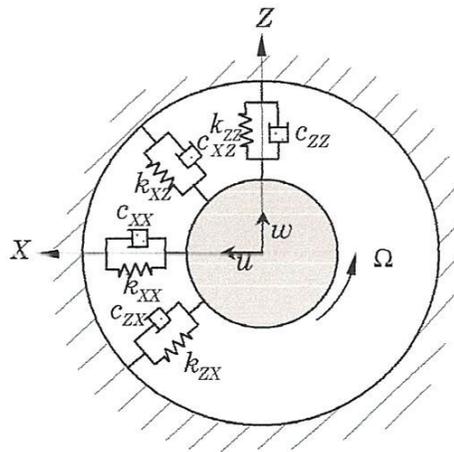


Figure 2.4 : Amortissement et raideurs de palier

Le travail virtuel  $\delta W$  des forces extérieures agissant sur l'arbre se met sous la forme :

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \quad (2.32)$$

$F_u$  et  $F_w$  sont les composants de la force généralisée qui s'expriment sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

L'influence des pentes et des moments est habituellement négligée et compte tenu de (2.33) on a :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_\theta \\ F_w \\ F_\psi \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \psi \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

La première matrice est une matrice de raideur, la seconde une matrice d'amortissement visqueux. Ces matrices ne sont généralement pas symétriques pour les paliers hydrodynamiques et les termes peuvent varier d'une manière importante en fonction de la vitesse de rotation [25].

### 2.3. Résolution des équations du mouvement par la méthode pseudo-modale

L'application des équations de Lagrange donne l'équation générale du mouvement :

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C(\Omega)]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F(t)\} \quad (2.35)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \{F(t)\} = & \{F_1\} + \{F_2\}\sin \Omega t + \{F_3\}\cos \Omega t + \{F_4\}\sin s\Omega t + \\ & + \{F_5\}\cos s\Omega t + \{F_6\}\sin \omega t + \{F_7\}\cos \omega t \end{aligned} \quad (2.36)$$

Où  $\{F_1\}$  est le vecteur incluant des forces constantes dont celles dues à la pesanteur,  $\{F_2\}$  et  $\{F_3\}$  sont dus aux effets de balourds,  $\{F_4\}$  et  $\{F_5\}$  correspondent aux forces asynchrones,  $\{F_6\}$  et  $\{F_7\}$  correspondent aux forces harmoniques fixes dans l'espace,  $\{\delta\}$  est le vecteur contenant maintenant tous les déplacements nodaux,  $[M]$  est la matrice de masse symétrique,  $[C(\Omega)]$  est la matrice d'amortissements antisymétrique, fonction de la vitesse  $\Omega$  incluant l'effet gyroscopique et les caractéristiques d'amortissement des paliers fréquemment.

Pour la résolution de l'équation (2.35), la méthode *pseudo-modale* est généralement appliquée qui permet une réduction importante de l'ordre du système d'équations [25]. Généralement quelques centaines de degrés de liberté sont suffisants pour modéliser un rotor et l'on s'intéresse à une dizaine de modes : le facteur de réduction est donc significatif ( $\approx 20$  à  $30$ ), ce qui conduit à un gain appréciable en temps de calcul et en espace mémoire occupé. Un autre atout de cette méthode, réside dans la possibilité de la prise en compte des amortissements modaux connus expérimentalement. De nombreux tests ont montré que la précision de cette méthode est excellente ; l'erreur, par rapport à une méthode numérique exacte est inférieure à un pour cent (1%). Une base modale est définie à partir des solutions de l'équation (2.37) :

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K^*]\{\delta\} = \{0\} \quad (2.37)$$

Où  $[M]$  représente la matrice de masse ;  $[K^*]$  est la matrice de raideur obtenue à partir de  $[K]$  où les termes de type  $K_{xz}$ ,  $K_{zx}$ , introduits par les paliers sont supprimés afin de conserver la symétrie.

Les  $n \ll N$  plus basses fréquences et modes sont obtenus par une méthode d'itérations simultanées. Les  $n$  premiers modes  $\{\phi_1\}, \dots, \{\phi_n\}$  forment une matrice :

$$[\Phi] = [\{\phi_1\} \dots \{\phi_n\}] \quad (2.38)$$

On adopte comme changement de base :

$$\{\delta\} = [\Phi]\{q\} \quad (2.39)$$

Où  $\{q\}$  représente le vecteur des coordonnées (variables) modales.

En effectuant le changement de base donné par l'expression (2.39), et en multipliant l'équation (2.35) par  $[\Phi]^T$ , on obtient :

$$[\Phi]^T [M][\Phi]\{\ddot{q}\} + [\Phi]^T [C(\Omega)][\Phi]\{\dot{q}\} + [\Phi]^T [K][\Phi]\{q\} = [\Phi]^T \{F(t)\} \quad (2.40)$$

À ce stade, l'amortissement modal peut être introduit. Par analogie avec un système à un degré de liberté (masse, ressort et amortisseur visqueux), on définit des termes  $c_i$  tels que :

$$c_i = 2\xi_i \sqrt{\{\phi_i\}^T [K] \{\phi_i\} \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\}} \quad (2.41)$$

Ces termes seront ajoutés à la diagonale de la matrice  $[\Phi]^T [C(\Omega)][\Phi]$ . Les valeurs des  $c_i$ , facteurs d'amortissements modaux, sont essentiellement estimées par le spécialiste de construction de la machine ou connues expérimentalement.

On adopte les changements suivants :

$$\begin{aligned} [m] &= [\Phi]^T [M][\Phi] \\ [k] &= [\Phi]^T [K][\Phi] \\ \{f\} &= [\Phi]^T \{F(t)\} \\ [c] &= [\Phi]^T [C(\Omega)][\Phi] + \text{diag}[C_i] \end{aligned} \quad (2.42)$$

Où  $C_i$  : est une matrice diagonale contenant des termes de type (2.41).

Dans ce cas, l'équation (2.40) prend la forme donnée par (2.43) :

$$[m]\{\ddot{q}\} + [c]\{\dot{q}\} + [k]\{q\} = \{f\} \quad (2.43)$$

### 2.3.1. Fréquences naturelles, Diagramme de Campbell et instabilités

Les solutions de l'équation (2.43), sans second membre et pour une vitesse de rotation  $\Omega$  fixée, sont de la forme :

$$\{q\} = \{Q\}e^{rt} \quad (2.44)$$

Ce qui donne après calcul :

$$(r^2 [m] + r [c] + [k])\{Q\} = 0 \quad (2.45)$$

Qui peut être mise sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} [0] & [1] \\ -[k]^{-1}[m] & -[k]^{-1}[c] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \{Q\} \\ \{Q\} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r \{Q\} \\ \{Q\} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Le problème aux valeurs propres et vecteurs propres défini en (2.46) est résolu, par l'algorithme du Q.R [\*\*], pour quelques vitesses de rotation (en général de l'ordre de la dizaine). Les résultats de la forme (2.47) conduisent à la connaissance des fréquences, facteurs d'amortissement et instabilités.

$$r_i = -\frac{\xi_i \omega_i}{\sqrt{1 - \xi_i^2}} \pm j \omega_i \quad (2.47)$$

Où  $\omega_i$  est la  $i$ -ième fréquence,  $\xi_i$  est le facteur d'amortissement visqueux.

### 2.3.2. Réponse aux forces d'excitation

Il s'agit de la réponse en mouvement permanent et la solution générale des équations (2.35) et (2.43) sans second membre n'est pas considérée.

#### 2.3.2.1 Force constante

L'équation à résoudre est comme suit :

$$[K] \{\delta\} = \{F_1\} \quad (2.48)$$

Cette équation est facile à résoudre directement et sans réduction par l'application de la **méthode de Gauss**.

#### 2.3.2.2. Balourd

L'équation à résoudre est :

$$[m] \{\ddot{q}\} + [c] \{\dot{q}\} + [k] \{q\} = \{f_2\} \sin \Omega t + \{f_3\} \cos \Omega t \quad (2.49)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \{f_2\} &= [\Phi]^T \{F_2\} \\ \{f_3\} &= [\Phi]^T \{F_3\} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Les solutions de (2.49) sont cherchées sous la forme :

$$\{q\} = \{q_2\} \sin \Omega t + \{q_3\} \cos \Omega t \quad (2.51)$$

Ainsi, l'identification des termes en  $\sin \Omega t$  et en  $\cos \Omega t$ , permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} [k] - [m]\Omega^2 & -\Omega[c] \\ \Omega[c] & [k] - [m]\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q_2\} \\ \{q_3\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{f_2\} \\ \{f_3\} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Le système (2.50) doit être résolu pour un nombre important de vitesses de rotation (de l'ordre de 1000) et les déplacements nodaux sont obtenus à partir de (2.38) :

$$\{\delta\} = [\Phi] (\{q_2(\Omega)\} \sin \Omega t + \{q_3(\Omega)\} \cos \Omega t) \quad (2.53)$$

### 2.3.2.3. Force asynchrone

L'équation à résoudre est :

$$[m]\{\ddot{q}\} + [c]\{\dot{q}\} + [k]\{q\} = \{f_4\} \sin s\Omega t + \{f_5\} \cos s\Omega t \quad (2.54)$$

Avec :

$$\begin{cases} \{f_4\} = [\Phi]^T \{F_4\} \\ \{f_5\} = [\Phi]^T \{F_5\} \end{cases} \quad (2.55)$$

Les solutions de (2.53) sont cherchées sous la forme :

$$\{q\} = \{q_4\} \sin s\Omega t + \{q_5\} \cos s\Omega t \quad (2.56)$$

Ainsi, l'identification des termes en  $(\sin s\Omega t)$  et en  $(\cos s\Omega t)$ , permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} [k] - [m](s\Omega)^2 & -s\Omega[c] \\ s\Omega[c] & [k] - [m](s\Omega)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q_4\} \\ \{q_5\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{f_4\} \\ \{f_5\} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Comme précédemment ce système (2.56) doit être résolu pour un nombre de vitesses de rotation (de l'ordre de 1000). Le retour aux déplacements nodaux est réalisé par (2.38), soit :

$$\{\delta\} = s\Omega [\Phi] (\{q_4\} \sin s\Omega t + \{q_5\} \cos s\Omega t) \quad (2.58)$$

# 3

## Comportement dynamique en flexion d'un rotor multi-disques coaxiaux par le logiciel ROTORINSA

### Sommaire

3.1. Introduction .....	30
3.2. Exemple d'application numérique .....	30
3.3. Géométrie du rotor .....	31
3.4. Modèle éléments finis du rotor .....	31
3.5. Résultats numériques .....	32
3.6. Influence du nombre de modes.....	38
3.7. Influence du maillage.....	40

*C*e troisième chapitre vise à étudier numériquement le comportement dynamique en flexion d'un rotor industrielle multi disques coaxiaux, issu de la référence [25], en utilisant le logiciel d'éléments finis **ROTORINSA**. Ce dernier apporte une solution très précise et fiable pour la dynamique des rotors en flexion. Plusieurs résultats sont présentés et commentés. Nous étudions en particulier, l'influence du maillage, du nombre de modes sur les résultats.

### 3.1. Introduction

Nous étudions dans ce chapitre, le comportement dynamique en flexion d'un rotor industriel par éléments finis en utilisant une version démonstration du logiciel ROTORINSA. Le rotor est modélisé par trois disques coaxiaux montés sur quatre arbres, supporté par deux paliers viscoélastiques anisotropes. Les disques sont supposés infiniment rigides tandis que les arbres sont supposés flexibles. Chaque disque est modélisé par un nœud à quatre degrés de liberté. Les arbres sont modélisés par des éléments poutre à quatre degrés de liberté par nœud.

Plusieurs résultats sont présentés et commentés : les déformés statiques, les fréquences et les modes de la base modale, les modes en rotation, le diagramme de Campbell et les instabilités, la réponse au balourd et la réponse à une force asynchrone. Nous avons étudié aussi, l'influence du maillage, du nombre de modes sur les résultats.

### 3.2. Exemple d'application numérique

Le modèle mathématique du rotor à étudier, présenté par la figure 3.1, est composé de 4 arbres, 3 disques et 2 paliers viscoélastiques. Les différents calculs à effectuer sont : la déformée statique, la base modale, le diagramme de Campbell, la réponse dynamique du rotor due à un balourd, la réponse due à une force asynchrone et voir l'influence du maillage et de l'amortissement modale sur les réponses dynamiques calculées. Les quatre arbres ont le même rayon  $R = 0.05$  m dont les longueurs sont respectivement :

$$L_1 = 0.2 \text{ m} \quad L_2 = 0.3 \text{ m} \quad L_3 = 0.5 \text{ m} \quad L_4 = 0.3 \text{ m}$$

Les disques et les arbres sont fabriqués en acier dont les caractéristiques sont :

$$\text{Modulc d'élasticité d'Young : } E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$\text{Masse volumique : } \rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Rapport de Poisson : } \nu = 0.3$$

Les caractéristiques des disques sont regroupées dans le tableau 3.1.

**Tableau 3.1** : données des disques

Disque	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>
Epaisseur $h$ (m)	0.05	0.05	0.06
Rayon intérieur $R_1$ (m)	0.05	0.05	0.05
Rayon extérieur $R_2$ (m)	0.12	0.20	0.20

Les caractéristiques des paliers sont regroupées dans le tableau 3.2.

**Tableau 3.2** : données des paliers

$K_{XX} = 5 \times 10^7 \text{ N/m}$	$K_{ZZ} = 7 \times 10^7 \text{ N/m}$	$K_{XZ} = K_{ZX} = 0$
$C_{XX} = 5 \times 10^2 \text{ Ns/m}$	$C_{ZZ} = 7 \times 10^2 \text{ Ns/m}$	$C_{XZ} = C_{ZX} = 0$

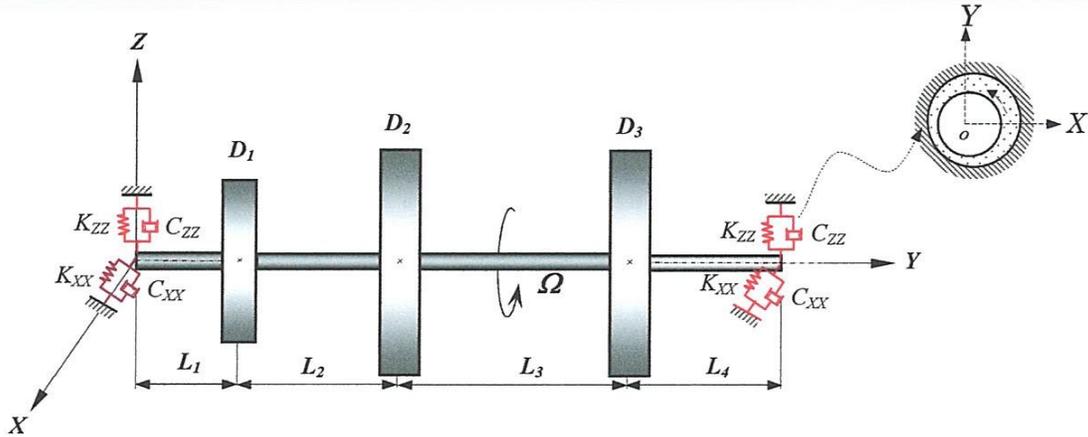


Figure 3.1. : Modèle mathématique du rotor multi-disques coaxiaux

### 3.3. Géométrie du rotor

Le préprocesseur permet de décrire les éléments du rotor et de générer le fichier de données. Afin de générer le fichier de données nécessaire pour la modélisation sous le logiciel ROTORINSA du rotor à étudié, il faut décrire tous ces éléments à savoir l'arbre, le disque et les paliers. Le rotor (Figure 3.2), comporte 4 éléments d'arbres, 3 éléments de disques et 2 éléments de paliers viscoélastiques. Une propriété physique est affectée à chaque élément (caractéristiques de l'arbre, disque, paliers).

### 3.4. Modèle Éléments Finis du rotor

Lors de la génération du fichier de données (Annexe A), un mailleur automatique discrétise les éléments d'arbre en plusieurs éléments finis suivant leurs tailles respectives. Pour le rotor étudié, le nombre d'éléments finis choisi dans l'élément d'arbre le plus court est 2 et le nombre d'éléments finis choisi dans l'élément d'arbre le plus long est 3 parce que nous disposons d'une version démonstration limitée à 10 nœuds. Le modèle éléments finis du rotor est présenté sur la figure 3.3.

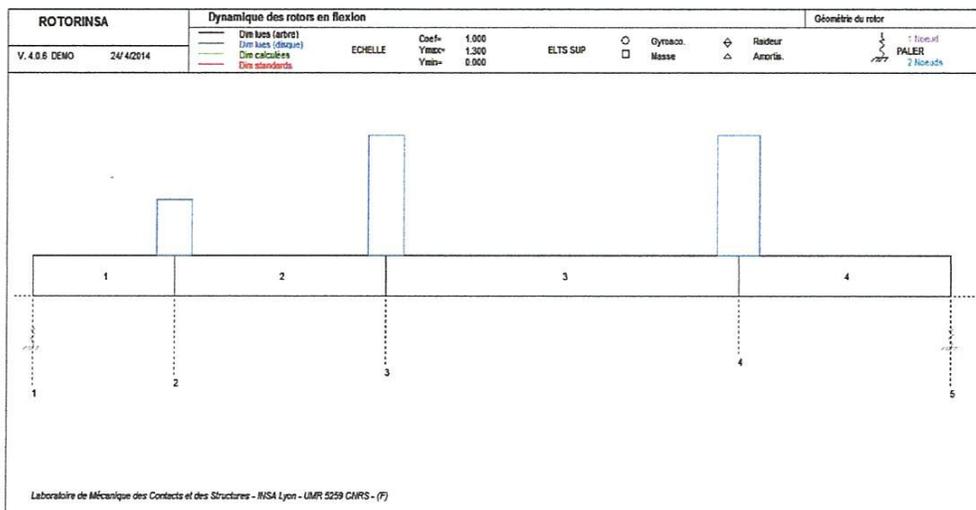


Figure 3.2 : Géométrie du rotor générée par ROTORINSA

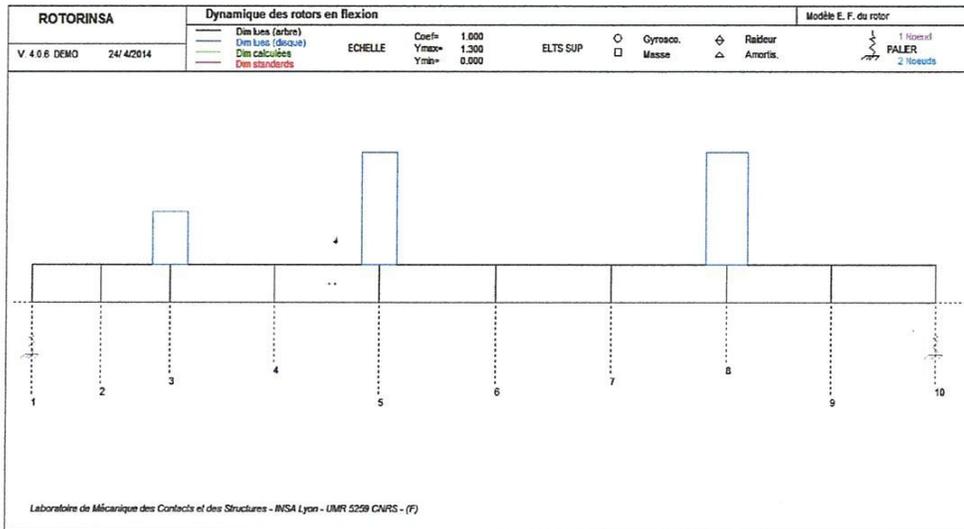


Figure 3.3 : Modèle éléments finis du rotor

### 3.5. Résultats numériques

Le module **Calcul** permet de calculer la déformée statique du rotor soumis à des forces et des moments ou à la gravité. Il calcule en dynamique :

- Les fréquences et les modes de la base modale.
- Les modes en rotation, le diagramme de Campbell et les instabilités.
- La réponse au balourd.
- La réponse aux forces asynchrones.
- La réponse aux forces harmoniques.
- Les efforts aux paliers et les contraintes.
- Les énergies élémentaires.

Le menu **Calcul** permet de lancer les différents types de calculs :

- En statique
- En dynamique, lorsqu'il n'y a que le fichier de données (**.dat**) dans le projet, le seul menu actif est le menu de calcul de la base modale, les autres sont inactifs.

Le premier calcul à lancer est le calcul de la base modale. Le fichier archive (**.arc**) est généré, les menus de calculs : Campbell, Balourd, Asynchrone et Harmonique sont activés par la suite.

### 3.5.1. Déformé statique

La figure 3.4 montre la déformée statique du rotor soumis à :

- Une force radiale statique appliquée verticalement au niveau du disque 2 de valeur  $F_z = 100$  N sans gravité (figure 3.4.a). L'amplitude max est de  $5.05 \times 10^{-6}$  m ;
- Une force radiale statique appliquée verticalement au niveau du disque 2 de valeur  $F_z = 100$  N avec gravité (figure 3.4.b). L'amplitude max est de  $7.07 \times 10^{-5}$  m ;
- Une force radiale statique appliquée verticalement au niveau du disque 2 de valeur  $F_z = 100$  N avec gravité (figure 3.4.b). L'amplitude max est de  $7.07 \times 10^{-5}$  m ;
- Une force radiale statique appliquée verticalement au niveau du disque 2 de valeur  $F_z = 100$  N et un moment statique autour de  $x$ ,  $T_x = 500$  Nm, sans tenir compte de la gravité (figure 3.4.c). L'amplitude max se réduit à  $2.8 \times 10^{-5}$  m ;
- Une force radiale statique appliquée verticalement au niveau du disque 2 de valeur  $F_z = 100$  N et un moment statique autour de  $x$ ,  $T_x = 500$  Nm, avec la prise en compte de la gravité (figure 3.4.d). L'amplitude max est de  $7.07 \times 10^{-5}$  m ;

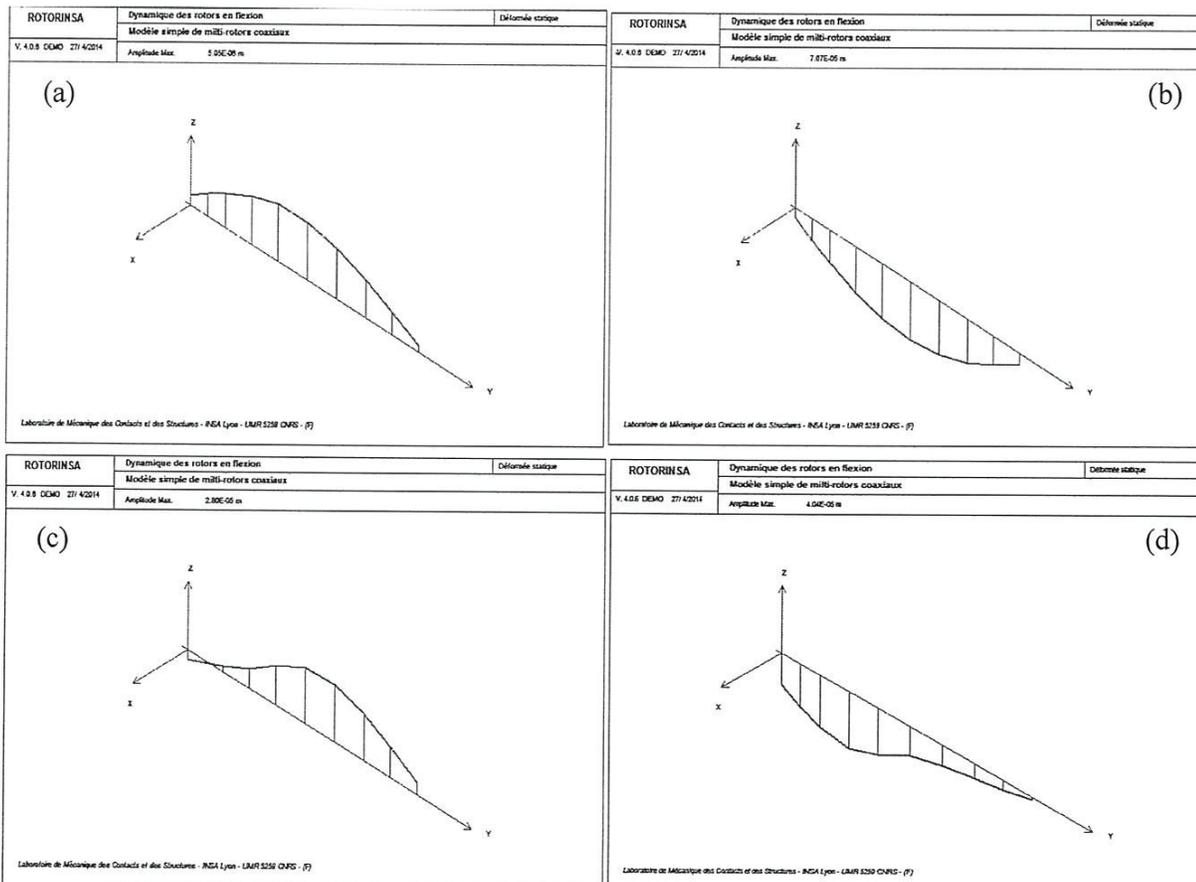


Figure 3.4 : Déformée statique du rotor pour plusieurs cas de chargement statiques

### 3.5.2. Modes de la base modale

La figure 3.5 illustre les quatre premiers modes propres en flexion de la base modale du rotor étudié. On note que la version du logiciel que nous disposons est limitée à quatre fréquences et dix nœuds. Les fréquences des quatre premiers modes sont :

- Premier mode : 60.62 Hz, précession inverse
- Deuxième mode : 63.03 Hz, précession directe
- Troisième mode : 169.50 Hz, précession inverse
- Quatrième mode : 185.57 Hz, précession directe

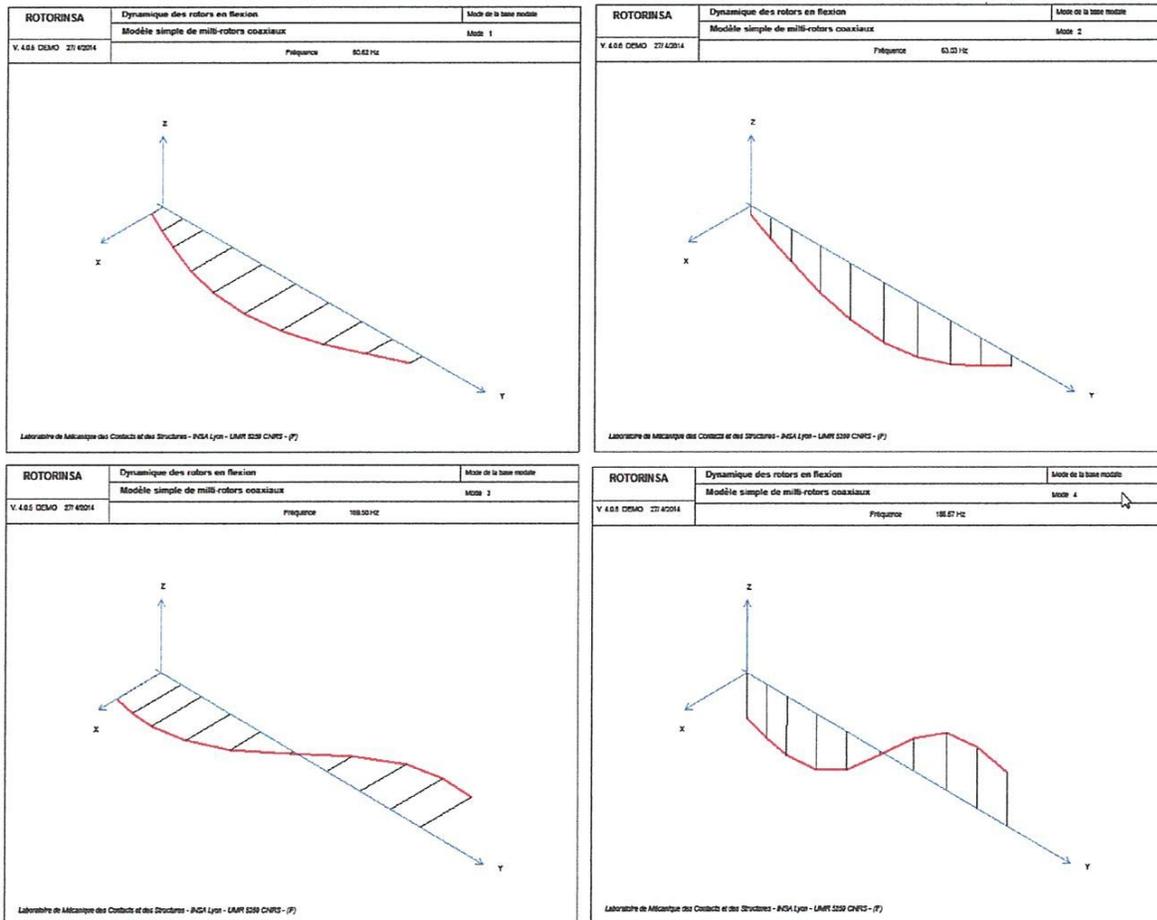


Figure 3.5 : Modes de la base modale

### 3.5.3. Diagramme de Campbell

Comme la vitesse de rotation  $\Omega$  du rotor peut apparaître explicitement dans les équations du mouvement, à cause de l'effet gyroscopique dû aux disques, à l'arbre et les caractéristiques des liaisons, les fréquences propres d'une machine tournante peuvent dépendre de la vitesse de rotation. La figure 3.6 montre l'évolution des fréquences propres du rotor en fonction de la vitesse de rotation du rotor connu sous le nom diagramme de Campbell. Les vitesses critiques sont les vitesses de rotation du rotor pour lesquelles, en un point et pour une direction fixée, l'amplitude du

déplacement passe par un maximum. Elles sont particulièrement dangereuses. En l'absence de l'amortissement, une vitesse critique de rotation coïncide exactement avec une fréquence propre du rotor. Les vitesses critiques peuvent être donc déterminées à partir du diagramme de Campbell par les intersections des courbes relatives aux fréquences naturelles avec celles liées aux fréquences de rotation (ligne droite  $\omega = s\Omega$ , avec  $s = 1$  pour une force synchrone telle que la force du balourd,  $s \neq 1$  pour une force asynchrone). D'après la figure 3.6, on constate que le comportement du rotor est stable, non symétrique et de précession directe ou inverse. L'intersection de  $f_1(N)$  et  $f_2(N)$  avec les droites  $f(N) = N/60$  et  $f(N) = 0,5.N/60$ , aux points A, B, C, D, E, F, G et H donne les vitesses critiques suivantes (Annexe B) :

Force synchrone : balourd ( $s = 1$ ):

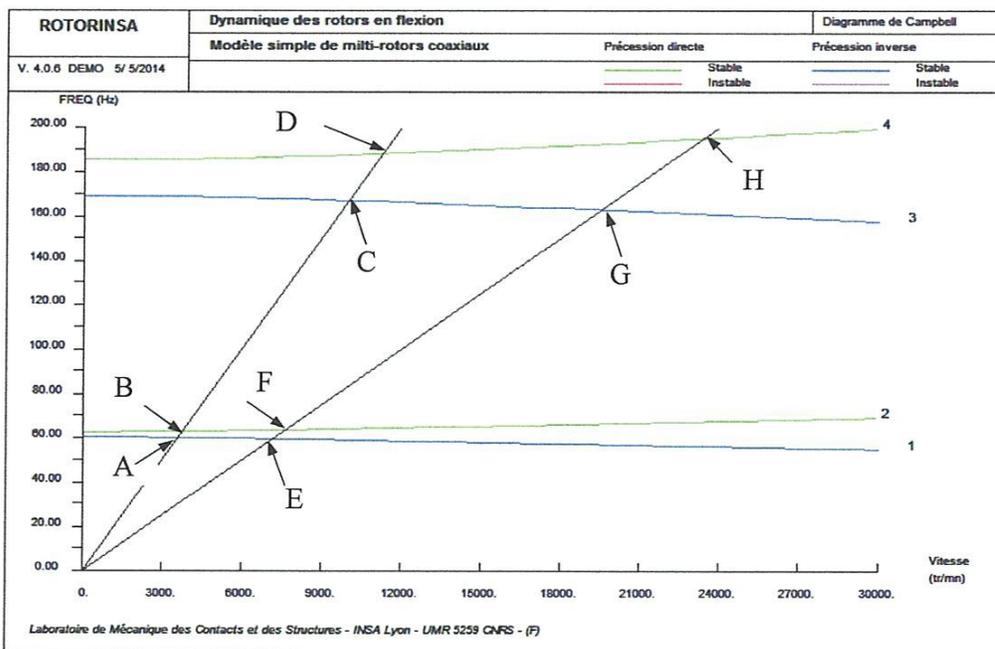
- Au point A :  $N_A = 3621.07$  tr/mn et  $f_A = 60.35$  Hz
- Au point B :  $N_B = 3799.49$  tr/mn et  $f_B = 63.32$  Hz
- Au point C :  $N_C = 10040.78$  tr/mn et  $f_C = 167.35$  Hz
- Au point D :  $N_D = 11311.68$  tr/mn et  $f_D = 188.53$  Hz

Force asynchrone ( $s = 0.5$ ) :

- Au point E :  $N_E = 7173.51$  tr/mn et  $f_E = 59.78$  Hz
- Au point F :  $N_F = 7680.72$  tr/mn et  $f_F = 64.01$  Hz
- Au point G :  $N_G = 19567.49$  tr/mn et  $f_G = 163.06$  Hz
- Au point H :  $N_H = 23432.91$  tr/mn et  $f_H = 195.27$  Hz

Et les fréquences propres à l'arrêt ( $\Omega = 0$  rad/s) :

$$f_{10} \approx 60.62 \text{ Hz} \quad f_{20} \approx 63.02 \text{ Hz} \quad f_{30} \approx 169.50 \text{ Hz} \quad f_{40} \approx 185.57 \text{ Hz}$$



**Figure 3.6 : Diagramme de Campbell**

### 3.5.4. Modes en rotation

Un mode en rotation représente les orbites elliptiques (modèle non symétrique) des différents nœuds de l'axe de rotation du modèle éléments finis du rotor (voir figure 3.3). Les 4 premiers modes en rotation sont représentés sur la **figure 3.7** pour une vitesse de rotation de 4000 tr/mn, et le type de précession est donné ci-dessous :

- Mode 1 : précession inverse
- Mode 2 : précession directe
- Mode 3 : précession inverse
- Mode 4 : précession directe

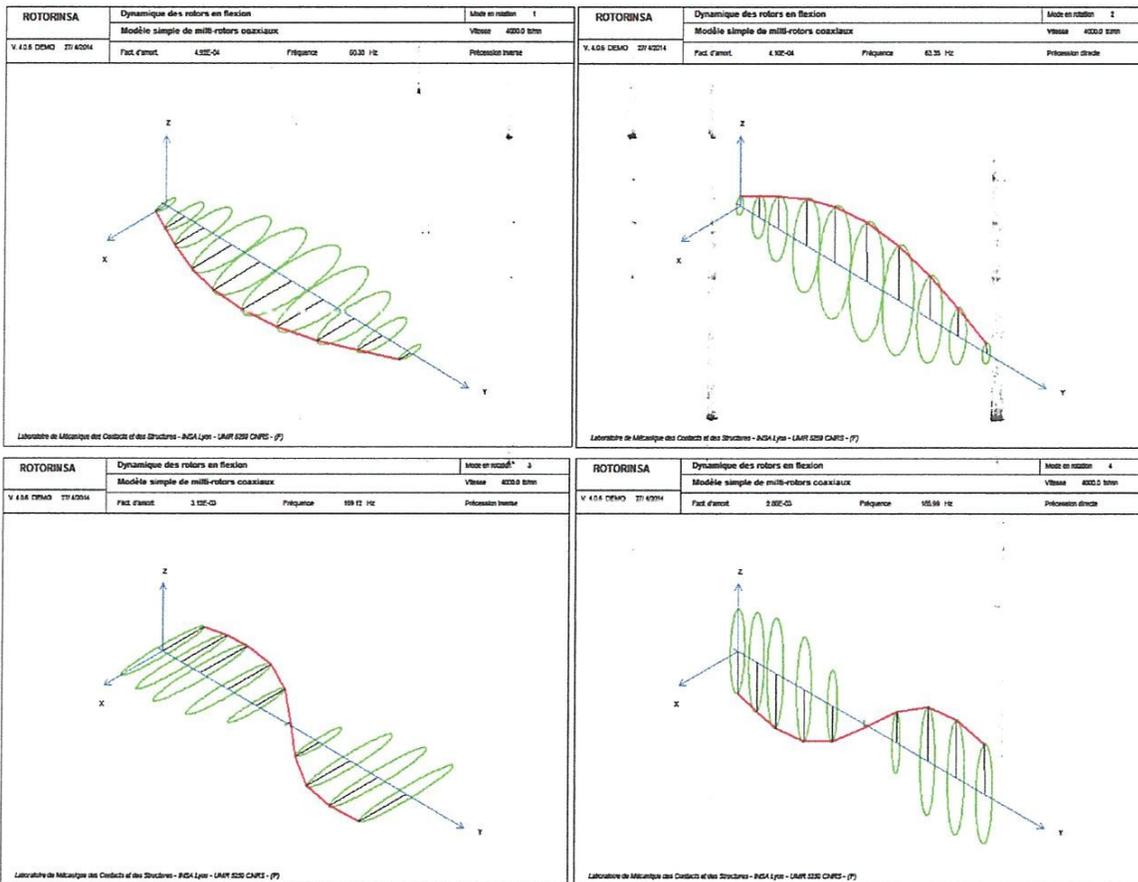


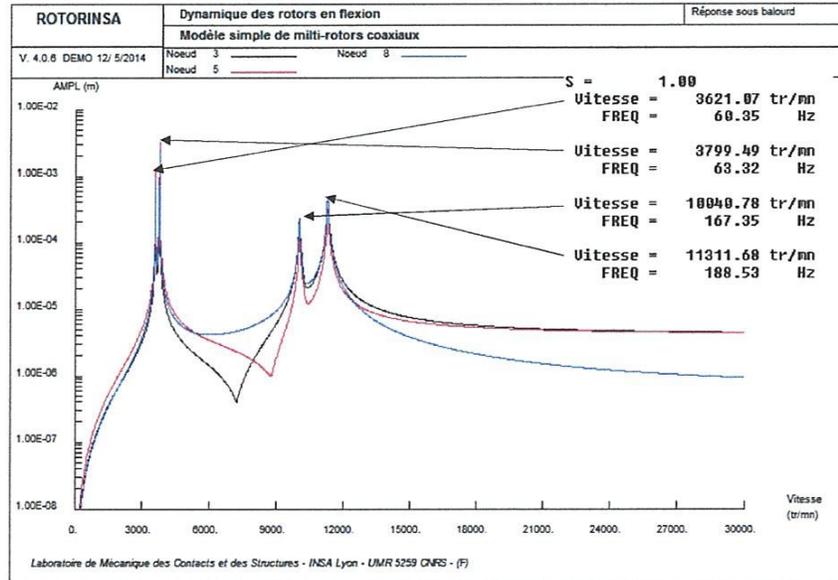
Figure 3.7 : Modes en rotation,  $N = 4000$  tr/mn

### 3.5.5. Réponse au balourd

La **figure 3.8** illustre les amplitudes de vibration du rotor aux nœuds 3, 5 et 8 (nœuds des disques) en fonction de la vitesse de rotation du rotor  $N$ , dus à un balourd de masse  $10^{-3}$  kg, appliquée au périmètre du disque  $Z$  de rayon 20 cm. Le diagramme de Campbell figure 3.6, donne l'évolution des fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation et permet de visualiser approximativement les vitesses critiques dues au balourd (points A, B, C et D) à cause de la présence de l'amortissement. Les vitesses critiques ne sont vraiment déterminées que lors de la réponse aux balourds ou de la réponse à une force asynchrone. Autrement, les vitesses critiques

dues à un balourd ou à une force asynchrone ne correspondent pas exactement à l'intersection de courbes de fréquences avec la droite  $f = N/60$  du diagramme de Campbell. Les vitesses critiques et les fréquences correspondantes sont :

- $N_1 = 3621.07$  tr/mn       $f_1 = 60.35$  Hz
- $N_2 = 3799.49$  tr/mn       $f_2 = 63.32$  Hz
- $N_3 = 10040.78$  tr/mn       $f_3 = 167.35$  Hz
- $N_4 = 11311.68$  tr/mn       $f_4 = 188.53$  Hz



**Figure 3.8 : Réponse au balourd pour différents nœuds**

### 3.5.6. Réponse due à une force asynchrone

La figure 3.9 montre les amplitudes de vibration du rotor aux nœuds 3, 5 et 8 en fonction de la vitesse de rotation du rotor  $N$ , dus à une force asynchrone d'amplitude 100 N et de fréquence  $0.5 \Omega$ , appliquée au nœud 5 (disque  $D_2$ ). Même chose que dans le cas d'un balourd, les vitesses critiques dues à une force asynchrone ne correspondent pas exactement à l'intersection de courbes de fréquences avec la droite  $f = 0.5 N/60$  du diagramme de Campbell. Les vitesses critiques et les fréquences correspondantes sont :

- $N_1 = 7173.51$  tr/mn       $f_1 = 59.78$  Hz
- $N_2 = 7680.72$  tr/mn       $f_2 = 64.01$  Hz
- $N_3 = 19567.49$  tr/mn       $f_3 = 163.06$  Hz
- $N_4 = 23432.91$  tr/mn       $f_4 = 195.27$  Hz

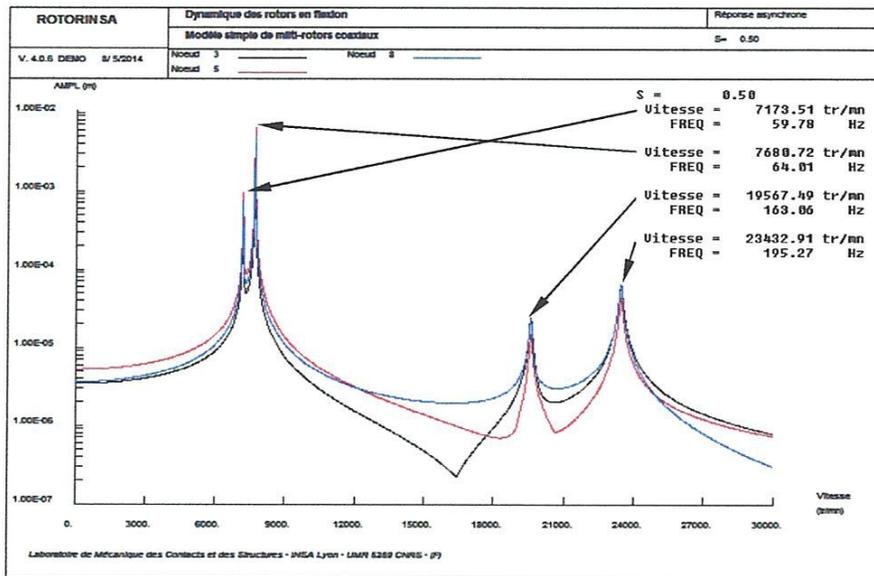


Figure 3.9 : Réponse due à une force asynchrone pour différents nœuds

### 3.6. Influence du nombre de modes

#### 3.6.1. Diagramme de Campbell

La figure 3.10 montre l'influence du nombre de modes sur le diagramme de Campbell. On constate que pour deux modes ( $n = 2$ , figure 3.10 (a)) de la base modale, on obtient deux évolutions des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation, alors que pour quatre modes, quatre évolutions (figure 3.10 (b)).

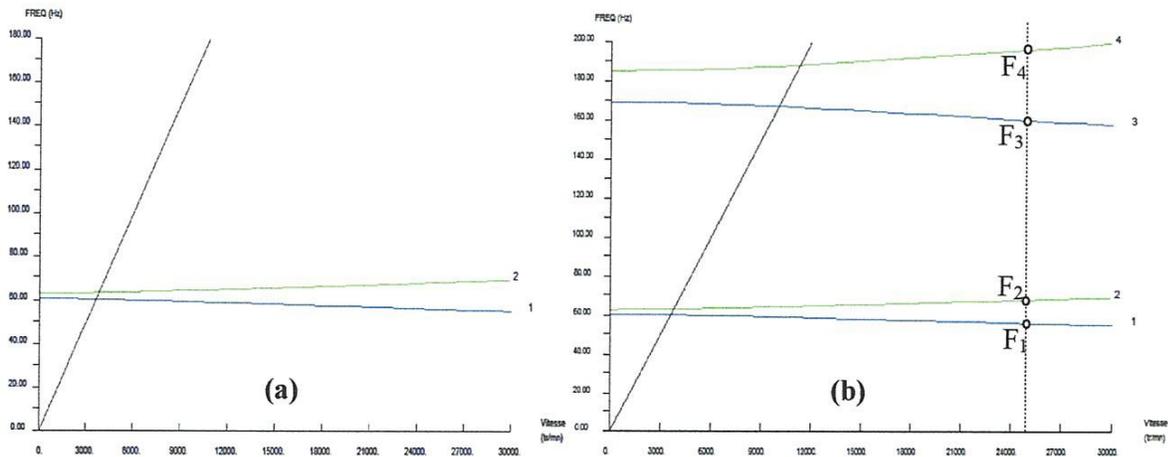


Figure 3.10 Influence du nombre de modes sur le diagramme de Campbell,  $n = 2$  modes, (b) :  $n = 4$  modes

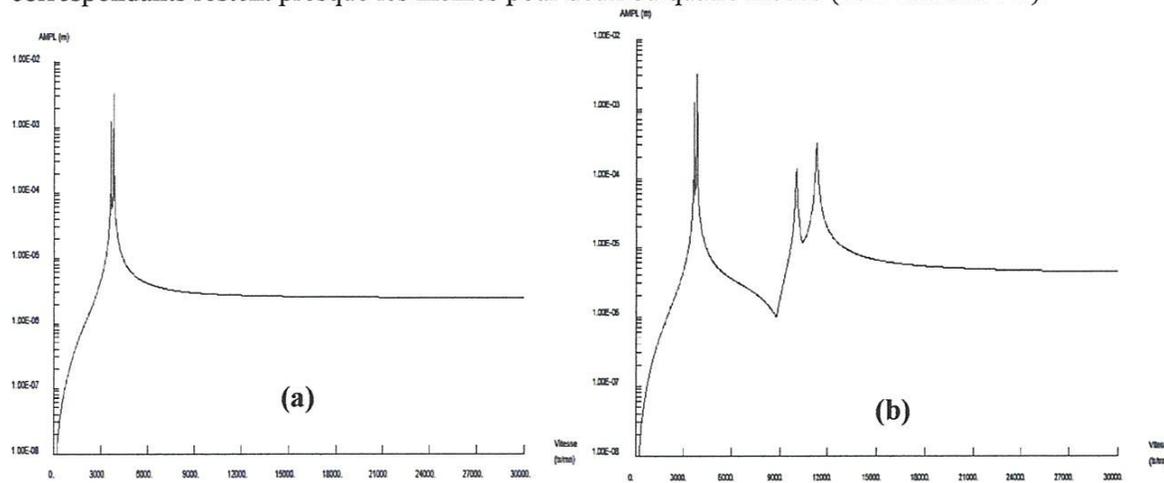
Les fréquences propres à 25000 tr/mn sont présentées dans le tableau 3.3, pour deux et quatre modes obtenues par la méthode pseudo modale et sont comparées avec celles obtenues par la méthode directe [25] (la résolution du système d'équations [2.35] s'effectue en conservant toutes les  $N$  degrés de liberté). L'erreur absolue reste très faible.

**Tableau 3. 3 : Fréquences propres en Hertz à 25000 tr/mn**

Fréquences	Val. Réf. [25]	2 modes	4 modes
F <sub>1</sub>	55.41	56.14 1.3%	56.13 1.3%
F <sub>2</sub>	67.20	68.05 1.3%	68.04 1.3%
F <sub>3</sub>	157.90	-----	160.3 1.5%
F <sub>4</sub>	193.60	-----	196.3 1.4%

### 3.6.2. Réponse au balourd

La réponse due à une masse de balourd de  $10^{-3}$  kg, située sur le périmètre du disque D<sub>2</sub>, est présentée sur la figure 3.11 pour deux et quatre modes respectivement. Les mêmes constatations que pour la figure 3.10. Nous remarquons aussi que les vitesses critiques et les amplitudes correspondants restent presque les mêmes pour deux ou quatre modes (voir Tableau 3.4).



**Figure 3.11 Influence du nombre de modes sur la réponse au balourd, (a) : n = 2 modes, (b) : n = 4 modes**

**Tableau 3. 4 : Vitesses critiques [tr/mn] en fonction du nombre de modes**

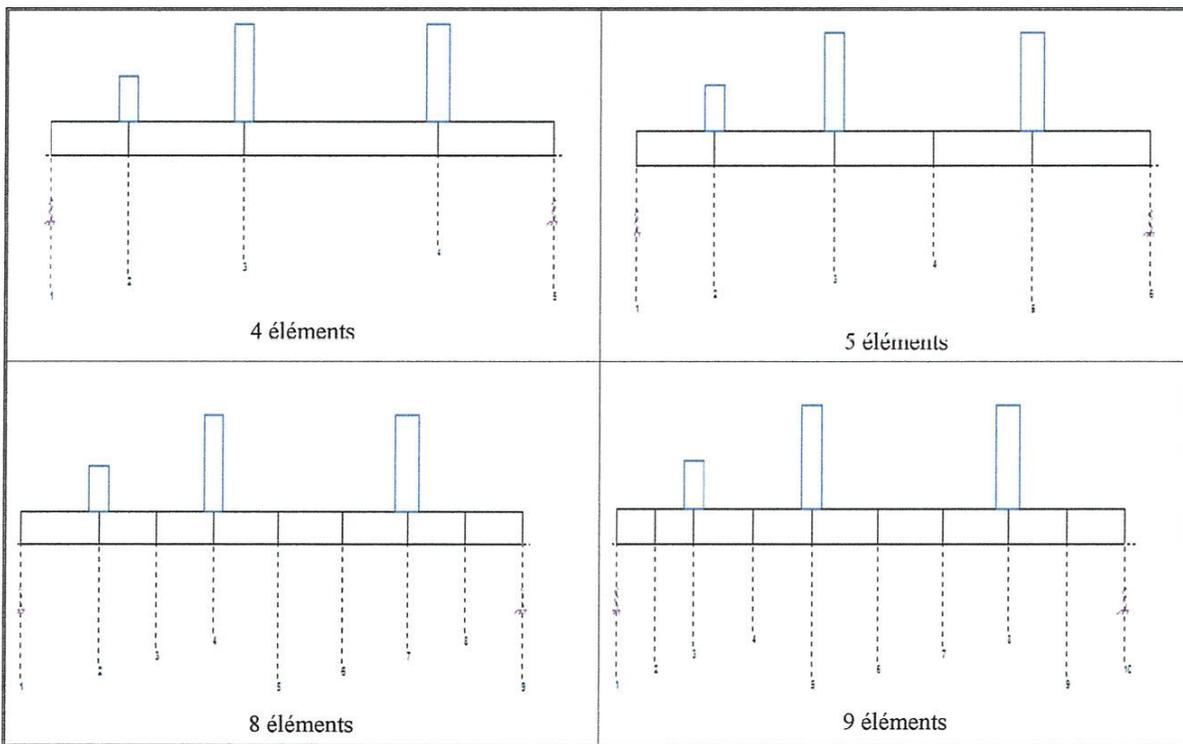
Vitesse critique	Val. Réf. [25]	2 modes	4 modes
C <sub>1</sub>	3620.40	3621.07	3621.07
C <sub>2</sub>	3798.1	3799.52	3799.49
C <sub>3</sub>	10018	-----	10040.78
C <sub>4</sub>	11279	-----	11311.68

### 3.7. Influence du maillage

Le tableau 3.5 montre l'influence du nombre d'éléments arbres sur les fréquences propres du rotor à l'arrêt ( $N = 0$  tr/mn). Nous avons utilisé 4, 5, 8 et 9 éléments arbres respectivement selon disponibilité du logiciel (figure 3.12). Les fréquences obtenues en utilisant 4 éléments finis sont presque les mêmes en utilisant 9 éléments finis et montrent qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser un grand nombre d'élément arbre pour obtenir des résultats satisfaisants.

**Tableau 3.5 : Influence du maillage sur les fréquences propres en Hertz à 0 tr/mn ( $n = 4$ )**

NEF	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>
4 EF	60.63	63.02	169.53	185.62
5 EF	60.63	63.03	169.52	185.62
8 EF	60.63	63.02	169.50	185.57
9 EF	60.62	63.02	169.50	185.57



**Figure 3.12 Différents maillages utilisés pour modéliser le rotor**

## Conclusion Générale

Ce travail avait pour objectif, l'étude du comportement dynamique en flexion d'un rotor industriel par la méthode des éléments finis en utilisant une version démonstration du logiciel ROTORINSA, développée par le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures de l'INSA de Lyon et le Centre Nationale de Recherche et de Sécurité.

Dans le deuxième chapitre, la formulation matricielle des équations du mouvement en dynamique des rotors en flexion par la méthode des éléments finis est présentée en utilisant le formalisme de Lagrange. La méthode pseudo modale, utilisée pour la résolution des équations du mouvement, est présentée à la fin du chapitre.

Dans le troisième chapitre, une application numérique d'un rotor industriel est présentée et commentée en utilisant le logiciel ROTORINSA. Le rotor est modélisé par trois disques coaxiaux, montés sur quatre arbres, supporté par deux paliers viscoélastiques anisotropes. Les disques sont supposés infiniment rigides tandis que les arbres sont supposés flexibles. Chaque disque est modélisé par un nœud à quatre degrés de liberté. Les arbres sont modélisés par des éléments poutre à deux nœuds et à quatre degrés de liberté par nœud. Plusieurs résultats sont présentés et commentés : les déformés statiques, les fréquences et les modes de la base modale, les modes en rotation, le diagramme de Campbell et les instabilités, la réponse au balourd et la réponse à une force asynchrone. Nous avons étudié aussi, l'influence du maillage et du nombre de modes sur les réponses dynamiques. L'influence de l'amortissement modale est ignoré car ce dernier est extrêmement difficile à prédire. L'amortissement modale peut être mesuré expérimentalement (il peut être différent pour chaque mode).

D'après les résultats obtenus, nous avons conclu :

- La prise en compte de l'effet gyroscopique dû aux disques ou aux arbres rendent les fréquences propres du rotor varient en fonction de la vitesse de rotation. Le comportement libre du rotor est alors résumé par le traçage du diagramme de Campbell.
- A partir du diagramme de Campbell, on peut déterminer les vitesses critiques de rotation dues aux balourds ou à des et forces extérieures asynchrones.
- Les caractéristiques viscoélastiques des paliers hydrodynamiques rendent le modèle mathématique du rotor anisotrope et par conséquent les équations du mouvement sont non symétriques.
- A cause de la présence de l'amortissement, le rotor peut devenir instable dans des plages de vitesses de rotation. Le rotor étudié est stable dans la plage de vitesse choisie.
- Avec la présence de l'amortissement de l'arbre ou des paliers, le diagramme de Campbell permet de visualiser approximativement les vitesses critiques dues aux balourds ou à des forces asynchrones qui sont bien déterminées à partir des réponses dynamiques.
- Dans le cas d'un modèle de rotor non symétrique, les trajectoires des nœuds de l'axe de rotation sont elliptiques.

- Le nombre d'évolution des fréquences propres et le nombre de vitesse critiques est égales au nombre de modes.
- Quatre modes sont largement suffisants pour la convergence des résultats d'où l'importance de l'utilisation de la méthode de résolution pseudo-modale.
- Il n'est pas nécessaire de choisir un maillage très fin pour avoir la convergence des résultats. S'il ya plusieurs disques et arbres dans le modèle, dans ce cas, il est indispensable d'augmenter le nombre d'élément finis.
- Le logiciel ROTORINSA est efficace en dynamique des rotors en flexion et permet de faire des applications industrielles sur de petites comme de grosses machines tournantes telles que les turboalternateurs.



## Constriction des fonctions de forme d'un élément de poutre en flexion

L'arbre du rotor est modélisé par des éléments de poutre de section circulaire constante. L'élément classique utilisé est à deux nœuds et quatre degrés de liberté par nœud. Les matrices élémentaires ont donc huit degrés de liberté. Le vecteur des déplacements nodaux s'écrit alors :

$$\{\delta\} = \{u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2\}^T \quad (\text{A.1})$$

De plus, on définit respectivement les vecteurs  $\{\delta u\}$  et  $\{\delta w\}$  dans les plans  $(O, X, Y)$  et  $(O, Y, Z)$  tels que :

$$\{\delta u\} = \{u_1, \psi_1, u_2, \psi_2\}^T \quad ; \quad \{\delta w\} = \{w_1, \theta_1, w_2, \theta_2\}^T \quad (\text{A.2-3})$$

On construit les matrices caractéristiques à partir de :

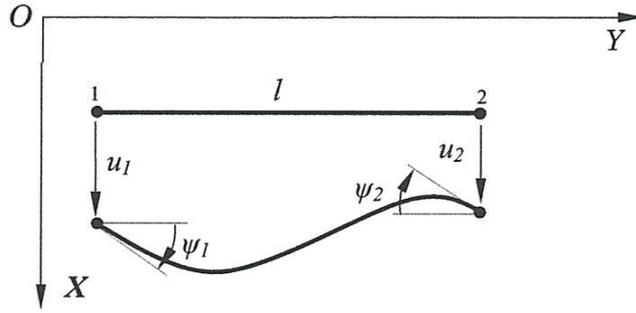
$$u(y) = \langle N_1(y) \rangle \{\delta u\} \quad ; \quad w(y) = \langle N_2(y) \rangle \{\delta w\} \quad (\text{A.4-5})$$

$\langle N_1(y) \rangle$  ;  $\langle N_2(y) \rangle$  : les fonctions de forme classiques d'une poutre en flexion dans les plans  $(O, X, Y)$  et  $(O, Y, Z)$  respectivement.

### Construction des fonctions de forme dans le plan $(O, X, Y)$

Le nombre de terme dans le polynôme d'interpolation doit être égale au nombre de degrés de liberté par élément dans ce plans :

$$u(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 = \langle 1 \quad y \quad y^2 \quad y^3 \rangle \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \langle P(y) \rangle \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.6})$$



Les rotations  $\psi$  et  $\theta$  sont liées aux déplacements  $u$  et  $w$  par :

$$\psi(y) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -a_1 - 2a_2y - 3a_3y^2 = \langle 0 \quad -1 \quad -2y \quad -3y^2 \rangle \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = -\langle P'(y) \rangle \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Soit :

$$\begin{Bmatrix} u(y) \\ \psi(y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P(y) \\ -P'(y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y & y^2 & y^3 \\ 0 & -1 & -2y & -3y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Introduisons les conditions aux limites suivantes :

$$\text{à } y=0 : u_1 = a_0 ; \psi_1 = -a_1$$

$$\text{à } y=l : u_2 = a_0 + a_1l + a_2l^2 + a_3l^3 ; \psi_2 = -a_1 - 2a_2l - 3a_3l^2 \quad (\text{A.9})$$

On construit alors la matrice des déplacements généralisés  $[P_n]$  :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ \psi_1 \\ u_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix}}_{[P_n]} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

D'où il vient :

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [P_n]^{-1} \{\delta u\} \quad (\text{D.11})$$

Alors :

$$\begin{Bmatrix} u(y) \\ \psi(y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P(y) \\ -P'(y) \end{bmatrix} [P_n]^{-1} \{\delta u\} = \begin{bmatrix} \langle N_1(y) \rangle \\ \langle N'_1(y) \rangle \end{bmatrix} \{\delta u\} \quad (\text{A.12})$$

Avec :

$$[P_n]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & 2/l & 3/l^2 & 1/l \\ 2/l^3 & -1/l^2 & -2/l^3 & -1/l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

D'où, il vient :

$$\begin{Bmatrix} \langle N_1(y) \rangle \\ \langle N_1'(y) \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3y^2}{l^2} + \frac{2y^3}{l^3}; & -y + \frac{2y^2}{l} - \frac{y^3}{l^2}; & \frac{3y^2}{l^2} - \frac{2y^3}{l^3}; & \frac{y^2}{l} - \frac{y^3}{l^2} \\ \frac{6y}{l^2} - \frac{6y^2}{l^3}; & 1 - \frac{4y}{l} + \frac{3y^2}{l^2}; & -\frac{6y}{l^2} + \frac{6y^2}{l^3}; & -\frac{2y}{l} + \frac{3y^2}{l^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

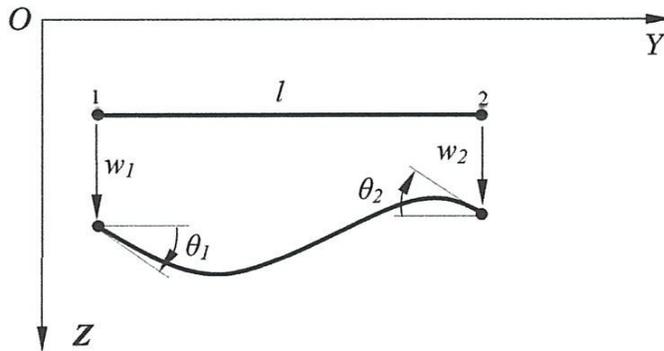
C'est à dire :

$$\langle N_1(y) \rangle = \left\langle 1 - \frac{3y^2}{l^2} + \frac{2y^3}{l^3}; \quad -y + \frac{2y^2}{l} - \frac{y^3}{l^2}; \quad \frac{3y^2}{l^2} - \frac{2y^3}{l^3}; \quad \frac{y^2}{l} - \frac{y^3}{l^2} \right\rangle \quad (\text{A.15})$$

### Construction des fonctions de forme dans le plan $(O, Y, Z)$

On procède de la même manière que dans le plan  $(O, X, Y)$ , on obtient :

$$\langle N_2(y) \rangle = \left\langle 1 - \frac{3y^2}{l^2} + \frac{2y^3}{l^3}; y - \frac{2y^2}{l} + \frac{y^3}{l^2}; \frac{3y^2}{l^2} - \frac{2y^3}{l^3}; -\frac{y^2}{l} + \frac{y^3}{l^2} \right\rangle \quad (\text{A.16})$$



# B

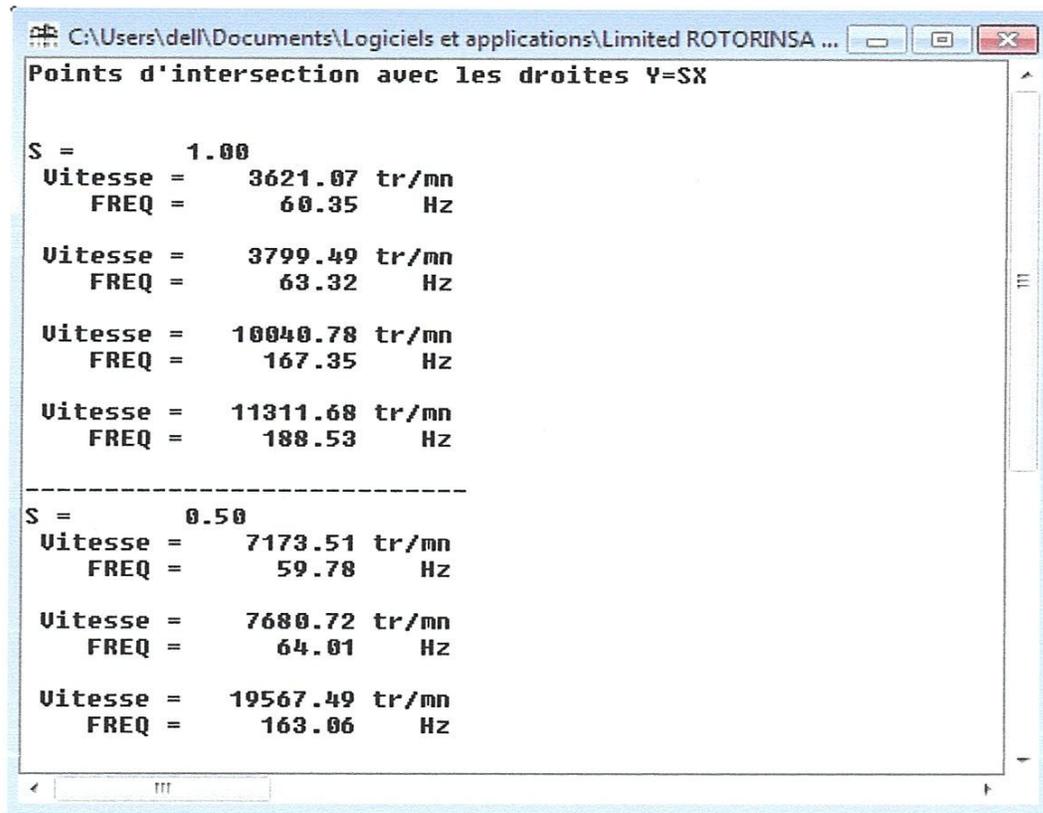
## Étude Numérique Utilisation Du Logiciel ROTORINSA

### 1. Fichier de données généré : *Projet de fin d'étude 2014*

```

Machine4
Dynamique des rotors en flexion
Modèle simple de multi-rotors coaxiaux
 9, 10, 2., 15, 1.000E-08, 1.000E-02, 0,
 1, 0.000000E+00,
 2, 1.000000E-01,
 3, 2.000000E-01,
 4, 3.500000E-01,
 5, 5.000000E-01,
 6, 6.666667E-01,
 7, 8.333333E-01,
 8, 1.000000E+00,
 9, 1.150000E+00,
 10, 1.300000E+00,
99999
 1, 0, 0, 0, 0,
 10, 0, 0, 0, 0,
99999
 1, 9,
 1, 1, 2, 1, 1, 1,
 2, 2, 3, 1, 1, 1,
 3, 3, 4, 1, 1, 1,
 4, 4, 5, 1, 1, 1,
 5, 5, 6, 1, 1, 1,
 6, 6, 7, 1, 1, 1,
 7, 7, 8, 1, 1, 1,
 8, 8, 9, 1, 1, 1,
 9, 9, 10, 1, 1, 1,
 2, 3,
 10, 3, 0, 1, 2, 0,
 11, 5, 0, 1, 3, 0,
 12, 8, 0, 1, 4, 0,
 3, 2,
 13, 1, 0, 0, 5, 6,
 14, 10, 0, 0, 5, 6,
99999
 1, 2.000000E+11, 7800.000, 0.300,
 1, 5.000000E-02, 0.000000E+00, 0.000000E+00, 2.,
 2, 1.200000E-01, 5.000000E-02, 5.000000E-02, 2.,
 3, 2.000000E-01, 5.000000E-02, 5.000000E-02, 2.,
 4, 2.000000E-01, 5.000000E-02, 6.000000E-02, 2.,
 5, 5.000000E+07, 7.000000E+07, 0.000000E+00, 0.000000E+00,
 6, 5.000000E+02, 7.000000E+02, 0.000000E+00, 0.000000E+00,
99999

```

**2. Diagramme de Campbell : *Points d'intersections avec les droites  $Y = S X$*** 

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Dokainish, M.A., A New Approach for the Plate Vibrations: Combination of Transfer Matrix and Finite-Element Technique, *Journal of Engineering for Industry*, Vol. 94, 1972, pp. 526–530.
- [2] Ruhl, R.L., Booker, J.F., A Finite Element Model for Distributed Parameters Turborotor Systems, *Journal of Engineering for Industry*, Vol. 94, pp. 126–132, 1972.
- [3] Nelson, H.D., Mc. Vaugh, J.M., The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements, *Journal of Engineering for Industry*, Vol. 98, pp. 593–600, 1976.
- [4] Meirovitch, L., *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff & Noordhoff, Alphen an den Rijn, The Netherlands, 1980.
- [5] Ohga, M., Shigematsu, T., Hara, T., Structural Analysis by a Combined Finite Element-Transfer Matrix Method, *Computers and Structures*, Vol. 17, 1983, pp. 321–326.
- [6] Degen, E.E., Shephard, M.S., Loewy, R.G., Combined Finite Element Transfer-Matrix Method Based on a Mixed Formulation, *Computers and Structures*, Vol. 20, 1985, pp. 173–180.
- [7] Subbiah, R., Kumar, A.S., Sankar, T.S., Transient Dynamic Analysis of Rotors Using the Combined Methodologies of Finite Elements and Transfer Matrix, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, 1988, pp. 448–452.
- [8] Schaeffer, H.G., *MSC NASTRAN Primer*, Schaeffer Analysis, Inc., Mount Vernon, New Hampshire, 1984.
- [9] Nour-Omid, B., Clough, R.W., Dynamic Analysis of Structures Using Lanczos Coordinates, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 12, 1989, pp. 565–577.
- [10] Wilson, E.L., Yuan, M., Dickens, J.M., Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, 1982, pp. 813–821.
- [11] Arnold, R.R., Citerley, R.L., Chargin, M., Galant, D., Application of Ritz Vectors for Dynamic Analysis of Large Structures, *Computers and Structures*, Vol. 21, No. 3, 1985, pp. 461–467.
- [12] Guyan, R.J., Reduction of Stiffness and Mass Matrices, *AIAA Journal*, No. 3, 1965, p. 380.
- [13] Kidder, R.L., Reduction of Structural Frequency Equations, *AIAA Journal*, Vol. 11, No. 6, p. 892, 1973.
- [14] Rouch, K.E., Rao, J.S., Dynamic Reduction in Rotor Dynamics by Finite Element Method, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 102, pp. 360–68, 1980.
- [15] Downs, B., Accurate Reduction of Stiffness and Mass Matrices for Vibration Analysis and a Rationale for Selecting Master Degrees of Freedom, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 102, 1980, pp. 412–416.
- [16] Shah, V.N., Raymond M., Analytical Selection of Masters for the Reduced Eigenvalue Problem, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, pp. 89–98, 1982.
- [17] Subbiah, R., Bhat, R.B., Sankar, T.S., Dynamic Response of Rotors Using Modal Reduction Technique, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 111, 1989.
- [18] Kane, K., Torby, B.J., The Extended Modal Reduction Method Applied to Rotor Dynamic Problems, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 113, 1991.
- [19] Ratan, S., Rodriguez, J., Transient Dynamic Analysis of Rotors Using SMAC Techniques, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 114, October 1992.
- [20] Fuh, J., Chen, S., Berman, A., System Identification of Analytical Models of Damped Structures, *Proc. of AIAA Conference*, Palm Springs, CA, 1984, pp. 112–116.

- [21] Lund, J.W., Orcutt, F.K., Calculation and Experiments on the Unbalance Response of a Flexible Rotor, ASME Trans., Journal of Engineering for Industry, Vol. 89, 1967, pp. 785–796.
- [22] Mucino, V.H., Pavelic, V., An Exact Condensation Procedure for Chain-Like Structures Using a Finite Element-Transfer Matrix Approach, Journal of Mechanical Design, Vol. 103, pp. 295–303, 1981.
- [23] Kumar, A.S., Sankar, T.S., A New Transfer Matrix Method for Response Analysis of Large Dynamic Systems, Computers and Structures, Vol. 23, 1986, pp. 545–552.
- [24] Rao, J.S., Sarma, K.V.B., Gupta, K., Transient Analysis of Rotors by Transfer Matrix Method, Proceedings of 11th Biennial ASME Conference on Vibration and Noise, Rotating Machinery Dynamics, Vol. 2, 1987, pp. 545–552.
- [25] Michel Lalanne, Guy Ferraris, Rotordynamics Prediction in Engineering by J. Wiley, 254 p, 2<sup>nd</sup> edition 1998. ISBN 0 471 97288 6.
- [26] Marie Ange ANDRIANOELY, Guy FERRARIS, Michel LALANNE, Alain BERLIOZ, Alain THIVILLIER, ROTORINSA Manuel d'utilisation, Version 4.0.4 201.
- [27] <http://www.delta-js.ch/english/software/references/>
- [28] A. Castilho, G. Jacquet-Richardet, M. Lalanne, Dynamic problems concerning the speed of rotation increase of a turbine –blower assembly., Journal of Sound and Vibration, 1998 215(1), 47-62
- [29] Patrick Berthier, Guy Ferraris, Michel Lalanne, Prévission du comportement dynamique des moteurs d'avion : vitesses critiques, effets de balourds. Journal of Mec.Th. et Appl, 5.1986.
- [30] G. Ferraris, V. Maisonneuve, M.Lalanne, Prediction of the dynamic behavior of non-symmetric coaxial co-or counter rotating rotors, Journal of Sound and Vibration 1996 195(4), 649-666.
- [31] Zorzi, E.S., Nelson H.D., Finite Element Methode Simulation of Rotor Bearing Systems with Internal Damping. ASME, Journal of Engineering fo Power, pp. 71-76, 1977

## Résumé

Ce sujet de fin d'étude concerne la modélisation éléments finis d'un rotor industriel multi-disques coaxiaux par le logiciel d'éléments finis ROTORINSA, spécifique pour la dynamique des rotors en flexion. Le modèle mathématique du rotor à étudier est composé de quatre arbres, trois disques et deux paliers viscoélastiques. Les disques massiques sont infiniment rigides, tandis que les arbres massiques sont flexibles. Chaque disque est modélisé par un nœud à quatre degrés de liberté. Les arbres sont modélisés par des éléments poutres de type Timochenko. Chaque élément possède quatre degrés de liberté par nœud. L'effet gyroscopique dû aux disques et aux arbres est pris en compte. Les paliers sont modélisés par une série de ressorts et d'amortisseurs anisotropes.

Les différents calculs effectués sont : la déformée statique, la base modale, les déformées en rotation, le diagramme de Campbell, la réponse dynamique du rotor due à un balourd et la réponse due à une force extérieure asynchrone. Les influences du nombre de mode et du maillage sur les réponses dynamiques sont présentées et validées.