

11/531.706

**Université du 8 mai 1945 Guelma**  
**Faculté des Sciences et de la Technologie**  
**Département de Génie Mécanique**



# **Mémoire de Master**

Présenté par : **CHETRAH Fadila**

**Master**

**Option : Maintenance Industrielle**



## ***Dynamique en torsion d'une installation industrielle de production d'air comprimé***



Sous la direction de : **Dr. REZAIGUIA Abdelouahab**

**Année universitaire 2015/2016**

# Table des Matières

<b>Introduction générale .....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 : Recherche Bibliographique .....</b>	<b>2</b>
1.1. Introduction .....	3
1.2. Description des turbomachines industrielles .....	4
1.2.1. Turbines à vapeur industrielles .....	4
1.2.2. Compresseurs centrifuges .....	5
1.3. Différence entre la dynamique des rotors en flexion et la dynamique des rotors en torsion .....	7
1.4. Objectifs d'analyse de la dynamique des rotors en torsion .....	8
1.5. Les diverses sources d'excitation des machines tournantes .....	9
1.5.1. Sources d'excitations mécaniques .....	9
1.5.2. Sources d'excitations hydrauliques .....	12
1.5.3. Sources d'excitations électromagnétiques .....	12
<b>Chapitre 2 : Recherche des pulsations propres et des déformés modales des lignes d'arbres non ramifiées .....</b>	<b>14</b>
2.1. Introduction .....	15
2.2. Hypothèses de modélisation .....	15
2.3. Equations du mouvement libre des lignes d'arbres .....	15
2.4. Recherche des fréquences et des modes propres .....	17
2.4.1. Méthode d'Holzer .....	17
2.4.2. Méthode de Ritz .....	19
<b>Chapitre 3 : Calcul des pulsations propres et des déformées modales de l'installation de production d'air comprimé .....</b>	<b>25</b>
3.1. Description de l'installation .....	26
3.2. Modélisation de l'installation .....	26
3.2.1. Première étape de la modélisation .....	26
3.2.2. Deuxième étape de la modélisation .....	27
3.3. Résultats de l'étude en vibrations libres .....	29
3.3.1. Pulsations propres .....	29
3.3.2. Déformées modales .....	30
3.4. Influence de la raideur des tronçons sur les pulsations propres.....	34
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>36</b>
<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>37</b>

## Liste des figures

<b>Figure 1.1</b> : Turbine à condensation (échappement radial).....	5
<b>Figure 1.2</b> : Turbine à condensation (échappement axial).....	5
<b>Figure 1.3</b> : Turbine à contrepression.....	5
<b>Figure 1.4</b> : Turbine à contrepression et extraction réglée.....	5
<b>Figure 1.5</b> : Turbine à contrepression et extraction réglée.....	5
<b>Figure 1.6</b> : Vue d'un compresseur centrifuge .....	6
<b>Figure 1.7</b> : Compresseur avec un corps moulé.....	6
<b>Figure 1.8</b> : Corps compresseur pour station de gazoduc.....	6
<b>Figure 1.9</b> : Palier à patins oscillants .....	7
<b>Figure 1.10</b> : Garniture mécanique d'étanchéité de bout d'arbre.....	7
<b>Figure 1.11</b> : Etanchéités internes à labyrinthes .....	7
<b>Figure 1.12</b> : Mode de vibration de torsion d'un moteur entraînant un compresseur .....	8
<b>Figure 1.13</b> : Couple moteur pour un cylindre d'un moteur d'une installation .....	10
<b>Figure 1.14</b> : Rotor fléchi sous l'effet d'un balourd .....	12
<b>Figure 2.1</b> : Modèle torsionnelle générique d'une ligne d'arbres non ramifiée à plusieurs degrés de liberté.....	15
<b>Figure 2.2</b> : Interpolation polynomiale.....	18
<b>Figure 3.1</b> : Installation de production d'air comprimé .....	26
<b>Figure 3.2</b> : Schéma de l'installation de la figure 3.1.....	27
<b>Figure 3.3</b> : Modèle torsionnelle final équivalent de la figure 3.1.....	28
<b>Figure 3.4</b> : Déformée modale du mode rigide du modèle de la figure 3.1 .....	32
<b>Figure 3.5</b> : Déformée modale du premier mode de vibrations du modèle de la figure 3.1 .....	32
<b>Figure 3.6</b> : Déformée modale du deuxième mode de vibrations du modèle de la figure 3.1.....	33
<b>Figure 3.7</b> : Déformée modale du troisième mode de vibrations du modèle de la figure 3.1.....	33
<b>Figure 3.8</b> : Influence de la rigidité en torsion de l'accouplement petite vitesse sur le premier mode de vibrations.....	35

## Introduction Générale

Notre travail consiste à étudier les vibrations de torsion d'une installation industrielle de production d'air comprimé composée d'un moteur électrique, d'un accouplement élastique à grande vitesse, d'un réducteur à engrenages, d'un accouplement petite vitesse, d'un volant d'inertie et d'un compresseur d'air à deux cylindres. Après quelques centaines d'heures de fonctionnement, les dents des engrenages du groupe compresseur présentent une usure anormale sur chaque flanc, cela est caractéristique, bien souvent, d'amplitude vibratoire, donc de couple oscillatoire trop important au régime de fonctionnement sans charge.

Le *premier chapitre* a pour but de donner une vision assez large sur les turbines et les compresseurs centrifuges, les différences qui existent entre les vibrations de flexion et celles de torsion et les objectifs de l'analyse des vibrations de torsion des lignes d'arbres ainsi que les diverses sources d'excitation des machines tournantes.

Le *deuxième chapitre* a pour but la détermination des fréquences et des modes propres des lignes d'arbres non ramifiées sollicitées en vibrations de torsion. Sur la base de certaines hypothèses simplificatrices, les équations du mouvement libre des lignes d'arbres sont obtenues en utilisant le formalisme de Lagrange. Deux méthodes numériques populaires pour ce type de problème sont utilisées pour calculer les fréquences et les modes propres : la méthode de Holzer et la méthode de Rutishauser. Cette première analyse est le préalable incontournable à toute étude des vibrations de torsion forcées et, dans certains cas, elle peut s'avérer suffisante.

Le *troisième chapitre* concerne le calcul des pulsations propres et des déformées modales d'une installation industrielle de production d'air comprimé. Le calcul s'effectue sur un modèle torsionnel non ramifié équivalent, obtenu en deux étapes. Les résultats de cette étude sont présentés et commentés. Une solution à envisager est proposée.

En fin, on clôture ce mémoire par une *conclusion générale* qui comporte une synthèse des travaux réalisés et résultats trouvés.

# 1

## Recherche Bibliographique

### Sommaire

---

1.1. Introduction.....	3
1.2. Description des turbomachines industrielles.....	4
1.3. Différence entre la dynamique des rotors en flexion et la dynamique des rotors en torsion.....	7
1.4. Objectifs d'analyse de la dynamique des rotors en torsion .....	8
1.5. Les diverses sources d'excitation des machines tournantes .....	9

---

## 1.1. Introduction

Entraînées par un groupe moteur, les lignes d'arbres transmettent une puissance vers les éléments récepteurs en adaptant en général la vitesse de rotation. Ce transfert d'énergie doit s'effectuer avec un minimum de perte en ligne, mais aussi avec une sécurité de fonctionnement et une durée de vie acceptables. Les phénomènes dynamiques y jouent en général un rôle essentiel étant entendu que tout système réel déformable est susceptible de vibrer sous l'influence d'excitations périodiques ou, à cause de phénomènes d'inertie lors du passage d'un point de fonctionnement établi à un autre. Ce rôle a tendance à prendre de l'ampleur car, très souvent, dans les conceptions modernes, la nécessité d'augmenter la puissance massique de l'installation, se traduit par une diminution des masses mises en mouvement couplée à une augmentation des vitesses de rotation [1].

Les régimes transitoires qui correspondent à une variation au cours du temps des vitesses moyennes des rotors (accélération ou freinage de l'installation, prise de couple...) peuvent entraîner des ruptures brutales à cause d'instabilités induites, la plupart du temps, par un phénomène de résonance. Moins spectaculaire, une autre de leurs conséquences peut se traduire par des dépassements locaux des limites de contraintes admissibles, conduisant à une diminution notable de la durée de vie de l'installation.

Pour un régime permanent caractérisé par une vitesse moyenne constante pour chaque rotor composant l'installation (point de fonctionnement nominal), l'état de contrainte dans les arbres, se décompose suivant une valeur moyenne constante – associée à la transmission du couple moyen – et, un ensemble de composantes pulsées dont la variation périodique au cours du temps est directement liée à l'existence de vibrations axiales, transversales, ou de torsion. L'analyse de ces contraintes en relation avec des critères de tenue à la fatigue permet d'estimer la durée de vie probable des installations.

On définit trois types d'analyse des vibrations de torsion des lignes d'arbres :

- Le premier étudie les vibrations libres qui a pour objectif la détermination des premières pulsations propres. Cette première analyse est le préalable incontournable à toute étude des vibrations de torsion et, dans certains cas, elle peut s'avérer suffisante.
- Dans la négative, il est possible de la compléter par le deuxième type d'analyse qui est l'étude des vibrations de torsion permanentes qui sont forcées par des excitations périodiques données. Dans ce cas, on calcule des amplitudes de déplacements et de contraintes en certains points choisis de chaque rotor. Ces deux premières analyses supposent ensemble que les vibrations de torsion se concrétisent par des petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable où chaque rotor composant la ligne d'arbre possède une vitesse moyenne constante. Alors, le comportement des éléments de l'installation est linéarisable autour de ce point de fonctionnement étudié.
- Le troisième type d'analyse est beaucoup plus général et il permet l'étude de l'installation sur la totalité de sa plage de fonctionnement, pour des amplitudes de vibrations quelconques, le comportement pouvant être linéaire ou non. On peut analyser, dans ce contexte, les régimes transitoires qui peuvent représenter par exemple, un démarrage, un freinage, une prise de couple. Il faut d'ores et déjà préciser que, eu égard à la complexité qu'elle entraîne, la nécessité de cette

approche doit être justifiée avec rigueur. L'expérience montre que la plupart du temps, l'utilité de cette modélisation est indiscutable lorsque l'effet d'une non-linéarité, par exemple la variation de la rigidité d'un accouplement en fonction du couple transmis, est prépondérant pour l'explication du comportement de l'installation. Cela impose donc d'identifier avec précision le phénomène non-linéaire. Dans la mesure où le comportement global de l'installation peut être supposé linéaire, il est possible d'utiliser le modèle développé lors des deux premières analyses. Dans ce cas, il existe d'autres approches comme le calcul de la réponse par superposition modale qui, en profitant du caractère linéaire du problème est plus efficace [1].

Les machines tournantes ne sont pas couramment instrumentées pour mesurer les vibrations de torsion. En outre, les vibrations de torsion produisent rarement des bruits ou des vibrations des parties fixes des machines tournantes. Très souvent, le premier indicateur d'un problème de vibration de torsion est un accouplement d'arbre cassé ou un arbre cassé. Dans le cas des vibrations de flexion, la défaillance commence habituellement dans le voisinage d'une concentration de contrainte et se propage à 45 degrés à l'axe de l'arbre en raison de la fatigue du matériau [2].

Dans les réducteurs et les multiplicateurs de vitesses, les vibrations de torsion peuvent produire un niveau de bruit élevé si les engrenages deviennent régulièrement déchargés due aux fluctuations de couple qui provoquent l'usure rapide et la détérioration des surfaces des dents d'engrenages. Le changement dans le signe du couple de torsion peut briser les dents d'engrenage [2].

## **1.2. Description des turbomachines industrielles [3]**

### **1.2.1. Turbines à vapeur industrielles**

Les turbines à vapeur industrielles sont des machines mono corps qui couvrent essentiellement des applications de récupération d'énergie, bien souvent dans un contexte de cogénération d'énergie thermique et électrique.

C'est ainsi que l'on trouvera d'une façon assez schématique :

- des machines à condensation où l'on maximise la chute d'enthalpie, comme par exemple dans des cycles combinés (récupération de la chaleur des gaz d'échappement des turbines à gaz) ; ces machines ont des échappements soit radiaux (figure 1.1), soit axiaux (figure 1.2) suivant les conditions d'installation et la technique du condenseur ;
- des machines à contrepression (figure 1.3) où la totalité du débit de vapeur sera envoyé dans un autre procédé, comme par exemple des sucreries ou des unités de chauffage urbain ;
- des machines appelées "mixtes" où une partie importante du débit de vapeur est prélevé en cours de détente pour alimenter l'autre procédé et le reste va à l'échappement à plus basse pression pour maximiser l'énergie électrique produite, comme par exemple dans les usines de production de pâte à papier, ou encore des usines d'incinérations d'ordures ménagères. Dans ce cas, la pression du réseau de soutirage est très souvent régulée par le système de la turbine, ce qui maximise la production

énergétique. Ainsi, la figure (1.4) montre une turbine à contrepression où un jeu de soupapes régulatrices, analogue à celui qui assure la régulation de vitesse en tête de la machine, a été ajouté pour cette fonction. La figure (1.5) est la coupe d'une turbine à condensation où l'on a utilisé un obturateur à grille (en jaune) qui assure la même fonction. Dans ce cas de turbines que l'on appelle "à extraction réglée", on réalise une régulation multi variables découplant totalement les deux fonctions vitesse et pression.

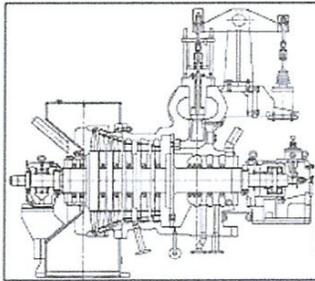


Figure 1.1  
Turbine à condensation  
(Échappement radial)

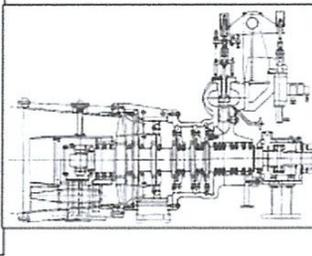


Figure 1.2  
Turbine à condensation  
(Échappement axial)

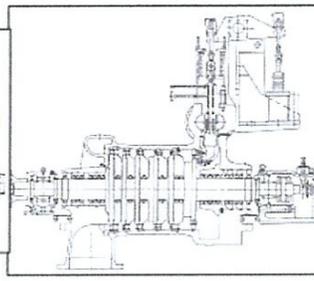


Figure 1.3  
Turbine à contrepression

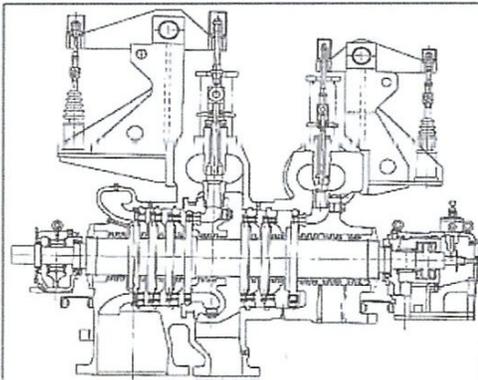


Figure 1.4 - Turbine à contrepression  
et extraction réglée

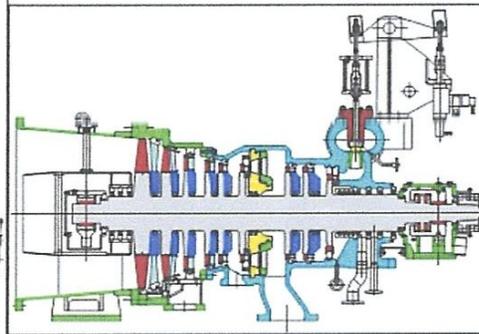


Figure 1.5 - Turbine à condensation  
et extraction réglée

### 1.2.2. Compresseurs centrifuges

Les compresseurs centrifuges ont une technique plus récente que la turbine à vapeur. Ils ont pris le relais de compresseurs alternatifs (à pistons) dans les applications nécessitant de plus grands débits volumiques. Ils se situent entre ces compresseurs alternatifs et les compresseurs axiaux de grands coefficients de débit.

Les compresseurs centrifuges présentent des avantages indéniables de disponibilité (maintenance réduite) par rapport aux machines alternatives, ainsi que de pouvoir manipuler des débits volumiques beaucoup plus grands avec une taille de machine acceptable.

Sur le plan aérodynamique, les compresseurs centrifuges couvrent une très large plage de coefficient de débit entre 0,005 et 0,12. Ils se situent au-delà des compresseurs alternatifs et en dessous des machines hélico-centrifuges, et donc en dessous des compresseurs axiaux qui ont des coefficients de débit supérieurs à 0,3.

Les corps des compresseurs centrifuges (figure 1.6) sont constitués :

- D'une enveloppe pouvant être en acier moulé pour les corps de grandes dimensions à relativement faible pression avec un plan de joint horizontal boulonné (figure 1.7) comme pour les turbines à vapeur ou pour des compresseurs de gazoducs ("boosters" – figure 1.8), mais plus généralement en acier forgé, ces corps de type "barrel" étant fermés par un couvercle retenu axialement par des anneaux de cisaillement ; les tubulures sont naturellement moulées pour les corps "split" et dans le cas des corps "barrel", sont rapportées par soudage ou lamées dans l'épaisseur de l'enveloppe ;
- D'une cartouche aérodynamique comportant l'aérodynamique statorique et dans laquelle est montée le rotor qui est donc insérée dans l'enveloppe ;
- d'un rotor en acier forgé portant les roues ainsi qu'un piston d'équilibrage destiné à compenser la pression différentielle s'appliquant sur les roues entre la pression d'aspiration et la pression de refoulement ;
- De paliers généralement flasqués sur le corps avec des coussinets hydrauliques du type hydrodynamique à patins oscillants et une butée également hydrodynamique à patins oscillants (figure 1.9) ;
- de garnitures d'étanchéités de sortie d'arbre, de type mécanique à gaz (figure 1.10) ;
- d'étanchéités inter étages de type à labyrinthe pour limiter les recirculations internes aux ouïes de roues et sur le rotor (figure 1.11).

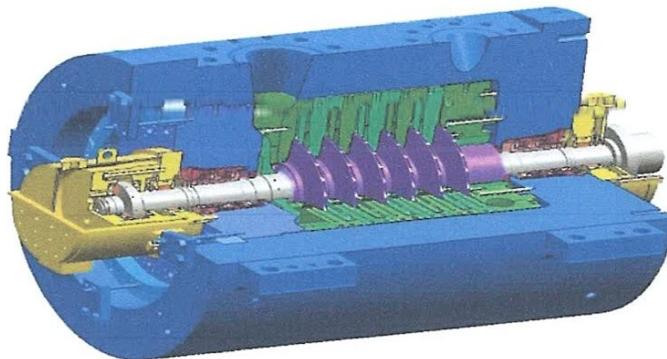


Figure 1.6 Vue écorchée d'un compresseur centrifuge "barrel"

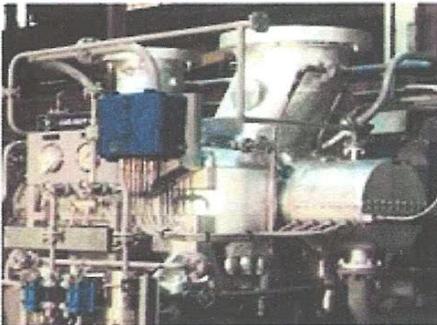


Figure 1.7 : Compresseur avec un corps moulé "split"



Figure 1.8 : Corps de compresseurs pour station de gazoduc

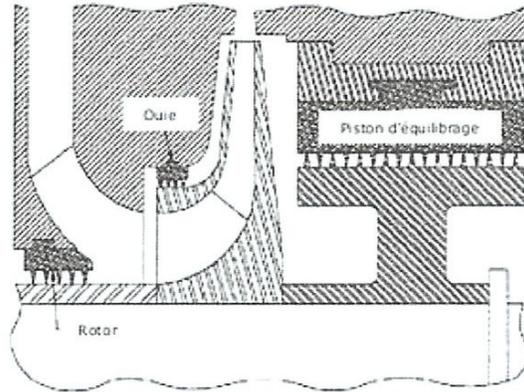


Figure : 1.9 : Paliers à patins oscillants

Figure 1.10 : Garniture mécanique d'étanchéité de bout d'arbre

Figure 1.11 : étanchéités internes à labyrinthes

### 1.3. Différence entre les vibrations de flexion et les vibrations de torsion

1. Les vibrations de flexion sont facilement mesurées par instruments standards ou par les vibrations transmises à des boîtiers et des fondations. Aussi, de grandes amplitudes de vibrations de flexion sont souvent remarquées dues au frottement des joints et des roues en rotation. D'autre part, les instruments de mesure des vibrations de torsion ne sont pas généralement installés, et de grandes amplitudes peuvent se produire en silence et sans effet considérable sur les boîtiers et les fondations.
2. Les fréquences propres des vibrations de flexion dépendent généralement de la vitesse de rotation, tandis que celles des vibrations de torsion sont indépendantes de la vitesse de rotation et peuvent être mesurées avec la machine au repos si une excitation peut être fournie.
3. Les vibrations de flexion dans les machines tournantes peuvent devenir instables due à l'amortissement; c'est très rare pour des vibrations de torsion.
4. En vibrations de flexion, l'excitation est généralement synchrone avec la vitesse de rotation telle que la force de balourd. Cette dernière n'a pas d'influence sur les vibrations de torsion, sauf indirectement dans des machines à engrenages où les vibrations de flexion produisent un couple dynamique.
5. L'analyse des vibrations de flexion peut être effectuée généralement sur chaque rotor dans la ligne d'arbres séparément, tandis que l'analyse des vibrations de torsion doit inclure tous les rotors dans la ligne d'arbres. Dans de nombreux cas d'analyse des vibrations de torsion, chaque disque dans la ligne d'arbre peut être considérée comme rigide.

## 1.4. Objectifs d'analyse de la dynamique des rotors en torsion

Les objectifs de l'analyse des vibrations de torsion sont les suivants :

1. Détermination des fréquences et des modes propres.
2. Voir l'influence d'un ou plusieurs paramètres ou composants dans la ligne d'arbres sur les fréquences et les modes propres ainsi que les amplitudes de vibrations.
3. Calcule des amplitudes de vibration et des couples de torsion sous excitations en régime permanent.
4. Calcule des couples de torsion dynamiques et des charges au niveau des dentures d'engrenages en régime transitoire (par exemple, au cours du démarrage ou du freinage d'une machine tournante).
5. Détermination des zones de stabilité en torsion des lignes d'arbres avec contrôle automatique de la vitesse de rotation.

L'objectif 1 peut être effectué souvent avec des modèles torsionnels simplifiés. Les autres objectifs exigent habituellement une simulation par ordinateur.

La figure (1.12) issue de la référence [4], montre un mode propre de vibrations de torsion d'une ligne d'arbre d'une installation industrielle constituée d'un moteur électrique entraînant une pompe ou un compresseur. Le moteur oscille en opposition de phase avec le compresseur. On remarque qu'il y a très peu de torsion dans les rotors du moteur et du compresseur, de sorte qu'ils peuvent être considérés comme rigides.

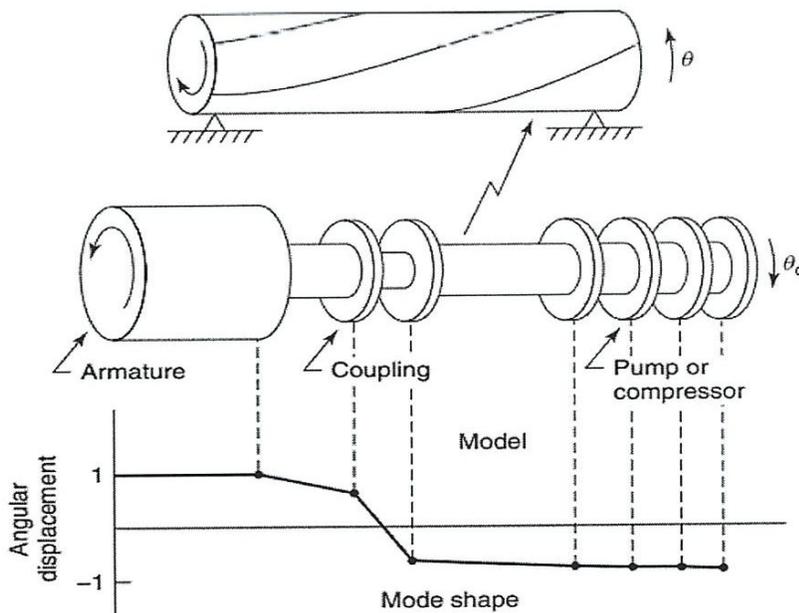


Figure 1.12 : Mode de vibration de torsion d'un moteur entraînant un compresseur

## 1.5. Les diverses sources d'excitation des machines tournantes

Nous nous intéressons dans ce paragraphe, aux excitations permanentes dont la variation au cours du temps est périodique. Ces excitations sont extérieures et, elles doivent apporter une énergie mécanique qui sera, dans le même temps, transformée en chaleur par les phénomènes dissipatifs.

Pour un modèle linéaire, toute excitation peut donc être représentée par une somme d'excitations sinusoïdales élémentaires ou harmoniques. Chacune d'elle, notée  $F_q$  est définie par sa pulsation  $\Omega_q$ , son amplitude  $C_q$  et, sa phase  $\Phi_q$  mesurée par rapport à une origine des temps donnée. Elle s'écrit sous la forme :

$$F_q = C_q \cos(\Omega_q t + \varphi_q)$$

### 1.5.1. Sources d'excitations mécaniques

#### a. Système bielle-manivelle

La bielle exerce sur le maneton du vilebrequin un effort cyclique dont la composante tangentielle donne un couple  $C$  qui peut se décomposer en une composante  $C_p$  due à l'action de la pression sur le piston et une composante  $C_i$  due aux quantités d'accélération de la bielle et du piston. On a :  $C = C_p + C_i$ . Avec  $C_p$  est le couple dû aux pressions du gaz,  $C_i$  est de couple aux inerties de l'attelage mobile.

La décomposition en série de Fourier du couple  $C_p$  s'écrit :

$$C_p(t) = C_0 + \sum_{r=1}^n (a_{pr} \sin \frac{2\pi}{\tau_p} r t + b_{pr} \cos \frac{2\pi}{\tau_p} r t)$$

Avec  $a_{pr}$  et  $b_{pr}$  sont les coefficients de Fourier pour l'harmonique de rang  $r$ ,  $\tau_p = \frac{2k\pi}{\Omega}$

La décomposition en série de Fourier du couple  $C_i$  de période  $\tau_i = \frac{2\pi}{\Omega}$  s'écrit :

$$C_i\left(\frac{t}{\tau_i}\right) = \sum_{q=1}^n (a_{iq} \sin q\Omega t + b_{iq} \cos q\Omega t)$$

Avec  $a_{iq}$  et  $b_{iq}$  coefficients de Fourier pour l'harmonique de rang  $q$  ( $q$  entier) Le calcul des amplitudes de chaque harmonique du couple peut s'effectuer grâce à deux méthodes méthode direct et méthode de ker wilson. La figure (1.13) montre la variation du couple  $C$  sur une période pour un cylindre d'un moteur d'une installation industriel [5].

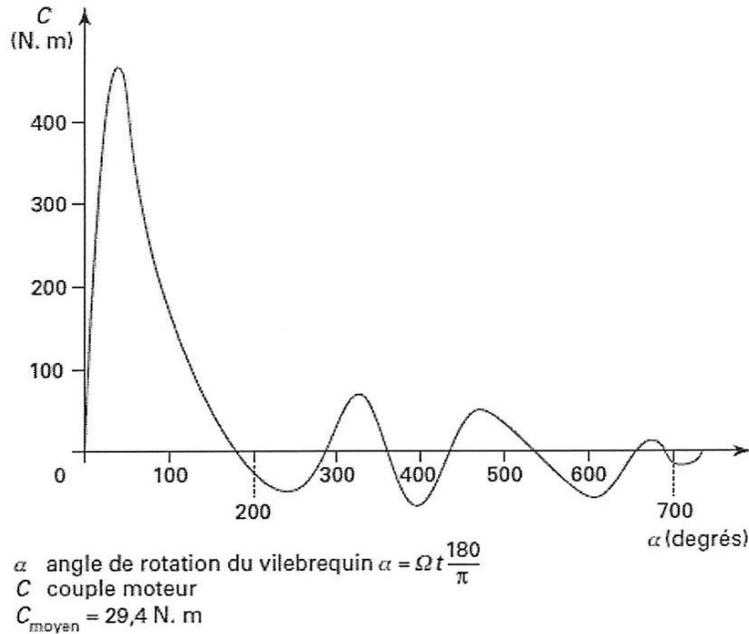


Figure 1.13: Couple moteur pour un cylindre d'un moteur d'une installation [5].

### b. Engrenages

L'engrènement d'une roue portant  $Z$  dents et tournant à la vitesse  $N$  (en tours par minute) produit sur son axe une excitation en vibration de torsion dont la pulsation fondamentale exprimée en radian par seconde est telle que:  $\Omega_e = Z \frac{\pi N}{30}$

La transmission du couple par contact entre les dentures s'effectue avec un nombre de dents en prise qui n'est pas constant dans le temps, ce qui entraîne une excitation d'engrènement périodique à chaque changement du nombre de contacts. Les harmoniques de cette excitation ont pour pulsations  $\Omega_e, 2\Omega_e, 3\Omega_e, \dots$ . Ce phénomène met aussi en jeu une variation de la raideur d'engrènement, à la même pulsation. Cette variation s'affaiblit quand le rapport de conduite augmente.

Les erreurs d'exécution de l'engrenage et de son support sont aussi génératrices de vibrations de torsion.

— Les erreurs de profil, si elles sont identiques sur chaque dent, modifient les vitesses instantanées et donnent des oscillations à la fréquence d'engrènement. Si seules quelques dents sont concernées, il n'y a vibration que si la périodicité est rigoureuse ; sinon l'ensemble donne lieu à un bruit de fond.

— Les erreurs de division : une erreur isolée se répétant périodiquement donne lieu à des vibrations dont la pulsation est égale à la vitesse de rotation de la roue (en radians par seconde) multipliée par le nombre d'erreurs individuelles périodiques. L'erreur locale donne une vibration dont la pulsation est égale à la vitesse de rotation de la roue exprimée en radians par seconde.

— Les arbres mal alignés ou les pignons excentrés donnent des excitations dont les fréquences sont difficilement prévisibles

*c. Balourds*

L'équilibrage imparfait des rotors peut être représenté par une excentration du centre de gravité  $G$  d'un tronçon de masse  $m$ . Cette excentration de valeur  $e$  est mesurée par rapport à l'axe géométrique de révolution matérialisé en général par la droite passant par les centres géométriques des deux liaisons supportant le rotor (figure 1.14.a). Pour une vitesse de rotation  $N$  donnée, les effets d'inertie centrifuge s'appliquant en  $G$  font fléchir le rotor. La combinaison de ces effets conduit à une excitation périodique due au moment du poids  $mg$  par rapport à l'axe de rotation. L'amplitude de ce moment de torsion est maximale quand l'axe du rotor est horizontal, elle est nulle quand il est vertical.

Il n'est pas possible de donner une expression analytique générale de cette excitation dans la mesure où l'axe déformé d'un rotor peut tourner (précession) pendant que le rotor tourne lui-même autour de cet axe déformé (rotation propre). Il est conseillé de se reporter à l'étude des effets gyroscopiques pour les rotors.

La figure (1.14) représente, vue en bout, un rotor à axe horizontal, fléchi sous l'effet des forces d'inertie centrifuge s'appliquant au centre de gravité  $G$  d'un pignon déséquilibré de masse  $m$  placé au milieu de la travée. Les vitesses de rotation propre et de précession sont égales à  $N$ . On suppose la valeur de  $N$  constante et inférieure à la première pulsation propre en flexion du rotor. Dans ces conditions, l'expression du couple d'excitation en torsion s'écrit :

$$C - mg(e + f) \cos \frac{\pi N}{30} t$$

Avec :

- $e$  ( $m$ ) : excentration du centre de gravité  $G$
- $f$  ( $m$ ) : déformée de flexion du rotor au droit du point  $G$ ,
- $N$  ( $tr/min$ ) : vitesse de rotation du rotor,
- $mg$  ( $N$ ) : poids du pignon déséquilibré,
- $C$  ( $N.m$ ) : couple d'excitation en torsion.

Il est évident que l'influence des balourds est directement liée à la qualité de l'équilibrage. Dans certains cas, elle peut être négligée.

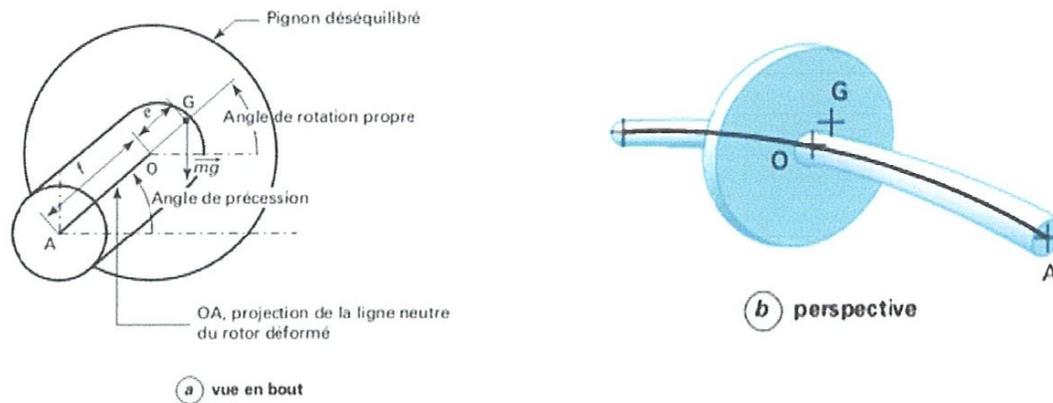


Figure 1.14 : Rotor fléchi sous l'effet d'un balourd

### 1.5.2. Sources d'excitations hydrauliques

De manière générale, il s'agit de quantifier, en terme de couple appliqué sur le rotor, les variations cycliques de pression et des vitesses sur les surfaces de contact entre la pièce mécanique concernée (pales d'hélices, ailettes ou aubes des roues de turbomachines...) et le fluide environnant.

Par exemple : excitation en torsion des hélices de bateaux.

### 1.5.3. Sources d'excitations électromagnétiques

De manière générale et à cause des progrès constants de l'électronique de puissance, il faut tenir compte de la partie commande des machines électriques pour analyser l'excitation mécanique qu'elles produisent.

#### a. Cas de l'alternateur

Lors des perturbations du réseau, il apparaît des variations du couple électromagnétique. Ce couple est la somme :

— d'un couple constant correspondant aux oscillations du groupe après l'élimination du défaut, dont la fréquence est de l'ordre de 0,3 à 1,5 Hz.

— d'un couple dont la fréquence est de 50 Hz, dû à la présence d'une composante continue dans le courant statorique, s'amortissant avec une constante de temps de l'ordre de 0,3 s dans les grands turbo-alternateurs ;

— d'un couple dont la fréquence est de 100 Hz, dû à l'existence d'une composante inverse dans le courant statorique lors des défauts dissymétriques.

Les pulsations des excitations potentielles sont donc 314 rad/s et 628 rad/s.

*-Cas d'un moteur électrique asynchrone*

La fréquence d'excitation (en hertz) du rotor d'un moteur électrique asynchrone est égale à :  $f_m = \frac{n_p}{60}(N_c - N)$

Avec

$n_p$  : nombre de pôles.

$N_c$  (tr/min) : vitesse de rotation du champ magnétique.

$N$  (tr/min) : vitesse de rotation de l'arbre moteur.

*b. Cas du moteur électrique synchrone*

Ces moteurs électriques peuvent produire des excitations en torsion significatives lors de la phase de démarrage de l'installation.

En général, la pulsation  $\omega_e$  (en rad/s) de cette excitation s'exprime par :

$$\omega_e = 4\pi f \left( \frac{N_s - N}{N_s} \right)$$

Avec :

$f$  (hz) : fréquence du réseau,

$N_s$  (tr/min) : vitesse de synchronisme,

$N$  (tr/min) : vitesse du rotor

# 2

## Recherche des pulsations propres et des déformés modales des lignes d'arbre non ramifiées

### Sommaire

---

2.1. Introduction .....	15
2.2. Hypothèses de modélisation .....	15
2.3. Equations du mouvement libre des lignes d'arbres .....	15
2.4. Recherche des fréquences et des modes propres .....	17

---

## 2.1. Introduction

Ce chapitre a pour objet, la détermination des fréquences et des modes propres des lignes d'arbre non ramifiées sollicitées en vibrations de torsion isolément des vibrations de flexion et axiale. Cette première étude est indispensable pour étudier par la suite les vibrations de torsion forcées et, dans certains cas, elle peut s'avérer suffisante. Les équations de mouvement libre de la ligne d'arbre sont obtenues en utilisant les équations de Lagrange. Deux méthodes numériques populaires pour ce type de problème sont utilisées pour calculer les fréquences et les modes propres des systèmes à plusieurs degrés de liberté : la méthode de Holzer et la méthode de Rutishauser.

## 2.2. Hypothèse de modélisation

- Le système obéit à la loi de Hooke (les déformations sont proportionnelle aux efforts)
- Seules les déformations de torsion sont prises en compte
- Le système est conservatif
- L'axe de rotation est un axe principal d'inertie
- Les centres de gravités des disques appartiennent à l'axe de rotation
- Les paliers sont considérés comme des liaisons pivot parfaites

## 2.3. Equations du mouvement libre des lignes d'arbres

La mise en équation est faite à partir de la figure (2.1). Les  $n$  disques et les tronçons d'arbre sont numérotés de gauche à droite. Dans cette figure,  $J_i (Kgm^2)$  est le moment d'inertie polaire du disque  $i$ ,  $\theta_i (rad)$  est la rotation du disque  $i$  par rapport à l'axe de rotation,  $k_i (Nm/rad)$  est la rigidité en torsion de l'arbre séparant les disques  $i$  et  $i+1$ .

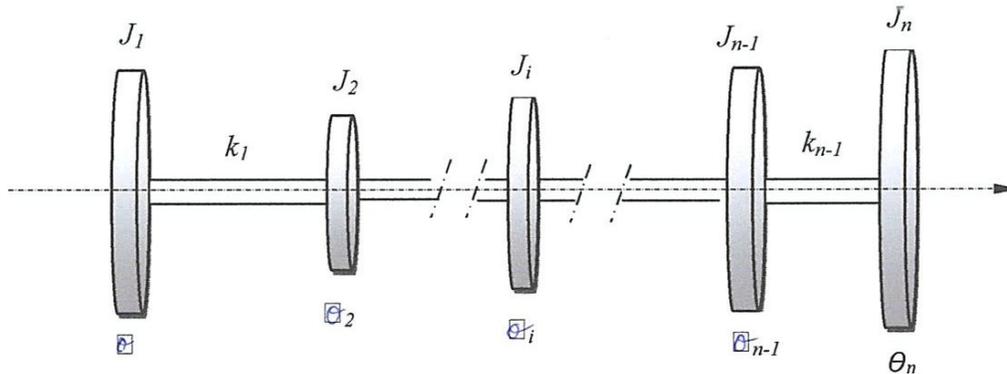


Figure 2.1 : Modèle torsionnel générique d'une ligne d'arbres non ramifiée à plusieurs degrés de liberté

L'énergie cinétique totale du système (disques) est :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n J_i \dot{\theta}_i^2 \quad (2.1)$$



$[K]$  est la matrice carrée symétrique des rigidités de torsion :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & & 0 \\ & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \\ & & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & \text{sym} & & & k_{n-2} + k_{n-1} & -k_{n-1} \\ & & & & & k_{n-1} \end{bmatrix}$$

et le vecteur des déplacement angulaire :

$$\{\theta\} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}^T$$

## 2.4. Recherche des fréquences et modes propres

Les fréquences propres et les modes propres d'un système à plusieurs degrés de liberté peuvent être calculés par des méthodes analytiques en mettant le polynôme caractéristique (équation en fréquences) égal zéro. Ces méthodes deviennent pénibles pour un nombre de degré de liberté élevé. Il faut utiliser les méthodes numériques telles que la méthode d'Holzer et la méthode de Rutishauser.

### 2.4.1. Méthode de Holzer

C'est en 1921 que Holzer propose une méthode de calcul des systèmes discrets en régime harmonique stationnaire. Elle est utilisée pour déterminer toutes les fréquences et les modes propres des systèmes à  $n$  degrés de libertés à la fois, que se soit pour les systèmes conservatifs ou dissipatifs, en vibration libre ou forcé [6]. Elle évite la formation de l'équation aux fréquences, de se fait, elle est avantageuse et facile à programmer.

En vibration libre le mouvement de disque d'ordre  $i$  est harmonique, soit

$$\theta_i(t) = A_i \sin(\omega t + \varphi); \quad \ddot{\theta}_i(t) = -\omega^2 A_i \sin(\omega t + \varphi); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

En reportant (2.6) dans (2.4), on obtient (2.7) :

$$\omega^2 J_1 A_1 = k_1 (A_1 - A_2) \quad (2.7.1)$$

$$\omega^2 J_i A_i = k_{i-1} (A_i - A_{i-1}) + k_i (A_i - A_{i+1}) \quad (2.7.2)$$

$$\omega^2 J_n A_n = k_{n-1} (A_n - A_{n-1}) \quad (2.7.3)$$

La somme des équations (2.7) donne :

$$\sum_{i=1}^n \omega^2 J_i A_i = 0 \quad (2.8)$$

L'équation (2.8) signifie que la somme des moments d'inertie du système doit être nulle. Cette dernière équation peut être traitée comme une autre forme de l'équation de fréquences. Dans la méthode d'Holzer, une fréquence propre  $\omega$  est estimée, et l'amplitude  $A_i$  est normé à l'unité ( $A_1=1$ ). En suite les  $A_i$  sont calculés par la formule de récurrence suivante :

$$A_i = A_{i-1} - \frac{\omega^2}{k_{i-1}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} J_j A_j \right) \quad ; \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (2.9)$$

Ces amplitudes sont substituées dans l'équation (2.8) pour voir si la condition est vérifiée. Si l'équation (2.8) n'est pas vérifiée, un autre estimé de  $\omega$  est choisi et le processus se répète jusqu'à la convergence.

La méthode d'Holzer peut être appliquée aussi pour un système à deux bords encastres :

$$A_i = A_{i-1} + \left( \frac{1}{k_{i-1}} \right) \left( k_1 A_1 - \omega^2 \sum_{j=1}^{i-1} J_j A_j \right) \quad ; \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (2.10)$$

Elle peut être utilisé aussi pour les systèmes forcées ( $\sum_{i=1}^n \omega^2 J_i A_i = \sum_{i=1}^n C_i$ ).

On procède par une interpolation (Newton, Lagrange, ...) pour trouver un polynôme du fin de déterminer les fréquences propres hors des points, la figure 2.2 traduit un exemple.

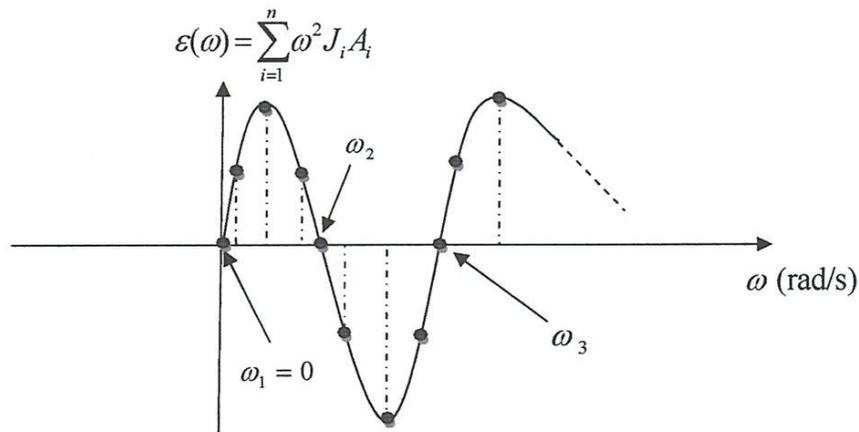


Figure 2.2 : Interpolation polynomiale

### 2.4.2. Méthode de Rutishauser

Pour les lignes d'arbre simples, ou présentant une ou plusieurs ramification à chaque extrémité d'arbre, nous avons adopté l'algorithme de Rutishauser relatif aux matrice quasi triangulaire. Cette méthode présente l'avantage d'être précise et rapidement convergente [7]. Elle permet de calculer tout les fréquences propres de torsion d'un système conservatif. Outre le fait que ce procédé ne nécessite, pour son implantation sur ordinateur, qu'un nombre réduit de registres de mémoire, elle présente les avantages de méthodes itératives à convergence rapide.

En reportant la solution (2.6) dans le système d'équation matriciel (2.5), nous obtenons :

$$([K] - [M]\omega^2)\{A\} = 0$$

Ou encore :

$$([M]^{-1}[K] - [M]^{-1}[M]\omega^2)\{A\} = 0 \quad (2.11)$$

Donc, si l'on désigne par [I] la matrice unité, les valeurs de  $\omega^2$  sont données par

$$[I]\omega^2 = [M]^{-1}[K] \quad (2.12)$$

Donc les valeurs de  $\omega^2$  cherchées sont les valeurs propres de la matrice :

$$[C] = [M]^{-1}[K] \quad (2.13)$$

Avec

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{J_1} & -\frac{k_1}{J_1} & 0 & & 0 \\ & \frac{k_1+k_2}{J_2} & -\frac{k_2}{J_2} & & 0 \\ & & \frac{k_2+k_3}{J_3} & -\frac{k_3}{J_3} & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \frac{k_{n-2}+k_{n-1}}{J_{n-1}} & -\frac{k_{n-1}}{J_{n-1}} \\ 0 & & & & & \frac{k_{n-1}}{J_n} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Il existe selon la nature de la matrice [C] plusieurs méthodes pour on rechercher les valeurs propres. La matrice [C] est une matrice quasi triangulaire particulière : c'est une matrice tridiagonale.

a. Propriétés des matrices tridiagonales

Soit [C] une matrice tridiagonale :

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_1 & c_2 & b_2 & 0 \\ & a_2 & c_3 & b_3 \\ 0 & & & a_{n-1} & c_n \end{bmatrix}$$

Soit  $\Delta(\lambda)$  le déterminant caractéristique de cette matrice

$$\Delta(\lambda) = \begin{bmatrix} c_1 - \lambda & b_1 & & & \\ a_1 & c_2 - \lambda & b_2 & & \\ & a_2 & c_3 - \lambda & b_3 & \\ & & a_{n-2} & c_{n-1} - \lambda & b_{n-1} \\ & & & a_{n-1} & c_n - \lambda \end{bmatrix}$$

Si  $D_{ij}$  est le cofacteur de l'élément situé sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$ , nous obtenons la formule de récurrence :

$$\Delta(\lambda) = (c_n - \lambda)D_{n,n} - a_{n-1}b_{n-1}D_{n-1,n}$$

Les termes symétriques par rapport à la diagonale n'interviennent que par leur produit, on peut donc les modifier à condition que leur produit reste constant. La matrice  $[C_0]$  définie ci-après a donc les mêmes valeurs propres que la matrice  $[C]$ , mais pas les mêmes valeurs propres.

$$[C_0] = \begin{bmatrix} c_1 & a_1 b_1 & & & \\ 1 & c_2 & a_2 b_2 & & \\ & 1 & c_3 & a_3 b_3 & \\ & & 1 & c_{n-1} & a_{n-1} b_{n-1} \\ & & & 1 & c_n \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

b. Suite de Rutishauser

D'après le théorème de Gauss, une matrice  $[C_0]$  quasi triangulaire peut être décomposée en un produit de deux matrices  $[R]$  et  $[S]$  ou :

- [R] : est une matrice triangulaire inférieure ;
- [S] : est une matrice triangulaire supérieure ;



$$\begin{aligned}
 b_1 = c_1^0 &\longrightarrow \beta_2 = \frac{\alpha_2^0}{b_1} \\
 b_2 = c_2^0 - \beta_2 &\longrightarrow \beta_3 = \frac{\alpha_3^0}{b_2} \\
 \dots &\dots \\
 b_i = c_i^0 - \beta_i &\longrightarrow \beta_{i+1} = \frac{\alpha_{i+1}^0}{b_i} \\
 \dots &\dots \\
 b_n = c_n^0 - \beta_n &
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

La matrice suivante  $[C_I] = [S_I][R_I]$  est donnée par :

$$[C_I] = [S_I][R_I] = \begin{bmatrix} 1 & \beta_2 & & & \\ & 1 & \beta_3 & 0 & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & 1 & \beta_n \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & & & & \\ & 1 & b_2 & & 0 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & 1 & b_{n-1} \\ & & & & & 1 & b_n \end{bmatrix} = [R_2][S_2]
 \tag{2.20}$$

Les éléments de la nouvelle matrice  $[C_i]$ , sont donnés par les relations :

$$\begin{aligned}
 c_{i,i} &= b_i + \beta_{i+1}, & \forall i \in [1, n-1] \\
 c_{n,n} &= b_n \\
 c_{n+1,i} &= 1 & \forall i \in [1, n-1] \\
 c_{i,i+1} &= \beta_{i+1} + b_i & \forall i \in [1, n-1] \\
 c_{i,j} &= 0 & \text{si } i > j+2 \text{ ou } j > i+2
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

La matrice  $[C_I]$  est une matrice tridiagonale possède des 1 sous la diagonale principale comme la matrice  $[C_0]$  :

$$[C_I] = \begin{bmatrix} c_1 & \alpha_2 & & & \\ & 1 & c_2 & \alpha_3 & 0 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & 1 & c_{n-1} & \alpha_n \\ & & & & & 1 & c_n \end{bmatrix} = [R_2][S_2]
 \tag{2.22}$$

Le processus itératif continu de la même façon afin de calculer de nouveau les éléments des matrices  $[R_2]$  et  $[S_2]$  jusqu'à l'obtention de la matrice  $[C_n]$ , ou les valeurs propres apparaissent sur la diagonale dans l'ordre décroissant [8].

**c. Test de convergence**

Après chaque itération, on fait le test de convergence qui se résume à la comparaison entre la valeur  $c_i$  calculée à l'itération  $k$  et la même valeur calculée à l'itération  $(k+ 1)$ . Le test peut être formulé de la façon suivante :

$$\frac{\sum_{i=1}^n |c_i^k - c_i^{k+1}|}{\sum_{i=1}^n c_i^{k+1}} < \varepsilon \tag{2.23}$$

En prenant  $\varepsilon = 10^{-16}$ , les valeurs propres seront obtenues avec suffisamment de précision pour calculer les pulsations de ligne d'arbre [7].

Donc la pulsation  $\omega_i$  correspondant à la valeur propre  $c_i$  sera égale à :

$$\omega_i = \sqrt{|c_i|} \tag{2.24}$$

**d. Déformée modale**

Les valeurs propres de la matrice aux pulsations étant connues, il est possible de déterminer les vecteurs propre correspondant, ces derniers caractérisent les déformés modales (amplitudes relatives des disques) des divers modes de vibration.

Les composantes des vecteurs propres étant définies à un coefficient près, il est donc nécessaire de fixer une composante, par exemple ; l'amplitude du disque  $N^o 1$  sera prise égale à 1.

La matrice  $[C]$  à utiliser, pour le calcul des composantes des vecteurs propres est celle définie par le produit  $[M]^{-1} [K]$

Les composantes des vecteurs propres sont obtenues à partir de l'équation :

$$[[C] - \omega_i^2 [I]] [X_i] = [0] \tag{2.25}$$

Avec :

$\omega_i$  : est la pulsation propre d'ordre  $i$

$[I]$  : la matrice unité

$[X_i]$  : matrice colonne des composantes :  $x_{i,1}; x_{i,2}; \dots; x_{i,n}$  du vecteur propre associée à la valeur propre  $\omega_i^2$

$[0]$  : Matrice colonne composée d'éléments tous nuls.

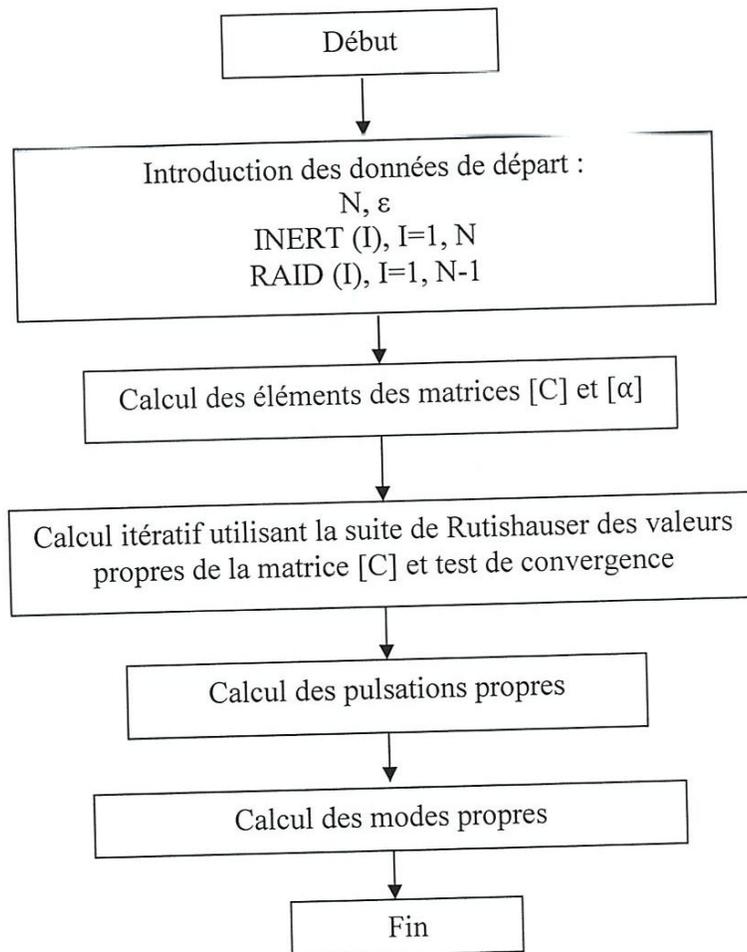
Nous obtenons ainsi les  $n$  relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 j=1: & \quad \left( \frac{k_1}{J_1} - \omega^2 \right) x_{i,1} - \frac{1}{J_1} x_{i,2} = 0 \\
 & \quad \dots\dots\dots \\
 \forall j \in [2, n-1]: & \quad -\frac{k_{j-1}}{J_j} x_{i,j-1} + \left( \frac{k_j + k_{j-1}}{J_j} - \omega_i^2 \right) x_{i,j} - \frac{k_j}{J_j} x_{i,j+1} = 0 \\
 j=n: & \quad -\frac{k_{n-1}}{J_n} x_{i,n-1} + \left( \frac{k_{n-1}}{J_n} - \omega_i^2 \right) x_{i,n} = 0
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

En posant  $x_{i,l}=1$  rad, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 x_{i,2} &= \frac{1}{k_1} (k_1 - J_1 \omega_i^2) \\
 \forall j \in [2, n-1]: & \quad x_{i,j+1} = \frac{1}{k_j} \left[ (x_{i,j} - x_{i,j-1}) \times k_{j-1} + (k_j - J_j \omega_i^2) \times x_{i,j} \right]
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

*e. Organigrammes du programme RUTHIS*



# 3

## Calcul des pulsations propres et des déformées modales de l'installation de production d'air comprimé

### Sommaire

3.1. Description de l'installation .....	26
3.2. Modélisation de l'installation .....	26
3.3. Résultats de l'étude en vibrations libres .....	29
3.4. Influence de la raideur des tronçons sur les pulsations propres .....	34

### 3.1 Description de l'installation

Nous présentons sur la figure 3.1, la ligne d'arbre d'un groupe compresseur composé d'un moteur électrique  $M$  de puissance 430 kW, d'un accouplement élastique à grande vitesse  $A_{GV}$  de moment d'inertie  $J_{GV}$ , d'un réducteur à engrenages  $R$  d'un accouplement petite vitesse  $A_{PV}$ , d'un volant d'inertie  $V$  et d'un compresseur d'air à deux cylindres  $C$ . Le moteur tourne à la vitesse moyenne  $N_E = 1487$  tr/min, et le compresseur à la vitesse  $N_S = 425$  tr/min. on suppose que la transmission interne du réducteur est rigide, c'est-à-dire que la rigidité d'engrènement des roues dentées le composant est infinis. On a :

$$N_E = R_{ES} N_S$$

Avec  $R_{ES} = 3.5$  et le rapport de transmission entrée sortie,  $N_E$  nombre de tours d'entrée et  $N_S$  le nombre de tours de sortie

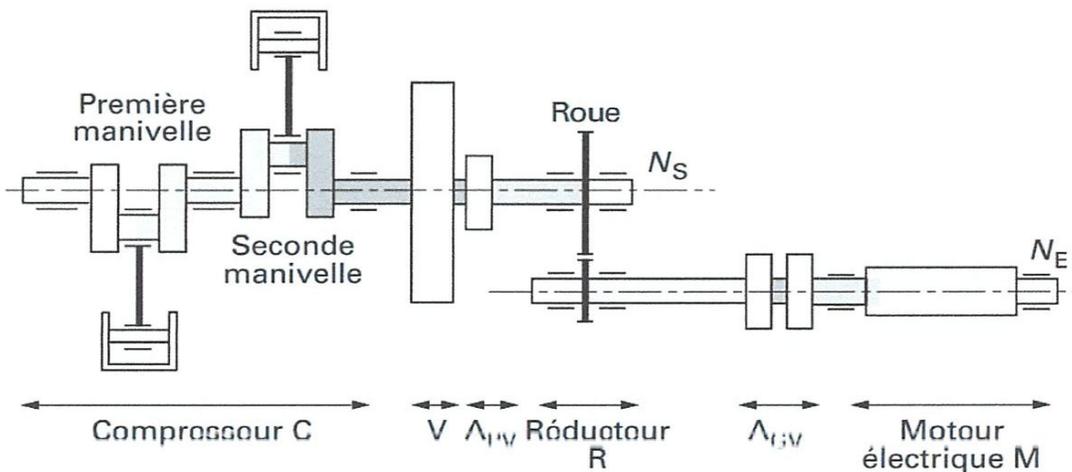


Figure 3.1: Installation de production d'air comprimé [7]

### 3.2 Modélisation de l'installation

La modélisation de cette installation peut se faire en deux étapes pour faire apparaître clairement les inerties et les rigidités des différents éléments.

#### 3.2.1 Première étape de la modélisation

On indique la valeur numérique des caractéristiques de chacun de ces disques d'inertie et de rigidité de torsion en relation avec les éléments réels représentés.

Le disque d'inertie  $J_1$  représente le moment d'inertie de la première manivelle et de l'équipage mobile associé.

$$J_1 = 8.25 \text{ N.m.s}^2$$

Le disque d'inertie  $J_2$  représente le moment d'inertie de la seconde manivelle et de l'équipage mobile associé.

$$J_2 = 8.25 \text{ N.m.s}^2$$

Le disque d'inertie  $J_3$  représente le moment d'inertie du volant et du demi-accouplement lié à ce volant.

$$J_3 = 549.5 \text{ N.m.s}^2$$

Le disque d'inertie  $J_4$  représente le moment d'inertie de l'autre demi-accouplement lié à l'arbre de sortie du réducteur.

$$J_4 = 2.75 \text{ N.m.s}^2$$

La rigidité de torsion  $k_1$  représente la raideur en torsion du demi-coude de la première manivelle et du demi-coude de la seconde manivelle

$$k_1 = 3.3 \times 10^7 \text{ N.m/rad}$$

La rigidité de torsion  $k_2$  représente la raideur en torsion du demi-coude de la seconde manivelle et du tronçon d'arbre entre le milieu du palier et le volant.

$$k_2 = 2.78 \times 10^7 \text{ N.m/rad}$$

La rigidité de torsion  $k_3$  représente la raideur en torsion de l'accouplement à petite vitesse.

$$k_3 = 3.6 \cdot 10^6 \text{ N.m/rad}$$

La rigidité de torsion  $k_4$  représente la raideur en torsion de l'arbre de sortie du réducteur.

$$k_4 = 1.52 \cdot 10^7 \text{ N.m/rad}$$

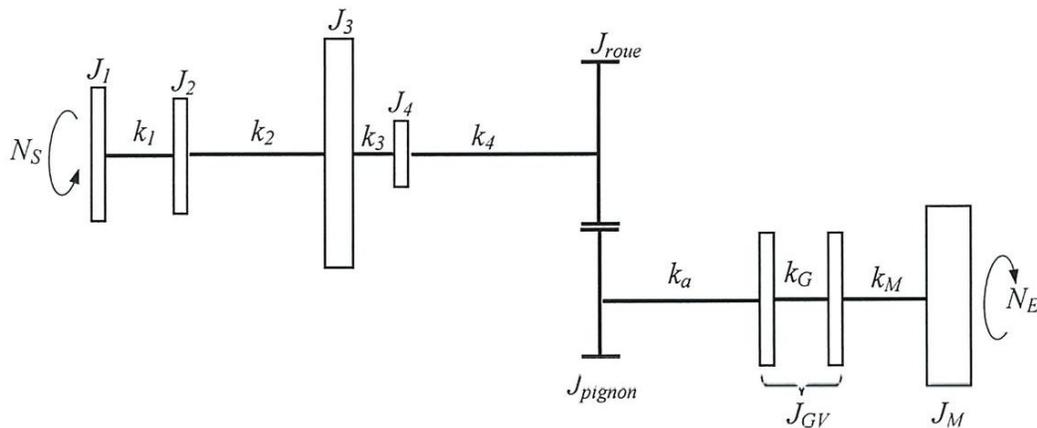


Figure 3.2 : Schéma de l'installation de la figure 3.1

### 3.2.2 Deuxième étape de la modélisation

Tous les éléments modèle du précédent sont ramenés à la vitesse  $N_S$ , d'où les nouvelles valeurs des inerties et des rigidités :

Le disque d'inertie  $J_5^{(1)}$  représente le moment d'inertie de la roue de l'arbre de liaison  $J_{roue}$  et le moment d'inertie du pignon et de l'arbre de liaison  $J_{pignon}$  ramené à la vitesse de rotation du compresseur.

$$J_5^{(1)} = J_{roue} + R_{ES}^2 J_{pignon} = 17.625 + (3.5)^2 \times 0.2 = 20.07 \text{ N.m.s}^2$$

Le disque  $J_6^{(1)}$  représente le moment d'inertie du demi-accouplement grande vitesse ramené à la vitesse de rotation du compresseur.

$$J_6^{(1)} = R_{ES}^2 \frac{J_{GV}}{2} = (3.5)^2 \times 0.2875 = 3.52 \text{ N.m.s}^2$$

Le disque d'inertie  $J_7^{(1)}$  représente le moment d'inertie de l'autre demi-accouplement grande vitesse ramené à la vitesse de rotation du compresseur.

$$J_7^{(1)} = R_{ES}^2 \frac{J_{GV}}{2} = (3.5)^2 \times 0.2875 = 3.52 \text{ N.m.s}^2$$

Le disque d'inertie  $J_8^{(1)}$  représente le moment d'inertie du rotor du moteur électrique  $J_M$  ramené à la vitesse de rotation du compresseur

$$J_8^{(1)} = R_{ES}^2 J_M = (3.5)^2 \times 9.47 = 116 \text{ N.m.s}^2$$

La rigidité  $k_5^{(1)}$  est évaluée par la rigidité en torsion  $k_a$  de l'arbre d'entrée du réducteur, ramené à la vitesse de rotation du compresseur

$$k_5^{(1)} = R_{ES}^2 k_a = (3.5)^2 \times 4.78 \times 10^6 = 5.86 \times 10^7 \text{ N.m/rad}$$

La rigidité  $k_6^{(1)}$  est évaluée par rigidité en torsion  $k_{GV}$  de l'arbre d'entrée du réducteur, ramené à la vitesse de rotation du compresseur

$$k_6^{(1)} = R_{ES}^2 k_{GV} = (3.5)^2 \times 5.23 \times 10^5 = 6.41 \times 10^6 \text{ N.m/rad}$$

La rigidité  $k_7^{(1)}$  est évaluée par la rigidité en torsion  $k_M$  de l'arbre du moteur électrique, ramené à la vitesse de rotation du compresseur

$$k_7^{(1)} = R_{ES}^2 k_M = (3.5)^2 \times 3.75 \times 10^6 = 4.59 \times 10^7 \text{ N.m/rad}$$

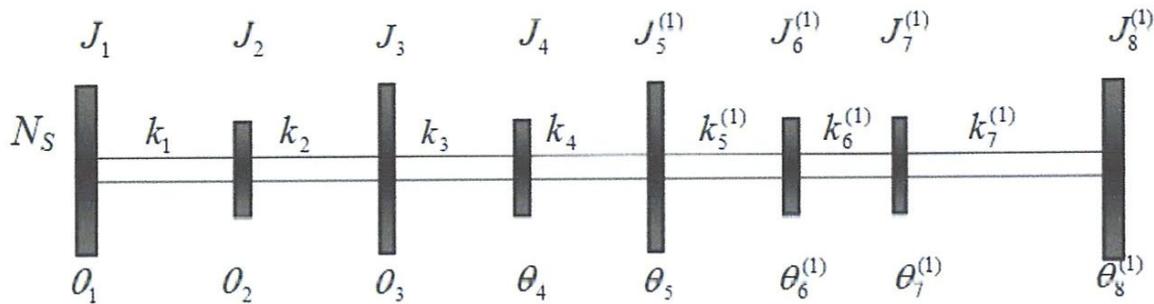


Figure 3.3 : Modèle torsionnel final équivalent de la figure 3.1

Les longueurs équivalentes ont été calculées pour un diamètre équivalent de 180 mm avec un module de cisaillement équivalent  $83 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  [7]

Le **tableau 3.1** représente les inerties et les rigidités torsionnelles du modèle équivalent de la figure 3.3 ainsi que les longueurs équivalentes des divers tronçons [7].

<b>Tableau 3.1: Inerties et rigidités torsionnelles équivalentes de la ligne d'arbres de la figure 3.3</b>				
Disque <i>N°</i>	Inertie <i>N.m.s<sup>2</sup></i>	Arbre <i>N°</i>	Rigidité torsionnelle <i>N.m/rad</i>	Longueur équivalent <i>mm</i>
1	8.25	1	$3.3 \times 10^7$	259
2	8.25	2	$2.78 \times 10^7$	307
3	549.5	3	$3.6 \times 10^6$	2375
4	2.75	4	$1.52 \times 10^7$	561.3
5	20.07	5	$5.86 \times 10^7$	146
6	3.52	6	$6.41 \times 10^6$	1335
7	3.52	7	$4.59 \times 10^7$	186.5
8	116			

### 3.3 Résultats de l'étude en vibrations libres

Le calcul des fréquences et des modes propres par les méthodes de Holzer et de Rutishauser s'effectue à partir des programmes FORTRAN existant mais adaptés à notre modèle [6,8].

#### 3.3.1. Pulsations propres

Le tableau 3.2 montre une comparaison entre les 8 pulsations propres de l'installation. On remarque que les pulsations obtenues par la méthode de Holzer sont très proches de celles obtenues par la méthode Rutishauser (l'erreur relative ne dépasse pas 0.0037 %)

<b>Tableau 3.2 : Pulsations propres de la ligne d'arbres de la figure 3.3</b>			
Mode	Pulsation propres [rad/s]		Erreur [%]
	Holzer	Rutishauser	
rigide	0	0	0
1	133.58	133.58	0
2	595.52	595.52	0
3	1176.17	1176.17	0
4	2710.66	2710.76	0.0037
5	3168.13	3168.13	0
6	3849.13	3849.13	0
7	4659.30	4659.30	0

### 3.3.2 Déformées modales

Les tableaux 3.3 et 3.4 représentent les huit modes propres de la ligne d'arbres de a figure 3.3 obtenus par la méthode de Holzer et la méthode de Rutishauser respectivement. On remarque aussi que les modes obtenus par les deux méthodes sont presque identiques.

**Tableau 3.3 : Modes propres de la lignes d'arbres de la figure 3.3 (Holzer)**

Disque N°	Mode rigide $\omega_1=0$ rad/s	Mode 1 $\omega_2=133,58$ rad/s	Mode 2 $\omega_3=595,52$ rad/s	Mode 3 $\omega_4=1176,17$ rad/s	Mode 4 $\omega_5=2710,66$ rad/s	Mode 5 $\omega_6=3168,13$ rad/s	Mode 6 $\omega_7=3849,13$ rad/s	Mode 7 $\omega_8=4659,30$ rad/s
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	0,995	0,911	0,654	-0,837	1,509	-2,704	-4,427
3	1	0,985	0,710	-0,025	-1,192	0,008	4,788	17,652
4	1	-1,779	-39,287	-0,002	1333,52	0,004	-10765,18	-58307,20
5	1	-2,428	-46,239	0,003	-123,086	0,0005	15540,02	156888,50
6	1	-2,581	-42,426	0,003	-191,158	0,00006	-56491,38	-953788,40
7	1	-3,959	0,6948	0,00002	-42,156	0,005	-255386,90	262923,70
8	1	-4,146	6,698	-0,00002	2,407	0,002	7008,167	-4886,288

**Tableau 3.4: Modes propres de la lignes d'arbres de la figure 3.3 (Rutishauser)**

Disque N°	Mode rigide $\omega_1=0$ rad/s	Mode 1 $\omega_2=133,59$ rad/s	Mode 2 $\omega_3=595,61$ rad/s	Mode 3 $\omega_4=1176,17$ rad/s	Mode 4 $\omega_5=2710,76$ rad/s	Mode 5 $\omega_6=3168,13$ rad/s	Mode 6 $\omega_7=3854,38$ rad/s	Mode 7 $\omega_8=4665,08$ rad/s
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	0,995	0,911	0,65	-0,83	1,51	-2,71	-4,44
3	1	0,984	0,710	-0,026	-1,19	0,0076	4,84	17,78
4	1	-1,78	-39,287	-0,002	1333,47	-0,0079	-10918,67	-58877,91
5	1	-2,429	-46,239	0,003	-123,21	0,0027	15841,43	158998,6
6	1	-2,582	-42,426	0,003	-190,97	-0,0039	-57820,77	-969608,20
7	1	-3,96	0,6948	0,0004	-42,02	-0,043	-260865,5	267575,80
8	1	-4,148	6,698	0,00005	2,39	-0,015	7139,36	-4958,12

La figure 3.4 montre la déformé modale du premier mode rigide du modèle de figure 3.1. Elle est caractérisée par une fréquence de vibration nulle et une amplitude modale constante des disques (il y a de rotation mais pas de vibration)

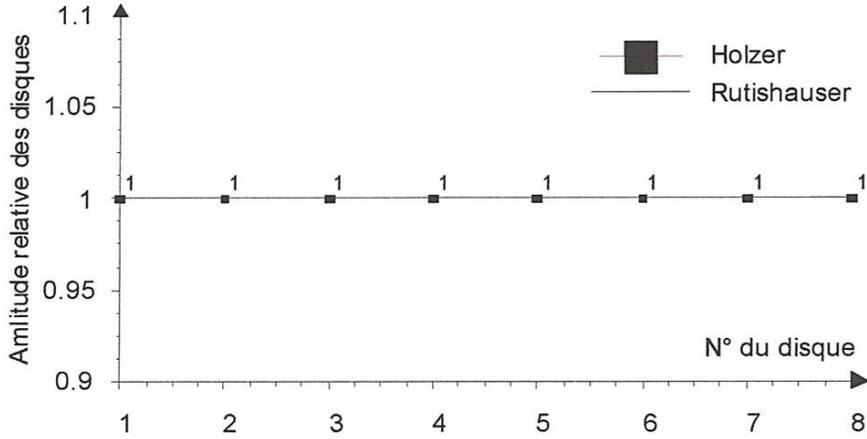


Figure 3.4 : Déformée modale du mode rigide du modèle de la figure 3.1

La figure 3.5 montre le premier mode de vibration du groupe compresseur, on remarque que le nœud de vibration est situé au niveau de l'accouplement élastique petite vitesse. D'une façon générale, on évite que le nœud de vibration du premier mode soit ailleurs que dans l'accouplement.

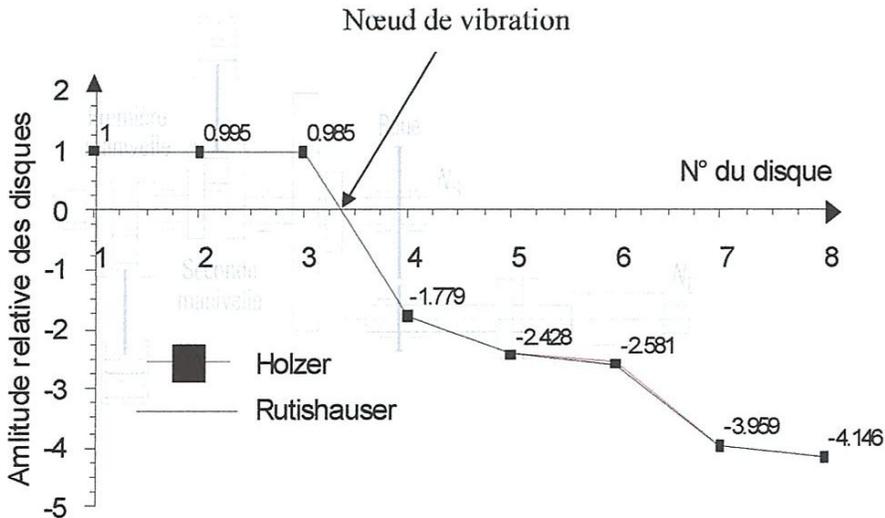


Figure 3.5 : Déformée modale du premier mode de vibration du modèle de la figure 3.1

Les figures 3.6 et 3.7 représentent les déformées modales du deuxième et troisième mode de vibration du groupe compresseur respectivement. On remarque aussi que les nœuds de vibration sont situés près des accouplements ou bien près des disques de grandes inerties.

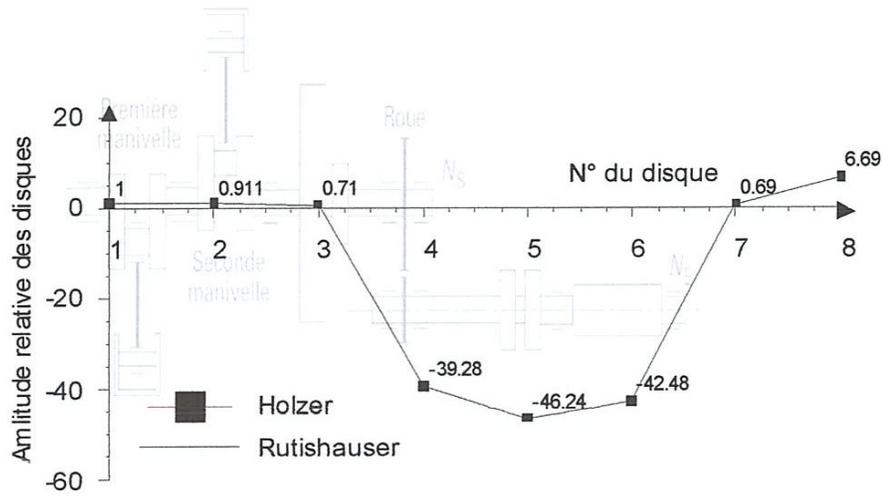


Figure 3.6 : Déformée modale du deuxième mode de vibration du modèle de la figure 3.1

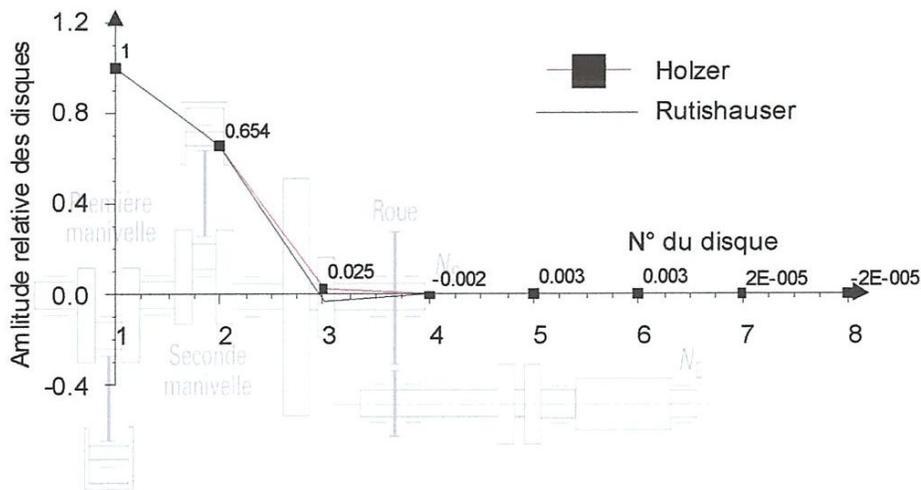


Figure 3.7 : Déformée modale du troisième mode de vibration du modèle de la figure 3.1

### 3.4. Influence de la raideur des tronçons sur les pulsations propres

D'après la référence [7], le groupe compresseur tourne à un régime constant (425 *tr/min*). Au cours d'une journée, le temps de marche à vide du compresseur au régime normale était estimé à une heure. Après quelques centaine d'heures de fonctionnement, les dents des engrenages présentent une usure anormale sur chaque flanc, cela est caractéristique, bien souvent, d'amplitude vibratoire, donc de couple oscillatoire trop important au régime de fonctionnement sans charge.

D'après le bilan des sources d'excitation du groupe compresseur [7], il y a résonance de l'harmonique d'ordre 3 du couple résistant du au système bille manivelle du groupe compresseur (133.51 *rad/s* = 1275 *tr/min*) et la pulsation propre du premier mode (133.58 *rad/s* = 1276 *tr/min*), ce qui explique la détérioration rapide des dentures. Pour éliminer ce phénomène, qui est l'origine de la panne, on a modifié la rigidité torsionnelle de l'accouplement élastique de petite vitesse  $k_3$  (figure 3.8), ce qui modifié les pulsations propres de la ligne d'arbres ainsi que les positions des nœuds de vibrations. D'après cette figure, on montre qu'il est possible de changer les pulsations propres en modifiant la rigidité de l'accouplement et par conséquent éliminer le danger de résonance.

Tableau 3.5 : Influence de la rigidité sur les fréquences propres		
Rigidité $k_3$ ( <i>N.m/rad</i> )	Fréquence propre du premier mode	
	( <i>rad/s</i> )	( <i>tr/min</i> )
$3.6 \times 10^6$	133.58	1276
$7 \times 10^6$	156.31	1492.75
$15 \times 10^6$	175.05	1671.71
$65 \times 10^6$	191.58	1829.54
$150 \times 10^6$	194.80	1860.26

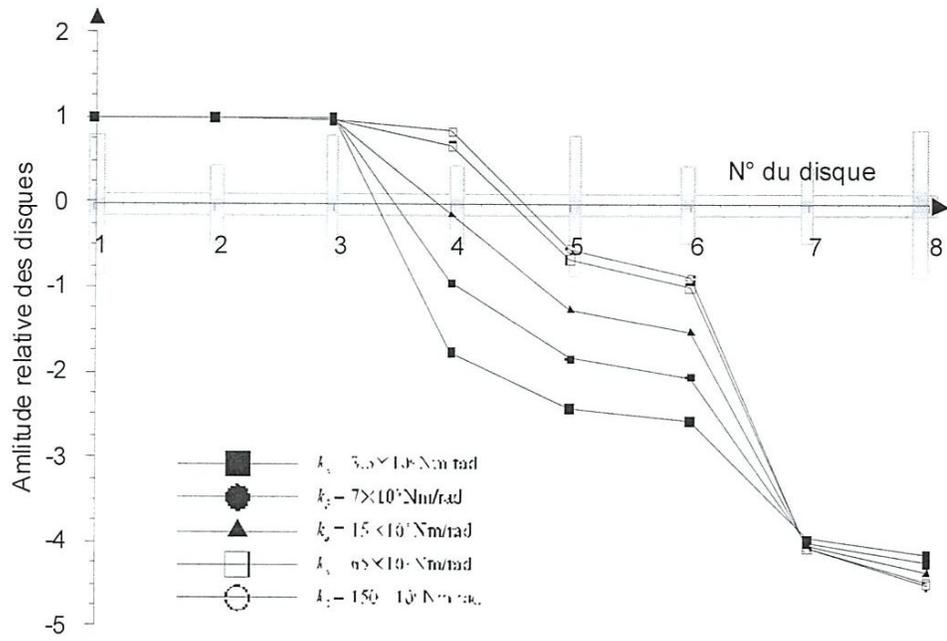


Figure 3.8 : Influence de la rigidité en torsion de l'accouplement petite vitesse sur le premier mode de vibration.

## Conclusion Générale

Ce travail avait pour objectif, la recherche des pulsations propres et des déformées modales d'une installation industrielle de production d'air comprimé afin de connaître la cause de l'usure anormale des flancs des dentures du réducteur d'engrenages et de proposer des solutions adéquates.

Pour cela, nous avons présenté dans le chapitre deux, la formulation mathématique des équations du mouvement libre en torsion de lignes d'arbres non ramifiées à plusieurs degrés de liberté en se basant sur le formalisme de Lagrange. La résolution de ces équations a été faite par deux méthodes numériques : la méthode de Holzer et la méthode de Rutishauser.

Dans le troisième chapitre, nous avons présenté un exemple de calcul des pulsations propres et des déformées modales de l'installation citée en objet. La ligne d'arbres équivalente, ramenée à la vitesse de rotation du compresseur, est obtenue en deux étapes. Les pulsations et les modes propres sont obtenus par les deux méthodes présentées dans le chapitre deux. Nous avons étudié en particulier l'influence de la rigidité torsionnelle de l'accouplement petite vitesse sur les pulsations et les déformées modales de l'installation. L'analyse des résultats nous a permis de tirer les conclusions suivantes :

- Les deux méthodes numériques appliquées pour le calcul des pulsations propres et déformées modales sont simples de mise en œuvre et donnent des résultats presque identiques ;
- Pour les premiers modes, les nœuds de vibrations sont presque toujours localisés dans les accouplements car, ces derniers sont généralement montés près des disques de grande inertie.
- L'usure anormale des dents d'engrenage du réducteur est certainement due au phénomène de résonance de la pulsation propre du premier mode ( $133.58 \text{ rad/s} = 1276 \text{ tr/min}$ ) et la pulsation propre de la troisième harmonique du couple résistant du compresseur ( $133.51 \text{ rad/s} = 1275 \text{ tr/min}$  d'après le bilan des sources d'excitation de l'installation [7]).
- La modification de la rigidité de l'accouplement petite vitesse (siège d'un nœud) permet de décaler la pulsation propre et la position du nœud du premier mode. C'est la première opération à envisager si c'est possible pour éliminer le phénomène de résonance (donc l'usure des dents) et permet un fonctionnement normal du réducteur.

## Références Bibliographiques

- [1] H. Blanc, "*Dynamique des rotors en torsion : introduction*", technique de l'ingénieur, BM 5- 120.
- [2] J. Vance, F. Zeidan, B. Murphy, "*Machinery vibration and rotordynamics*", John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2010.
- [3] Jean-Marc Pignet, "*Dynamique des machines tournantes pour la conception des turbines à vapeur et des compresseurs centrifuges de la théorie à la pratique*", These de Doctorat, INSA de Lyon, 2010.
- [4] E. J. Jr. Gunter, "*Dynamic stability of rotor – bearing systems*", NASA SP-113, 1966.
- [5] H. Blanc, "*Dynamique des rotors en torsion : types d'excitations permanentes*", technique de l'ingénieur, BM 5-121.
- [6] S.S. Rao, "*Mechanical vibration*", 5<sup>ème</sup>-édition, prentice Hall, USA.
- [7] B. Jironnet, G. louradour "*Vibrations et vitesses dangereuses de torsion des lignes d'arbres*", Technique de l'ingénieur, B5770.
- [8] A. Djebala, "*Etude du comportement vibratoire des machines de production du laminoire à froid (LAF) SIDER ELHADJAR, ANNABA*", Mémoire de Magister, Université de Guelma, 1998.