

535
170011, 535
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté des Mathématiques, d'Informatique et des Sciences de la matière

Département d'Informatique



16 / 923

Mémoire de Fin d'études Master

Filière : Informatique

Option : Ingénierie des Médias

Thème :

**Extraction des caractéristiques topologiques des
images médicales en utilisant le concept des
champs des vecteurs discrets**

Encadré Par :

Mr. Dardar Salah

Présenté par :

Ghomeriane Amina.

Debab Imen.

Juin 2016

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté des Mathématiques, d'Informatique et des Sciences de la matière

Département d'Informatique



Mémoire de Fin d'études Master

Filière : Informatique

Option : Ingénierie des Médias

Thème :

Extraction des caractéristiques topologiques des
images médicales en utilisant le concept des
champs des vecteurs discrets

Encadré Par :

Mr. Derdar Salah

Présenté par :

Ghomeriane Amina.

Debab Imen.

Juin 2016

L'explosion de la quantité de données numériques à traiter dans les sciences a poussé les chercheurs à développer des approches et des algorithmes basés sur des concepts mathématiques afin d'automatiser le traitement de ces données. Parmi ces concepts, on reconnaît la topologie algébrique destinée principalement pour étudier et traiter les espaces topologiques et les fonctions continues qui relient ces espaces et qui est maintenant orientée pour traiter et diagnostiquer les images de nature médicale. La puissance de la topologie algébrique est définie par leurs outils qui servent à extraire les caractéristiques topologiques, en particulier, les invariants d'homologie comme les groupes d'homologie, le groupe fondamental et le nombre d'Euler...etc. Parmi ces outils, on cite principalement les théories d'homologie cubique et de Morse discrète représentée par le champ des vecteurs discrets. En traitement d'images et vision par ordinateur, les caractéristiques topologiques à extraire sont résumées dans les groupes d'homologie et leurs générateurs pour la raison que ces derniers sont dotés de l'aspect visuel et de meilleure interprétation. Dans les images 2D, les groupes d'homologie servent à compter le nombre de composantes connexes et le nombre de trous existants dans l'image. Dans cette approche, nous utilisons l'homologie conjointement avec le champ des vecteurs discrets pour calculer les groupes d'homologie et leurs générateurs. Ces derniers qui sont algébriquement les cycles d'homologie du groupe H_1 et géométriquement sont les trous de l'image 2D réalise la tâche de localisation. Le modèle d'extraction des caractéristiques topologiques ainsi conçu est validé sur des images synthétiques et des images médicales 2D.

Mots clés : topologie algébrique, théorie d'homologie, champ des vecteurs discrets, groupes d'homologie.

Remerciement

Au ce terme de ce mémoire nos tiendrons nos remerciement au bon dieu qui nous a donné le courage d'achever ce travail et la force pour mener à bien mémoire.

Nous tenons en premier temps à remercier chaleureusement et tout particulièrement notre encadreur Mr Derdar Salah, de nous avoir encadrés et nous guidé avec autant de sérieux, de gentillesse, pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail pour une meilleure maitrise du projet.

Des remerciements à tous les enseignants du département d'informatique de l'université 08 mai 45 de Guelma.

Enfin, Mes vifs remerciements vont également aux membres de jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre projet en acceptant d'examiner et juger notre travail.

Merci.

Dédicaces

Toutes les formes de la plus belle louange, et en toutes circonstances sont à Allah seul.

À mes chers parents, pour les sacrifices déployés à nos égards, pour leur patience, leur amour et leur confiance en moi.

Ils ont tout fait pour mon bonheur et ma réussite. Qu'ils trouvent dans ce modeste travail, le témoignage de ma profonde affection et de mon attachement indéfectible. Nulle dédicace ne puisse exprimer ce que je leurs dois. Que dieu leur réserve la bonne santé et une longue vie.

À mes chères sœurs : Alima, Soumia, Meriem, Widad.

À mes frères : Yaakoub, Nassir, Chadli, Youcef, Abd errahman, Morad.

À les enfants de la famille : Haithem, medou, Selsabile, Sadjja, Anis, fatouma et Jawadou.

À mes meilleurs amis : Meriem, Ahlem.

À toute ma grande famille maternelle et paternelle.

À toute personne qui m'a aidée et soutenue de près et de loin le long de ce travail et sans oublier à mon binôme Imen.

Amina

Remerciement

Au ce terme de ce mémoire nos tiendrons nos remerciement au bon dieu qui nous a donné le courage d'achever ce travail et la force pour mener à bien mémoire.

Nous tenons en premier temps à remercier chaleureusement et tout particulièrement notre encadreur Mr Derdar Salah, de nous avoir encadrés et nous guidé avec autant de sérieux, de gentillesse, pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail pour une meilleure maitrise du projet.

Des remerciements à tous les enseignants du département d'informatique de l'université 08 mai 45 de Guelma.

Enfin, Mes vifs remerciements vont également aux membres de jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre projet en acceptant d'examiner et juger notre travail.

Merci.

Dédicaces

Toutes les formes de la plus belle louange, et en toutes circonstances sont à Allah seul.

À mes chers parents, pour les sacrifices déployés à nos égards, pour leur patience, leur amour et leur confiance en moi.

Ils ont tout fait pour mon bonheur et ma réussite. Qu'ils trouvent dans ce modeste travail, le témoignage de ma profonde affection et de mon attachement indéfectible. Nulle dédicace ne puisse exprimer ce que je leurs dois. Que dieu leur réserve la bonne santé et une longue vie.

À mes chères sœurs : Alima, Soumia, Meriem, Widad.

À mes frères : Yaakoub, Nassir, Chadli, Youcef, Abd errahman, Morad.

À les enfants de la famille : Haithem, medou, Selsabile, Sadja, Anis, fatouma et Jawadou.

À mes meilleurs amis : Meriem, Ahlem.

À toute ma grande famille maternelle et paternelle.

À toute personne qui m'a aidée et soutenue de près et de loin le long de ce travail et sans oublier à mon binôme Imen.

Amina

Dédicaces

Merci Mon Dieu de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et de bonheur. Je dédie ce modeste travail à tous ceux qui mon aide de près ou de loin a réalisé mes objectifs.

A mon père, école de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années d'études, et qui a veillé tout au long de ma vie.

A mon encourager, à me donner l'aide et à me protéger.

A mes chères sœurs : Sara, Wissam, Nihal, Marame et à mon seule et unique frère : Oussama.

Que dieu les gardes et les protèges.

A toute ma grande famille maternelle et paternelle sur tout mes oncles, tantes et mes cousins et cousines.

A mes chères amis qui on partager ma vie chacun a son nom tout en leur souhaitant la réussite dans leur vie, et sans oublie à mon binôme Amina.

Imen

Table de matières

Résumé.....	i
Remerciement.....	ii
Dédicace.....	iii
Table de matières.....	1
Table de figures.....	4
Liste de tableaux.....	6
Introduction générale.....	7
Chapitre 1 : Imagerie médicale et l'Etat de l'art.....	11
1. Introduction.....	11
2. L'imagerie médicale.....	11
2.1. Les différentes techniques d'imagerie médicale	11
3. Etat de l'art des algorithmes de calcul d'homologie.....	15
3.1. Algorithmes de calcul d'homologie avec les images médicales.....	15
3.2. Autres algorithmes de calcul d'homologie.....	16
4. Conclusion	18
Chapitre 02 : Théories de l'homologie cubique et de Morse discrète.....	20
1. Introduction	20
2. Théorie de l'homologie cubique	20
2.1. Complexe cubique	20
2.1.1. Représentation d'un cube élémentaire	21
2.1.2. Construction d'un complexe cubique.....	21
2.1.3. Complexe à chaînes.....	23
2.1.3.1. Produit scalaire.....	23
2.1.3.2. Produit cubique.....	23
2.1.3.4. L'opérateur de frontière cubique.....	23

Table de matières

2.1.3.5. Génération d'un complexe à chaînes	24
2.2. Homologie.....	25
3. Théorie de Morse discrète.....	27
3.1. Champ des vecteurs discrets.....	27
3.2. Champ des vecteurs discrets admissible.....	28
3.3. Champ de vecteurs discrets et les matrices d'entiers.....	29
3.4. Méthode de génération d'un champ de vecteurs admissible.....	29
3.4.1. Ordre prédéfini	30
3.4.2. Ordres géométriques.....	30
4. Conclusion.....	32
Chapitre 3 : Modélisation de l'approche	34
1. Introduction	34
2. Construction du complexe cubique	34
3. Génération du complexe à chaînes.....	36
3.1. Processus d'étiquetage.....	36
3.2. Génération du groupe à chaînes C_q à partir de E_q	37
4. Génération d'un champ de vecteurs discrets admissible	38
5. Homologie du complexe à chaînes.....	39
6. Localisation des cycles d'homologie (groupe H_1).....	41
7. Algorithme principal d'extraction des caractéristiques topologiques (ou localisation des cycles).....	42
8. Conclusion.....	42
Chapitre 4 : Implémentation et résultats expérimentaux.....	45
1. Introduction.....	45
2. Implémentation de l'approche.....	45

Table de matières

2.1. Environnement de matériels.....	45
2.2. Environnement de logiciels	45
2.2.1. Environnement de développement Eclipse.....	45
2.2.2. Présentation de JAVA.....	48
2.3. Structure de code Java.....	49
3. Résultats expérimentaux.....	51
3.1. Complexes cubique et à chaînes avec un champ de vecteurs associé.....	51
3.2. Calcul d'homologie.....	52
3.3. Localisation des cycles d'homologie \bar{H}_1	52
4. Conclusion.....	53
Conclusion générale.....	55
Bibliographies.....	57

Chapitre 1

Figure 1.1 : Image médicale des vaisseaux sanguins captée par la technique des rayons x ...	12
Figure 1.2 : Exemple d'une image médicale captée par la technique de la radiologie interventionnelle.....	12
Figure 1.3 : Image médicale des poumons captée par la technique de scanner	13
Figure 1.4 : Image médicale des vaisseaux sanguins captée par la technique des Ultrasons	13
Figure 1.5 : Image médicale des vaisseaux sanguins captée par la technique d'IRM	14
Figure 1.6 : Exemple d'une image médicale captée par la technique de l'endoscopique	14
Figure 1.7 : Exemple d'une image médicale nucléaire des poumons captée par la technique de l'endoscopique.....	15

Chapitre 2

Figure 2.1: Trois exemples de q-cubes dans $R^2 (I_1 \times I_2)$: (i) 0-cube avec $I_1 = \{1\}, I_2 = \{1\}$; (ii) 1-cube avec $I_1 = [2,3], I_2 = \{1\}$; (iii) 2-cube avec $I_1 = [2,3], I_2 = [1,2]$	21
Figure 2.2 : Deux complexes cubiques dans R^2 (valide et non valide).....	22
Figure 2.3 : Un cube élémentaire de dimension 2 avec ces quatre faces orientées.....	24
Figure 2.4 : Exemple de complexe cubique de dimension 2. Les groupes d'homologie de ce complexe sont $H_0 = 1, H_1 = 1$ et $H_2 = 0$	25
Figure 2.5 : Complexe cubique associé avec un champ des vecteurs discrets	28
Figure 2.6 : Deux champs des vecteurs discrets : non admissible et un autre admissible.....	28
Figure 2.7 : Image 2D de 8 pixels en noir et un en blanc.....	31
Figure 2.8 : un complexe cubique avec un champ de vecteurs généré selon la méthode des ordres géométriques	31

Liste des figures

Figure 2.9 : Cellules critiques restantes (une 0-cellule ou sommet et une 1-cellule ou arête).....	31
---	----

Chapitre 3

Figure 3.1 : Exemple d'un complexe cubique orienté avec six 2-cubes ou les pixels objet sont codés en noir et ceux de l'arrière plan sont en blanc.....	35
--	----

Figure 3.2 : Un champ des vecteurs discrets admissible illustré sur un complexe cubique...	39
---	----

Figure 3.3 : Un champ des vecteurs discrets admissible maximal illustré sur un complexe cubique.....	39
---	----

Figure 3.4 : Résultat de la réduction partielle du complexe cubique	41
--	----

Figure 3.5 : Résultat de la réduction complète qui donne un complexe réduit final	42
--	----

Chapitre 4

Figure 4.1 : Fenêtre de démarrage d'Eclipse IDE, version LUNA	46
--	----

Figure 4.2 : La plateforme d'Eclipse IDE	48
---	----

Figure 4.3 : Une image médicale 2D de niveau de gris de résolution 100x103.....	51
--	----

Liste de tableaux

Tableau 2.1: table récapitulative pour le calcul des groupes d'homologie H_q pour $q=0, 1$ et 2	26
Tableau 4.1 : Table pour la construction du complexe cubique et la génération du complexe à chaînes	51
Tableau 4.2 : Table d'un champ de vecteurs discrets admissible : deux vecteurs discrets.....	52
Tableau 4.3 : Résultats de calcul des groupes d'homologie et les rangs H_q	52
Tableau 4.4 : Localisation des cycles d'homologie H_1	52-53

Introduction générale

Ces dernières décennies ont vu le mariage du domaine d'imagerie médicale avec des modèles conçus à base des concepts mathématiques, et en particulier la topologie algébrique, qui a vu un grand succès dans l'analyse de ce type d'images.

En diagnostic médical, comment peut-on étudier la physiologie ou le métabolisme du corps humain sans interagir directement avec celui-ci ? La réponse se trouve dans l'imagerie médicale. Celle-ci qui base sur l'interprétation et l'analyse des images médicales est un des domaines de recherche les plus encourageants, étant donné qu'il offre des facilités pour le diagnostic et les décisions thérapeutiques d'un grand nombre de maladies. Le but du traitement automatique des images médicales est d'extraire à partir des images acquises, les informations utiles au diagnostic, de révéler des détails difficiles à percevoir à l'œil nu, tout en évitant la création d'artefacts et de fausse information [36].

La topologie algébrique est une branche des mathématiques où l'algèbre générale est utilisée dans l'étude des espaces topologiques. La théorie de l'homologie qui est un outil puissant de la topologie consiste à calculer de l'homologie dans un espace topologique n D (c.-à-d., de dimension n), à étudier les propriétés géométriques invariantes d'un objet quand ce dernier est déformé (étiré, tordu ou rétrécie) ou subit aux changements topologiques de manière continue. Comme le calcul est basé sur l'algèbre, l'homologie doit être munie d'une structure algébrique (groupes, anneaux, lois de composition, . . .) [1]. Le calcul d'homologie peut se résumer dans le calcul du groupe fondamental, le nombre d'Euler, les groupes d'homologie et de cohomologie...etc. Dans ce contexte, on s'intéresse à extraire des caractéristiques topologiques puissantes et efficaces pour déterminer la forme globale des propriétés des espaces donnés avec un simple calcul de groupes d'homologie. Ainsi, en traitement d'image 2D et 3D, ces groupes d'homologie et leurs générateurs permettent de mesurer la connectivité des pixels et des voxels formant les objets de ces images. La principale motivation qui a motivé l'étude des images est que les caractéristiques extraites à partir de ces images sont plus visuelles et plus significatives. En image 2D, ces caractéristiques topologiques sont énormes, les plus utilisées sont les composantes connexes et les trous extraites de l'espace de l'image en utilisant les théories de la topologie algébrique, principalement, les théories de l'homologie cubique de Morse discrète. Par contre, en image 3D, ils fournissent le nombre des composantes connexes, des tunnels et des cavités.

Suivant la structure du complexe utilisé pour modéliser l'image, l'homologie s'est catégorisée en homologie cubique et homologie simpliciale. L'utilisation de l'homologie

Introduction générale

cubique qui est appliquée naturellement sur le support d'image (ou le pixel est de forme cubique) est nécessaire pour deux raisons principales suivantes:

✓ **Motivation mathématique** : Le produit cartésien de deux simplexes (éléments de bases de l'homologie simpliciale) n'est pas nécessairement un simplexe, alors que le produit de deux cubes est toujours un cube, c.-à-d. :

$$\text{simplex} \times \text{simplex} \neq \text{simplex}$$

Et

$$\text{cube} \times \text{cube} = \text{cube}$$

✓ **Motivation informatique** : Le support d'image en fait une collection de pixels, donc de petits carrés, ce qui nous conduit à générer à partir de ce support le complexe cubique [2]. La structure de complexes cubique est utile dans plusieurs applications d'analyse et traitement d'images 2D et 3D en raison de leur capacité à modéliser directement la grille de pixels ou de voxels, et de leurs propriétés géométriques intéressantes

Il existe différentes techniques ou méthodes permettant de calculer l'homologie, la méthode de forme normale de Smith [4], les algorithmes d'incrémental [21] et de réduction [12] ... etc. Ce dernier algorithme qui est basé sur la structure de complexe cubique est plus efficace en terme de complexité temporelle et spatiale et plus adaptable aux images 2D et 3D.

Notre approche qui est appliquée sur des images médicales 2D est basée sur les théories d'homologie et de Morse discrète. La première est adoptée puisque l'image est présentée par un complexe cubique ou chaque pixel objet est modélisé comme un 2-cube. Par contre, l'adoption de la théorie de Morse discrète est due à la génération du champ des vecteurs discrets qu'on le note par DVF. L'application du champ des vecteurs discrets sur la structure du complexe cubique (complexe à chaînes à la forme algébrique) est causée par la simplicité de calculer les groupes d'homologie avec leurs générateurs en suivant le schéma de réduction donnée par le champ des vecteurs.

L'objectif de notre approche est de concevoir un modèle de traitement d'images médicales basée sur l'homologie cubique conjointement avec le champ des vecteurs capable d'extraire des caractéristiques topologiques (plus précisément, analyser la forme topologique de l'image médicale). L'extraction des caractéristiques topologiques englobe le comptage de ces caractéristiques (composantes connexes, trous), ainsi la localisation par position de ces invariants dans l'image. La localisation des composantes connexe peut se faire par un simple algorithme d'extraction des régions dans l'image (par exemple, CCLabelling [17] [18]). Il

Chapitre 1:

L'état de l'art

1. Introduction

Dans ce chapitre, on va présenter une introduction sur l'imagerie médicale, puis un état de l'art sur la topologie algébrique et en particulier le calcul de l'homologie des groupes est donné.

L'objectif de ce chapitre est de donner un aperçu sur les méthodes de calcul d'homologie avec différentes structures géométriques (complexe cubique, ou autre primitive géométrique), ainsi les domaines d'application de l'homologie dans les images. Nous nous concentrons sur les travaux qui sont basés sur le calcul d'homologie des groupes avec leurs générateurs pour extraire de l'image médicale.

2. L'imagerie médicale :

Le champ des applications du traitement d'images est très vaste; la médecine est un des domaines qui n'a pu échapper de ce souffle numérique que ce soit dans la chirurgie, le diagnostic, la pratique thérapeutique... etc. L'imagerie médicale est l'ensemble des techniques permettant de visualiser une partie du corps humain et d'en conserver une image dans l'objectif de réaliser un diagnostic, de guider un geste thérapeutique. Les images médicales obtenues à différentes échelles, analysées et traitées par des ordinateurs de plus en plus performants, sont devenues des éléments indispensables à l'établissement d'un diagnostic précis [39].

2.1. Les différentes techniques d'imagerie médicale :

Nous nous concentrons principalement sur les techniques suivantes :

- **Techniques utilisant les rayons X :** C'est l'impression photographique d'un film argentique par un faisceau de rayon X après que ce dernier ait traversé l'organe à étudier.

L'image radiographique ainsi obtenue variera en fonction de la nature du tissu traversé et de l'absorption par ce dernier du rayonnement émis. Ainsi une structure dense (os) apparaîtra plus "blanche". A l'inverse, une structure aérienne (comme les poumons) apparaîtra en "noir" [39]. La figure 1.1 présente un exemple d'une image médicale captée par les rayons X.



Figure 1.1 : Image médicale des vaisseaux sanguins captée par la technique des rayons x.

- **Radiologie interventionnelle** : Elle désigne l'ensemble des procédures ayant pour but le traitement ou le diagnostic d'une affection, réalisées par un médecin radiologue, sous contrôle d'un moyen d'imagerie (radio, écho, scanner, IRM). Par exemple : angiographie étudie les vaisseaux sanguins non visibles en radiologie standard [39]. La figure 1.2 donne un exemple d'image médicale captée par cette technique.

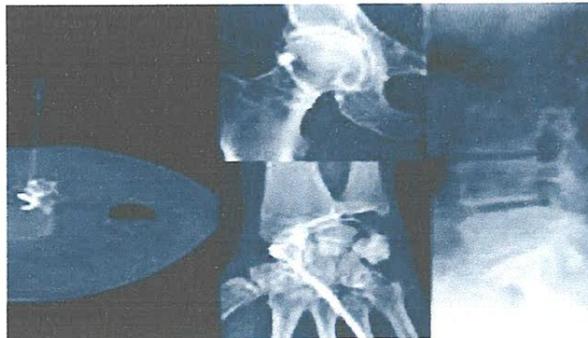


Figure 1.2 : Exemple d'une image médicale captée par la technique de la radiologie interventionnelle.

- **Scanner ou tomодensitométrie** : Les rayons X sont émis grâce à un tube tournant autour du patient, le film ici est remplacé par des capteurs, l'information est ensuite traitée et reconstruite pour donner des images des structures explorées. Il s'agit d'une imagerie en "coupes" [39]. 1.3 donne une image médicale des poumons captée par cette technique.

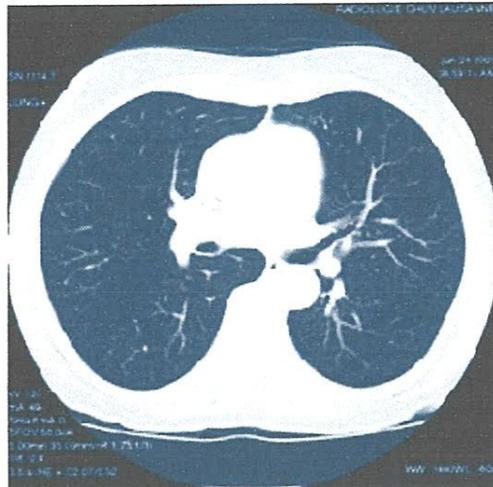


Figure 1.3 : Image médicale des poumons captée par la technique de scanner.

- **Les ultrasons (Echographie) :** visualisation du corps humain en coupe par l'utilisation des ultrasons. Ces ultrasons traversent toute la matière à l'exception des os et de l'air contenu dans le corps. Les ultrasons sont dirigés sur les zones à étudier grâce à une sonde posée sur la peau. Cette sonde émet des ultrasons et reçoit l'écho produit par les organes [39]. La figure en bas présente une image médicale des vaisseaux sanguins captée par cette technique.

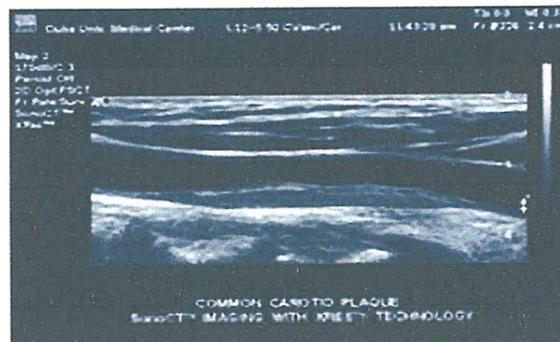


Figure 1.4 : Image médicale des vaisseaux sanguins captée par la technique des Ultrasons.

- **Techniques utilisant la résonance magnétique IRM :** Evolution majeure de l'imagerie permettant d'analyser à distance des organes de manière très précise, aussi elle permet de visualiser des détails invisibles sur les radiographies standards, par le scanner ou l'échographie. Schématiquement, cette technique utilise un gros aimant et analyse la réaction des différents tissus du corps à ces champs magnétiques. Les données recueillies sont ensuite traitées et la zone étudiées peut être restituée en deux

ou trois dimensions [39]. La figure en bas est une image des vaisseaux sanguins captée par la technique d'IRM.

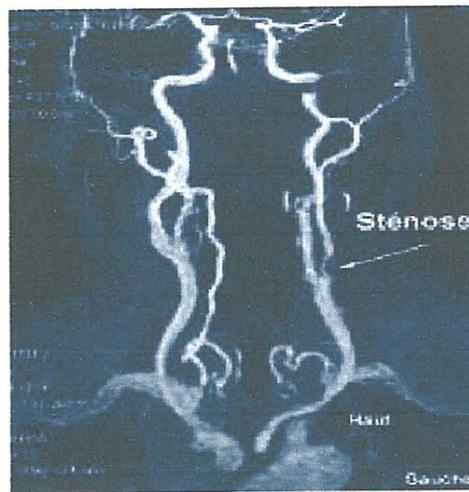


Figure 1.5 : Image médicale des vaisseaux sanguins captée par la technique d'IRM.

- **Techniques d'endoscopiques:** Elle peut être utilisée soit pour le diagnostic, soit pour traiter une maladie (endoscopie opératoire). L'introduction se fait par les voies naturelles lorsque c'est possible ou sinon par incision. Il existe deux types d'endoscopies :
 - **Endoscopie rigide :** Tube métallique surtout utilisé pour l'exploration des articulations, de la vessie et de la cavité abdominale (laparoscopie et cœlioscopie).
 - **Endoscopie souple ou fibroscopie :** Constitué de fibres optiques. Il permet d'explorer les bronches, l'œsophage, l'estomac, le duodénum, le colon...etc [39]. La figure en bas est un exemple d'une image captée par cette technique.



Figure 1.6 : Exemple d'une image médicale captée par la technique de l'endoscopie.

- **L'imagerie nucléaire :** Adaptée aux études fonctionnelles d'organes. Elle consiste à utiliser d'atomes radioactifs (traceurs) pour marquer certaines molécules qui ont un intérêt biologique et dont on veut suivre comment sera devenir dans l'organisme. Elle permet donc d'étudier le fonctionnement des organes [39]. La figure 1.7 présente une image médicale de cette technique.

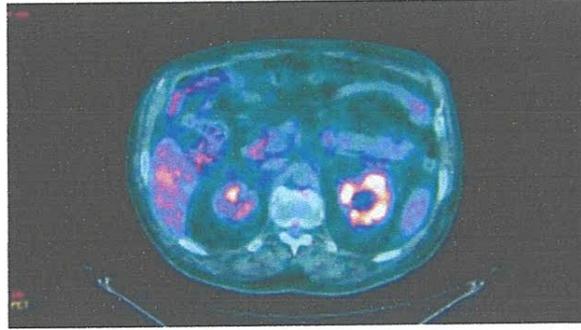


Figure 1.7 : Exemple d'une image médicale nucléaire des poumons captée par la technique de l'endoscopique.

3. Etat de l'art des algorithmes de calcul d'homologie:

Les algorithmes proposés dans l'état de l'art englobent le calcul de l'homologie et de la co-homologie, puisque les deux concepts sont des outils qui conduisent au même objectif. Les deux utilisent les mêmes structures de complexe, calcul des groupes algébriques pour le complexe réduit final. La seule différence réside dans l'homomorphismes qui relie deux groupes à chaînes qui est l'opérateur de frontière pour l'homologie et l'opérateur de co-frontière pour la co-homologie.

3.1. Algorithmes de calcul d'homologie avec les images médicales:

Plusieurs approches de calcul d'homologie des espaces topologiques existent dans la littérature. Le calcul d'homologie a été utilisé dans beaucoup de domaines tels que la métallurgie pour analyser la structure spatiale 3D de métaux [3] et aussi au traitement d'images médicales pour analyser les vaisseaux sanguins [7]. En dimension supérieure 4D, pour l'abattement de cœur [7]. M. Niethammer et al. [7] segmentent et classifient typologiquement les données des vaisseaux du cerveau obtenues à partir de l'angiographie par résonance magnétique, la segmentation se fait de manière adaptative et le classement par l'outil de l'homologie cubique en calculant des groupes d'homologie. De cette manière, le

nombre des composantes connexes, des tunnels et des cavités sont respectivement le rang de H_0 , le rang de H_1 et le rang de H_2 et sont déterminées comme résultats de la caractérisation topologique des vaisseaux sanguins.

3.2. Autres algorithmes de calcul d'homologie:

Kaczynski et al. [37] ont proposé de calculer l'homologie d'un complexe avec une séquence de réductions élémentaires. L'idée est de déduire un complexe cubique avec moins de cellules tout en préservant l'homologie à chaque étape de réduction. Pendant les calculs et afin d'assurer que les coefficients soient inversible, ces auteurs ont les choisi dans un champ. Dans [9] une méthode est conçue pour calculer les groupes d'homologie et leurs générateurs en utilisant une structure hiérarchique avec les opérations de contraction et de l'enlèvement. Ces deux opérations sont également utilisées d'une manière incrémentielle pour calculer les groupes d'homologie et leurs générateurs de surfaces 2D fermées, mais aucune hiérarchie n'est construite. Allili et al. [12] ont proposé une approche pour l'extraction des informations topologiques avec une application directe de l'homologie cubique et les concepts de homologie relative. Kaczynski et al. [6] se concentrent sur l'homologie des groupes (connectivité et le nombre de trous et des cavités obtenus à partir d'eux), qui sont connus d'être calculer en dimension finie. Allili et Mischaikow [3] combinent la méthode de la topologie combinatoire pour calculer le nombre de composantes connexes et les trous des objets dans une image donnée. Peltier et al. [8] introduisent une méthode de calcul des groupes d'homologie et leurs générateurs d'une image 2D, en utilisant une structure hiérarchique appelée graphe de pyramide irrégulière. Ils partent d'une image donnée, une hiérarchie de l'image est réalisée par deux opérations qui préservent l'homologie de chaque région. Au lieu de calculer des générateurs d'homologie dans la base où le nombre de cellules (c.-à-d. niveau zéro) est large, ils le font en niveau supérieur au les cellules sont très réduites. Ils réduisent premièrement le nombre de cellules par graphe de pyramide. Alors, les générateurs d'homologie sont calculés de manière efficace au niveau supérieur de la pyramide, puisque le nombre de cellules est petit. Un processus de haut en bas est alors appliqué pour en déduire les générateurs d'homologie dans tous les niveaux de la pyramide. A noter la base ou le niveau zéro représente l'image initiale. Les générateurs produits se situent sur les frontières de l'objet. Un ensemble unique de générateurs appelé ensemble minimal est calculé. Aussi, Peltier et al. [11] présentent un algorithme qui calcule l'homologie d'un objet de dimension arbitraire: nombres de Betti, les coefficients de torsion et générateurs. Une

Chapitre 2:
Théorie de
l'homologie cubique
et Morse discrète

1. Introduction

En graphisme, vision par ordinateur et analyse d'images, les théories d'homologie cubique et de Morse discrète sont considérées comme des outils importants pour accomplir certaines tâches au profit des applications dans beaucoup de domaines.

2. Théorie de l'homologie cubique :

L'homologie est conçue à la base des concepts algébriques. Comme l'algèbre est une science qui étudie les propriétés des ensembles munis d'une structure algébrique (groupe, anneau, loi de composition...), alors l'algèbre est associée à la topologie pour produire la topologie algébrique [2]. L'homologie est qui un outil classique de la topologie algébrique [2] est destiné à extraire les caractéristiques topologiques pour analyser l'invariance des propriétés des objets quand ces derniers sont soumis aux transformations géométriques et aux petites modifications de manière continue. Récemment, les outils de la topologie algébrique tels que l'homologie et la co-homologie ont été appliqués en traitement d'images pour l'analyse d'images 2D et 3D suivant la structure géométrique employée (complexe cubique, complexe simplicial ou autre primitive).

La théorie de l'homologie peut se catégoriser en homologie simpliciale et homologie cubique...etc, appliquées suivant la nature de l'espace topologique à étudier [29]. Ensuite, le calcul de l'homologie est appliqué sur une nouvelle structure algébrique appelée le complexe à chaînes qui est une séquence de groupes à chaînes. Ces derniers groupes sont des groupes abéliens finis libres reliés par une relation d'homomorphisme qu'on appelle l'opérateur de frontière. Les groupes d'homologie calculés sont caractérisés par leurs rangs qui donnent le nombre des cycles de dimension q . En espace 2D, les 1-cycles ($q=1$) et les 0-cycles ($q=0$) représentent respectivement les trous et les composants connexes. Alors, la génération d'un complexe à chaînes nécessite la construction d'un complexe cubique en premier temps.

2.1. Complexe cubique :

La théorie de l'homologie cubique est directement appliquée sur des complexes cubiques composés de collections de cubes. Un cube par définition est un produit cartésien d'intervalles élémentaires [6].

2.1.1. Représentation d'un cube élémentaire : Pour décrire la structure d'un complexe cubique, nous avons besoin de définir le cube élémentaire. Formellement, un cube élémentaire $\hat{Q} \subset R^d$ est donné par le produit cartésien fini suivant :

$$\hat{Q} = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d \tag{2.1}$$

Où I_i est un intervalle de la forme $I = [l, l + 1]$ ou $I = [l, l]$ pour $l \in Z$. Pour simplifier la notation, nous allons écrire $[l] = [l, l]$ pour définir un intervalle dégénéré et qui ne contient qu'un point ou un singleton. Le nombre d'intervalles non dégénérés par \hat{Q} est la dimension de \hat{Q} qu'on note par $\dim \hat{Q}$ [32]. La figure 2.1 présente trois exemples de q-cubes, (i) 0-cube (le cube est un sommet) pour $q=0$, (ii) 1-cube (le cube est une arête) pour $q=1$, (iii) 2-cube (le cube est un carré) pour $q=2$.

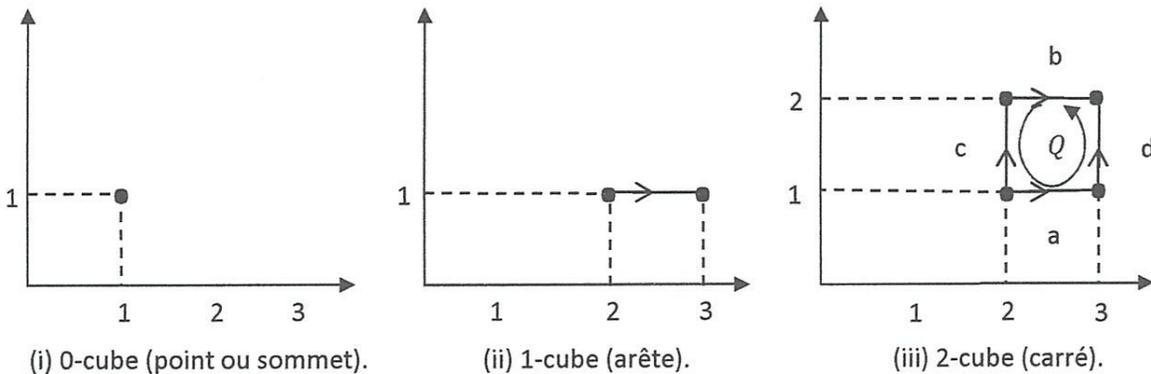


Figure 2.1: Trois exemples de q-cubes dans $R^2 (I_1 \times I_2)$: (i) 0-cube avec $I_1 = \{1\}, I_2 = \{1\}$; (ii) 1-cube avec $I_1 = [2,3], I_2 = \{1\}$; (iii) 2-cube avec $I_1 = [2,3], I_2 = [1,2]$.

2.1.2. Construction d'un complexe cubique : Un complexe cubique dans R^n est une collection finie K de q-cubes élémentaires, sachant que chaque face d'un cube quelconque de K est aussi un cube de K et l'intersection de deux cubes de K est soit vide ou une face de chacun d'eux. Les figures 2.2 (i) et (ii) présentent respectivement deux complexes cubiques, avec (i) un complexe non valide et (ii) un complexe valide.

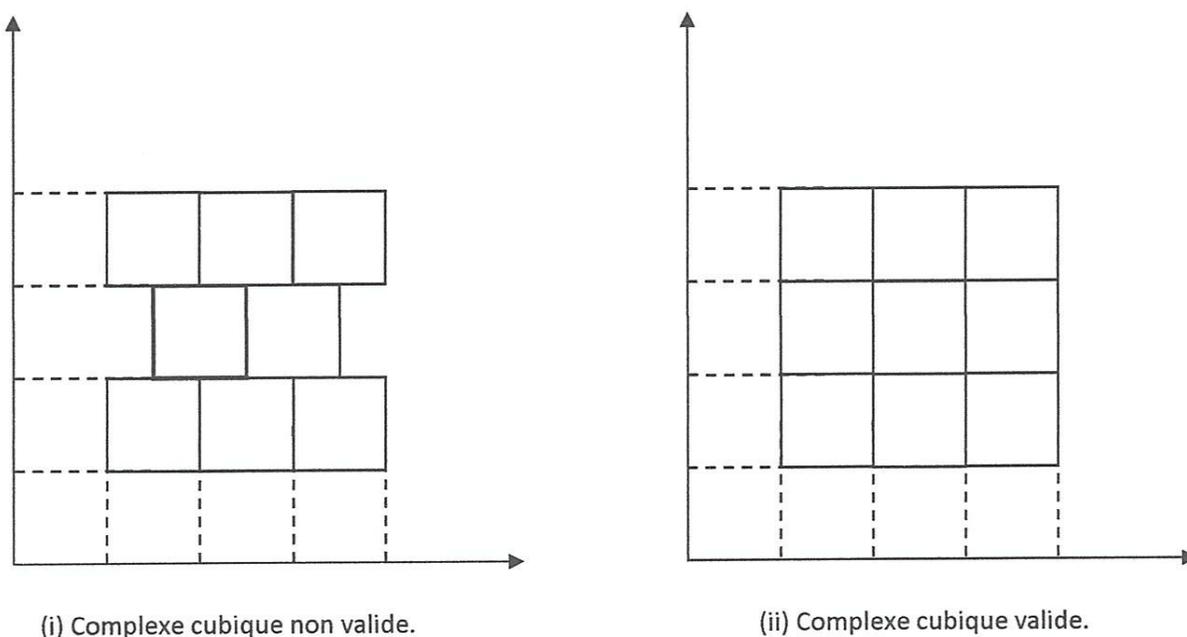


Figure 2.2 : Deux complexes cubiques dans R^2 (valide et non valide).

Formellement, étant donné X un ensemble cubique, composé d'union finie de cubes élémentaires, nous définissons le complexe cubique comme un ensemble de collections cubiques $K_q(X)$ avec $0 \leq q \leq d$, c-à-d:

$$K(X) = \{ \hat{Q} \text{ cube élémentaire} \mid \hat{Q} \subseteq X \} \tag{2.2}$$

Et

$$K_q(X) = \{ \hat{Q} \in K(X) \mid \dim \hat{Q} = q \} \tag{2.3}$$

Pour la simplicité, on utilise la notion Q au lieu de \hat{Q} .

Si $A \subseteq X$ est un sous-ensemble cubique de X , alors $K(A) \subseteq K(X)$ est appelé un sous-complexe cubique.

Comme dans le cas d'un complexe simplicial, nous pouvons associer à un cube $Q \in K_q$ une application $f : K_q \rightarrow Z$, appelée chaîne cubique élémentaire, telle que $f(Q) = 1$ et $f(P) = 0$ pour $P \neq Q$. Nous utiliserons la notation Q à la fois pour indiquer un cube élémentaire ou une chaîne cubique élémentaire associée. Nous définissons de plus le groupe des q -chaînes dans Z , par $C_q(K)$, comme le groupe de chaînes engendré par les chaînes

$$\dots \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \tag{2.10}$$

Noter que $\partial_0 = 0$ car $C_{-1}(K) = 0$ et l'opérateur de frontière satisfait la propriété $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ pour tout $q \in \mathbb{Z}$. L'information algébrique extraite du complexe cubique K doit être traités par l'intermédiaire d'un complexe à chaînes (C, ∂) libre de type fini et l'utilisation des groupes de cycles et de frontières [30].

Une chaîne $z \in C_q(K)$ est appelé un q -cycle si elle est dans le noyau de ∂_q et nous pouvons écrire $\partial_q z = 0$. L'ensemble de tous les q -cycles est le sous-groupe $Z_q := \text{Ker } \partial_q$ de $C_q(K)$.

Une chaîne $b \in C_q(K)$ est appelé une q -frontière s'il existe $c \in C_{q+1}(K)$ tel que $\partial_{q+1} c = b$. L'ensemble de toutes les q -frontières est le sous-groupe $B_q := \text{Image } \partial_{q+1}$ alors que $\text{Image } (\partial_{q+1}) \subset \text{Ker } \partial_q$ [2].

La figure 2.4 montre un exemple de complexe cubique de dimension 2 où la ligne discontinue formée par les arêtes ou 1-cubes a, b, c, d, e et f est simultanément un 1-cycle et 1-frontière. Par contre, la ligne de frontière formée par les arêtes g, h, i, j, k, l, c, b, o et p est un 1-cycle mais n'est pas une 1-frontière.

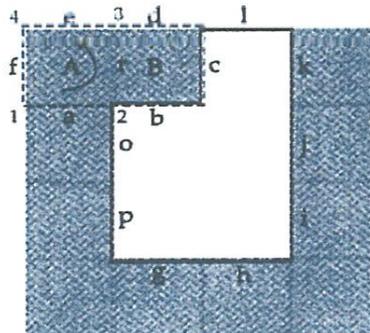


Figure 2.4 : Exemple de complexe cubique de dimension 2. Les groupes d'homologie de ce complexe sont $H_0 = 1, H_1 = 1$ et $H_2 = 0$.

2.2. Homologie :

En traitement d'images et vision par ordinateur, une grande quantité d'images sont traitées, et la quantité de données est énorme. Alors, l'idée est de réduire la quantité de ces données en conservant la structure topologique. L'objectif de réduction de ces données peut

se réaliser en calculant les groupes d'homologie d'une structure de complexe cubique. Cette homologie aide à déterminer le nombre de composants connexes et les trous pour les images 2D et le nombre de composants connexes, tunnels et cavités pour les images 3D. Les complexités temporelle et spatiale de calcul d'homologie sont énormes dans les images 3D qu'en 2D. Dans l'exemple de la figure 2.4, les groupes d'homologie calculés sont $H_0 = \mathbb{Z}^2$ et $H_1 = \mathbb{Z}$ (H_2 est trivial).

Les groupes d'homologie servent principalement à caractériser les cycles d'homologie d'un espace. Plus précisément, le groupe d'homologie H_1 , présente les 1-cycles dans l'image qui présente les trous dans l'image 2D. L'homologie se propose d'attribuer à tout objet géométrique une suite de groupes abéliens comme suit :

Étant donné un complexe cubique K qui représente une image 3D, $H_0(K)$, $H_1(K)$ et $H_2(K)$, sont les groupes d'homologie abéliens à calculer, les rangs de $H_0(K)$, $H_1(K)$, $H_2(K)$ déterminent respectivement le nombre de composants connexes, le nombre de cycles et le nombre de cavités (ou vides) dans K , voir la table récapitulative en bas [2].

Objet ou image 3D K	Groupes d'Homologie $H_*(K) = \{H_k(K)\}$	Rang(H_q)
$dim\ q = 0$	# composants connexes de K	Rang(H_0)
$dim\ q = 1$	# cycles de K	Rang(H_1)
$dim\ q = 2$	# cavités dans K	Trivial ou zéro

Tableau 2.1: table récapitulative pour le calcul des groupes d'homologie H_q pour $q=0, 1$ et 2 .

Étant donné un complexe à chaînes $C(K)$, on peut définir l'homologie de K de dimension q , pour tous $q \geq 0$ pour cela, on utilise la notion de cycles et frontières.

Pour tout $q > 0$, on note ∂_q l'opérateur de frontière entre $C_q(K)$ et $C_{q-1}(K)$. On note respectivement $Z_q(K)$ et $B_q(K)$ le noyau de ∂_q et l'image de ∂_{q+1} . Par définition l'ensemble de tous les q -cycles est exactement $Z_q(K)$ et l'ensemble de tous les q -frontières est exactement $B_q(K)$, puisque $\partial^2 = 0$, alors $B_q(K)$ est un sous-groupe de $Z_q(K)$.

Deux q -cycles c_1 et c_2 de $Z_q(K)$ sont homologues si $c_1 - c_2$ est une frontière. Il s'agit d'une relation d'équivalence. Finalement, le q^{ieme} groupe d'homologie de K est donné par le groupe quotient :

$$H_q(X) := \frac{Z_q(K)}{B_q(K)} = \frac{\text{cycles}}{\text{frontières}} \quad (2.11)$$

Intuitivement, l'homologie détecte les cycles qui ne sont pas triviaux, dans le sens qu'ils ne sont pas des frontières de chaînes de dimensions plus élevées [2].

3. Théorie de Morse discrète :

La théorie de Morse est un outil fondamental conçue principalement pour étudier la topologie des variétés lisses. En particulier en graphisme, beaucoup d'applications ont été conçues [10], [16], [25], [26]. En topologie computationnel [4], [40], la théorie de Morse a été utilisée pour étudier la topologie basée sur des algorithmes et des structures de données [41], [42]. La théorie de Morse discrète a été introduite par Robin Forman [34] à la fin des années 1990. Elle s'applique à l'étude des complexes simpliciaux ou plus généralement des CW-complexes. Forman met particulièrement en valeur l'analogie entre théorie de Morse classique sur les variétés différentielles et la théorie discrète. Dans note approche, la théorie de Morse discrète est employée pour générer le champ des vecteurs discrets.

3.1. Champ des vecteurs discrets :

La notion du champ des vecteurs discrets (ou brièvement noté DVF) d'après Robin Forman [34], est une notion essentielle de la théorie de Morse discrète. Cette notion sera un outil majeur pour traiter les problèmes fondamentaux de la topologie algébrique et plus précisément pour traiter les problèmes liés à la topologie computationnelle. Aussi, elle est habituellement décrite et utilisée dans la topologie combinatoire. Une cellule critique est un élément de complexe qui ne se produit pas dans le champ de vecteur, les autres cellules se divisent en cellules sources ou faces et des cellules cibles ou parentes. Par exemple, la figure 2.5 présente un complexe cubique avec une cellule critique de dimension 1 (arrête) et l'autre de dimension 0 (sommets).

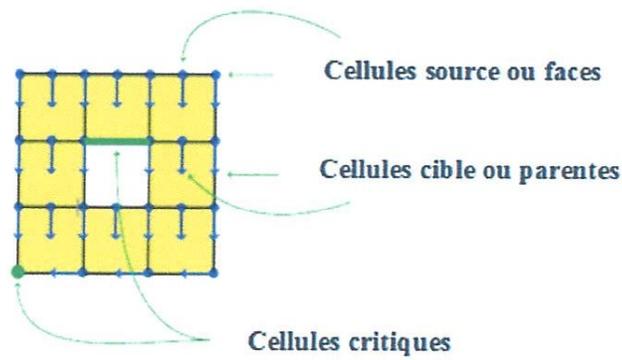


Figure 2.5 : Complexe cubique associé avec un champ des vecteurs discrets.

3.2. Champ des vecteurs discrets admissible : On dit qu'un champ des vecteurs discrets est admissible si pour chaque $p \in Z$, il existe une fonction $f_p : \rightarrow Z$ fournie et vérifie la propriété suivante :

- ✓ tous les chemain (ou V-Path) à partir de $\partial \in \beta_p$ ont une longueur délimitée par $f_p(\partial)$

La figure 2.6 représente deux champs des vecteurs discrets pour un complexe simplicial, le premier à gauche est non admissible, car il contient une boucle et le deuxième à droite est admissible, car il ne contient pas des boucles.

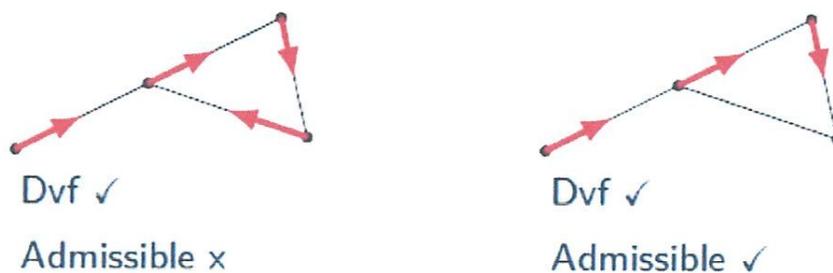


Figure 2.6 : Deux champs des vecteurs discrets : non admissible et un autre admissible.

3.3. Champ de vecteurs discrets et les matrices d'entiers :

Soit M une matrice initiale $M \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$, avec m lignes et n colonnes. On considère que M est la matrice de frontière non nulle unique du complexe à chaînes :

$$\dots \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{Z}^m \xleftarrow{M} \mathbb{Z}^n \leftarrow 0 \leftarrow \dots \quad (2.12)$$

La construction de ce champ est très facile. mais il faut d'abord vérifier si ce champ de vecteurs est admissible ou non ? Le champ qui contient un vecteur V pour cette matrice est un ensemble des paires d'entiers $\{(a_i, b_i)\}$. Si le champ du vecteur est admissible, il définit un ordre partiel entre les cellules source de l'image : la relation $a > a'$ est satisfaite entre les cellules de l'image source si et seulement si un V -path commence de a vers a' . L'ordre partiel garantit la non-existence des boucles.

A l'inverse, soit V un vecteur pour notre matrice M . Si $1 \leq a, 1 \leq a'$, avec $a \neq a'$, nous pouvons déduire que $a > a'$, s'il y a un V -path élémentaire à partir de a à a' , si un vecteur (a, b) est présent dans V et si l'entrée $M[a', b]$ est non-nulle, cela correspond de a vers une cellule b avec notamment une face régulière a et a' comme une face arbitraire .

Nous obtenons donc une relation binaire. Ensuite, le vecteur V est admissible si et seulement si cette relation binaire effectivement génère transitivement un ordre partiel, qui est encore une fois s'il n'y a pas de boucle $a_1 > a_2 > \dots > a_K = a_1$. On peut donc résumer le problème de la réduction par un champ vectoriel comme suit:

- ✓ Compte tenu de la matrice M , ce processus pourrait produire un champ vecteur aussi large que possible, mais admissible et sans boucles.
- ✓ Trouver un tel champ de vecteurs de taille maximal semble à beaucoup des difficultés pour les applications réelles. Pour cela nous commençons avec quelques stratégies heuristiques simples pour obtenir significativement un champ de vecteur admissible maximal.

3.4. Méthode de génération d'un champ de vecteurs admissible :

Pour concevoir un champ de vecteurs admissible il existe plusieurs méthode, parmi ces méthode, on cite deux méthodes: algébrique basée sur l'ordre prédéfini et géométrique qui est basée sur l'ordre géométrique.

3.4.1. Ordre prédéfini :

Une manière directe pour construire rapidement un champ de vecteurs admissible consiste à prédéfinir un ordre entre les indices de ligne et de recueillir toutes les indices pour lesquelles une colonne est ci-dessus de cet indice. Nous allons tester par cette matrice donnée aléatoirement :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Si nous prenons simplement l'ordre d'index entre les indices de ligne, nous remarquons que les colonnes 1,4 et 5 peuvent être choisis, pour donner le champ de vecteurs $\{(5; 1); (3; 4); (4; 5)\}$. Cela conduit à réordonner les lignes et les colonnes dans les ordres respectifs (5, 4, 3, 1, 2) et (1; 5; 4; 2; 3) et réécrire la matrice M comme suit:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Ou le bloc 3x3 haut à gauche de la matrice est triangulaire, la décomposition du bloc 3x3 qui suit alors correspond à celle qui est utilisée dans la Lemme Hexagonale [46].

$$\gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

La Lemme Hexagonale produit une réduction de $M : \mathbb{Z}^5 \leftarrow \mathbb{Z}^5$ à $M' : \mathbb{Z}^2 \leftarrow \mathbb{Z}^2$ avec $M' = \beta - \psi\gamma^{-1}\lambda$ ou le calcul de γ^{-1} est facile pour γ triangulaire et uni-modulaire, le calcul direct donne la matrice M' comme suit :

$$M' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

3.4.2. Ordres géométriques :

Pour le complexe à chaînes provenant d'une image 2D, les ordres partiels provenant à partir des propriétés géométriques peuvent être très pratiques. Nous reprenons notre exemple, une image de résolution 3x3 avec 8 pixels en noir et un en blanc comme arrière plan.

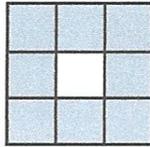


Figure 2.7 : Image 2D de 8 pixels en noir et un en blanc.

Les bases du complexe à chaînes correspondantes sont constituées de 16 sommets, 24 arêtes et 8 carrés qu'on peut la représenter par la séquence suivante:

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}^{16} \leftarrow \mathbb{Z}^{24} \leftarrow \mathbb{Z}^8 \leftarrow 0 \tag{2.17}$$

Les matrices de frontière sont un peu compliquées, pour concevoir un champ de vecteurs admissible, pour cela nous adaptons une stratégie géométrique qui consiste à orienter les vecteurs vers la gauche ou vers le bas, cela est suffisant pour éviter les boucles. Plusieurs méthodes systématiques sont possibles. Par exemple, la figure 2.8 présente un complexe cubique avec un champ de vecteurs généré selon la méthode des ordres géométriques (les vecteurs sont orientés en bas et à gauche). Une telle méthode pourrait produire ce champ des vecteurs mentionné en bas.

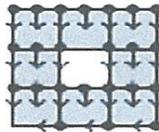


Figure 2.8 : un complexe cubique avec un champ de vecteurs généré selon la méthode des ordres géométriques.

Si le champ de vecteurs généré est maximal, on peut constater qu'il reste seulement deux cellules critiques non affectées, un sommet et une arête (voir la figure 2.9) [35].



Figure 2.9 : Cellules critiques restantes (une 0-cellule ou sommet et une 1-cellule ou arête).

4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté en détail les théories de l'homologie cubique et de Morse discrète. Des définitions et des concepts mathématiques servent au calcul de l'homologie cubique conjointement avec la génération d'un champ des vecteurs discrets admissibles sont donnés afin de faciliter la modélisation du problème d'extraction des caractéristiques topologiques.

Chapitre 3:

Modélisation de l'approche

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une approche qui permet d'extraire les caractéristiques topologiques des images médicales en utilisant les concepts de l'homologie cubique conjointement avec le champ des vecteurs discrets qui est un concept instrumental de la théorie de Morse discrète. Cette extraction des caractéristiques englobe le calcul de l'homologie et la localisation de ces caractéristiques.

Notre approche est composée de plusieurs étapes principales, débutée par construire le complexe cubique de l'image 2D en considérant uniquement les pixels objet et d'ignorer les pixels qui forment l'arrière plan. A partir du complexe cubique, on génère le complexe à chaînes correspondant qui est la forme algébrique du complexe cubique en suivant un processus d'étiquetage. Le complexe à chaînes permettait d'appliquer l'homologie cubique conjointement avec le champ des vecteurs discrets. L'homologie sera calculée via un processus de réduction qui donne comme résultat les groupes d'homologie du complexe initial de l'image donnée. L'étape finale sera réservée au processus de localisation des cycles d'homologie associées aux groupes d'homologie H_1 .

2. Construction du complexe cubique :

Généralement une image numérique 2D est définie comme un support formé par des pixels et des quantités associées à ces pixels. Le support d'une image est stocké au moyen d'une grille des pixels. En langage de géométrie, cette grille conduit à une subdivision cubique ou le pixel est modélisé comme un cube. Dans cette subdivision cubique qui souvent utilisée par plusieurs algorithmes en graphisme et vision par ordinateur, deux carrés sont soit disjoints ou se croisent à travers une arête commune ou un sommet commun. La structure qui modélise le support d'image des pixels objet ayant la valeur de codage égale à un (les pixels de l'arrière plan sont codés à zéro) est appelée complexe cubique. En théorie simpliciale, il faudrait subdiviser chaque pixel en deux triangles adjacents et donc l'augmentation de la complexité des données. Mais notre approche utilise la théorie cubique où le pixel est traité directement. Les mêmes observations peuvent être faites pour les images 3D qui conduisent à un complexe cubique 3D où chaque voxel est un 3-cube [12].

Pour une image de dimensions 2 ou 3, la subdivision cubique du support est un 2- ou 3-complexe cubique. Dans le cas d'une image binaire nD, le support d'image est une collection de n-cubes. Quand n=0, le support d'image est une collection des sommets ; Quand

$n=1$, le support est une collection des arêtes; Quand $n=2$, le support est une collection des carrés. Dans un complexe cubique, deux n -cubes quelconques sont soit disjoints ou intersectés par une face qui est p -cube avec $p < n$. Cette subdivision de support de l'image en n -cubes permet aisément d'appliquer les notions de l'homologie cubique menant à calculer les groupes d'homologie et ces générateurs.

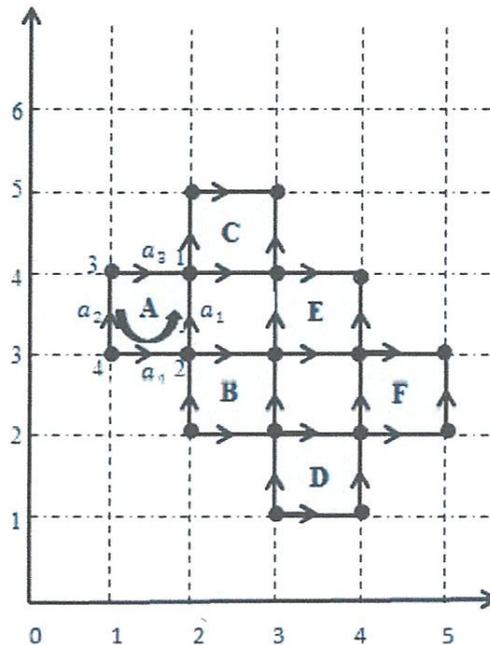


Figure 3.1 : Exemple d'un complexe cubique orienté avec six 2-cubes ou les pixels objet sont codés en noir et ceux de l'arrière plan sont en blanc.

Pour une subdivision de support de dimension n , la construction d'un complexe cubique signifie d'extraire toutes les collections de cubes élémentaire à partir de cette subdivision. Les autres collections K_{q-1} sont calculée à partir de la collection K_q d'une manière récursive, pour $q=1 \dots n$. Le principe consiste à calculer pour chaque q -cube sa chaîne frontière cubique qui est une somme alternée des $(q-1)$ -cubes avec une signe d'orientation associée à chaque $(q-1)$ -cube suivant le q -cube de niveau supérieur (généralement, suivant le sens inverse des aiguilles) en formant aussi la collection K_{q-1} . Les $(q-1)$ -cubes qui sont des faces communes ne se comptabilisent qu'une seule fois dans la collection. Pour une image 2D, le complexe à produire se compose uniquement de trois collections K_2 , K_1 et K_0 .

La collection K_2 est obtenue par la conversion directe des pixels d'objet de l'image 2D en sous-ensembles de 2-cubes. Dans l'exemple de la figure 3.1, le pixel à la position (1,3) est un 2-cube \hat{A} avec la forme cubique $[1,2] \times [3,4]$ avec intervalles élémentaires $I_1 = [1,2]$ et $I_2 = [3,4]$. Par exemple, le 2-cube \hat{A} , sa chaîne frontière cubique qu'on la note $\partial_2 \hat{A}$ est $+\hat{a}_1 - \hat{a}_2 - \hat{a}_3 + \hat{a}_4$, sachant que $\hat{a}_1 = [1,2] \times [4,4]$, $\hat{a}_2 = [1,2] \times [5,5]$, $\hat{a}_3 = [1,1] \times [4,5]$ et $\hat{a}_4 = [2,2] \times [4,5]$.

A noter aussi que les 1-cube \hat{a}_1 , \hat{a}_2 , \hat{a}_3 et \hat{a}_4 ont chacun un intervalle élémentaire dégénéré, qui sont $[5,5]$, $[1,1]$, $[2,2]$ et $[4,4]$, on collecte alors tous les 1-cubes (qui sont géométriquement des arêtes), on obtient la collection K_1 . Même raisonnement s'applique sur la collection K_0 , qui regroupe les 0-cubes (qui sont géométriquement des sommets), on obtient ainsi la collection K_0 . Pour l'exemple de la figure 3.1, le complexe cubique construit sera composé de trois collections suivantes :

$$K_2 = \{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E}, \hat{F}\}.$$

$$K_1 = \{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \hat{b}_4, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, \hat{c}_4, \hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3, \hat{d}_4, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4, \hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3, \hat{f}_4\}.$$

$$K_0 = \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}, \hat{8}, \hat{9}, \hat{10}, \hat{11}, \hat{12}, \hat{13}, \hat{14}, \hat{15}, \hat{16}, \hat{17}\}.$$

En fin, A noter que pour la clarté de la figure 3.1, on présente uniquement les 2-cubes et on concentre sur le 2-cube \hat{A} pour expliquer les faces. Les autres 1-cubes et les autres 0-cubes ne sont pas indiqués dans le schéma et le symbole (^) ne sera pas figuré sur le cubes.

3. Génération du complexe à chaînes :

Supposons un complexe cubique $K = \{K_2, K_1, K_0\}$, pour générer un complexe à chaînes C , on doit générer les bases canoniques $\{E_q\}$ pour $q=0$ à n où n représente la dimension du complexe cubique K . Les bases canoniques $\{E_q\}$ ou chaque élément ou q -cellule est l'étiquette ou label d'un q -cube du complexe cubique correspondant qui sert à générer le complexe à chaînes correspondant composés des groupes à chaînes $\{C_q\}$ pour $q=0$ à n .

3.1. Processus d'étiquetage :

Le processus d'étiquetage consiste à attribuer à chaque cube élémentaire un étiquetage unique qui l'identifie parmi les autres cubes de la même collection. L'étiquette formellement d'un cube $\hat{Q} \in K_q$ sera un élément de la base canonique E_q pour générer après le groupe à

chaîne C_q du futur complexe à chaîne C . Le processus d'étiquetage peut être modélisé par l'application bijective F_q comme suit :

$$F_q : K_q \rightarrow E_q / F_q(\widehat{Q}) = e_i$$

Avec $\widehat{Q} \in K_q$ et e_i est la $i^{\text{ième}}$ élément ou cellule de E_q .

La figure 3.2 donne le résultat d'étiquetage appliquée sur le complexe cubique précédent illustré dans la figure 3.1, où les bases canoniques E_1 , E_2 et E_3 sont composées respectivement de 8-cellules, de 24 1-cellules et de 16 0-cellules.

3.2. Génération du groupe à chaînes C_q à partir de E_q :

Dans la sous-section précédente, on a montré comment étiqueter les cubes des collections formant le complexe cubique. Ces étiquettes générées seront des éléments ou cellules dans la base canonique correspondante.

Une base canonique E_q est conçue pour générer le groupe à chaîne C_q où chaque chaîne c peut s'écrire sous la forme $c = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i e_i$ où $e_i \in E_q$ est la q -cellule d'ordre i et $\alpha_i \in Z$ (si les coefficients appartiennent à Z). N est le nombre des q -cellules composant la base canonique E_q . L'ensemble des chaînes $\{c\}$ forment le groupe à chaînes abélien libre C_q correspondant à la base E_q .

L'opérateur de frontière ∂ appliqué sur les cubes peut être généralisé sur les chaînes aussi et donc $\partial_q c = \sum \alpha_i e_i$, c-à-d la frontière d'une chaîne de cellules de dimension q est la somme alternée des cellules de dimension $(q-1)$ multipliées par des coefficients en Z . Dans l'exemple de la figure 3.2, la première cellule d'étiquette 1 qui représente le 2-cube \widehat{A} , sa chaîne de frontière est $\partial_2 1 = (+1).4 + (1-).3 + (-1).2 + (+1)1$.

La séquence suivante qui montre les groupes C_q reliés par l'opérateur ou l'homomorphisme ∂_q définit le complexe à chaînes C :

$$\dots \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} \dots \quad (3.1)$$

Pour l'exemple de la figure 3.2, le complexe à chaînes C est défini conjointement avec l'ensemble des bases canoniques E comme est illustré dans le diagramme des séquences suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \xrightarrow{\partial_3} & C_2 & \xrightarrow{\partial_2} & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \rightarrow & Z^6 & \rightarrow & Z^{24} & \rightarrow & Z^{17} \rightarrow 0
 \end{array} \tag{3.2}$$

La première ligne indique la séquence de connexion entre les groupes à chaînes C_q , tandis que la deuxième ligne présente une séquence entre les bases canoniques E_q .

4. Génération d'un champ de vecteurs discrets admissible :

La théorie de Morse discrète s'intervient dans la génération d'un champ de vecteurs discrets; pour le faire, on utilise la méthode basée sur les ordres géométriques décrite dans le chapitre précédent. Le champ de vecteurs admissible généré est associé au complexe à chaînes généré à partir d'un complexe cubique K .

Formellement, supposons un complexe à chaînes $C = \{C_q\}$ avec un champ de vecteurs admissible $V = \{V_q\}$, pour $q = 0 \dots n$, et $p = 1 \dots n$, ou n est la dimension du complexe cubique K . Un vecteur discret V_p est un ensemble de couples $\{p_j\}$ ou chaque couple p_j s'écrit sous la forme (c_g, c_d) avec c_g et c_d représentent respectivement la cellule face du groupe à chaînes C_{q-1} et la cellule parente du groupe C_q , sachant que $\langle \partial c_d, c \rangle \neq 0$ (c-à-d, c_g est une cellule face de la cellule parente c_d). Pour l'exemple de la figure 3.2, le complexe à chaînes C est associé à un champ de vecteurs admissible qui est illustré par la figure 3.2. Mais ce champ n'est pas maximal, puisqu'il ignore des cellules d'être parmi les couples de $\{p_j\}$ qui ne sont pas toutes critiques. Par contre, la figure 3.3 illustre un champ admissible maximal où les cellules non intégrés dans les couples de $\{V_p\}$ sont des vrai cellules critiques.

Cependant, pour l'exemple de champ illustré à la figure 3.3, le vecteur V_2 est composé des couples suivants: $\{(4,1); (8,2); (12,3); (16,4); (20,5); (24,6)\}$ dont le premier couple $(4,1)$ signifie que la cellule face 4 est associée à la cellule parente 1. Même raisonnement peut s'appliquer sur le vecteur V_1 qui sera composé des couples suivants: $\{(2,1); (4,2); (3,3); (6,5); (7,6); (9,9); (1,10); (8,11); (12,13); (13,14); (15,17); (5,18); (14,19); (17,21); (11,22); (16,23)\}$.

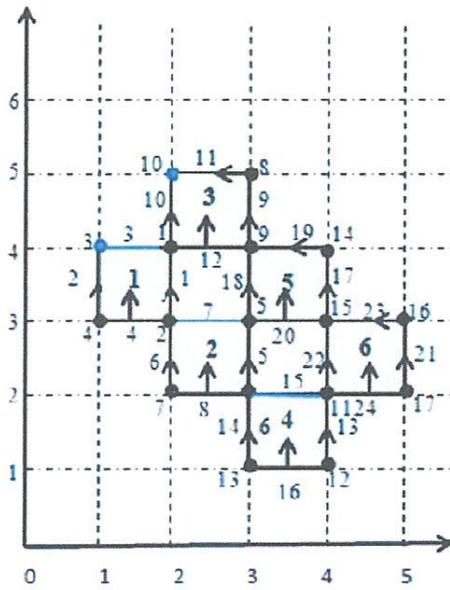


Figure 3.2 : Un champ des vecteurs discrets admissible illustré sur un complexe cubique.

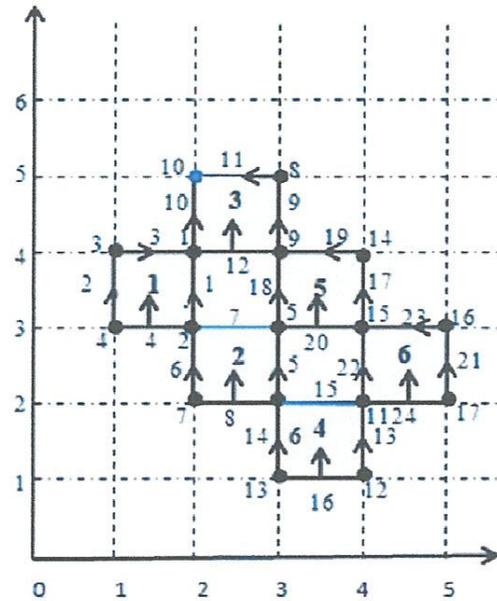


Figure 3.3 : Un champ des vecteurs discrets admissible maximal illustré sur un complexe cubique.

5. Homologie du complexe à chaînes :

Le complexe à chaînes est une représentation algébrique qui sert pour la définition et le calcul de l'homologie. Bien qu'il soit généralement défini à partir des structures géométriques telles que des complexes simpliciales ou cubiques, il peut également être traité comme une entité algébrique pure [33].

Le calcul de l'homologie se réalise avec le processus de réduction suivant le schéma d'un champ des vecteurs discrets. La réduction d'un complexe à chaînes est une procédure qui consiste à enlever successivement des paires de cellules des bases associées aux groupes de chaînes tout en conservant l'homologie du complexe initial. Cette procédure est à l'origine motivée par une idée géométrique simple connue qui est l'effondrement ou l'écrasement. Au niveau algébrique, chaque enlèvement d'un couple des cellules qui forment une paire de réduction est équivalente à un ensemble de fonction de projection $\{\pi_d: C_d \rightarrow C_d\}_d$ qui envoie chaque cellule de couple enlevée en zéro. En outre, il projette les autres cellules dans les cellules restantes en tenant compte des modifications de leurs frontières causées par le retrait du couple de cellules. Le processus de réduction est basé sur deux types de réduction :

- ✓ Réduction de face interne : il consiste à appliquer une réduction entre une cellule parente ou source avec une cellule face interne (face qui partage deux cellules parentes). Cette réduction conduit à modifier la frontière des cellules parentes adjacente suivant l'expression suivante :

$$\overline{\delta_K v} = \begin{cases} \delta_K v & \text{if } k \neq m + 1 \\ \delta_K v - \theta^{-1}(\delta_K u, v)\delta_K A & \text{if } k = m \\ \delta_K v - (\delta_K v, A)A & \text{if } k = m + 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

- ✓ Réduction de face externe : il consiste à appliquer une réduction entre une cellule parente et une cellule face qu'est une face libre de cellule parente.

$$\overline{E_K} = \begin{cases} E_K & \text{if } k \neq m - 1, m \\ E_{m-1} / \{a\} & \text{if } k = m - 1 \\ E_m / \{A\} & \text{if } k = m - 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

Dans notre approche, on a besoin de réduction externe car elle nous aide dans la partie de la localisation. Le processus de réduction consiste à parcourir le champ de vecteurs et on réduit chaque cellule parente avec la cellule face. Pour notre exemple de la figure 3.2, lorsque on applique une réduction selon le champ de vecteur V_2 , on trouve qu'on peut réduire les couples suivants : $\{(4,1); (8,2); (12,3); (16,4); (20,5); (24,6)\}$, et avec V_1 on trouve qu'on peut réduire $\{(2,1), (4,3), \dots \text{etc.}\}$, chaque couple réduit doit être enlevée du complexe à chaînes.

Avant d'appliquer la réduction, la séquence des bases canoniques E_0, E_1 et E_2 associée au complexe à chaînes initial est comme suit :

$$0 \rightarrow Z^6 \xrightarrow{\partial_2} Z^{24} \xrightarrow{\partial_1} Z^{17} \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

Après l'application de la réduction, la séquence des bases associée au complexe à chaînes est maintenant comme suit :

$$0 \rightarrow 0 \xrightarrow{\partial_2} Z^2 \xrightarrow{\partial_1} Z \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

Et le complexe à chaînes initial C se réduit à un complexe final C^f . Les groupes à chaînes finaux C_q^f restants après la réduction deviennent des groupes d'homologie. Pour notre exemple, et d'après l'équation (3.6), uniquement les groupes H_1 et H_0 sont non triviaux, donc :

$$H_0 \cong Z \text{ et } \text{Rang}(H_0)=1$$

$$H_1 \cong \mathbb{Z} \text{ et } \text{Rang}(H_1)=2$$

Par contre :

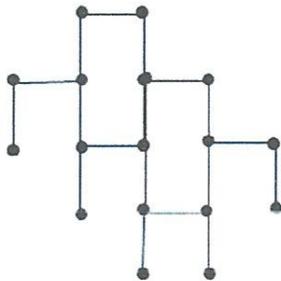
$$H_2 = 0$$

Sachant que H_0 et H_1 sont respectivement les groupes d'homologie de dimension 0 (les 0-cycles ou les composantes connexes) et de dimension 1 (les 1-cycles d'homologie ou les trous).

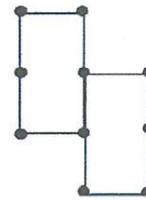
6. Localisation des cycles d'homologie (groupe H_1) :

Notre approche est basée sur un modèle d'extraction des caractéristiques topologiques, l'extraction englobe le calcul des groupes d'homologie avec leurs générateurs et la localisation de ces générateurs par des représentants. Pour une dimension q les générateurs qui conduit à l'homologie finale s'appelle les q -cycles. En 2D, la localisation concerne uniquement les 1-cycles qui sont les trous dans l'espace topologique. La figure 3.4 donne un exemple de calcul d'homologie avec $H_0=\mathbb{Z}$ et $H_1 = \mathbb{Z}^2$. D'après ces résultats, il y a deux 1-cycles ou trous dans le complexe cubique de la figure 3.1.

La figure 3.4 donne le complexe réduit après une réduction partielle, dont la figure 3.5 (i) présente la réduction suivant le vecteur du champ V_2 et la figure 3.5 (ii) présente la réduction suivant le vecteur du champ V_1 .



(i) Réduction partielle de dimension 2 suivant le vecteur V_2 .



(ii) Réduction partielle de dimension 1 suivant le vecteur V_1 .

Figure 3.4 : Résultat de la réduction partielle du complexe cubique.

La figure 3.5 présente le complexe réduit final après l'application de la réduction complète avec deux classes d'homologie: [10] pour H_0 et [7] et [15] pour H_1 .

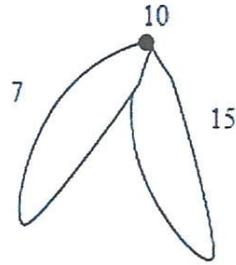


Figure 3.5 : Résultat de la réduction complète qui donne un complexe réduit final.

7. Algorithme principal d'extraction des caractéristiques topologiques (ou localisation des cycles) :

Le modèle ainsi conçu se traduit par les étapes décrites dans cet algorithme :

- Algorithme Localisation_cycles :

Entrée : image I;

Sortie : Localisation visuelle par représentation de générateurs H_1 sur l'image I;

1- Construire le complexe cubique K en considérant uniquement les pixels objet comme des cubes;

2- Génération du complexe à chaînes C correspond à K;

3- Génération d'un champ de vecteurs admissible maximal associé au complexe à chaînes C;

4- Calcul des groupes et leurs générateurs d'homologie en appliquant un processus de réduction (réduction complète du complexe initial C avec les réductions internes et externes);

5- Localisation des cycles d'homologie groupe H_1 en utilisant un processus de réduction (réduction partielle du complexe initial C avec uniquement les réductions externes);

Fin d'algorithme

8. Conclusion

Dans ce chapitre, on a montré le modèle de notre approche qui utilise les outils de l'homologie cubique conjointement avec le champ des vecteurs discrets. Le modèle ainsi construit commence par la construction du complexe cubique jusqu'à la localisation des cycles d'homologie en passant par la génération du complexe à chaînes à partir du complexe

Chapitre 4:

Implémentation et

Résultats

expérimentaux

1. Introduction

Nous avons discuté et présenté dans le chapitre précédent le modèle d'extraction des caractéristiques topologiques, ou plus précisément la localisation de ces caractéristiques dans les images 2D.

Dans ce chapitre, nous concentrons notre effort pour l'implémentation de ce modèle par le biais des outils comme l'homologie cubique et le champ des vecteurs discrets. Ce chapitre est composé de deux parties, la première partie est destinée à l'implémentation du modèle et la deuxième est consacrée à la validation de ce modèle par des résultats expérimentaux.

2. Implémentation de l'approche:

L'objectif de cette partie est d'implémenter le modèle d'extraction des caractéristiques topologiques conçu dans le chapitre précédent, et dans le but de préparer des outils capables de valider ce modèle sur des images 2D et plus précisément sur des images médicales, en modélisant le calcul de l'homologie qui aide à compter le nombre des caractéristiques ou invariants topologiques puis l'estimation de représentants pour les générateurs d'homologie pour des fins de localisation. Cette section d'implémentation qui est réalisée en Java est débutée par décrire les environnements matériels et logiciels. L'environnement de logiciels englobe le développement sous Eclipse et la programmation en langage JAVA.

2.1. Environnement de matériels :

Nous avons utilisé un ordinateur qui possède les caractéristiques suivantes :

- ❖ Processeur : 2.3 GHz.
- ❖ Disque dur : 465 Go.
- ❖ RAM : 2 Go.
- ❖ Carte graphique : 1090 MB.

2.2. Environnement de logiciels :

2.2.1. Environnement de développement Eclipse :

Eclipse IDE est un environnement de développement intégré libre (le terme Eclipse désigne également le projet correspondant, lancé par IBM) extensible, universel et polyvalent, permettant de créer des projets de développement mettant en œuvre n'importe quel

langage de programmation. Eclipse IDE est principalement écrit en Java (à l'aide de la bibliothèque graphique SWT d'IBM). Ce langage, est également utilisé pour écrire des extensions grâce à des bibliothèques spécifiques.

La spécificité d'Eclipse IDE vient du fait de son architecture totalement développée autour de la notion de plugin (en conformité avec la norme OSGi) : toutes les fonctionnalités de cet atelier logiciel sont développées en tant que plug-in [43]. La figure 4.1 présente la fenêtre de démarrage d'Eclipse IDE, version LUNA.



Figure 4.1 : Fenêtre de démarrage d'Eclipse IDE, version LUNA.

- **Architecture d'Eclipse :**

La base de cet environnement de développement intégré est la plateforme d'Eclipse qui est composée de :

- Platform Runtime qui démarre la plateforme et gère les plug-ins.
- SWT est la bibliothèque graphique de base de l'EDI.
- JFace est une bibliothèque graphique de plus haut niveau basée sur SWT.
- Eclipse Workbench qui est la dernière couche graphique permettant de manipuler des composants tels que des vues, des éditeurs, des perspectives... etc.

I.B.M. est à l'origine du développement d'Eclipse qui est d'ailleurs toujours le cœur de son outil Websphere Studio Workbench (WSW), lui-même à la base de la famille des derniers outils de développement en Java d'IBM. Tout le code d'Eclipse a été donné à la communauté

par IBM afin de poursuivre son développement. Eclipse utilise énormément le concept de modules nommés "plug-ins" dans son architecture. D'ailleurs, hormis le noyau de la plate-forme nommé "Runtime", tout le reste de la plate-forme est développé sous la forme de plug-ins. Ce concept permet de fournir un mécanisme pour l'extension de la plate-forme et ainsi fournir la possibilité à des tiers de développer des fonctionnalités qui ne sont pas fournies en standard par Eclipse. Les principaux modules fournis en standard avec Eclipse concernent Java mais des modules sont en cours de développement pour d'autres langages notamment C++, Cobol, mais aussi pour d'autres aspects du développement (base de données, conception avec UML, ...). Ils sont tous développés en Java soit par le projet Eclipse soit par des tiers commerciaux ou en open source. Les modules agissent sur des fichiers qui sont inclus dans l'espace de travail (Workspace). L'espace de travail regroupe les projets qui contiennent une arborescence de fichiers. Bien que développé en Java, les performances à l'exécution d'Eclipse sont très bonnes car il n'utilise pas Swing pour l'interface homme-machine mais un toolkit particulier nommé SWT associé à la bibliothèque JFace. SWT (Standard Widget Toolkit) qui est développé en Java par IBM en utilisant au maximum les composants natifs fournis par le système d'exploitation sous jacent. JFace utilise SWT et propose une API pour faciliter le développement d'interfaces graphiques. La plate-forme Eclipse est structurée autour de la notion de plug-ins. Plug-ins sont des faisceaux structurés de code et / ou des données qui contribuent à la fonctionnalité du système. Fonctionnalité peut être contribué sous la forme de bibliothèques de code (classes Java avec API publique), les extensions de la plate-forme, ou même documentation. Plug-ins peuvent définir des points d'extension, des lieux bien définis où d'autres plug-ins peuvent ajouter des fonctionnalités. Chaque sous-système dans la plate-forme est lui-même structuré comme un ensemble de plug-ins qui implémentent une fonction clé. Certains plug-ins ajoutent des fonctionnalités visibles à la plate-forme à l'aide du modèle d'extension. D'autres fournissent des bibliothèques de classes qui peuvent être utilisés pour mettre en œuvre des extensions de système.

Le SDK d'Eclipse comprend la plateforme de base plus deux outils principaux qui sont utiles pour le développement de plug-in. Les outils de développement Java (JDT) mettre en œuvre un environnement de développement Java très complet. Ces plug-ins Eclipse sont architecturés selon les recommandations d'OSGi. Ces outils ne servent pas seulement à des fins utiles, mais aussi de fournir un excellent exemple de la façon dont les nouveaux outils peuvent être ajoutés à la plate-forme en construisant des plug-ins qui étendent le système [43].

Pour plus de détails sur Eclipse IDE et ces points forts, vous référez à la référence [43]. La figure 4.2 présente la plateforme d'Eclipse IDE :

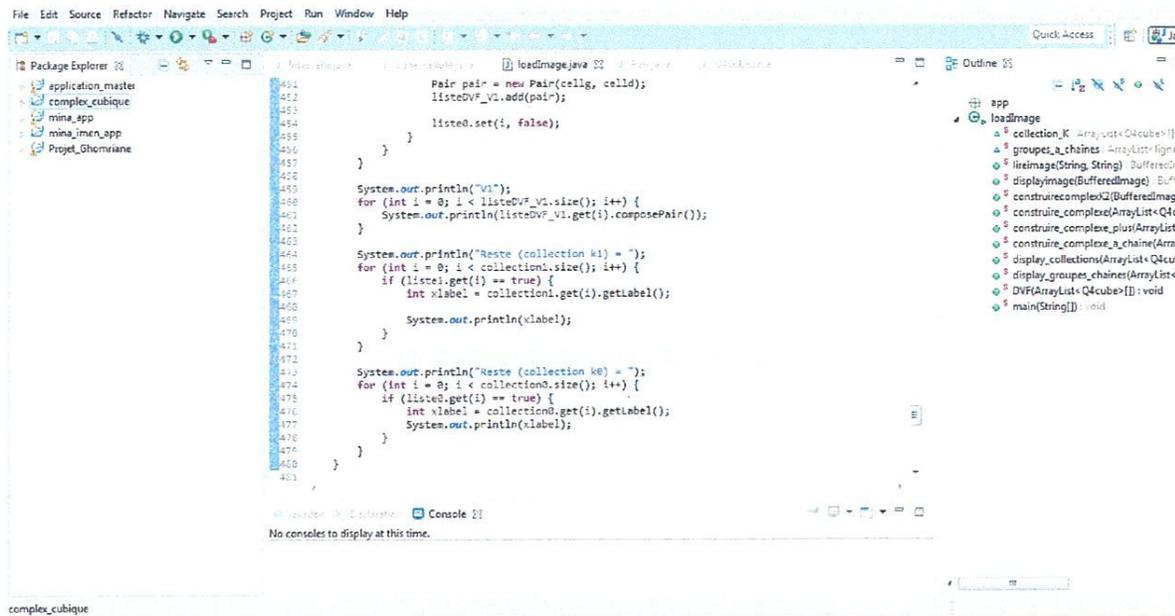


Figure 4.2 : La plateforme d'Eclipse IDE.

2.2.2. Présentation de JAVA :

JAVA est un langage de programmation développé par Sun Micro system. Il n'a que quelques années de vie (la première version date de 1995). Le système Java comporte plusieurs parties : un environnement, le langage, les interfaces de programmation d'application, et diverses bibliothèques de classes. Malgré la nouveauté de Java, il a réussi à intéresser et intrigues beaucoup de développeur à travers le monde, sa réputation est due aux principaux avantages qui sont :

1. C'est un langage orienté objet dérivé du C, mais plus simple que C++.
2. Il est multi-plateformes : tous vos programmes tournent sans modification sur toutes les plateformes où se trouve Java.
3. Il est d'une riche bibliothèque de classes, comprenant la gestion des interfaces graphiques (fenêtres, boîte de dialogue, contrôles, menus...), la programmation multithreads (multitâches), la gestion des exceptions, les accès aux fichiers et au réseau (notamment Internet),... etc [44].

2.3. Structure de code Java:

Le code implémenté pour notre modèle est décrit par un package composé de plusieurs classes Java. Chaque classe est caractérisée par ses propres attributs et méthodes (constructeurs inclus). Ces classes sont illustrées en ordre selon leurs importances :

- class Principal {
// Cette classe contient l'interface graphique du programme, elle est dotée de la méthode main().
} // Fin de la classe.
- Class Q4cube {
// Elle est caractérisée par les attributs publics suivants :
int qdim ; // La dimension du cube.
int qlabel; // Label (étiquetage) du cube.
int signe; // Le signe du cube.
Intervalle[] lesintervalles; //Les intervalles du cube.

// Et les méthodes suivantes :
public ArrayList<Q4cube> calculerFrontiereCube(lesintervalles) { // Cette méthode
// permet de calculer la frontière de chaque cube quelque soit sa dimension.
// Retour : objet ou chaîne de frontière de type ArrayList<Q4cube>}
} // Fin de la classe.
- Class Complexe_cubique {
// Attributs
int qdim ; // Dimension du complexe cubique.
ArrayList<Q4cube>[] collection_k=null ;
int signe ; // Le signe du complexe cubique.

// Méthodes
public Complexe_cubique(BufferedImage img) { // Constructeur paramétrique de la
// classe.}
public Complexe_cubique(int xdim, ArrayList<Q4Cube>[] xcollections) { // Deuxième
constructeur paramétrique de la classe.}
public Complexe_cubique(complexe_cubique cc) { // Constructeur par copiage de la
classe}
:
} // Fin de la classe.
- Class Complexe_chaines {
// Attributs
int qdim ; // Dimension du complexe à chaînes.
ArrayList<ligne_cellule>[] groupes_chaines = null ;

// Méthodes
public Complexe_chaines(ArrayList<Q4cube>[] xcollections) { // Premier
constructeur de la classe}
public Complexe_chaines(Complexe_chaines cch) { // Constructeur par copiage de la

```

    classe}
    public Complexe_chaines reduction_DVF(Complexe_chaines cch){ // Elle est destinée
    pour réduire le complexe à chaînes initial conjointement avec le schéma de DVF.
    // Retour : Complexe à chaînes réduit (objet)}
    public void localiser_cycles(){// Elle permet de localiser géométriquement les
    générateurs d'homologie de  $H_1$  ou qu'on appelle les 1-cycles directement sur le
    complexe cubique}
    :
} // Fin de la classe.

    • Class ligne_cellule { // Cette classe permet de générer la chaîne frontière d'une
    cellule. La chaîne et la cellule forment la ligne de cellule}
    //Attributs
    int cell;
    ArrayList<Integer> chaine_frontiere = null;
    :
} // Fin de la classe.

    • Class Pair { // Cette classe permet de définir les couples du DVF (cellg, celld).
    // Attributs
    int qdim; // Dimension du DVF.
    int cellg; // Cellule face.
    int celld; // Cellule parente ou cellule source
    :
} // Fin de la classe.

    • Class Intervalle {
    // attributs
    int premier_terme; // Premier terme ou limite de type entier de l'intervalle
    int deuxieme_terme; // Deuxième terme ou limite de type entier

    // Méthodes
    public ArrayList<Integer> calculerFrontiereIntervalle(){// Pour calculer la frontière de
    chaque intervalle.
    // Retour : liste de type ArrayList<Integer>}
    :
} // Fin de la classe

    • Class DVF {
    // Cette classe permet de calculer le DVF qui est ensemble de vecteurs.
    //Attributs
    int qdim ; // Dimension du DVF.
    ArrayList<Pair>[] collection_DVF = null;
    :
} // Fin de la classe.

```

3. Résultats expérimentaux :

Cette section est consacrée à donner les résultats de test pour valider ce modèle d'extraction des caractéristiques topologiques appliqué sur des images 2D et plus précisément sur des images médicales. Les résultats de test sont répartis en trois sous-sections (ou niveaux). La première sous-section illustre la construction d'un complexe cubique, la génération du complexe à chaînes et la génération d'un champ de vecteurs discrets associé dans trois tables pour une image 2D illustrée dans la figure 4.3. La deuxième sous-section est réservée au calcul des groupes d'homologie de la même image, les résultats de calcul sont mentionnés aussi dans une table. La sous-section 3 illustre la localisation visuelle des cycles d'homologie H_1 (ou les trous) pour quelques images de nature médicale.

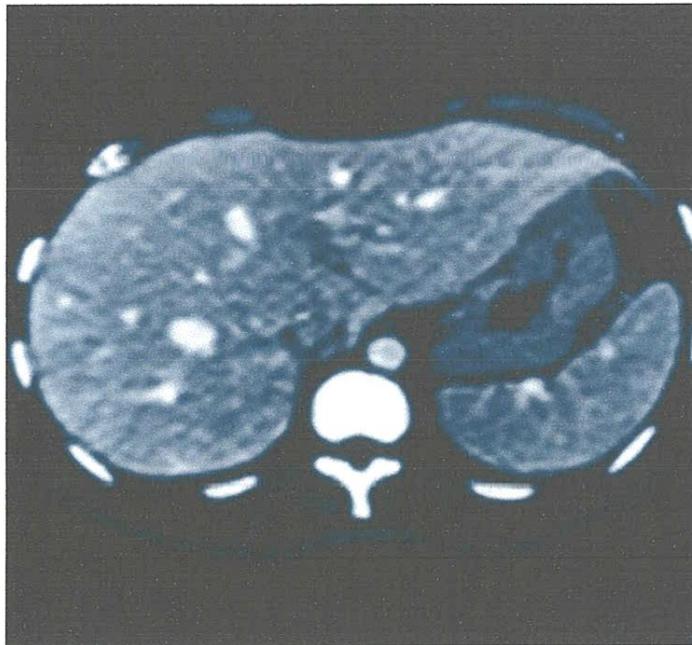


Figure 4.3 : Une image médicale 2D de niveau de gris de résolution 100x103.

3.1. Complexes cubique et à chaînes avec un champ de vecteurs associé :

Dimension	# Cubcs	# Cellules
0	6605	6605
1	12570	12570
2	5787	5787

Tableau 4.1 : Table pour la construction du complexe cubique et la génération du complexe à chaînes.

Vecteurs	V_1	V_2
# couples	6594	5787

Tableau 4.2 : Table d'un champ de vecteurs discrets admissible : deux vecteurs discrets.

3.2. Calcul d'homologie :

L'homologie calculée est appliquée sur l'image médicale de la figure 4.3. Le résultat est montrée dans le tableau 4.3, qui nous donne $H_0 \simeq \mathbb{Z}^2$ et $H_1 \simeq \mathbb{Z}^{189}$ et $H_2 = 0$ (groupe trivial).

Dimension q	Homologie H_q	Rang (H_q)
0	\mathbb{Z}^{11}	11
1	\mathbb{Z}^{189}	189
2	0	0

Tableau 4.3 : Résultats de calcul des groupes d'homologie et les rangs H_q .

3.3. Localisation des cycles d'homologie H_1 :

Image entrée	Localisation	#Composantes connexes	# trous
 Img_1		1	6
 Img_2		2	1

 Img_3		1	3
 Img_4		3	4
 Img_5		4	1
 Img_6		1	1

Tableau 4.4 : Localisation des cycles d'homologie H_1 .

Le tableau 4.4 montre à droite des localisations avec représentant visuel en couleur bleu de trous pour le groupe d'homologie H_1 des images médicales binaires de la deuxième colonne. Dans la troisième colonne, il y a le nombre de composantes connexes trouvé dans les images données. Enfin la quatrième colonne présente le nombre des trous existe dans les images entrées. Ces images sont extraites d'une base d'images médicales synthétiques de la collection de la chirurgie orthopédique.

4. Conclusion

Ce chapitre traite au premier lieu l'implémentation d'un modèle d'extraction des caractéristiques topologiques dans des images 2D, en particulier des images médicales.

L'extraction se résume principalement dans le calcul des groupes d'homologie et la localisation de ces générateurs qu'on appelle souvent les cycles d'homologie par des représentants plus visuels. L'approche adopte deux outils: l'homologie cubique et le champ des vecteurs discrets. Dans la deuxième partie, nous avons présenté les résultats expérimentaux sur des images de test 2D.

Conclusion générale

La théorie de l'homologie cubique et la théorie de Morse discrète ont été récemment utilisée dans une grande variété d'applications dans plusieurs domaines tels que les systèmes dynamiques, et le traitement et la reconnaissance d'images. Dans l'analyse d'image numérique, les caractéristiques topologiques sont utiles dans la description de la forme d'objets, l'indexation et la classification.

Comme l'homologie est un outil de la topologie algébrique qui traite et étudie les espaces topologiques et les fonctions continues entre ces espaces, on peut dire aussi, que l'homologie est un outil intéressant dans l'étude des systèmes, en particulier les systèmes concurrents, où le caractère non réversible du temps a un rôle important. La théorie de Morse discrète avec le champ des vecteurs discrets a été considérée comme un outil primordial en topologie computationnelle et discrète.

Dans notre approche, nous nous concentrons sur l'extraction des caractéristiques topologiques dans l'image et en particulier dans l'image médicale, en utilisant des outils de la topologie algébrique cités en haut. Le choix de l'application des concepts de la topologie algébrique sur des images médicales est du au nature de l'information topologique extraite de l'image médicale qui est visuelle, plus riche et plus significative, ce qui facilite la détection et le diagnostic des probables maladies et du aussi au problème de la taille flagrante qui caractérise ces images. Donc, nous réduisons l'image en conservant les caractéristiques topologiques. Notamment, nous nous concentrons sur l'homologie cubique qui est basée sur la réduction du complexe à chaînes associée à l'image en suivant un champ des vecteurs discrets, qui conduit au calcul de l'homologie.

Pour résumer, notre approche est conçue pour étudier les images 2D, puisque le support de cette dernière est considéré comme une grille 2D cubique. Comme nous l'avons expliqué précédemment, les groupes d'homologie mesurent la connectivité des espaces topologiques à haute dimension. Dans le cas des images 2D, les groupes d'homologie fournit à la fois le nombre des composantes connexes et des trous qui existent dans l'image.

Dans notre approche, nous avons conçu plusieurs routines pour notre algorithme, qui aboutissent à l'extraction des caractéristiques topologiques dans les images, principalement un routine pour la génération des complexes cubique et à chaînes, une deuxième pour la génération d'un champ des vecteurs discrets admissible et maximal et un troisième routine principal qui conduit à l'extraction des caractéristiques topologiques dans l'image 2D et particulièrement la localisation des cycles d'homologie groupe H_1 .

Conclusion générale

A la fin, on peut dire d'après des tests réalisés sur des images synthétiques et médicales que l'objectif de concevoir un modèle puissant d'extraction des caractéristiques topologiques qui donne des résultats satisfaisants est réalisé.

Références

- [1] A. Touzé, "Topologie Algébrique", janvier 2013.
- [2] S. Derivière, A. Trahan, T. Kaczynski, "Comment compter les trous dans une meule de fromage suisse : ou, l'homologie pour les gourmands", 2004, pp. 3-8.
- [3] M. Allili, K. Mischaikow, A. Tannenbaum, "Cubical homology and the topological classification of 2d and 3d imagery" , in: Proceedings of International Conference Image Processing, vol. 2, 2001, pp. 173–176.
- [4] T. K. Dey, H. Edelsbrunner, S. Guha, "Computational topology", In B. Chazelle, J. E. Goodman and R. Pollack, editors, Advances in Discrete and Computational Geometry, vol. 223 of Contemporary mathematics, AMS, 1999, pp.109–143.
- [5] R. Gonzales-Diaz, M. Jimenez, P. Real, "Extending the notion of atmodel for integer homology", Proceedings of the 15th International Workshop on Graph-based Representation for Pattern Recognition, vol. 4538 (3), 2007, pp. 330–339.
- [6] T. Kaczynski, K. Mischaikow, M. Mrozek, "Computational homology", Applied Mathematical Sciences, vol. 157, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [7] M. Niethammer, A. N. Stein, W. D. Kalies, P. Pilarczyk, K. Mischaikow, A. Tannenbaum, "Analysis of blood vessels topology by cubical homology", in: Proceedings of International Conference Image Processing, Vol. 2, 2002, pp. 969–972.
- [8] S. Peltier, A. Ion, Y. Haxhimusa, W. Kropatsch, G. Damiand, "Directly computing homology group generators of images using irregular graph pyramids", in: Proceedings of 6th IAPR International Workshop on Graph Based Representation in Pattern Recognition, Vol. 4538, 2007, pp. 283–294.
- [9] R. Gonzales-Diaz, P. Real, "Computation of Cohomology Operations on Finite Simplicial Complexes. Homology, Homotopy and Applications", vol. 5 (2), 2003, pp. 83–93.
- [10] H. Edelsbrunner, J. L. Harer, A. Zomorodian, "Hierarchical Morse complexes for piecewise linear 2-manifolds", In Symposium on Computational Geometry, pp. 70–79, 2001.
- [11] S. Peltier, S. Alayrangues, L. Fuchs, J. Olivier, "Computation of homology groups and generators", Université de Poitiers, Boulevard Marie et Pierre Curie, 2004.
- [12] M. Allili, D. Corriveau, "A Global Reduction Based Algorithm for Computing Homology of Chain Complexes", Department of Mathematics, Bishop's University, Sherbrooke, 2016.

Références

[44] J. Michel, "Développons en Java avec Eclipse v 0.80", 2007.

[45] J. Michel , "Développons en Java v 2.10", 2016.

[46] A. Romero and F. Sergeraert, "Discrete Vector Fields and Fundamental Algebraic Topology", 2010. <http://arxiv.org/abs/1005.5685v1>.