

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté Mathématiques, Informatique et Sciences de la Matière  
Département Mathématiques

# THÈSE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE  
DOCTORAT EN SCIENCE

Filière : Mathématiques

Présentée par

**Segni Sami**

*Intitulée*

**Amélioration des conditions d'existence et d'unicité pour les équations  
intégrales-différentielles de Volterra**

Soutenue le :

**Mr Med Zine AISSAOUI Prof**  
**Mr Hamza GUEBBAI M.C.A**  
**Mr Amar GUESMIA Prof**  
**Mr Fateh ELLAGGOUNE Prof**  
**Mr Messaoud MAOUNI M.C.A**  
**Mr Hakim LAKHEL M.C.A**

Devant le Jury composé de :

Univ. de Guelma Président  
Univ. de Guelma Rapporteur  
Univ. de Skikda Examineur  
Univ. de Guelma Examineur  
Univ. de Skikda Examineur  
Univ. de Skikda Examineur

**Année Universitaire : 2018/2019**

# *Remerciement*

Cette thèse de longue haleine est le fruit de plusieurs années de travail, enrichi d'une expérience scientifique qui n'aurait pas été concrétisée sans le savoir et le soutien de nombreux professeurs universitaires, qui m'ont permis d'arriver au bout de mes recherches.

Mes vifs remerciements vont tout d'abord à mon directeur de thèse Docteur Hamza GUEBBAI. Si j'ai mené cette thèse à terme, c'est grâce à lui. Il a su me transmettre sa motivation et son intérêt pour la recherche mathématique. Ses remarques et critiques pertinentes m'ont conduit vers le bon chemin.

Je tiens également à remercier le Professeur Med Zine AISSAOUI qui me fait l'honneur de présider le jury ainsi que les Professeurs Amar GAUSMIA et Fateh ELLAGGOUNE et les Docteurs Messaoud MAOUNI et Hakim LAKHEL d'avoir accepté de faire partie du jury et d'y consacrer une partie de leur temps.

Au cours de ces quatre années, j'ai bénéficié de très bonnes conditions de travail au sein du Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Modélisation (LMAM, Guelma) pour mener à bien ce projet. Un grand merci à tous les membres du Laboratoire LMAM.

Je termine ces lignes par remercier le docteur Mourad GHIAT qui m'a transmis les informations essentielles, la doctorante HAFIDIA Imane pour leurs aides.

# *Dédicace*

A la mémoire de mon cher papa qui m'a toujours soutenu et cru en moi,

A ma chère mère,

A ma femme et mes enfants Wassim et Açil,

A toute ma famille et amis pour leurs support et encouragement.

## **Résumé**

Dans cette thèse, nous construisons une nouvelle méthode pour approcher la solution d'une équation intégral-différentielle de Volterra. Les tests numériques montrent une grande efficacité, de plus, cette nouvelle méthode est plus précise et compatible avec l'équation intégral-différentielle de Volterra.

**Mots clés** : équation intégral-différentielle de Volterra, point fixe, équation non linéaire, méthode de Nystrom.

## ملخص

في هذه الأطروحة نقوم ببناء طريقة عددية لتقريب حل المعادلة التكاملية التفاضلية غير الخطية لفولتيرا. الأمثلة العددية أظهرت فعاليتها في الحل. هذه الطريقة الجديدة أكثر دقة و ملاءمة مع معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية غير الخطية.

**الكلمات المفتاحية** : معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية ، نقطة ثابتة ، معادلة غير خطية ، طريقة نيشتروم.

## **Abstracts**

In this thesis, we build a new numerical method to approximate the solution of Volterra's nonlinear intégro-differential equation. Numerical tests show its efficiency. This new method is more practical and compatible with nonlinear intégro-differential equation.

**Keywords:** Volterra integro-differential equation, Fixed point, Nonlinear equation , Nyström method.

Amélioration des conditions d'existence et  
d'unicité pour les équations  
intégré-différentielles de Volterra

**Segni Sami**

**Université 8 Mai 1945 Guelma**

29 octobre 2019





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Classification et Naissance des équations de Volterra</b>	<b>9</b>
1.1	Equations intégrales . . . . .	9
1.1.1	Linéarité . . . . .	10
1.1.2	limites d'intégration . . . . .	11
1.1.3	La fonction donnée . . . . .	12
1.1.4	Le coefficient . . . . .	12
1.2	Relation entre les EI et les Ed . . . . .	13
1.2.1	Equations de Volterra Vs Equations d'évolutions . . . . .	14
1.2.2	Opérateur de Volterra . . . . .	17
1.2.3	Propriétés spectrales . . . . .	18
1.2.4	Étude Numérique . . . . .	25
1.2.5	Résultats Numériques . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Equations Intégrales non linéaires de Volterra</b>	<b>43</b>
2.1	Position du problème . . . . .	43
2.2	Étude analytique . . . . .	45
2.2.1	Existence d'une solution locale . . . . .	48
2.2.2	Prolongement de la solution . . . . .	49
2.2.3	Unicité de la solution . . . . .	51

2.3	Étude numérique	52
2.3.1	Etude du système	54
2.4	Analyse de l'erreur	54
2.5	Tests Numériques	57
<b>3</b>	<b>Equations Intégro-différentielles</b>	<b>61</b>
3.1	Position du problème	61
3.2	Étude analytique	64
3.2.1	Existance de la solution	65
3.3	Étude numérique	66
3.3.1	Etude du système	67
3.4	Analyse de l'erreur	69
3.5	Tests Numériques	71
<b>4</b>	<b>Nouvelle méthode d'approximation pour l'équation intégro-différentielle non linéaire de Volterra</b>	<b>77</b>
4.1	Motivation	77
4.2	Approximations numériques	80
4.2.1	Etude du système	82
4.2.2	Etude de convergence	83
4.3	Résultats numériques	86

# Introduction

Depuis un siècle, il y'a dans le domaine des mathématiques numériques un grand intérêt porté sur l'étude des équations intégrales. Dans cette thèse, nous allons étudier sur le plan théorique et sur le plan numérique les équations intégrales de Volterra, plus précisément nous allons aborder les équations intégrales de Volterra, plus précisément nous allons aborder les équations intégrales de Volterra, plus précisément nous allons aborder les équations intégrales de Volterra, plus précisément nous allons aborder les équations intégrales de Volterra définies par la relation suivante,

$$u(t) = \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s))ds + f(t); \quad \forall t \in [a, b], \quad (1)$$

ou  $u$  est la fonction inconnue,  $K$  et  $f$  sont des fonctions données.

Ce type d'équations est issu de plusieurs modèles physiques, biologiques et chimiques [10, 17].

Nous allons organiser ce manuscrit comme suit, dans le chapitre, nous allons focaliser notre étude sur les classifications des équations linéaires de volterra, où nous donnons un rappel bibliographique sur les méthodes numériques utilisées pour approcher numériquement ces équations[10].

Dans le premier chapitre deux, nous allons aborder les équations non linéaires

de Volterra, définies sous la forme,

$$u(t) = \int_a^t K(t, s, u(s))ds + f(t); \quad \forall t \in [a, b], \quad (2)$$

ou  $u$  est fonction inconnue,  $K$  et  $f$  sont des données [8]. Nous allons étudier ce type d'équations analytiquement et numériquement. Autrement dit, nous allons fournir des conditions suffisantes vérifiées par  $K$  et  $f$ , qui nous garantissent l'existence et l'unicité de la solution, ensuite nous allons utiliser la méthode de Nystrome pour approcher la solution numériquement. A la fin de ce chapitre nous présentons plusieurs exemples qui confirment la robustesse de notre méthode .

Dans le chapitre trois, nous allons étudier l'équation de volterra défini par la relation (1), nous supposons que

$$(H1) \left\| \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\partial K}{\partial t} \in C([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2), \\ (2) \quad \exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t, s \in [a, b], \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ \max \left( |k(t, s, x, y)|, \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, x, y) \right| \right) \leq M. \end{array} \right.$$

Alors, sous ces conditions, nous allons montrer l'existence et l'unicité de la solution, ainsi que la solution approchée, par la méthode de Nystrome. A la fin de ce chapitre, nous fournissons quelques exemples numériques.

Dans le chapitre 4, qui représente les resultats essentiels de notre travail, voir[20] nous allons affaiblir certaines conditions sur le plan numérique. En effet, nous écrivons les équations (2) sous la forme :

$$u(t) = K(t, t, \int_a^t u(s)ds, u(t)) + \int_a^t K(t, s, \int_a^s u(s)ds, u(s))ds + f(t), \quad \forall t \in [a, b], \quad (1.1)$$

en appliquant la méthode de Nystrome à cette classe d'équations, nous montrons que contrairement à la méthode appliquée directement sur les équations (1),  $A < 1$  n'est plus nécessaire, à la fin de ce chapitre nous montrons la robustesse de notre méthode.



# Chapitre 1

## Classification et Naissance des équations de Volterra

Ce chapitre est consacré à la présentation et à la classification des équations intégrales [21, 11, 10]. Nous présentons une brève description des appellations et des propriétés des équations intégrales qui permettent au lecteur de bien les différencier dans la littérature mathématiques. Nous nous intéressons aux deux grandes branches de ce type d'équations.

### 1.1 Equations intégrales

Soit  $E$  un ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace Euclidien et  $X$  un espace de fonctions définies de  $E$  dans  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), supposé être un espace de Banach.

Une équation intégrale est un problème fonctionnel de la forme suivante :

$$\text{Trouver } u \in X; \quad \forall t \in E, \quad \lambda(t)u(t) = \int_F K(t, s, u(s))ds + f(t), \quad (1.1)$$

où,  $f$  une fonction dans  $X$ ,  $\lambda : E \rightarrow \mathbb{K}$  qui n'est pas nécessairement dans  $X$ .

La fonction  $K : E^2 \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  est appelée le noyau de l'équation.

La première constatation, qu'on obtient directement de cette forme générale est que la difficulté vient en premier lieu du noyau.

### 1.1.1 Linéarité

Selon la forme de notre noyau  $K$ , l'équation peut être linéaire ou non linéaire. Dans le cas particulier où le noyau s'écrit sous la forme [10] :

$$K(t, s, x) = k(t, s)x,$$

où,  $k : E^2 \rightarrow \mathbb{K}$ , notre équation devient linéaire et cette nouvelle fonction  $k$  sera son noyau.

Dans le cas où on ne peut pas séparer la troisième variable, notre équation est dite non linéaire et  $K$  tout entier définit son noyau.

Entre linéarité et non linéarité les études analytiques et numériques de notre équation sont totalement différentes.

Dans le cas linéaire, l'étude analytique est basée sur la théorie des opérateurs bornés, surtout l'étude du spectre et les notions de convergence des suites d'opérateurs [10, 17], cette dernière est utilisée dans les études numériques et les techniques de projections.

Par contre, pour le cas non linéaire est plus subtile, alors on applique les théorèmes de points fixes comme Schauder, Bannach et les méthodes de linéarisation comme Newton-Kantorovch.



### 1.1.2 limites d'intégration

Dans la littérature mathématiques et physique, on trouve deux grandes classes d'équations intégrales.

La première classe, concerne les équations intégrales de Fredholm [10, 11], ces équations sont caractérisées par la condition  $E = F$ , elles s'écrivent alors sous la forme suivante,

$$\forall t \in E, \quad \lambda(t)u(t) = \int_E K(t, s, u(s))ds + f(t).$$

Ce genre d'équations modélisent surtout des problèmes physiques dont lesquelles les conditions aux limites sont bien connues.

La deuxième classe définit les équations intégrales de Volterra [7, 21], elle se caractérise par le fait que  $F \subsetneq E$ , ou le domaine d'intégration dépend de la variable  $t$ , donc on a la forme suivante,

$$\forall t \in E, \quad \lambda(t)u(t) = \int_{F(t)} K(t, s, u(s))ds + f(t).$$

Ce genre d'équations modélisent surtout des problèmes à valeurs initiales. Pour mieux visualiser la différence entre ces deux classes d'équations, on prend  $E = [a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , les équations de Fredholm sont données sous la forme

$$\forall t \in [a, b]; \quad \lambda(t)u(t) = \int_a^b K(t, s, u(s))ds + f(t),$$

et celles de Volterra s'écrivent

$$\forall t \in [a, b]; \quad \lambda(t)u(t) = \int_a^t K(t, s, u(s))ds + f(t).$$

### 1.1.3 La fonction donnée

Si  $f \equiv 0$  notre équation intégrale est dite homogène, dans le cas contraire elle est dite non homogène.

Dans le cas où notre équation est à la fois linéaire et homogène, elle admet la solution triviale  $u \equiv 0$ . ce qui nous ramène à un problème spectrale d'un opérateur borné [14] :

$$\text{Trouver}(u, \lambda) \in X \setminus \{0\} \times \mathbb{C}, \quad Tu = \lambda u,$$

$$\forall t \in E, Tu(t) = \int_E k(t, s)u(s)ds.$$

### 1.1.4 Le coefficient

La fonction  $\lambda$  permet le contrôle de la notion du type ou l'espèce de notre équation intégrale, en anglais "Kind", on distingue alors trois types d'équation

Si  $\lambda \equiv 0$ , l'équation intégrale est dite de première espèce. Le cas le plus étudier est l'équation intégrale linéaire de Fredholm.

Pour le cas non linéaire les études n'étaient pas exhaustives Si  $\lambda(x) = \lambda$ , (ou  $\lambda$  est une constante), l'équation est dite de seconde espèce. Ce genre d'équations sont les plus traitées, on trouve un nombre important d'études qui traitent les types Fredholm et Volterra [10, 17] dans les cas linéaire ou non linéaire et les deux cas homogène et non homogène.

Si  $\lambda(x)$  est une fonction quelconque, on parle de la troisième espèce. Ce genre d'équations est récent, mais il est très intéressant des points de vue mathématiques et physique.

**Remarque 1.1.1** *Une équation intégrale est dite singulière, si l'une ou les deux limites de l'intégrale sont infinies, ou bien le noyau contient une singularité. Selon la régularité du noyau, on peut parler d'équations faiblement ou fortement singulières.*

Ainsi, l'équation  $u(t) = \int_a^{+\infty} e^{-ts}u(s)ds + t^2$ , représente une singularité de type borne d'intégration, et même que  $u(t) = 1 - \int_0^t \frac{u(s)}{\sqrt{t-s}}ds$  fournit un exemple de singularité faible.

## 1.2 Relation entre les EI et les Ed

Cette section est consacrée à l'étude des liaisons très étroites qui relient les équations intégrales aux équations différentielles. Nous remarquons que la plupart des problèmes scientifiques qui découlent de la dérivation. de la physique, la biologie, l'ingénering... sont représentés par des équation différentielles, car ces phénomènes sont étudiés du point de vue vitesse d'évolution, diffusion, accélération... qui sont des quantités issues généralement de la dérivation [17].

Par contre, le traitement numérique des équations intégrales est généralement plus stable, ce qui augmente l'intérêt de la transformation des équations différentielles en équations intégrales.

En plus, le cadre fonctionnel des équations intégrales est généralement plus faible, comparé à celui des équations différentielles, ce qui rend leur études plus bénéfique au modèle qui les engendre.

### 1.2.1 Equations de Volterra Vs Equations d'évolutions

Historiquement les équations intégrales de Volterra sont nées à partir des problèmes d'évolutions proie-prédateur, qui sont des systèmes dynamiques qui étudient l'évolution du nombre des proies et celui des prédateurs, dans un système écologique clôt. Ce système a été transformé par Lotka Volterra en des équations intégrales qui portent son nom [17, 4].

Dans ce manuscrit, nous choisissons une approche plus mathématiques et moins modélisation biologique, pour permettre à notre éventuel lecteur une introduction plus rapide et plus facile de cette classe équations.

Soit  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

On définit le problème de Cauchy suivant :

Trouver  $y \in C^1([a, b])$  tel que ;

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)), & \forall t \in ]a, b[ \\ y(a) = y_0, & y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Une simple intégration sur  $[a, s]; s \in [a, b]$  de la première partie du problème précédent nous donne

$$\begin{aligned} y'(t) = f(t, y(t)) &\Leftrightarrow \forall s \in [a, b]; \quad \int_a^s y'(t) = \int_a^s f(t, y(t)), \\ &\Leftrightarrow y(s) = \int_0^t f(s, y(s))ds + y_0. \end{aligned}$$

Cette approche nous permet de soupçonner un lien entre les équation d'évolution (systèmes dynamique en générale) et les équations intégrales de Volterra.

Nous remarquons qu'on peut affaiblir la condition de continuité exigée à la base sur  $f$  par vision de Cauchy et la remplacer par  $f$  mesurable seulement

### Réduction du problème à valeurs initiales à une équation de Volterra

La proposition suivante représente une généralisation du calcul précédent.

**Proposition 1.2.1** *Soit l'équation différentielle ordinaire d'ordre  $n$ ,*

$$\forall s \in [a, b], \quad y^{(n)}(s) + A_1(s)y^{(n-1)}(s) + \dots + A_{n-1}(s)y'(s) + A_n(s)y = H(s, y(s)), \quad (1.3)$$

*avec comme conditions initiales ( $n$  valeurs initiales)*

$$y(a) = q_0, y'(a) = q_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = q_{n-1} \quad (1.4)$$

*telles que les fonctions  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont définies et continues sur  $[a, b]$  et  $f$  est définie comme précédent.*

*Alors (1.3)-(1.4) est équivalent à l'équation de Volterra de deuxième espèce*

$$g(s) = f(s) + \int_a^s K(s, t)g(t)dt$$

où

$$K(s, t) = - \sum_{k=1}^n A_k(s) \frac{(s-t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$f(s) = H(s, y(s)) - q_{n-1}A_1(s) - [(s-a)q_{n-1} + q_{n-2}]A_2(s) - \dots - \left\{ \left[ \frac{(s-a)^{n-1}}{(n-1)!} \right] q_{n-1} + \dots + (s-a)q_1 + q_0 \right\} \times A_n(s),$$

**Preuve** En posant

$$y^{(n)}(s) = g(s) \quad (1.5)$$

on obtient

$$y^{(n-1)}(s) = \int_a^s g(t)dt + q_{n-1},$$

$$y^{(n-2)}(s) = \int_a^s (s-t)g(t)dt + (s-a)q_{n-1} + q_{n-2},$$

et donc par l'identité

$$\int_a^s \int_a^{s_1} \dots \int_a^{s_{n-1}} \int_a^{s_n} H(s_1, y(s_1)) ds_1 ds_2 \dots ds_{n-1} ds_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^s (s-t)^{n-1} H(t, y(t)) dt \quad (1.6)$$

on obtient

$$y'(s) = \int_a^s \frac{(s-t)^{n-2}}{(n-2)!} g(t)dt + \frac{(s-a)^{n-3}}{(n-3)!} q_{n-3} + \dots + (s-a)q_2 + q_1$$

d'où

$$y = \int_a^s \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} g(t)dt + \frac{(s-a)^{n-1}}{(n-1)!} q_{n-1} + \frac{(s-a)^{n-2}}{(n-2)!} q_{n-2} + \dots + (s-a)q_1 + q_0 \quad (1.7)$$

En multipliant les relations (1.5) et (1.6) par  $A_1(s)$ ,  $A_2(s)$  et en additionnant, on retrouve le problème aux valeurs initiales défini par (1.4)-(1.5) et en posant

$$K(s, t) = - \sum_{k=1}^n A_k(s) \frac{(s-t)^{k-1}}{(k-1)!}, \text{ et}$$

$$f(s) = H(s, y(s)) - q_{n-1}A_1(s) - [(s-a)q_{n-1} + q_{n-2}]A_2(s)$$

$$- \dots - \left\{ \left[ \frac{(s-a)^{n-1}}{(n-1)!} \right] q_{n-1} + \dots + (s-a)q_1 + q_0 \right\} \times A_n(s),$$

on obtient l'équation de Volterra désirée

**Exemple**

Pour  $n = 2$ , nous considérons l'équations différentielles ordinaires non linéaires

$$y''(s) = F(s, y(s)),$$

avec les conditions initiales

$$y(a) = q_0, \quad y'(a) = q_1$$

telles que  $F$  est une fonction continue. En intégrant  $a$  jusqu'à  $s$  nous obtenons

$$y'(s) - q_1 = \int_a^s F(s_1, y(s_1)) ds_1,$$

En faisant une deuxième intégration, nous obtenons

$$y(s) = q_0 + (s - a)q_1 + \int_a^s \left( \int_a^{s_1} F(s_2, y(s_2)) ds_2 \right) ds_1.$$

En utilisant l'identité,

$$\int_a^s \int_a^{s_1} F(s_2, y(s_2)) ds_2 ds_1 = \int_a^s (s - s_1) F(s_1, y(s_1)) ds_1$$

nous obtenons l'équation non linéaire suivante

$$y(s) = \int_a^s (s - t) F(t, y(t)) ds + g(s)$$

où,  $g(s) = q_0 + (s - a)q_1$  Cette équation est de Volterra de seconde espèce.

### 1.2.2 Opérateur de Volterra

Nous choisissons de commencer par l'étude de l'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce, puisqu'elle représente la meilleur approche pour l'équation intégral-différentielle non linéaire de Volterra de seconde espèce, qui est le sujet de recherche de cette thèse [17, 14, 18].

En plus, cette équation nous permet de présenter une autre façade de l'étude analytique de ce genre d'équation à savoir, la théorie des opérateurs et la théorie spectrale de ces derniers.

Pour cela, soit  $k = [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continu, on définit l'opérateur de Volterra suivant :

$$\forall x \in C^0([a, b]); \quad \forall t \in [a, b], \quad Kx(t) = \int_a^t k(t, s)x(s)ds.$$

Nous allons chercher les propriétés spectrales de cet opérateur dans le but d'étudier l'existence et l'unicité de  $u$  vérifiant l'équation suivante,

$$\forall t \in [a, b], \quad \lambda u(t) = \int_a^t k(t, s)u(s)ds + f(t), \quad (1.8)$$

où,  $\lambda \neq 0$  et  $f \in C^0([a, b])$ .

### 1.2.3 Propriétés spectrales

Nous rappelons qu'un opérateur est une application linéaire entre deux espaces de Bannach. Dans notre travail, nous considérons le cas des endomorphismes c-à-d les opérateurs de la forme :

$$\begin{aligned} T : X &\rightarrow X \\ x &\rightarrow Tx \end{aligned}$$

vérifiant  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall x, y \in X$  un espace de Bannach, muni de la norme  $\|\cdot\|_X$

$$T(\lambda x + y) = \lambda Tx + Ty.$$

En plus, ils doivent être bornés pour la norme d'opérateurs suivante,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_X.$$



L'espace de tout ces opérateurs est noté  $BL(X)$  [18, 14, 5, 11].

**Théorème 1.2.1**  $BL(X)$  est un espace de Bannach.

**Preuve** Supposons que  $\{T_n\}_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy dans  $BL(X)$ , alors,  $\{T_n u\}_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach  $X$ , pour tout  $u \in X$ ,

$$\|T_n u - T_m u\| \leq \|T_n - T_m\| \|u\| \rightarrow 0.$$

Puisque  $X$  est complet, il existe  $v \in X$  tel que  $T_n u \rightarrow v$ . Nous définissons un opérateur  $T$  par  $v = Tu$ .

On remarque que  $T$  est linéaire et borné de sorte que  $T \in BL(X)$  et que

$$\|T_n - T\| \rightarrow 0$$

Pour étudier ce genre d'opérateur, nous avons besoins du théorème suivant qui est due à Neumann,

**Théorème 1.2.2** Soit  $T \in BL(X)$  tq  $\|T\| < 1$ , alors  $(I - T)^{-1}$  existe et vérifie,

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}. \quad (1.9)$$

**Preuve** Soit  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $BL(X)$ , définie par :

$$S_n = \sum_{i=0}^n T^i, \quad n \geq 0$$

avec,  $T^0 = I$ . On a,

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} T^i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \|T^i\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \|T\|^i,$$

d'où

$$\|S_{n+p} - S_n\| \leq \frac{\|T\|^{n+1}}{1 - \|T\|}$$

Par conséquent, on a,

$$\sup_{p \geq 1} \|S_{n+p} - S_n\| \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty.$$

Donc la suite  $(S_n)$  est une suite de Cauchy dans l'espace complet  $BL(X)$ , alors, il existe  $S \in BL(X)$  tel que

$$\|S_n - S\| \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty.$$

On remarque aussi que,

$$(I - T)S_n = S_n(I - T) = I - T^{n+1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(I - T) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - T)S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - T^{n+1}),$$

$$\|(I - T^{n+1}) - I\| = \|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty.$$

Ce qui donne,

$$(I - T)S = S(I - T) = I.$$

ainsi, l'opérateur  $(I - T)$  est inversible et on a

$$S = (I - T)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} T^i.$$

Il reste à montrer (1.2). Nous avons,

$$\|S_n\| = \left\| \sum_{i=0}^n T^i \right\| \leq \sum_{i=0}^n \|T\|^i \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

donc,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\| = \|S\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|},$$

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Cette version du théorème est la version facile. Pour présenter la version complète nous avons besoin de la notion du rayon spectrale d'un opérateur. Pour  $T \in BL(X)$ , on définit  $\rho(T)$  par

$$\rho(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

La version complète du théorème de Neumann est donnée par le théorème suivante [14]

**Théorème 1.2.3**  $\rho(T) < 1$  si et seulement si  $(I - T)^{-1}$  existe et borné.

Nous allons appliquer ces notions sur notre opérateur intégrale de Volterra  $K$ , et nous commençons par le calcul de son rayon spectral, pour  $\|x\|_X = 1$ , on a,

$$\forall t \in [a, b]; \quad |K(x(t))| = \left| \int_a^t k(t, s)x(s)ds \right| \leq (t - a)M,$$

avec,  $M = \max_{a \leq t, s \leq b} |k(t, s)|$  et

$$\forall t \in [a, b], \quad |K^2(x(t))| \leq M \left| \int_a^t (s - a)ds \right| \leq \frac{M}{2!}(t - a)^2,$$

Par induction, on obtient

$$\forall t \in [a, b], \quad |K^n(x(t))| \leq \frac{M}{n!}(t - a)^n.$$

donc,

$$\|K^n\| \leq \frac{M}{n!}(b - a)^n \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|K^n\|} = 0.$$

ce qui implique que  $\rho(K) = 0$ .

**Proposition 1.2.2** *Pour tout  $\lambda \neq 0$ , l'équation intégrale*

$$\lambda u = Ku + f,$$

*admet une unique solution.*

**Preuve** Pour étudier l'inversibilité de l'opérateur  $(\lambda - K)$ , on a,

$$\rho(K) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|K^n\|},$$

où  $\|K^n\| \leq \frac{c}{n!}$ ,

alors, nous avons

$$|\rho(K)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|K^n\|} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{c}{n!}\right)^n = 0.$$

Ainsi, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , nous avons  $|\lambda| > \rho(T)$ , ce qui implique directement que  $(\lambda - K)$  est un opérateur inversible.

Nous nous intéressons maintenant à la qualité de cet opérateur inverse  $(\lambda - k)^{-1}$ , nous voulons comprendre sa forme ainsi que son type.

Pour cela, nous reprenons la démonstration du théorème de Neumann pour comprendre que pour  $|\lambda| > \rho(T)$ . Dans notre cas  $\lambda \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} (\lambda - k)^{-1} &= \frac{1}{\lambda} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^p} k^p \\ &= \frac{1}{\lambda} I + \frac{1}{\lambda^2} K + \frac{1}{\lambda^3} K^2 + \dots \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que la solution est donnée par

$$\begin{aligned} u &= (\lambda - k)^{-1} f = \frac{1}{\lambda} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^p} k^p f \\ &= \frac{1}{\lambda} \varphi_0 + \frac{1}{\lambda^2} \varphi_1 + \frac{1}{\lambda^3} \varphi_2 + \dots \end{aligned}$$

où,  $\{\varphi_p\}_{p \geq 0}$  est une suite de  $X$  définie par,

$$\begin{cases} \varphi_0 = f \\ \varphi_{p+1} = K\varphi_p; \quad p \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= f(t) \\ \varphi_1(t) &= \int_0^t k(t, s)g(s)ds, \end{aligned}$$

$$\varphi_2(t) = \int_a^t k(t, s)\varphi_1(s)ds = \int_a^t k(t, s) \int_a^s k(s, \tau)f(\tau)d\tau ds$$

puisque  $k$  et  $f$  sont continus, l'ordre d'intégration peut être interchangé et on obtient

$$\varphi_2(t) = \int_a^t \int_\tau^t k(t, s)k(s, \tau)ds g(\tau)d\tau = \int_a^t k_2(t, \tau)f(\tau)d\tau$$

où,

$$k_2(t, \tau) = \int_\tau^t k(t, s)k(s, \tau)ds.$$

Un résultat similaire est valable pour les autres  $\varphi_p(t)$  et il s'ensuit immédiatement par induction que

$$\varphi_p(t) = \int_a^t k_n(t, s)f(s)ds, \quad (1.10)$$

où,

$$\begin{cases} k_1(t, s) = k(t, s) \\ k_p(t, s) = \int_s^t k(t, \tau)k_{p-1}(\tau, s)d\tau; \quad p \geq 1 \end{cases}$$

Les  $k_p$  sont appelés les noyaux itérés et ils vérifient,

$$\forall p \geq 1; \quad |k_p(t, s)| \leq \frac{M^p(t-s)^{p-1}}{(p-1)!}. \quad (1.11)$$

Cela est obtenue immédiatement par récurrence de (1.11). Donc, la fonction

$$\Gamma(t, s) = \sum_{p=1}^{\infty} k_p(t, s) \quad (1.12)$$

est uniformément convergente pour  $a \leq s \leq t \leq b$ , elle définit le noyau résolvant pour  $k(t, s)$ .

**Théorème 1.2.4** *Si  $k$  et  $f$  sont continues, alors la solution continue et unique de (1.8) est donnée par*

$$\forall t \in [a, b]; \quad u(t) = f(t) + \int_a^t \Gamma(t, s)f(s)ds, \quad (1.13)$$

**Preuve** Dans

$$\int_a^t \Gamma(t, s)f(s)ds = \int_a^t \sum_{p=1}^{\infty} k_p(t, s)ds$$

l'ordre d'intégration et la sommation peuvent être interchangés, donc

$$\begin{aligned} \int_a^t \Gamma(t, s)f(s)ds &= \sum_{p=1}^{\infty} \int_a^t k_p(t, s)ds \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(t, s) = u(t) - f(t), \end{aligned}$$

Ainsi, Le noyau résolvant lui-même peut être exprimé comme la solution d'une équation intégrale [17].

**Théorème 1.2.5** *Sous les hypothèses du théorème 1.2.4, le noyau résolvant  $\Gamma(t, s)$  vérifie l'équation*

$$\Gamma(t, s) = k(t, s) + \int_s^t k(t, \tau)\Gamma(\tau, s)d\tau \quad 0 \leq s \leq t \leq T. \quad (1.14)$$

**Preuve** En utilisant (1.12), nous constatons que

$$\begin{aligned} \int_s^t k(t, \tau)\Gamma(\tau, s)d\tau &= \int_s^t k(t, \tau) \sum_{i=1}^{\infty} k_i(\tau, s)d\tau \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_s^t k(t, \tau)k_i(\tau, s)d\tau \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} k_{i+1}(t, s) \\ &= \Gamma(t, s) - k(t, s) \end{aligned}$$

### 1.2.4 Étude Numérique

Ce que nous remarquons des deux derniers théorèmes est que la solution analytique obtenue par l'approche spectrale de la théorie des opérateurs est inexploitable dans la pratique, puisque déterminer le noyau  $\Gamma$  revient exactement à résoudre l'équation elle-même [9, 7, 10, 11].

Pour cela, dans la pratique il faut construire des méthodes numériques adéquates qui permettent l'approximation de la solution unique  $u$ . Notre travail dans cette thèse concerne l'application de méthode numérique dite de Nyström.

Nous reprenons la même équation intégrale à savoir,

$$\text{Trouver } u \in C^0([a, b]); \quad \forall t \in [a, b], \quad \lambda u(t) = \int_a^t k(t, s)u(s)ds + f(t). \quad (1.15)$$

Nous définissons une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$  par,

$$\text{pour } n \geq 2; \quad h = \frac{b-a}{n}; \quad t_j = a + jh, \quad 0 \leq j \leq n.$$

ce qui donne :

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

On se donne une formule d'intégration numérique définie pour toute fonction  $\varphi \in C^0([a, b])$  par,

$$\int_a^b \varphi(t)dt \approx h \sum_{j=0}^n w_j \varphi(t_j),$$

où, les poids  $\{w_j\}_{j=0}^n$  sont supposés vérifier les conditions suivantes,

$$\sup_{n \geq 1} \max_{0 \leq i \leq n} |w_j| = W < +\infty$$

$$\forall \varphi \in C^0([a, b]), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_a^b \varphi(t) dt - h \sum_{j=0}^n w_j \varphi(t_j) \right| = 0$$

Pour tout  $0 \leq i \leq n$ , on fixe  $t = t_i$  dans notre équation ce qui donne

$$\lambda u(t_i) = \int_a^{t_i} k(t_i, s) u(s) ds + f(t_i).$$

La méthode de Nyström consiste à remplacer l'intégrale

$$\int_a^{t_i} k(t_i, s) u(s) ds,$$

par une approximation obtenue à partir de la formule d'intégration numérique, ce qui donne le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} u_0 = \frac{1}{\lambda} f(t_0) \\ u_i = \frac{1}{\lambda - h w_j k(t_i, t_i)} \left[ f(t_i) + h \sum_{j=1}^{i-1} w_j k(t_i, t_j) u_j \right] \end{cases}$$

où, les  $u_i$  sont censées approcher les  $u(t_i)$ .

Nous remarquons que l'existence et l'unicité de solution  $\{u_i\}_{i=0}^n$  du système (S) dépend des quantités  $\{\lambda - h w_j k(t_i, t_i)\}_{i=1}^n$ , qui doivent être non nuls .

On a

$$|\lambda - h w_j k(t_i, t_j)| \leq |\lambda| - h W M,$$

ce qui implique

$$|\lambda - h w_j k(t_i, t_j)| \geq |\lambda| - |h w_j k(t_i, t_j)|$$



donc, pour  $h$  assez petit  $|\lambda| - hWM \geq 0$

Maintenant nous allons démontrer que la méthode numérique, construite précédemment, converge vers la solution exacte de l'équation. Pour cela, on définit les quantités

$$\varepsilon_i = u_i - u(t_i), \quad 0 \leq i \leq n$$

On dit que la méthode est convergente si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i| \right) = 0$$

Soit  $u$  est une solution de (1.15), alors la fonction

$$\delta_n(h, t_i) = \int_a^{t_i} k(t_i, s)u(s)ds - h \sum_{j=0}^i w_j k(t_i, t_j)u(t_j)$$

est appelée l'erreur de la consistance locale pour (1.15).

La méthode d'approximation est dite consistente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \max_{0 < i < n} |\delta_n(h, t_i)| \right) = 0.$$

Nous avons besoin de rappeler un lemme très important [17]

**Lemme 1.2.1** *Soit la suite  $\varphi_0, \varphi_1, \dots$  vérifiant*

$$|\varphi_n| \leq A \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi_i| + B_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

où,

$$A > 0, \quad |B_n| \leq B, \quad \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi_i| \leq \eta,$$

alors,  $|\varphi_n| \leq (1 + A)^{n-1} B, \quad n \geq 1$

**Preuve** Pour  $n = 1$

$$|\varphi_1| \leq A |\varphi_0| + B_1$$

et,

$$A > 0, \quad |B_1| \leq B,$$

ce qui implique que

$$|\varphi_1| \leq B \quad n = 1, 2, \dots$$

$n \Rightarrow n + 1$

supposons que

$$|\varphi_n| \leq A \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi_i| + B_n, \quad n \geq 1$$

où,

$$A > 0, \quad |B_n| \leq B,$$

$$|\varphi_n| \leq (1 + A)^{n-1} B, \quad n \geq 1$$

On montre que

$$|\varphi_{n+1}| \leq A \sum_{i=0}^n |\varphi_i| + B_{n+1},$$

où,

$$A > 0, \quad |B_{n+1}| \leq B,$$

$$|\varphi_{n+1}| \leq (1 + A)^n B, \quad n \geq 1$$

On a

$$\begin{aligned}
|\varphi_{n+1}| &\leq A \sum_{i=0}^n |\varphi_i| + B_{n+1} = A \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi_i| + A |\varphi_n| + B_{n+1} \\
&\leq (A(1+A)^0 B + A(1+A)^1 B + \dots + A(1+A)^{n-2} B) + A(1+A)^{n-1} B + B \\
&\leq AB \frac{(1+A)^n - 1}{1+A-1} + B \\
&\leq B[(1+A)^n - 1] + B \\
&\leq B(1+A)^n - B + B \\
&\leq (1+A)^n B
\end{aligned}$$

Donc,  $\forall n \geq 1 \quad |\varphi_n| \leq (1+A)^{n-1} B$

À partir de ce lemme, nous pouvons assurer la convergence de notre méthode selon le théorème suivant [17]

**Théorème 1.2.6** *Si la méthode d'approximation est consistante, alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \max_{0 < i < n} |\varepsilon_i| \right) = 0.$$

**Preuve**

$$\begin{aligned}
\lambda \varepsilon_i &= h \sum_{j=0}^i w_j k(t_i, t_j) (u_j - u(t_j)) - \delta_{in}(u) \\
\lambda \varepsilon_i &= h \sum_{j=0}^i w_j k(t_i, t_j) \varepsilon_j - \delta_{in}(u) \\
|\lambda| |\varepsilon_j| &\leq hWK \sum_{j=0}^i |\varepsilon_j| + |\delta_n(u)|
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{hWK}{|\lambda| - hWK} \sum_{j=0}^{i-1} |\varepsilon_j| + \frac{|\delta_n(u)|}{|\lambda| - hWK}$$

En appliquant le lemme(1.2.1) , on obtient.

$$|\varepsilon_i| \leq \left(1 + \frac{hWK}{|\lambda| - hWK}\right)^{i-1} \frac{|\delta_n(u)|}{|\lambda| - hWK}$$

mais,

$$\begin{aligned} (|\lambda| - hWL)^{-i} &= \left(|\lambda| - \frac{(b-a)WL}{n}\right)^{-i} \\ &\leq \left(|\lambda| - \frac{(b-a)WL}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{(b-a)WL} \end{aligned}$$

Donc,  $\exists \alpha > 0$  tel que , pour tout  $0 \leq i \leq n$

$$(|\lambda| - hWL)^{-i} \leq \alpha$$

ce qui donne le résultat souhaité

## 1.2.5 Résultats Numériques

**Exemple 1.2.1** *Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra définie comme suit*

$$u(t) = \log\left(\frac{1+t}{1+t+t^2}\right) + 2t + \int_0^t \frac{u(s)}{1+t+s^2} ds, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1$$

$$K(t, s) = \frac{1}{1+t+s^2} \quad 0 \leq s \leq t \leq 1,$$

$$f(t) = \log\left(\frac{1+t}{1+t+t^2}\right) + 2t \quad 0 \leq t \leq 1,$$

*L'équation admet la solution continue exacte,*

$$u(t) = 2t.$$

Nous appliquons la méthode des **Trapèzes**, pour cela nous définissons les poids comme suit,

$$w_1 = \frac{h}{2}, w_n = \frac{h}{2}, w_i = h \quad 2 \leq i \leq n - 1$$

Le tableau suivant donne, une estimation de l'erreur entre les solutions exacte et approchée donnée par  $\max_{1 \leq i \leq N} |u_i - u(t_i)|$

$N$	$\max_{1 \leq i \leq N}  u_i - u(t_i) $
10	4.532845729298596e-002
50	9.197300943219355e-003
100	4.605347183947783e-003
200	2.304289360356648e-003
500	9.220961718150456e-004
1000	4.611108823791010e-004
5000	9.223218031362279e-005
10000	4.611671403398354e-005

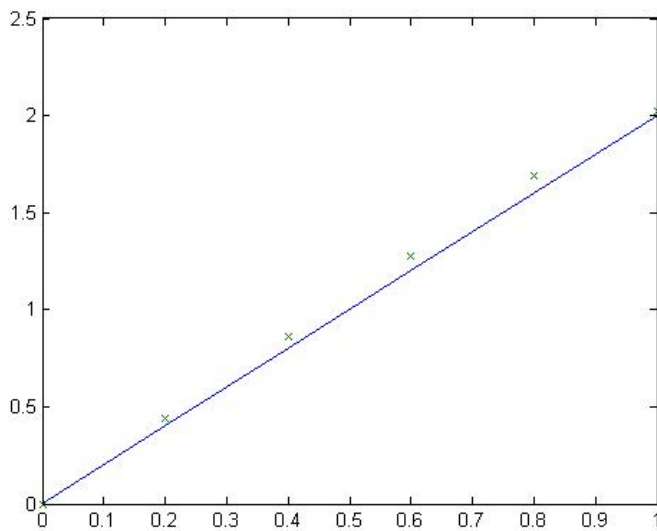


FIGURE 1.1 – Solution exact Vs. Solution approchée avec  $n=5$ .

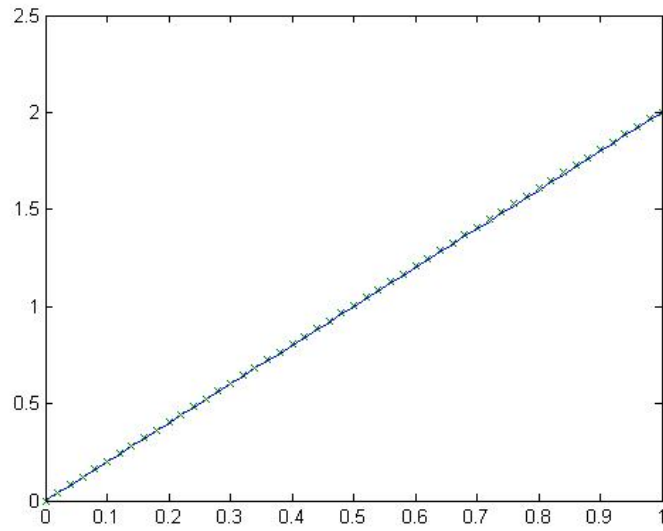
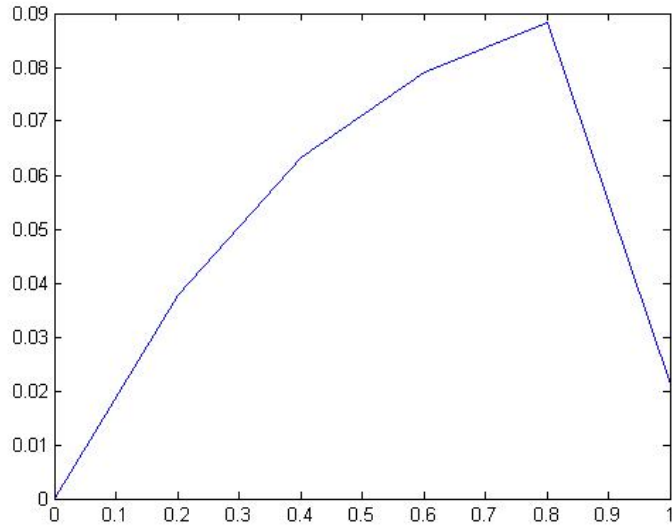
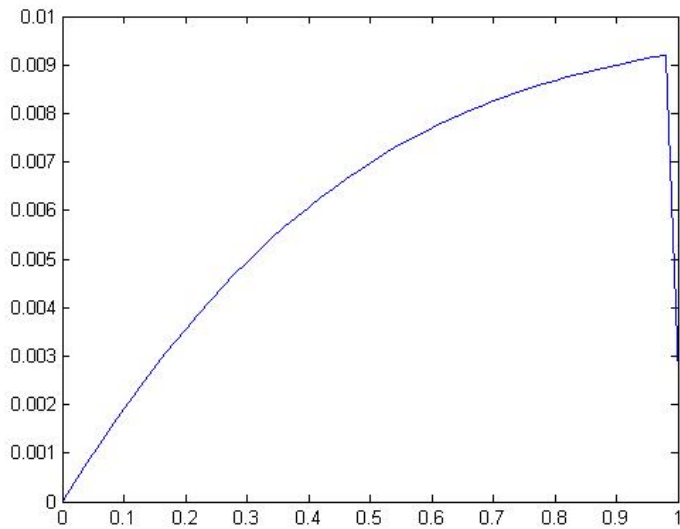


FIGURE 1.2 – Solution exact Vs. Solution approchée avec  $n=50$

FIGURE 1.3 – l'erreur de l'interpolation du Trapèze avec  $n=5$ FIGURE 1.4 – l'erreur de l'interpolation du Trapèze avec  $n=50$

Nous appliquons la méthode de **Simpson**

nous définissons les poids :

$$\text{pour } w_1 = w_n = \frac{h}{3}$$

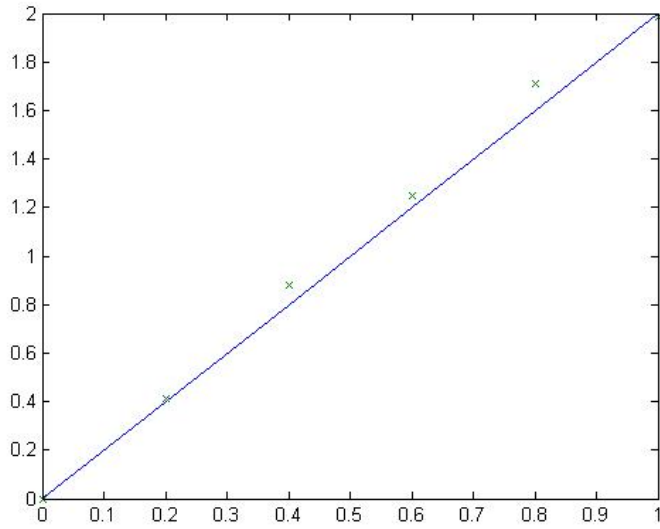
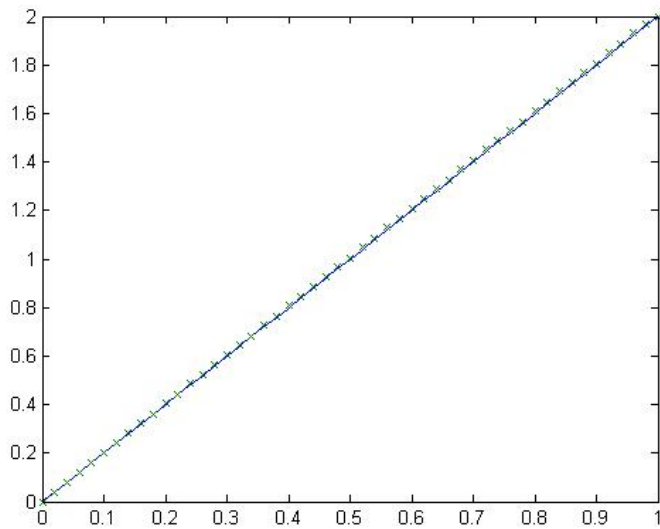
$$\text{pour } 2 \leq i \leq n - 1$$

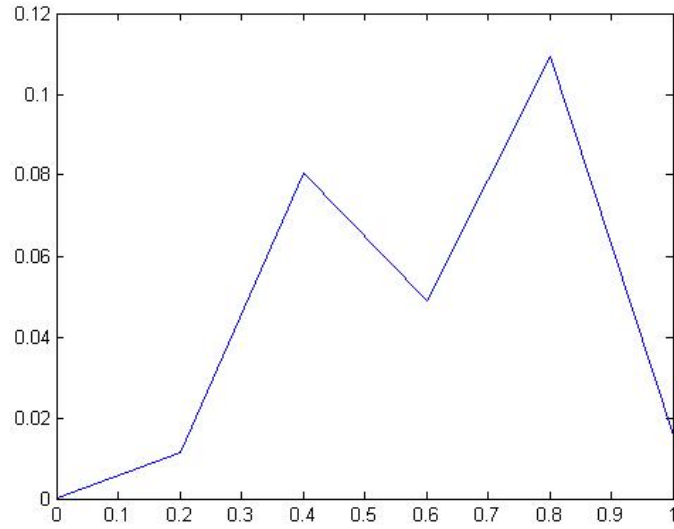
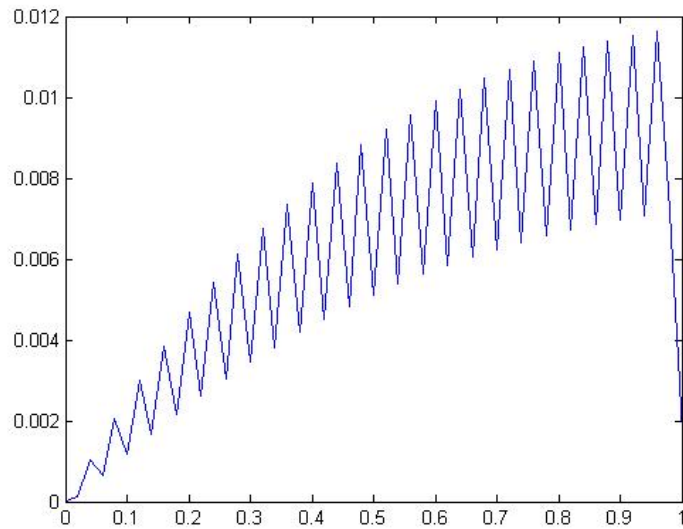
$$w_i = \begin{cases} \frac{2h}{3} & \text{si } i \text{ pair} \\ \frac{4h}{3} & \text{si } i \text{ impair} \end{cases}$$

Le tableau suivant donne, une estimation de l'erreur entre les deux solutions, exacte et approchée

$N$	$\max_{1 \leq i \leq N}  u_i - u(t_i) $
10	5.534765400003949e-002
50	1.162894658213576e-002
100	5.840531694080164e-003
200	2.926459217633681e-003
500	1.172030060499374e-003
1000	5.862528003288681e-004
5000	1.172883679190218e-004
10000	5.864653961551447e-005



FIGURE 1.5 – Solution exact Vs. Solution approchée avec  $n=5$ .FIGURE 1.6 – Solution exact Vs. Solution approchée avec  $n=50$ .

FIGURE 1.7 – l'erreur de l'interpolation de Simpson avec  $n=5$ FIGURE 1.8 – l'erreur de l'interpolation de Simpson avec  $n=50$

**Exemple 1.2.2** Dans le deuxième exemple, on a choisi l'équation suivante,

$$u(t) = \sin(t) + \frac{1}{3} (e^t - 1)^3 - (e^t - \cos(t))^3 + \int_0^t (e^t - \cos(s))^2 u(s) ds \quad 0 \leq s \leq t \leq 1.$$

$$K(t, s) = (e^t - \cos(s))^2 \quad 0 \leq s \leq t \leq 1$$

$$f(t) = \sin(t) + \frac{1}{3} (e^t - 1)^3 - (e^t - \cos(t))^3 \quad 0 \leq t \leq 1$$

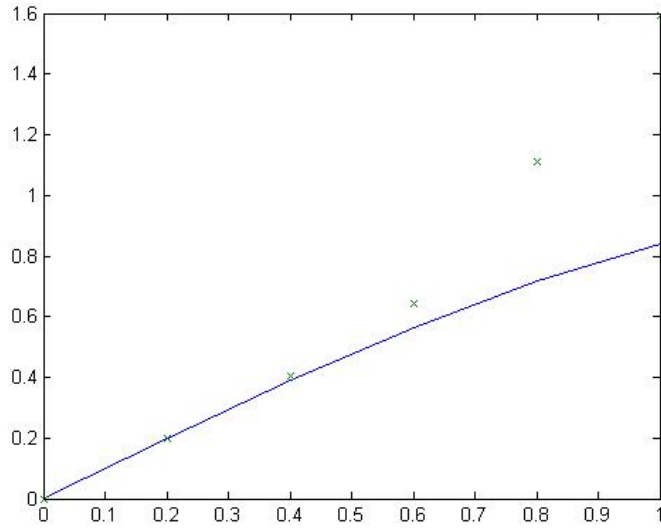
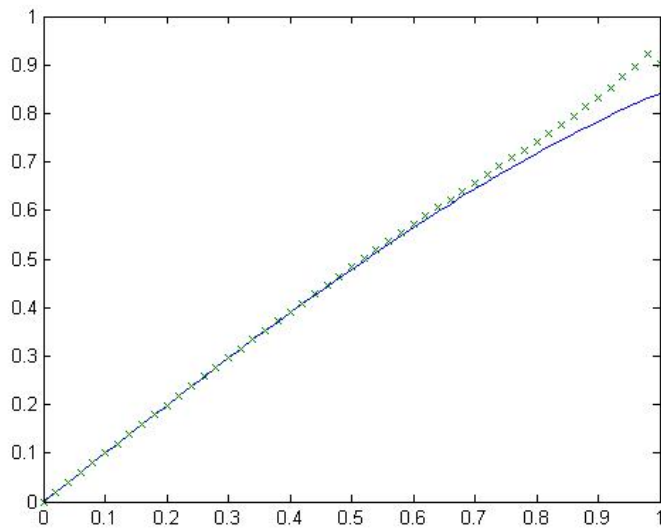
L'équation admet la solution continue exacte :

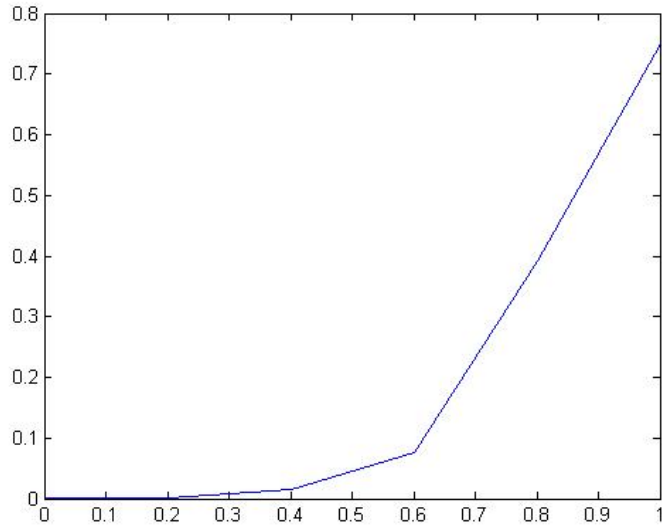
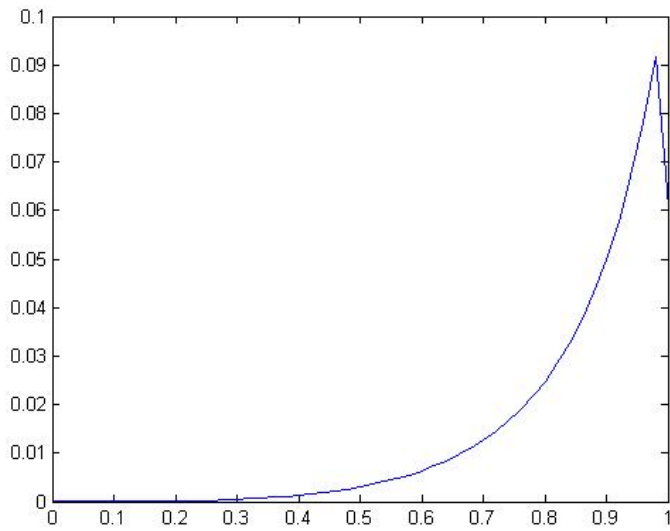
$$u(t) = 2\sin(t).$$

Nous appliquons la méthode des **Trapèzes** :

Le tableau suivant donne, une estimation de l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée

$N$	$\max_{1 \leq i \leq N}  u_i - u(t_i) $
10	3.307647476224176e-001
50	9.166431880087589e-002
100	4.772531371165067e-002
200	2.434628493989099e-002
500	9.855932836378201e-003
1000	4.947649608195714e-003
5000	9.926874353768378e-004
10000	4.965413191484469e-004

FIGURE 1.9 – Solution exact Vs. Solution approchée avec  $n=5$ .FIGURE 1.10 – Solution exact Vs. Solution approchée avec  $n=50$

FIGURE 1.11 – l'erreur de l'interpolation du Trapèze avec  $n=5$ FIGURE 1.12 – l'erreur de l'interpolation du Trapèze avec  $n=50$

Nous appliquons la méthode de **Simpson** :

Le tableau suivant donne, une estimation de l'erreur entre la solution exacte et approchée

$N$	$\max_{1 \leq i \leq N}  u_i - u(t_i) $
10	$2.557723417632541e-001$
50	$9.672622869985414e-002$
100	$5.372388838818576e-002$
200	$2.830240525185679e-002$
500	$1.168027256135262e-002$
1000	$5.901188096459786e-003$
5000	$1.190091229609780e-003$
10000	$5.956641481476011e-004$

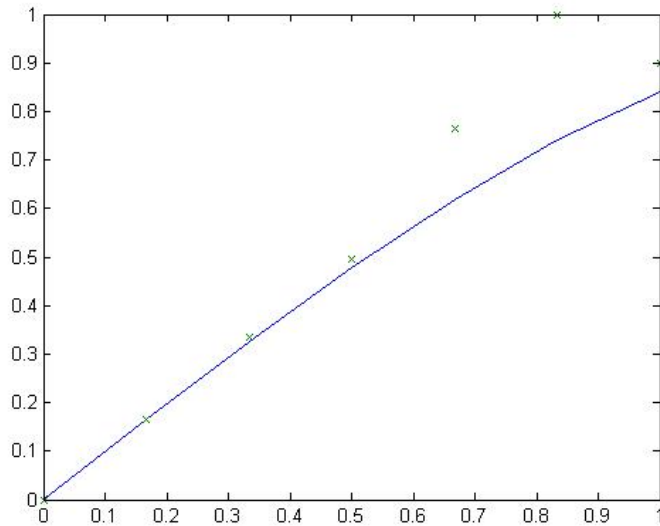


FIGURE 1.13 – Solution exact Vs. Solution approchée avec  $n=5$ .

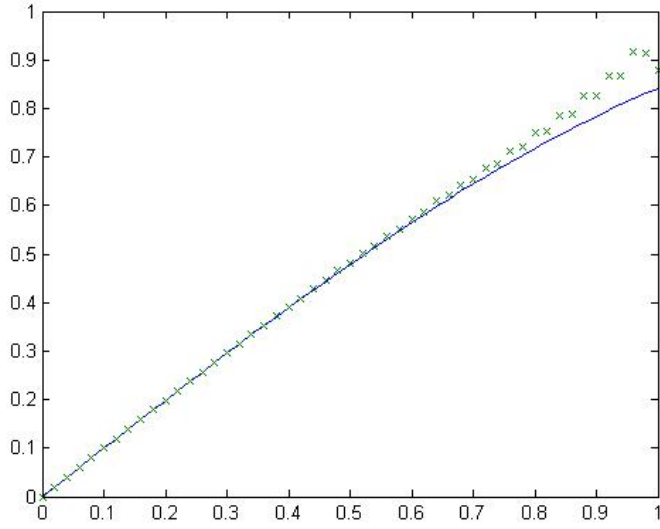
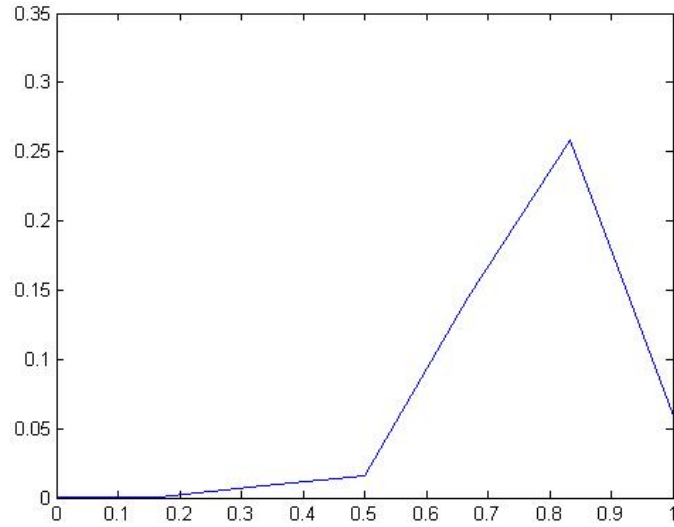
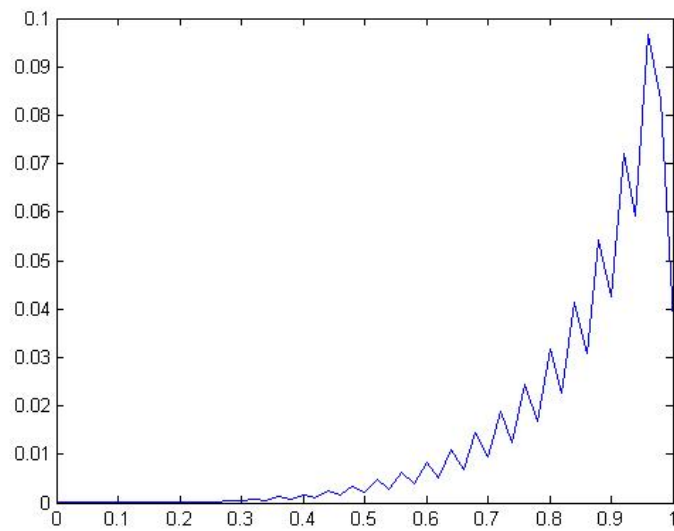


FIGURE 1.14 – Solution exact Vs. Solution approchée avec  $n=50$ .

FIGURE 1.15 – l'erreur de l'interpolation de Simpson avec  $n=5$ FIGURE 1.16 – l'erreur de l'interpolation de Simpson avec  $n=50$



# Chapitre 2

## Equations Intégrales non linéaires de Volterra

Ce chapitre est consacré à l'équation intégrale non linéaire de Volterra de seconde espèce. Nous allons étudier ce genre d'équation en profondeur, en exhibant le côté analytique par la démonstration de l'existence et unicité de la solution, sous des hypothèses assez applicables en pratique. En second lieu, nous construisons une méthode numérique basée sur l'approche de Nystrom et qui assure la convergence sans rajouter de nouvelles hypothèses que celles exigées dans l'étude analytique [17, 21].

### 2.1 Position du problème

Soit  $G$  une fonction définie de  $[a, b]^2 \times \mathbb{R}$  à image dans  $\mathbb{R}$ .  $G$  supposée vérifier les hypothèses suivantes

$$(H1) \left\| \begin{array}{l} (1) \quad G \in C([a, b]^2 \times \mathbb{R}) \\ (2) \quad \exists M \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall t, s \in [a, b], \forall x \in \mathbb{R} \quad |G(t, s, x)| \leq M \end{array} \right.$$

Pour tout  $f \in C([a, b])$ , nous définissons la fonctionnelle  $\phi_f$  sur  $C([a, b])$  par,  
 $\forall u \in C([a, b]), \forall t \in [a, b];$

$$\Phi_f(u)(t) := \int_a^t G(t, s, u(s))ds + f(t)$$

où  $C([a, b])$  est supposé muni de sa norme usuelle définie par,

$$\forall v \in C([a, b]); \|v\|_{C([a, b])} = \max_{t \in [a, b]} |v(t)|.$$

**Proposition 2.1.1** *Pour tout  $f \in C([a, b])$ , la fonctionnelle  $\Phi_f$  est définie sur  $C([a, b])$  dans lui même.*

**Preuve** Pour tout  $t, x \in [a, b]$ ,

$$\begin{aligned} |\Phi_f u(t) - \Phi_f u(x)| &= \left| \int_a^t G(t, s, u(s))ds - \int_a^x G(x, s, u(s))ds + f(t) - f(x) \right| \\ &\leq \left| \int_a^t G(t, s, u(s))ds - \int_a^x G(t, s, u(s))ds \right. \\ &\quad \left. + \int_a^x (G(t, s, u(s)) - G(x, s, u(s)))ds + f(t) - f(x) \right| \\ &\leq M|t - x| + |f(t) - f(x)| + \int_a^x |G(t, s, u(s)) - G(x, s, u(s))|ds \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow t} |\Phi_f(u)(t) - \Phi_f(u)(x)| = 0.$$

Ce qui montre que  $\Phi_f(u) \in C([a, b])$ .

Soit l'équation intégrale non linéaire suivante :

$$u(t) = \int_a^t G(t, s, u(s))ds + f(t); \quad t \in [a, b], \quad (2.1)$$

où  $f \in C([a, b])$  et  $u$  est l'inconnu à chercher dans le même espace.

La proposition précédente assure que l'équation (2.1) est bien définie et bien équilibrée ce qui permet son étude analytique.

## 2.2 Étude analytique

Il existe différentes méthodes pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale non linéaire de Volterra. (voir [8]). Dans notre thèse, nous choisissons l'approche développée dans [9], basée sur le théorème de point fixe de Schauder pour avoir plus de cohérence avec le cas intégral-différentiel, développée dans le chapitre suivant.

Mais, cette approche nécessite un théorème très important à savoir le théorème d'Arzela-Ascoli, ce théorème permet l'identification des ensembles relativement compact de  $C([a, b])$ .

**Théorème 2.2.1** ( *Arzela-Ascoli* ) Soit  $A$  une partie de  $C^0(X, Y)$ , qui est supposé être un espace métrique pour la distance,

$$\forall f, g \in C^0(X, Y); \quad D_\infty : (f, g) \rightarrow \sup_{x \in X} d'(f(x), g(x)),$$

$A$  est relativement compacte si et seulement si

(1)  $A$  est équicontinue, i.e.

$$\forall x_0 \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, d(x, x_0) < \eta \Rightarrow \sup_{f \in A} d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

(2) Pour tout  $x \in X$ , l'ensemble  $\Lambda_x = \{f(x), f \in A\}$  est relativement compact dans  $Y$ .

**Preuve** Nous allons montrer l'implication, nous supposons que  $A$  est relativement compact, donc  $A$  est précompact, autrement dit, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $f_1, \dots, f_p \in A$  tels que

$$A \subset \cup_{i=1}^p B_{D_\infty}(f_i, \epsilon),$$

où, les fonctions  $f_1, \dots, f_p$  sont continues sur le compact  $X$ .

Donc, en utilisant le théorème de Heine, celles-ci sont uniformément continues sur  $X$ , i.e, il existe  $\delta > 0$  tel que tous  $x, y \in X$

$$d(x, y) \leq \delta \Rightarrow \forall i \in [1, p], d'(f_i(x), f_i(y)) \leq \epsilon.$$

Considérons  $f \in A$ , d'après les deux remarques ci-dessus, d'une part il existe  $i \in [1, p]$  tel que  $D_\infty(f, f_i) \leq \epsilon$  et d'autre part pour tout  $x, y \in X$  tels que  $d(x, y) \leq \delta$ , nous avons

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f_i(x)) + d'(f_i(x), f_i(y)) + d'(f_i(y), f(y)) \leq 3\epsilon.$$

Ce qui implique que  $A$  est équicontinue.

Or, pour  $x \in X$ ,  $\Lambda_x$  est l'image de  $A$  par transformation  $\varphi_x : f \rightarrow f(x)$ , qui est continue, car 1-lipschitzienne. Comme  $\Lambda_x = \varphi_x(A)$ , donc nous avons  $\Lambda_x \subset \varphi_x(\bar{A})$ , qui est compact de  $Y$  en tant qu'image du compact  $\bar{A}$  par une application continue, d'où  $\Lambda_x$  est relativement compact.

Pour l'implication inverse, nous supposons  $A$  vérifie (1) et (2) pour tout  $\epsilon > 0$  et pour  $x \in X$ , d'après (1), il existe  $\eta_x > 0$  tel que

$$\forall y \in X. d(x, y) < \eta_x \Rightarrow \sup_{f \in A} d'(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}.$$

le fait que  $X$  est compact et  $X = \cup_{x \in X} B_d(x, \eta_x)$ , alors il existe  $x_1, \dots, x_n \in X$  tels que

$$X = \cup_{i=1}^n B_d(x_i, \eta_i)$$

où nous avons noté  $\eta_i = \eta_{x_i}$

En outre, d'après (2)  $\Lambda_{x_1}, \dots, \Lambda_{x_n}$  sont relativement compacts donc précompacts, alors leur union est également compacte.

il existe donc  $y_1, \dots, y_m \in Y$  tels que

$$\cup_{i=1}^n \Lambda_{x_i} = \cup_{j=1}^m B_{d'}(y_j, \frac{\epsilon}{2})$$

Soit  $\varphi : \{x_1, \dots, x_n\} \longrightarrow \{y_1, \dots, y_m\}$ , nous définissons

$$C_\varphi \{f : X \rightarrow Y \mid \forall i \in [1, n], \forall x \in B_d(x_i, \eta_i), \quad d'(f(x), \varphi(x_i)) < \epsilon\}.$$

D'un côté, le diamètre de  $C_\varphi$  est au plus  $2\epsilon$ , en effet, soient  $f \in C_\varphi$ , et pour tout  $x \in X$  il existe  $i \in [1, n]$  tel que  $x \in B_d(x_i, \eta_i)$  donc

$$d'(f(x), g(x)) \leq d'(f(x), \varphi(x_i)) + d'(\varphi(x_i), g(x)) \leq 2\epsilon.$$

ce qui implique que  $D_\infty(f, g) \leq 2\epsilon$ ,

de l'autre côté, l'union des  $C_\varphi$  est égale à  $A$ , En effet, soit  $f \in A$ , comme pour tout  $i \in [1, n]$  il existe  $k_i \in [1, m]$  tel que  $f(x_i) \in B_{d'}(y_{k_i}, \frac{\epsilon}{2})$ , nous pouvons donc recouvrir  $A$  par une union finie de boules de rayons  $2\epsilon$ .  $A$  est

précompacte et comme l'espace  $C^0(X, Y)$  est complet, nous en déduisons que  $\bar{A}$  est à la fois précompacte et complète donc compacte.

### 2.2.1 Existence d'une solution locale

Nous allons démontrer qu'on peut trouver une solution de l'équation (2.1), mais sur un intervalle réduit [17, 21].

**Théorème 2.2.2** *Il existe  $r \geq 0$  tel que l'équation (2.1) réduite à  $[a, a + r]$  admet une solution  $u \in C([a, a + r])$*

**Preuve** Nous commençons par montrer que  $\Phi_f$  est continue. Soit  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(a, b)$ , qui a pour limite la fonction  $u \in C(a, b)$ , nous avons,  $\forall t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |\Phi_f(u_n)(t) - \Phi_f(u)(t)| &= \left| \int_a^t (G(t, s, u_n(s)) - G(t, s, u(s))) ds \right| \\ &\leq \int_a^b |G(t, s, u_n(s)) - G(t, s, u(s))| ds. \end{aligned}$$

En utilisant la continuité de  $G$  et le théorème de Lebesgue, nous concluons que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_f(u_n)(t) - \Phi_f(u)(t)\|_{C[a, b]} = 0.$$

Pour,  $\rho > 0$  et  $0 < r \leq \frac{\rho}{M}$ , nous définissons l'ensemble suivant,

$$F = \{u \in C(a, b) : u(a) = f(a), \quad \forall t \in [a, a + r], |u(t) - f(t)| \leq \rho\}.$$

Il est clair que l'ensemble  $F$  est fermé et convexe. Pour tout  $u \in F$  et tout  $t \in [a, a+r]$

$$\begin{aligned}\Phi_f(u)(a) &= f(a), \\ |\Phi_f(u)(t) - f(t)| &= \left| \int_a^t G(t, s, u(s)) ds \right|, \\ &= Mr, \\ &\leq \rho,\end{aligned}$$

donc,  $\Phi_f(F) \subset F$ . Pour conclure, il faut montrer que  $\Phi_f(F)$  est relativement compact. Il suffit de montrer que cette famille est équicontinue.

$\forall t, x \in [a, b]$ ,

$$\begin{aligned}|\Phi_f(u)(t) - \Phi_f(u)(x)| &= \left| f(t) - f(x) + \int_a^t G(t, s, u(s)) ds - \int_a^x G(x, s, u(s)) ds \right|, \\ &\leq |f(t) - f(x)| + \left| \int_x^t G(t, s, u(s)) ds \right| \\ &\quad + \left| \int_a^x G(t, s, u(s)) - G(x, s, u(s)) ds \right|.\end{aligned}$$

En se basant sur la continuité de  $f$  et de  $G$  et de sa majoration, nous pouvons montrer que

$$\forall t \in [a, a+r], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u \in F, |x-t| < \delta \Rightarrow |\Phi_f(u)(t) - \Phi_f(u)(x)| < \varepsilon.$$

Nous appliquons le théorème de Schauder pour obtenir le résultat souhaité.

## 2.2.2 Prolongement de la solution

Nous allons exploiter le fait que l'équation intégrale non linéaire de Volterra est une équation d'évolution pour pouvoir construire la solution globale.

L'idée est que nous allons recoller un nombre fini de solutions locales pour construire une solution globale. Cette vision est bien développée dans la démonstration du théorème suivant [17, 21],

**Théorème 2.2.3** *L'équation (2.1) admet une solution  $u \in C([a, b])$ .*

**Preuve** Soit  $\bar{u}$  la solution dans l'intervalle  $[a, a + r]$ , alors l'équation (2.1) est réécrit sous la forme

$$u(t) = f(t) + \int_a^{a+r} G(t, s, \bar{u}(s))ds + \int_{a+r}^t G(t, s, u(s))ds,$$

nous posons,

$$g(t) = f(t) + \int_a^{a+r} G(t, s, \bar{u}(s))ds, \quad t \in [a, a + r].$$

alors,

$$u(t) = g(t) + \int_{a+r}^t G(t, s, u(s))ds. \quad t \in [a + r, b].$$

En appliquant le théorème précédant, nous montrons qu'il existe une solution  $\bar{\bar{u}}$  de cette équation dans un intervalle  $[a + r, a + r + r']$ .

D'autre part, la fonction,

$$u(t) = \begin{cases} u(t) & t \in [a, a + r], \\ \bar{\bar{u}}(t) & t \in [a + r, a + r + r'], \end{cases}$$

qui est continue par construction, est solution de l'équation d'origine sur l'intervalle  $[a, a + r + r']$ .

Nous répètons le même procédé afin d'obtenir le résultat du théorème.



### 2.2.3 Unicité de la solution

Sous les hypothèses (H1), nous n'arrivons pas à démontrer l'unicité de la solution dans le théorème précédent. Donc, nous rajoutons l'hypothèse supplémentaire suivante,

$$(H2) \left\| \begin{array}{l} \exists L \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall t, s \in [a, b], \\ |G(t, s, x) - G(t, s, y)| \leq L|x - y|. \end{array} \right.$$

Mais, avant de démontrer l'unicité, nous avons besoin de rappeler un lemme très important [17].

**Lemme 2.2.1** *Soit  $\varphi$  une fonction continue et positive sur  $[a, b]$  qui satisfait*

$$\exists L > 0, \varphi(t) \leq L \int_a^t \varphi(s) ds,$$

alors,  $\forall t \in [a, b], \varphi(t) = 0$ .

**Preuve** Comme  $\varphi$  est continue sur  $[a, b]$ ,  $\exists \eta > 0$  tel que

$$\varphi(t) \leq \eta, \quad \forall t \in [a, b],$$

alors,

$$\varphi(t) \leq L\eta \int_a^t ds = L\eta(t - a).$$

D'autre part, nous avons,c

$$\varphi(t) \leq L \int_a^t \varphi(s) ds.$$

Par conséquent,

$$\varphi(t) \leq L^2 \eta \int_a^t (s - a) ds = L^2 \eta \frac{(t - a)^2}{2} ds.$$

Si cette opération est répétée  $n$  fois, nous obtenons :

$$\varphi(t) \leq L^n \eta \frac{(t-a)^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Théorème 2.2.4** *La solution de (2.1) est unique.*

**Preuve** Soient  $u, v \in C[a, b]$  deux solutions de l'équation (2.1), On a,

$$\begin{aligned} |v(t) - u(t)| &= \left| \int_a^t G(t, s, v(s)) - G(t, s, u(s)) ds \right| \\ &\leq \int_a^t |G(t, s, v(s)) - G(t, s, u(s))| ds \\ &\leq L \int_a^t |v(s) - u(s)| ds. \end{aligned}$$

Si on applique le lemme 1, on obtient

$$|v(t) - u(t)| = 0.$$

Ainsi l'équation (2.1) admet une unique solution.

## 2.3 Étude numérique

Dans la pratique les équations intégrales non linéaire de Volterra ne peuvent pas être résolues explicitement, il est nécessaire recourir aux méthodes numériques. Nous nous intéressons ici aux procédés basés sur la méthode de Nyström. Cette méthode utilise les quadratures numériques pour approcher le terme intégrale de l'équation [17, 12, 11, 8].

Les quadratures les mieux adaptées à cette méthode permettent d'effectuer l'approximation suivante, pour tout  $\varphi \in C([a, b])$  et pour  $n \geq 2$

$$\int_a^b \varphi(t) dt \approx h \sum_{j=0}^n w_j \varphi(t_j),$$

où,  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $t_j = a + jh$ ,  $0 \leq j \leq n$  et  $\{w_i\}_{0 \leq i \leq n}$  sont choisis tels que,

$$W = \max_{0 \leq i \leq n} |w_i| < \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b \varphi(t) dt - h \sum_{j=0}^n w_j \varphi(t_j) \right| = 0$$

Nous reprenons l'équation intégrale non linéaire de Volterra

$$u(t) = f(t) + \int_0^t G(t, s, u(s)) ds, \quad a \leq t \leq b \quad (2.2)$$

où,  $f \in C(a, b)$  et  $u$  une fonction à trouver dans le même espace.

Nous avons démontré que sous les hypothèses suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad G \in C([0, T]^2 \times \mathbb{R}) \\ (2) \quad \exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t, s \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R} \quad |G(t, s, x)| \leq M, \\ (3) \quad \exists L \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall t, s \in [0, T], \quad |G(t, s, x) - G(t, s, y)| \leq L|x - y|, \end{array} \right.$$

cette équation admet une unique solution .

En appliquant la méthode de Nyström [1, 10, 2, 7, 8], en utilisant la quadrature dérite précédemment, nous obtenons le système suivant

$$F_0 = f(0) \quad (2.3)$$

$$F_i = f(t_i) + h \sum_{j=0}^i w_j k(t_i, t_j, F_j), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.4)$$

où  $F_i$  approche  $u(t_i)$  pour  $0 \leq i \leq n$ .

### 2.3.1 Etude du système

Nous avons approché notre équation intégrale par un système linéaire. Avant de démontrer la convergence de notre procédure, nous devons s'assurer que le système admet une unique solution [17].

**Théorème 2.3.1** *Pour  $h$  suffisamment petit, le système (2.3) – (2.4) admet une unique solution.*

**Preuve** Pour  $1 \leq i \leq n$ , nous définissons

$$\begin{aligned} \phi_i &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longrightarrow \phi_i(x) = f(t_i) + h \sum_{j=0}^i w_j G(t_i, t_j, F_j), \quad 1 \leq i \leq n-1. \end{aligned}$$

où, les termes  $F_0, \dots, F_{n-1}$  sont supposés être calculés

on a alors,

$$\begin{aligned} |\phi_n(X) - \phi_n(Y)| &= |hw_n G(t_n, t_n, X) - hw_n G(t_n, t_n, Y)| \\ &\leq hWL|X - Y|. \end{aligned}$$

Donc, pour  $h$  suffisamment petit les fonctions  $\phi_n$  sont contractes et le système (2.3 – 2.4) admet une unique solution.

## 2.4 Analyse de l'erreur

Dans cette section nous allons démontrer que la méthode numérique construite dans la section précédente, converge vers la solution exacte de l'équation. Mais il faut définir dans quel sens les méthodes discutées dans la section antérieure, déterminent une solution approximative seulement aux

points  $t_i$  [17].

Ainsi, nous pouvons parler d'erreur uniquement au niveau de ces points, pour cela, nous définissons les termes

$$\varepsilon_i = F_i - u(t_i), 0 \leq i \leq n - 1.$$

De ce fait, la méthode est convergente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i|) = 0$$

Pour étudier cette erreur, nous avons besoin de la fonction

$$\delta_n(h, t_i) = \int_a^{t_i} G(t_i, s, u(s)) ds - h \sum_{j=0}^i w_j G(t_i, t_j, u(t_j)), \quad h > 0, \quad 0 \leq i \leq n,$$

qui est appelée l'erreur de la consistance locale pour (2.1).

L'erreur de la consistance locale est une mesure de l'exactitude avec lequel, dans le contexte d'une équation donné, la règle de l'intégration numérique représente l'intégrale. Si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \max_{0 < n < N} |\delta(h, t_n)| \right) = 0,$$

alors l'erreur de consistence est dite logique pour l'équation [17].

**Théorème 2.4.1** *Si l'erreur de consistence est logique pour l'équation (2.1), alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \max_{0 < i < n} |\varepsilon_i| \right) = 0.$$

**Preuve** Nous avons, pour tout  $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= F_i - u(t_i) \\ &= h \sum_{j=0}^i w_j (G(t_i, t_j, F_j) - G(t_i, t_j, u(t_j))) - \delta(h, t_i)\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}|\varepsilon_i| &= \left| h \sum_{j=0}^i w_j (G(t_i, t_j, F_j) - G(t_i, t_j, u(t_j))) - \delta(h, t_i) \right| \\ &\leq hW \sum_{j=0}^i |(G(t_i, t_j, F_j) - G(t_i, t_j, u(t_j)))| - |\delta(h, t_i)|\end{aligned}$$

En utilisant la condition (3) de (H1) et en choisissant  $h < \frac{1}{LW}$ , nous obtenons

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{hWL}{1 - hWL} \sum_{i=0}^{n-1} |\varepsilon_i| + \frac{\max_{0 \leq i \leq n-1} |\delta(h, t_i)|}{1 - hWL}.$$

En appliquant le lemme (1.2.1), nous obtenons.

$$|\varepsilon_i| \leq (1 - hWL)^{-i} \max_{0 \leq i \leq n-1} |\delta(h, t_i)|, \quad 0 \leq i \leq n - 1$$

mais,

$$\begin{aligned}(1 - hWL)^{-i} &= \left( 1 - \frac{(b-a)WL}{n} \right)^{-i} \\ &\leq \left( 1 - \frac{(b-a)WL}{n} \right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{(b-a)WL}\end{aligned}$$

donc,  $\exists \alpha > 0$  tel que , pour tout  $0 \leq i \leq n$

$$(1 - hWL)^{-i} \leq \alpha$$

ce qui donne le résultat souhaité

Cette méthode est très intéressante, puisqu'on s'attendait que l'erreur commise lors du changement de l'intégrale par la quadrature serait plus grande que l'erreur d'approximation. Mais on voit bien que ce n'est pas le cas [17, 21, 11].

## 2.5 Tests Numériques

**Exemple 2.5.1** *Considérons l'équation intégrale non linéaire de Volterra, qui est définie comme suit,*

$$u(t) = t - \frac{1}{4} \log \left( \frac{3s^2 + 1}{t^2 + 1} \right) + \int_0^t \frac{s}{t^2 + s^2 + u^2 + 1} ds, \quad t \in [0, 1]$$

$$G(t, s, u) = \frac{s}{t^2 + s^2 + u^2 + 1} \quad 0 \leq s \leq t \leq 1,$$

$$f(t) = t - \frac{1}{4} \log \left( \frac{3y^2 + 1}{t^2 + 1} \right) \quad 0 \leq t \leq 1,$$

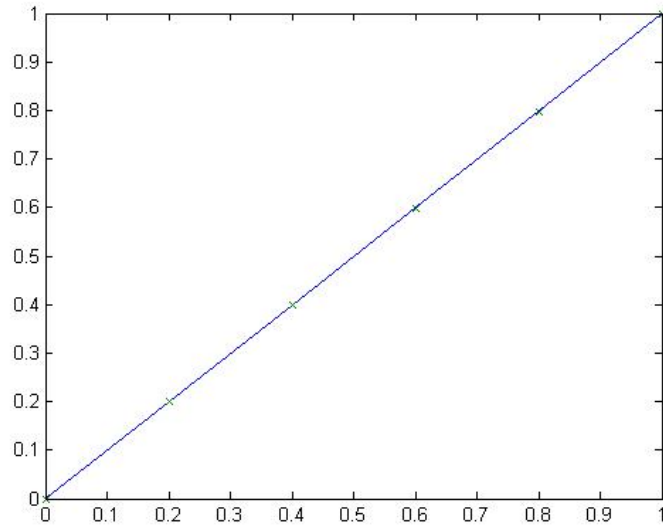
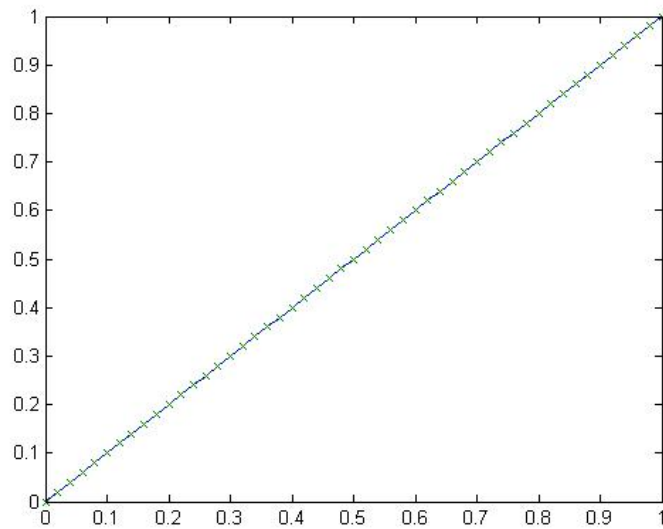
alors l'équation admet la solution exacte suivante

$$u(t) = t$$

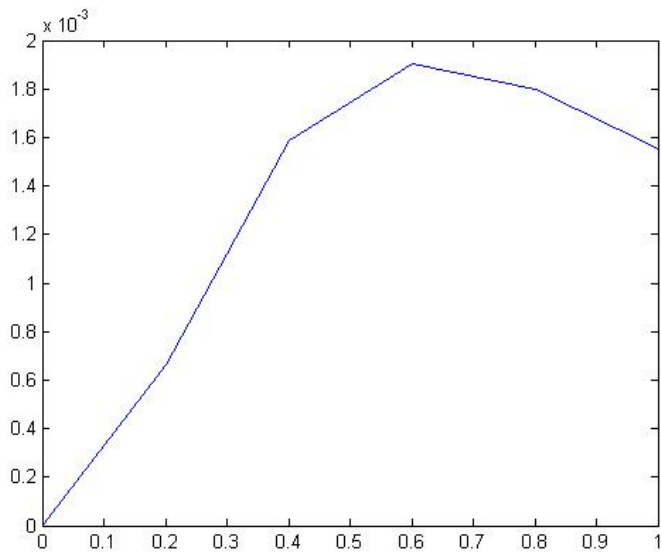
Nous appliquons la méthode du **trapèze**

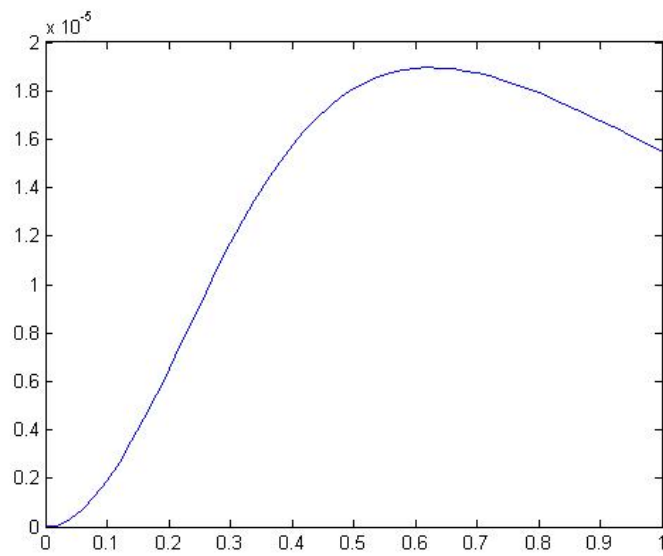
Le tableau suivant donne une estimation de l'erreur

$N$	$\max_{1 \leq i \leq N}  u_i - u(t_i) $
10	4.728627316600287e-004
50	1.890220889666505e-005
100	4.731988806794263e-006
200	1.182211473049755e-006
500	1.890741802013096e-007
1000	4.726398994403525e-008
5000	1.374759583949725e-009
10000	3.437248818904948e-010

FIGURE 2.1 – Solution exact Vs. Solution approchée avec  $n=5$ .FIGURE 2.2 – Solution exact Vs. Solution approchée avec  $n=50$



FIGURE 2.3 – l'erreur de l'interpolation du Trapèze avec  $n=5$

FIGURE 2.4 – l'erreur de l'interpolation du Trapèze avec  $n=50$

# Chapitre 3

## Equations Intégro-différentielles

Le contenu de ce chapitre traite une équation intégrale de Volterra d'un nouveau genre, elle est introduite récemment dans [8] qui représente une étude pratiquement complète de cette équation, sur les deux plans analytique et numérique.

C'est une équation intégro-différentielle dans laquelle la dérivée de solution apparaît sous le signe intégrale d'une façon non linéaire. Nous reprenons les aspects de cette équation pour mieux introduire notre contribution dans le chapitre suivant.

### 3.1 Position du problème

On considère  $K$  est une fonction définie de  $[a, b]^2 \times \mathbb{R}^2$  à image dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $K$  vérifie les hypothèses suivantes

$$(H3) \left\| \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\partial K}{\partial t} \in C([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2), \\ (2) \quad \exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t, s \in [a, b], \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ \max \left( |K(t, s, x, y)|, \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, x, y) \right| \right) \leq M. \end{array} \right.$$

Pour tout  $f \in C^1([a, b])$ , nous définissons la fonctionnelle  $\phi_f$  par :

$$\forall \xi \in C^1([a, b]), \quad \Phi_f(\xi)(t) := \int_a^t K(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds + f(t).$$

Notre but est d'étudier les propriétés de cette fonctionnelle pour bien définir notre équation intégro-différentielle non linéaire de Volterra.

**Propriété de dérivation** Soit  $\psi$  une fonction définie de  $[a, b]^2$  à image dans  $\mathbb{R}$ , tel que pour tout  $s \in [a, b]$ ,  $\psi(\cdot, s) \in C(a, b)$ . On définit la fonction suivante

$$\varphi(t) = \int_a^t \psi(t, s) ds, t \in [a, b]$$

Nous avons besoin de rappeler la proposition suivante.

### Proposition 3.1.1

$$\forall t \in [a, b], \quad \varphi'(t) = \psi(t, t) + \int_a^t \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, s) ds.$$

**Preuve**

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{t+h} \psi(t+h, s) ds - \int_a^t \psi(t, s) ds}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^t \psi(t+h, s) ds + \int_t^{t+h} \psi(t+h, s) ds - \int_a^t \psi(t, s) ds}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \psi(t+h, s) ds + \int_a^t \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(t+h, s) - \psi(t, s)}{h} ds \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \psi(t+h, s) ds + \int_a^t \frac{d\psi}{dt}(t, s) ds. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème des accroissements finis, il existe  $\xi \in ]0, h[$  tel que

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \psi(t+h, s) ds = \psi(t+h, t+\xi).$$

On fait tendre  $h$  vers 0 pour obtenir le résultat.  $\square$

**Proposition 3.1.2** *Pour tout  $\xi \in C^1([a, b])$ , la fonctionnelle  $\phi_f$  est définie sur  $C^1([a, b])$  dans lui même.*

**Preuve** On a, pour tout  $f \in C^1([a, b])$ , pour tout  $\xi \in C^1([a, b])$

$$\phi_f \xi(t) = \int_a^t K(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds + f(t).$$

Il est clair que  $\phi_f \xi(t)$  est continu sur  $[a, b]$ , on montre que  $\phi_f'$  est continue.

En appliquant la Propriété de dérivation, on obtient

$$\phi_f'(\xi)(t) = K(t, t, \xi(t), \xi'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds + f'(t).$$

qui est continue sur  $[a, b]$  et pour tout  $t \in [a, b]$

$$|\phi_f'(\xi)(t)| \leq M(b - a + 1) + \|f\|_{C^1([a, b])}$$

alors,  $\phi_f'(\xi) \in C^1([a, b])$ . Soit  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite  $C^1([a, b])$  qui converge vers  $\xi \in C^1(a, b)$ , nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_f'(\xi_n)(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^t K(t, s, \xi_n(s), \xi_n'(s)) ds + f(t) \right) \\ &= \int_a^t \lim_{n \rightarrow \infty} K(t, s, \xi_n(s), \xi_n'(s)) ds + f(t) \\ &= \int_a^t K(t, s, \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(s), \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n'(s)) ds + f(t) = \phi_f'(\xi)(t). \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

Soit l'équation intégro-différentielle non linéaire suivante :

$$\text{Trouver } u \in C^1([a, b]), \quad u(t) = \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s)) ds + f(t), \quad (3.1)$$

où,  $f \in C^1([a, b])$ .

## 3.2 Étude analytique

Pour garder la même méthode analytique développée dans le cadre de l'équation intégrale non linéaire de Volterra de seconde espèce, à savoir la méthode de Picard, nous allons réécrire notre équation sous une nouvelle forme équivalente [8]

Cette reformulation facilite nettement l'introduction de notre nouvelle méthode numérique qui sera présentée dans le chapitre suivant.

Nous informons le lecteur que de dans [8] les auteurs ont démontré l'existence et l'unicité en appliquant le théorème de point fixe de Schauder.

Pour reformuler notre équation, nous reprenons l'équation vérifiée par la dérivée.

$$\forall t \in [a, b] \quad u'(t) = K(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds + f'(t).$$

avec  $u(a) = f(a)$ . Nous introduisons la nouvelle variable  $v \in C^0([a, b])$  définit par

$$\forall t \in [a, b] \quad v(t) = u'(t) \Leftrightarrow u(t) = \int_a^t v(s) ds + f(a).$$

Ce qui donne la nouvelle équation,

trouver  $v \in C^0([a, b])$ ,  $\forall t \in [a, b]$ ,

$$v(t) = K(t, t, \int_a^t v(s) ds, v(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, \int_a^t v(s) ds, v(s)) ds + f'(t). \quad (3.2)$$

Il es clair que cette équation est équivalente à la version intégro-différentielle.

### 3.2.1 Existence de la solution

À partir de la dernière équation (3.2), nous définissons la suite de Picard suivante

$$\begin{cases} v_0 = f' \\ v_{n+1}(t) = K(t, t, \int_a^t v_n(s)ds, v_n(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, \int_a^t v_n(s)ds, v_n(s))ds + f'(t), \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

Pour assurer la convergence de cette suite, nous avons besoin des hypothèses suivantes

$$(H4) \left\| \begin{array}{l} (1) \quad \exists A, B, \bar{A}, \bar{B} \in \mathbb{R}, \forall x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}, \forall t, s \in [0, T], \\ \quad |K(t, s, x, y) - K(t, s, \bar{x}, \bar{y})| \leq A|x - \bar{x}| + B|y - \bar{y}|, \\ \quad \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, x, y) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, \bar{x}, \bar{y}) \right| \leq \bar{A}|x - \bar{x}| + \bar{B}|y - \bar{y}|, \\ (2) \quad B < 1. \end{array} \right.$$

**Théorème 3.2.1** *L'équation (3.2) admet une solution unique  $v \in C^0([a, b])$ .*

**Preuve** Selon la mêmes techniques développées dans le chapitre précédent, nous définissons la suite suivante

$$\begin{cases} \varphi_0 = f' \\ \varphi_n = v_n - v_{n-1}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Il est claire qu'il existe une suite  $\{T_j\}_{j=0}^N$ ,  $a = T_0 < T_1 < \dots < T_N = b$ , tel que pour tout  $0 \leq j \leq N$ ,

$$\forall t \in [T_j, T_{j+1}], \quad B + (\bar{B} + A)(t - T_j) + \bar{A} \frac{(t - T_j)^2}{2} \leq \rho < 1.$$

Nous avons,  $\forall t \in [T_0, T_1]$ ,  $\forall n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= K(t, t, \int_a^t v_n(s)ds, v_n(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, \int_a^t v_n(s)ds, v_n(s))ds \\ &\quad - K(t, t, \int_a^t v_{n-1}(s)ds, v_{n-1}(t)) - \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, \int_a^t v_{n-1}(s)ds, v_{n-1}(s))ds \end{aligned}$$

Ce qui donne,  $\forall t \in [T_0, T_1]$

$$|\varphi_n(t)| \leq A \int_a^t |\varphi_{n-1}(s)| ds + B |\varphi_{n-1}| + \bar{A} \int_a^t \int_a^s |\varphi_{n-1}|(\theta) d\theta ds + \bar{B} \int_a^t |\varphi_{n-1}| ds$$

alors,  $\forall n \geq 1$ ,

$$\|\varphi_n\|_{C^0[T_0, T_1]} \leq \rho \|\varphi_{n-1}\|_{C^0[T_0, T_1]}$$

donc,  $\forall n \geq 0$ ,

$$\|\varphi_n\|_{C^0[T_0, T_1]} \leq \rho^n \|f\|_{C^1[T_0, T_1]}$$

Il est clair que pour  $t \in [T_0, T_1]$ ,  $v_n(t) = \sum_{j=0}^n \varphi_j(t)$ , par conséquent il existe

$v \in C^0([T_0, T_1])$  tq :  $v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(t)$  avec,

$$\|v\|_{C^0[T_0, T_1]} \leq \frac{\|f\|_{C^1[T_0, T_1]}}{1 - \rho}$$

### 3.3 Étude numérique

Nous commençons cette section par rassembler toutes les hypothèses qui assurent l'existence et l'unicité de la solution de notre équation intégrale-différentielle sous la forme

$$(H5) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\partial K}{\partial t} \in C([0, T]^2 \times \mathbb{R}^2), \\ (2) \quad \exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t, s \in [0, T], \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ \quad \max \left( |K(t, s, x, y)|, \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, x, y) \right| \right) \leq M, \\ (3) \quad \exists A, B, \bar{A}, \bar{B} \in \mathbb{R}, \forall x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}, \forall t, s \in [0, T], \\ \quad |K(t, s, x, y) - K(t, s, \bar{x}, \bar{y})| \leq A|x - \bar{x}| + B|y - \bar{y}|, \\ \quad \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, x, y) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, \bar{x}, \bar{y}) \right| \leq \bar{A}|x - \bar{x}| + \bar{B}|y - \bar{y}|, \\ (4) \quad B < 1. \end{array} \right.$$



Notre but est de construire une méthode d'approximation numérique basée sur la vision Nyström pour l'équation suivante

$$u(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s)) ds, a \leq t \leq b, \quad (3.3)$$

où  $f \in C^1([a, b])$  et  $u$  est une fonction à chercher dans le même espace.

Cette équation contient plus d'information sur la solution. En appliquant la proposition de dérivation, on obtient

$$u'(t) = f'(t) + K(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds, a \leq t \leq b$$

En appliquant la méthode de Nyström, en utilisant la quadrature donnée dans le chapitre précédent, on obtient le système suivant

$$U_0 = f(a) \quad (3.4)$$

$$V_0 = f'(a) + K(a, a, f(a), V_0) \quad (3.5)$$

$$U_n = f(t_n) + h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, U_i, V_i), 1 \leq n \leq N, \quad (3.6)$$

$$V_n = f'(t_n) + K(t_n, t_n, U_n, V_n) + h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, U_i, V_i) \quad (3.7)$$

où  $U_n$  approche  $u(t_n)$  et  $V_n$  approche  $u'(t_n)$ .

### 3.3.1 Etude du système

Contrairement au chapitre précédent, les hypothèses (H2) ne suffisent pas pour assurer l'existence et l'unicité du système (3.4) – (3.7), donc, on doit rajouter l'hypothèse suivante

$$(H6) \|A\| < 1$$

**Théorème 3.3.1** *Pour  $h$  suffisamment petit, le système (3.4) – (3.7) admet une unique solution.*

**Preuve** Nous allons munir l'espace  $\mathbb{R}$ , de la norme suivante

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\|_1 = |X| + |Y|$$

Pour tout  $n \geq 1$ , on définit

$$\phi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(t_n) + hw_n K(t_n, t_n, X, Y) + h \sum_{i=0}^{n-1} w_i K(t_n, t_i, U_i, V_i) \\ f'(t_n) + K(t_n, t_n, U_n, V_n) + hw_n \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, X, Y) + h \sum_{i=0}^{n-1} w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, U_i, V_i) \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\left\| \phi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \phi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \phi_n \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\|_1$$

Où,

$$\beta_1 = hw_n(K(t_n, t_n, X, Y) - K(t_n, t_n, X', Y')),$$

$$\beta_2 = hw_n(K(t_n, t_n, X, Y) - K(t_n, t_n, X', Y')) + hw_n \left( \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, X, Y) - \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, X', Y') \right).$$

mais

$$|\beta_1| \leq hW(A|X - Y| + B|X' - Y'|),$$

$$|\beta_2| \leq (A + hW\bar{A})|X - y| + (B + \bar{B}hW)|X' - Y'|,$$

alors

$$\left\| \phi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \phi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \max(hWA, hWB, (A + hW\bar{A}), (B + \bar{B}hW)) \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1$$

Puisque  $A < 1$ , en appliquant le théorème de Banach, on obtient le résultat.

### 3.4 Analyse de l'erreur

Dans cette section, nous allons démontrer que la méthode numérique construite dans la section précédente, converge vers la solution exacte de l'équation. Contrairement au chapitre précédent, et puisque maintenant on travaille sur  $C^1(a, b)$ , on va définir une erreur plus raffinée. Pour cela, nous définissons.

Pour  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\varepsilon_i = |U_i - u(t_i)| + |V_i - u'(t_i)|.$$

On dit que la méthode est convergente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon_i|) = 0$$

L'erreur de consistance change elle aussi dans ce chapitre, pour devenir

$$\begin{aligned} \delta_0(h, t_0) &= \left| \int_a^{t_n} K(t_n, s, u(s), u'(s)) ds - h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, u(t_i), u'(t_i)) \right| \\ &+ \left| \int_0^{t_n} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) ds - h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, u(t_i), u'(t_i)) \right|. \end{aligned}$$

**Théorème 3.4.1** *Si l'erreur de consistance est logique pour l'équation (3.3), alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon_i|) = 0$$

**Preuve** Pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &\leq (A + AhW + \bar{A}hW) |U_n - u(t_n)| + (B + BhW + \bar{B}hW) |V_n - u'(t_n)| \\ &+ hW \sum_{i=0}^{n-1} ((A + \bar{A}) |U_i - u(t_i)| + (B + \bar{B}) |V_i - u'(t_i)|) \\ &+ \delta_0(h, t_0). \end{aligned}$$

Pour  $h$  assez petit,

$$\alpha = \min(1 - (A + AhW + \bar{A}hW), 1 - (B + BhW + \bar{B}hW)) > 0,$$

et

$$\varepsilon_i \leq \frac{hW \max(A + \bar{A}, B + \bar{B})}{\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i + \frac{1}{\alpha} \delta_0(h, t_0).$$

En appliquant le lemme 1, on obtient

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{hW \max(A + \bar{A}, B + \bar{B})}{\alpha} \right)^{n-1} \left( \max_{1 \leq i \leq n} |\delta_n(h, t_n)| + hW \max(A + \bar{A}, B + \bar{B}) \varepsilon_0 \right).$$

mais,

$$\left( 1 + \frac{hW \max(A + \bar{A}, B + \bar{B})}{\alpha} \right)^{n-1} \leq \left( 1 + \frac{(b-a)W \max(A + \bar{A}, B + \bar{B})}{N\alpha} \right)^n$$

et du fait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{hW \max(A + \bar{A}, B + \bar{B})}{N\alpha} \right)^n < \infty$$

alors,  $\exists \theta > 0$

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \max_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{hW \max(A + \bar{A}, B + \bar{B})}{\alpha} \right)^{n-1} \leq \theta$$

D'où le résultat souhaité.

On vient de montrer un résultat qui ressemble à celui obtenu dans le chapitre précédent, qui assure parfaitement la convergence de la méthode sous une hypothèse supplémentaire qui est  $A < 1$ .

Cette hypothèse très contraignante en pratique rend cette méthode moins compatible avec l'équation

### 3.5 Tests Numériques

**Exemple 3.5.1** *Considérons l'équation intégral-différentielle de Volterra, qui est définie comme suit,*

$$u(t) = f(t) + \int_0^t \frac{t(s+1)}{5 + (u(s) + u'(s))^2} ds, \quad t \in [a, b]$$

$K(t, s, u, v) = \frac{t(s+1)}{5 + (u+v)^2}$  vérifie (H4) et (H5) avec  $M = A = B\bar{A} = \bar{B} = \frac{2}{5}$

Si on prend

$$f(t) = t - \frac{t}{2} \ln(6 + 2t + t^2) + \frac{t}{2} \ln(6),$$

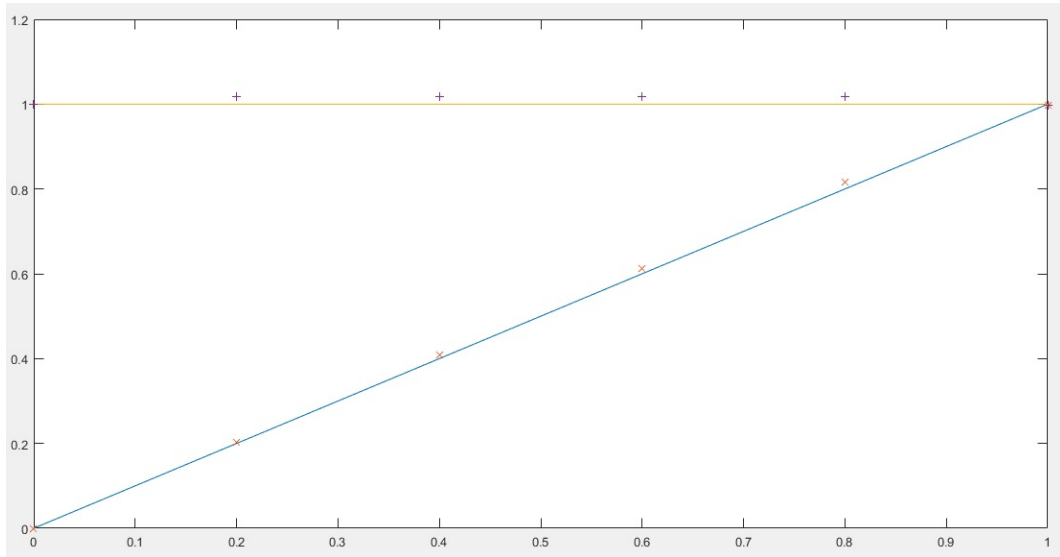
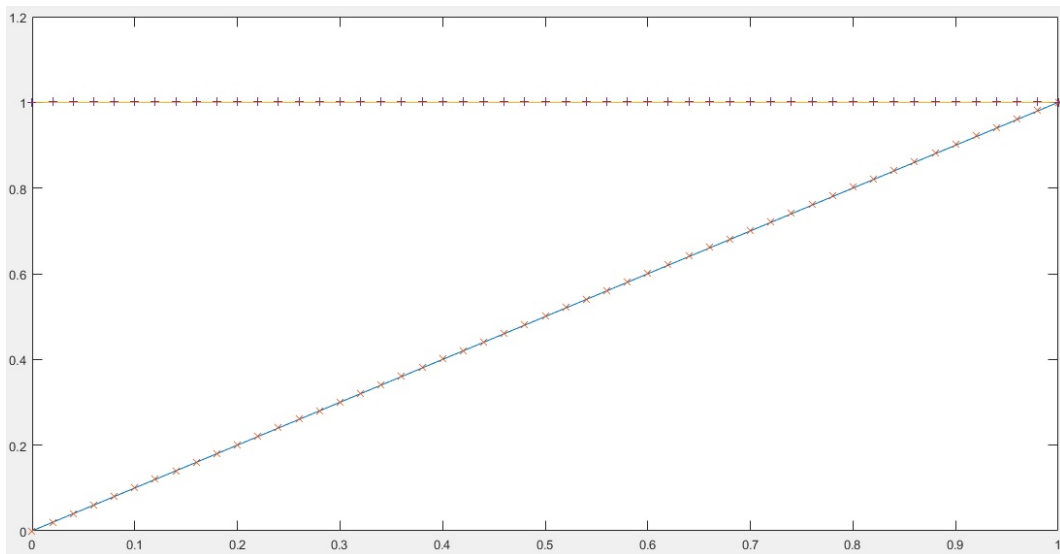
on trouve que,

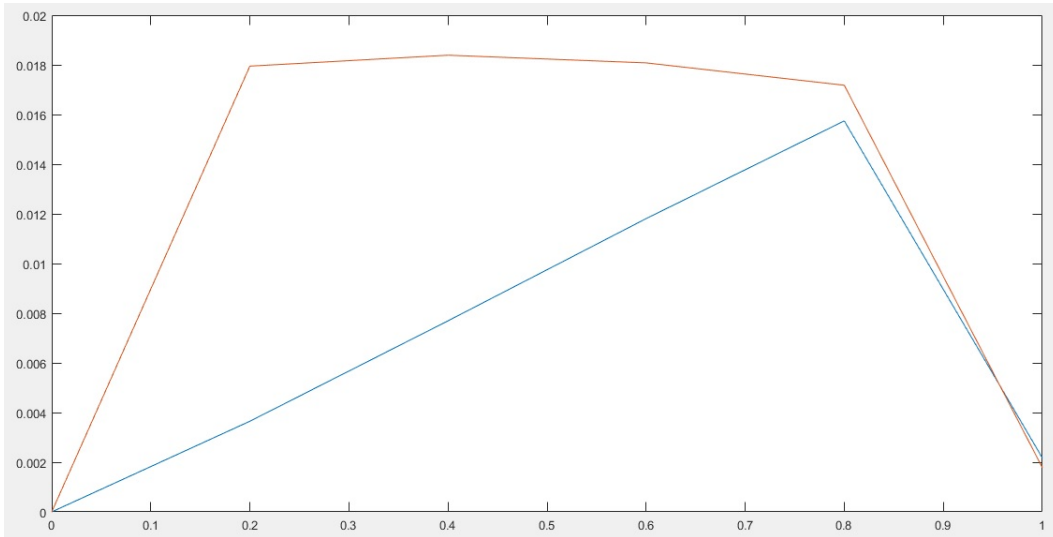
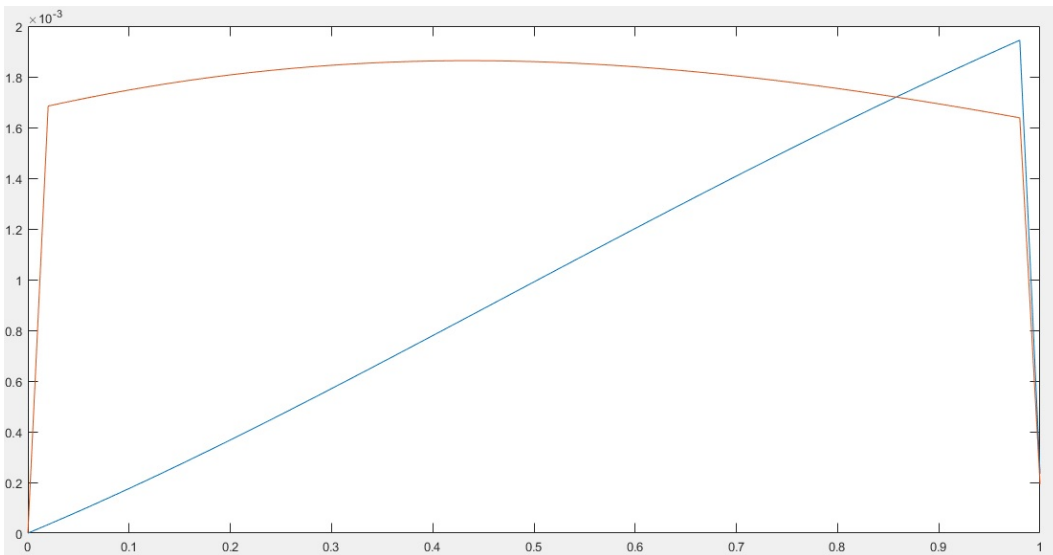
$$u(t) = t.$$

Nous appliquons la méthode des **Trapèzes**

Le tableau suivant donne, une estimation de l'erreur entre la solution exacte et approchée,  $\max_{1 \leq i \leq N} |u_i - u(t_i)|$  de l'équation

$N$	$\max_{1 \leq j \leq N} ( F_j - f(t_j)  +  V_j - f'(t_j) )$
10	1.712974729288797e-02
50	3.377807594113325e-03
100	1.685891622827951e-03
200	6.736343778952492e-04
500	3.366968752673838e-04
1000	1.683183657812393e-04
1500	1.122055618836271e-04
2000	8.415166576902777e-05

FIGURE 3.1 – Solution exact Vs. Solution approchée avec  $n=5$ .FIGURE 3.2 – Solution exact Vs. Solution approchée avec  $n=50$

FIGURE 3.3 – l'erreur de l'interpolation de Trapèze avec  $n=5$ FIGURE 3.4 – l'erreur de l'interpolation de Trapèze avec  $n=50$ 

Nous appliquons la méthode de **Simpson**

Le tableau suivant donne, une estimation de l'erreur entre la solution exacte

et approchée  $\max_{1 \leq i \leq N} |u_i - u(t_i)|$  de l'équation

$N$	$\max_{1 \leq j \leq N} ( F_j - f(t_j)  +  V_j - f'(t_j) )$
10	$1.437713929989282e-02$
50	$3.197455001594962e-03$
100	$1.605467895076540e-03$
200	$6.467510996013282e-04$
500	$3.243693786287860e-04$
1000	$1.622453712473160e-04$
1500	$1.081770173494423e-04$
2000	$8.113779491636386e-05$

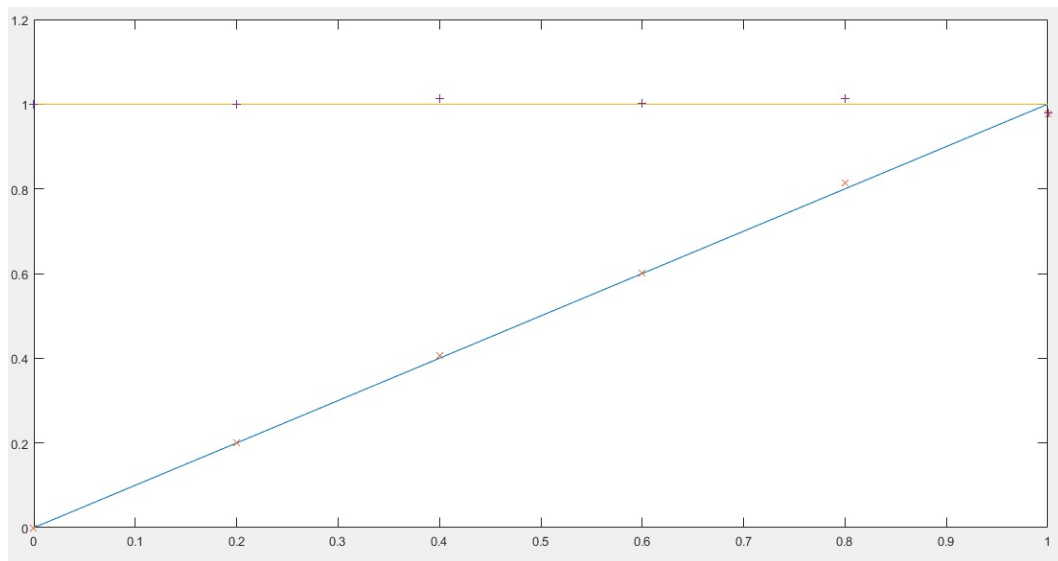


FIGURE 3.5 – Solution exact Vs. Solution approchée avec  $n=5$ .



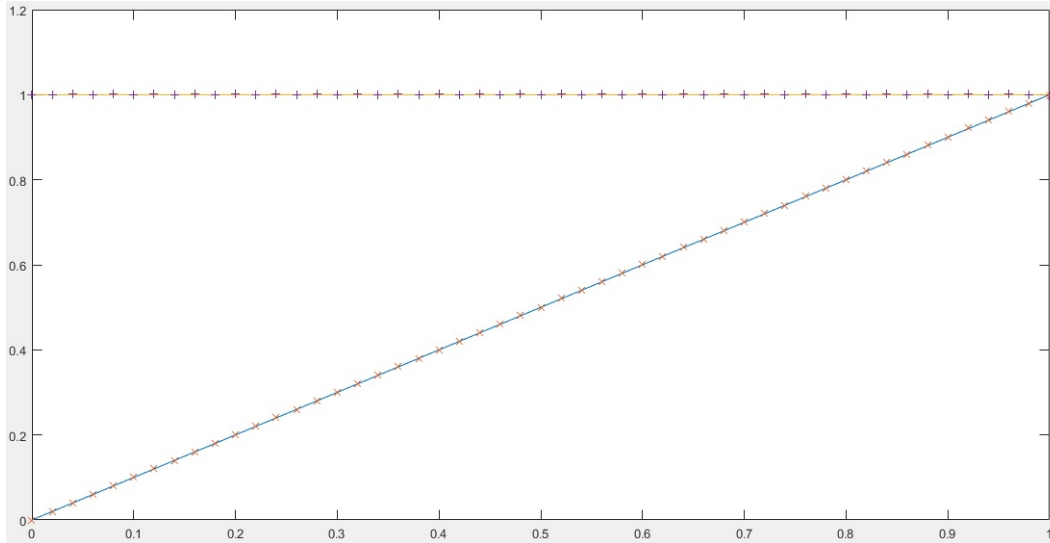


FIGURE 3.6 – Solution exact Vs. Solution approchée avec  $n=50$ .

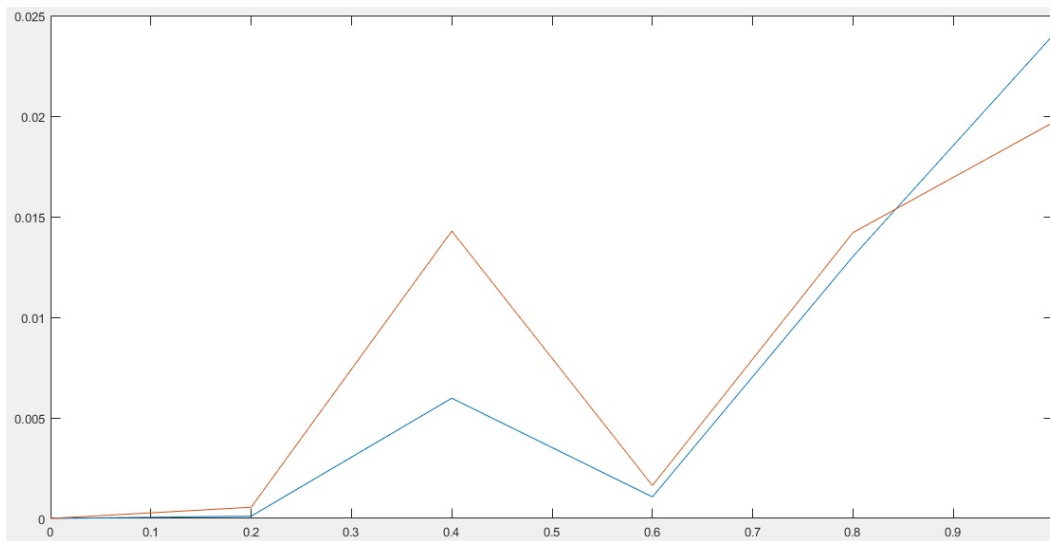
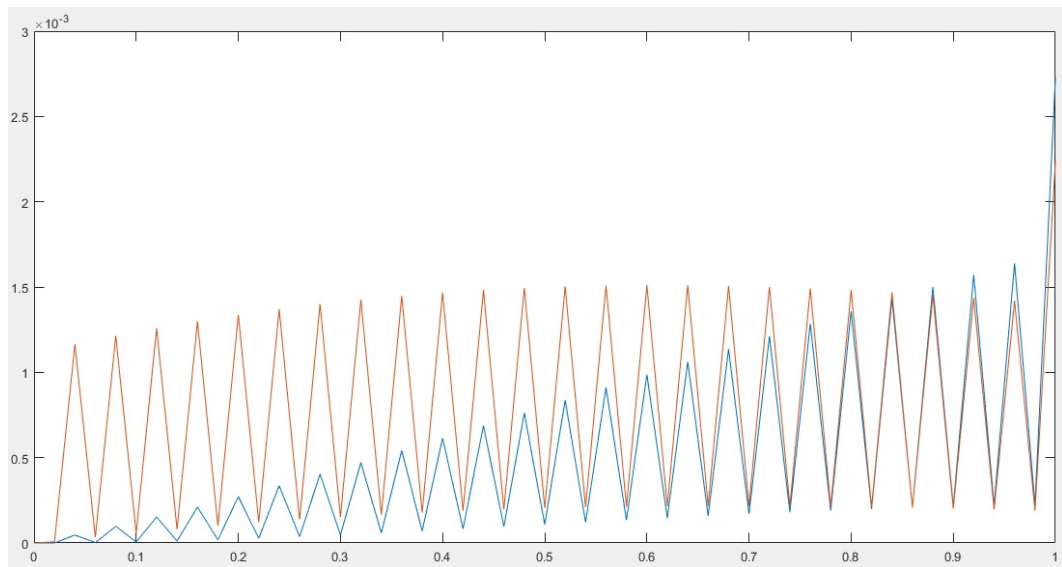


FIGURE 3.7 – l'erreur de l'interpolation de Simpson avec  $n=5$

FIGURE 3.8 – l'erreur de l'interpolation de Simpson avec  $n=50$

# Chapitre 4

## Nouvelle méthode d'approximation pour l'équation intégré-différentielle non linéaire de Volterra

Ce chapitre représente la partie originale de la thèse. Nous reprenons l'article [20] en détail pour construire une nouvelle méthode d'approximation numérique plus adaptée à l'équation intégré-différentielle non linéaire de Volterra de seconde espèce.

### 4.1 Motivation

La recherche mathématiques dans le domaine des équations intégrales est orientée vers la construction des conditions les plus faibles possibles, qui assureraient l'existence et l'unicité de la solution et la convergence de la méthode numérique. Dans cet esprit de recherche, nous avons noté les faits suivants :

L'étude analytique et numérique réalisée sur l'équation intégrale non li-

néaire de Volterra du second type suivante [20, 17] est qui consiste à trouver, pour une donnée fonction  $f \in C^0([a, b])$ , une fonction  $u \in C^0([a, b])$ , telle que,

$$u(t) = \int_a^t G(t, s, u(s))ds + f(t); \quad \forall t \in [a, b], \quad (4.1)$$

où,  $G \in C([a, b]^2 \times \mathbb{R})$  est supposée satisfaire à la condition de Lipschitz suivante,

$$\exists L \in \mathbb{R}_+, \forall x, \bar{x} \in \mathbb{R}, \forall t, s \in [a, b], |G(t, s, x) - G(t, s, \bar{x})| \leq L|x - \bar{x}|. \quad (4.2)$$

La condition précédente garantit à la fois l'existence et l'unicité de la solution et la convergence du schéma numérique issu de la méthode de Nytröm suivante,

pour  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $h = \frac{b-a}{N}$ ,  $t_j = a + jh$ ,  $0 \leq j \leq N$ ,

$$U_0 = f(a), \quad (4.3)$$

$$U_i = h \sum_{j=0}^i w_j G(t_i, t_j, U_j) + f(t_i), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (4.4)$$

où  $U_i$  approche  $u(t_i)$ , pour  $0 \leq i \leq N$ ,  $\{w_j\}_{j=0}^N$  sont les poids d'une méthode d'intégration numérique appropriée, supposée vérifier,

$$\exists W > 0, \forall N \geq 1, \max_{0 \leq j \leq N} |w_j| \leq W.$$

D'autre part, nous avons l'étude analytique et numérique de l'équation intégrodifférentielle non linéaire de Volterra du second type suivante [6],

$$u(t) = \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s))ds + f(t); \quad \forall t \in [a, b], \quad (4.5)$$

où,  $f \in C^1([a, b])$  et  $u$  est une fonction inconnue, se appartenant à la même espace. Cette équation contient plus d'informations sur la solution  $u$  de la dérivée des deux membres de l'équation (4.5) on obtient

$$u'(t) = K(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds + f'(t); \quad \forall t \in [a, b], \quad (4.6)$$

Dans [8], les auteurs montrent que cette équation a une solution unique sous les hypothèses suivantes :

$$(H7) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\partial K}{\partial t} \in C([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2), \\ (2) \quad \exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall t, s \in [a, b], \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ \quad \max \left( |K(t, s, x, y)|, \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, x, y) \right| \right) \leq M. \\ (3) \quad \exists A, B, \bar{A}, \bar{B} \in \mathbb{R}_+, \forall x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}, \forall t, s \in [0, T], \\ \quad |K(t, s, x, y) - K(t, s, \bar{x}, \bar{y})| \leq A|x - \bar{x}| + B|y - \bar{y}|, \\ \quad \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, x, y) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, \bar{x}, \bar{y}) \right| \leq \bar{A}|x - \bar{x}| + \bar{B}|y - \bar{y}| \\ (4) \quad B < 1. \end{array} \right.$$

Ces hypothèses sont similaires aux conditions requises dans [21] et [17], pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution dans le cas non différentiel. La méthode numérique proposée dans [8] reproduit le même schéma de Nyström, qui donne le système non linéaire suivant :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, h = \frac{b-a}{N}, t_j = a + jh, 0 \leq j \leq N,$$

$$U_0 = f(a) \quad (4.7)$$

$$\bar{U}_0 = f'(a) + K(a, a, U_0, \bar{U}_0) \quad (4.8)$$

$$U_i = f(t_i) + h \sum_{j=0}^i w_j K(t_i, t_j, U_j, \bar{U}_j), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (4.9)$$

$$\bar{U}_i = f'(t_i) + K(t_i, t_i, U_i, \bar{U}_i) + h \sum_{j=0}^n w_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, U_j, \bar{U}_j), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (4.10)$$

où,  $U_i$  approche  $u(t_i)$  et  $\bar{U}_i$  approche  $u'(t_i)$ . Les hypothèses (H7) ne sont pas suffisantes pour assurer la convergence de cette méthode directe (4.7)–(4.10). Les auteurs ont dû ajouter une condition très restrictive  $A < 1$ , pour obtenir la convergence de leur méthode.

De ces faits, nous notons que dans le cas non différentiel, la méthode numérique converge dans les mêmes conditions qui assurent l'existence et l'unicité de la solution. Mais, ce n'est pas le cas dans la forme différentielle de l'équation puisque Il faut ajouter la condition très restrictive  $A < 1$ .

l'originalité de notre travail se résume dans la construction d'une méthode numérique plus adaptée à la version différentielle de cette équation. Puisque sa convergence nécessite les hypothèses (H7) seulement.

## 4.2 Approximations numériques

Pour atteindre notre objectif, nous reprenons la construction de l'équation intégrale équivalente à (4.5). Soit,  $v \in C([a, b])$  tel que  $v = u'$ . Alors,

$$u(t) = f(a) + \int_a^t v(s)ds,$$

et

$$f(a) + \int_a^t v(s)ds = \int_a^t K(t, s, f(a) + \int_a^s v(\tau)d\tau, v(s))ds + f(t); \quad \forall t \in [a, b].$$

Nous dérivons par rapport à la variable  $t$ , pour obtenir,

$$\begin{aligned} v(t) &= K \left( t, t, f(a) + \int_a^t v(s)ds, v(t) \right) \\ &+ \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t} \left( t, s, f(a) + \int_a^s v(\tau)d\tau, v(s) \right) ds + f'(t); \quad \forall t \in [a, b]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Il est clair que l'hypothèse (H7) assure l'existence d'une solution unique  $u \in C^1([a, b])$  pour tout  $f \in C^1([a, b])$ , ce qui entraîne l'existence et l'unicité de  $v \in C([a, b])$  et réciproquement. Nous utilisons une méthode numérique, basée sur l'intégration numérique, pour approcher la solution de l'équation. Cette technique est appelée méthode Nyström, elle a été étudiée dans [10, 6–8].

Pour  $N \geq 1$ , on définit la subdivision suivante,

$$t_j = a + jh, \quad 0 \leq j \leq N \quad \text{et} \quad h = \frac{b-a}{N}.$$

La formule de l'intégration numérique est donnée par

$$\int_a^b \xi(t) dt \simeq h \sum_{i=0}^N w_i \xi(t_i),$$

où,  $\{w_i\}_{0 \leq i \leq N}$  sont réels et vérifient la condition suivante

$$\exists W > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \max_{0 \leq j \leq N} |w_j| \leq W.$$

En appliquant cette quadrature à l'équation (4.11), nous obtenons le système suivant :

$$V_0 = f'(a) + K(a, a, f(a), V_0) \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} V_n &= f'(t_n) + K \left( t_n, t_n, f(a) + h \sum_{i=0}^n w_i V_i, V_n \right) \\ &+ h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t} \left( t_n, t_i, f(a) + h \sum_{j=0}^i w_j V_j, V_i \right), \quad 1 \leq n \leq N, \end{aligned} \quad (4.13)$$

Le système (4.12) – (4.13), obtenu en utilisant cette nouvelle méthode, est

plus facile à construire et à résoudre que (4.7) – (4.10) obtenu dans [6].

Contrairement au système d'équations obtenu dans [6], nous n'avons pas besoin de la condition supplémentaire  $A < 1$  pour montrer que le nouveau système a une solution unique.

### 4.2.1 Etude du système

**Théorème 4.2.1** (4.13) a une solution unique et pour  $h$  suffisamment petit, (4.12) a une solution unique.

**Preuve** Nous définissons  $\psi_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow \psi_0(x) = f'(a) + K(a, a, f(a), x)$ . Il est clair que sous l'hypothèse (H),  $\psi_0$  est une contraction et en utilisant le point fixe de Banach, on obtient que (4.12) a une solution unique  $V_0$ . Pour  $0 \leq i \leq N$ , nous définissons  $\tau_i := f(a) + h \sum_{j=0}^i w_j V_j$ . Soit, pour  $1 \leq n \leq N$ , pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= f'(t_n) + K(t_n, t_n, hw_n x + \tau_{n-1}, x) \\ &\quad + hw_n \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, hw_n x + \tau_{n-1}, x) + \beta_n, \end{aligned}$$

$$\text{où } \beta_n = h \sum_{i=0}^{n-1} w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, \tau_i, V_i).$$

Nous avons, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} &|\psi_n(x) - \psi_n(y)| \\ &\leq |K(t_n, t_n, hw_n x + \tau_{n-1}, x) - K(t_n, t_n, hw_n y + \tau_{n-1}, y)| \\ &\quad + hw_n \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, hw_n x + \tau_{n-1}, x) - \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, hw_n y + \tau_{n-1}, y) \right| \\ &\leq (hWA + B + h^2W^2\bar{A} + hW\bar{B}) |x - y|. \end{aligned}$$



Alors, pour  $h$  suffisamment petit,  $(hWA + B + h^2W^2\bar{A} + hW\bar{B}) < 1$  et en utilisant le point fixe de Banach, on obtient que (4.13) a une solution unique  $V_n$ .

## 4.2.2 Etude de convergence

Nous montrons maintenant que la méthode numérique construite précédemment converge vers la solution exacte de l'équation. Pour cela, nous définissons

$$\varepsilon_n := |v(t_n) - V_n|, \quad \bar{\varepsilon}_n := \left| u(t_n) - h \sum_{i=0}^n w_i V_i - f(a) \right|, \quad n \geq 0.$$

On dit que la méthode est convergente, si  $\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq n \leq N} \{\varepsilon_n, \bar{\varepsilon}_n\}) = 0$ . Pour  $n \geq 1$  et  $\xi \in C(a, b)$ , nous définissons les erreurs de cohérence locales par

$$\begin{aligned} \delta_1(h, t_n, \xi) &= \int_a^{t_n} \frac{\partial K}{\partial t} \left( t_n, s, f(a) + \int_a^s \xi(\tau) d\tau, \xi(s) \right) ds \\ &\quad - h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t} \left( t_n, t_i, f(a) + h \sum_{j=0}^i w_j \xi(t_j), \xi(t_i) \right), \\ \delta_2(h, t_n, \xi) &= \int_a^{t_n} \xi(\tau) d\tau - h \sum_{i=0}^n w_i \xi(t_i). \end{aligned}$$

Nous disons que la méthode d'approximation (4.12) – (4.13) est compatible avec (4.11), si

$$\forall \xi \in C(a, b), \quad \lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq n \leq N} \{|\delta_1(h, t_n, \xi)|, |\delta_2(h, t_n, \xi)|\}) = 0.$$

**Théorème 4.2.2** *Si la méthode d'approximation (4.12)–(4.13) est cohérente avec (4.11), alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq n \leq N} \{\varepsilon_n, \bar{\varepsilon}_n\}) = 0.$$

**Preuve** Nous remplaçons  $t$  par  $t_0 = a$  dans (4.1), pour obtenir

$$v(t_0) = K(a, a, f(a), v(t_0)) + f'(a).$$

Nous utilisons le théorème précédent pour obtenir que  $\varepsilon_0 = |v(t_0) - V_0| = 0$ .

Pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} v(t_n) - V_n &= K\left(t_n, t_n, f(a) + \int_a^{t_n} v(s)ds, v(t_n)\right) \\ &- K\left(t_n, t_n, f(a) + h \sum_{i=0}^n w_i V_i, V_n\right) \\ &+ \int_a^{t_n} \frac{\partial K}{\partial t}\left(t_n, s, f(a) + \int_a^s v(\tau)d\tau, v(s)ds\right) \\ &- h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}\left(t_n, t_i, f(a) + h \sum_{j=0}^i w_j V_j, V_i\right), \\ &= K\left(t_n, t_n, f(a) + \int_a^{t_n} v(s)ds, v(t_n)\right) \\ &- K\left(t_n, t_n, f(a) + h \sum_{i=0}^n w_i v(t_i), v(t_n)\right) \\ &+ K\left(t_n, t_n, f(a) + h \sum_{i=0}^n w_i v(t_i), v(t_n)\right) \\ &+ K\left(t_n, t_n, f(a) + h \sum_{i=0}^n w_i V_i, V_n\right) + \delta_1(h, t_n, v) \\ &+ h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}\left(t_n, t_i, f(a) + h \sum_{j=0}^i w_j v(t_j), v(t_i)\right) \\ &- h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}\left(t_n, t_i, f(a) + h \sum_{j=0}^i w_j V_j, V_i\right) \end{aligned}$$

En utilisant (H7), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \left| K \left( t_n, t_n, f(a) + \int_a^{t_n} v(s) ds, v(t_n) \right) - K \left( t_n, t_n, f(a) + h \sum_{i=0}^n w_i v(t_i), v(t_n) \right) \right| \\
& \leq A |\delta_1(h, t_n, v)|, \\
& \left| K \left( t_n, t_n, f(a) + h \sum_{i=0}^n w_i v(t_i), v(t_n) \right) - K \left( t_n, t_n, f(a) + h \sum_{i=0}^n w_i V_i, V_n \right) \right| \\
& \leq hAW \sum_{i=0}^n \varepsilon_i + B\varepsilon_n, \\
& \left| h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t} \left( t_n, t_i, f(a) + h \sum_{j=0}^i w_j v(t_j), v(t_i) \right) \right. \\
& \quad \left. - h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t} \left( t_n, t_i, f(a) + h \sum_{j=0}^i w_j V_j, V_i \right) \right| \\
& \leq h\bar{A}W^2(b-a) \sum_{i=0}^n \varepsilon_i + h\bar{B}W \sum_{i=0}^n \varepsilon_i.
\end{aligned}$$

Ensuite, pour  $n \geq 1$ , on a

$$\varepsilon_n \leq |\delta_1(h, t_n, v)| + A |\delta_2(h, t_n, v)| + B\varepsilon_n + hW(A + W\bar{A} + \bar{B}) \sum_{i=0}^n \varepsilon_i.$$

Pour  $h$  assez petit,

$$\alpha_h = 1 - (B + hW(A + W\bar{A} + \bar{B})) > 0, \quad \frac{1}{\alpha_h} \leq 1 + \frac{1}{1-B} = \frac{2-B}{1-B},$$

et,

$$\varepsilon_n \leq hW(W\bar{A} + \bar{B}) \frac{1-B}{2-B} \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i + \frac{1-B}{2-B} (A |\delta_2(h, t_n, v)| + |\delta_1(h, t_n, v)|).$$

En appliquant [7, Théorème 7.1], nous obtenons

$$\varepsilon_n \leq \frac{1-B}{2-B} \left( 1 + hW(W\bar{A} + \bar{B}) \frac{1-B}{2-B} \right)^{n-1} \left( \max_{1 \leq i \leq n} (A |\delta_2(h, t_i, v)| + |\delta_1(h, t_i, v)|) \right).$$

Mais,  $\exists \theta > 0$  tel que

$$\begin{aligned} & \frac{1-B}{2-B} \left( 1 + hW (W\bar{A} + \bar{B}) \frac{1-B}{2-B} \right)^{n-1} \\ & \leq \frac{1-B}{2-B} \max_{N \geq 1} \left( 1 + \frac{(b-a)W (W\bar{A} + \bar{B})}{N} \frac{1-B}{2-B} \right)^N \\ & \leq \theta < +\infty. \end{aligned}$$

D'autre part, pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_n &= \left| u(t_n) - h \sum_{i=0}^n w_i V_i - f(a) \right|, \\ &= \left| \int_a^{t_n} v(s) ds - h \sum_{i=0}^n w_i V_i \right|, \\ &\leq |\delta_2(h, t_n, v)| + hW \sum_{i=1}^n \varepsilon_i, \\ &\leq |\delta_2(h, t_n, v)| + (b-a)W \max_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i. \end{aligned}$$

Et le résultat souhaité est obtenu.

### 4.3 Résultats numériques

Nous utilisons la méthode des trapèzes car elle assure que les méthodes d'approximation (4.7) – (4.10) et (4.12) – (4.13) sont cohérentes avec (4.5) et (4.11) respectivement, sans ajouter de nouvelles conditions de régularité. Les termes  $U_n$ ,  $\bar{U}_n$  et  $V_n$  ne sont pas exactement calculés, ils sont approchés en utilisant la méthode d'itération de Banach avec une condition d'arrêt de type  $\|X_{new} - X_{old}\| \leq \frac{1}{10N}$  avec un nombre d'itérations qui ne dépasse pas 1000.

Pour évaluer l'efficacité de ces méthodes, nous calculons

$$F_N = \max_{0 \leq n \leq N} \{|u(t_n) - U_n| + |u'(t_n) - \bar{U}_n|\},$$

pour la méthode décrite dans [6] et

$$E_N = \max_{0 \leq n \leq N} \left\{ \left| u(t_n) - \left( f(a) + h \sum_{n=0}^N w_n V_n \right) \right| + |u'(t_n) - V_n| \right\},$$

pour notre méthode.

**Exemple 4.3.1** *Considérons l'équation intégrale-différentielle non linéaire de Volterra, qui est défini comme suit,*

$$u(t) = \int_0^t \frac{t(s+1)}{1 + (u(s)^2 + u'(s)^2)} ds + f(t) \quad (4.14)$$

Le noyau  $K(t, s, x, y) = \frac{t(s+1)}{1 + (u(s)^2 + u'(s)^2)}$  vérifie (H7) Si on prend

$$f(t) = \sin(t) - \frac{t}{2} \left( \frac{t^2}{2} + t \right)$$

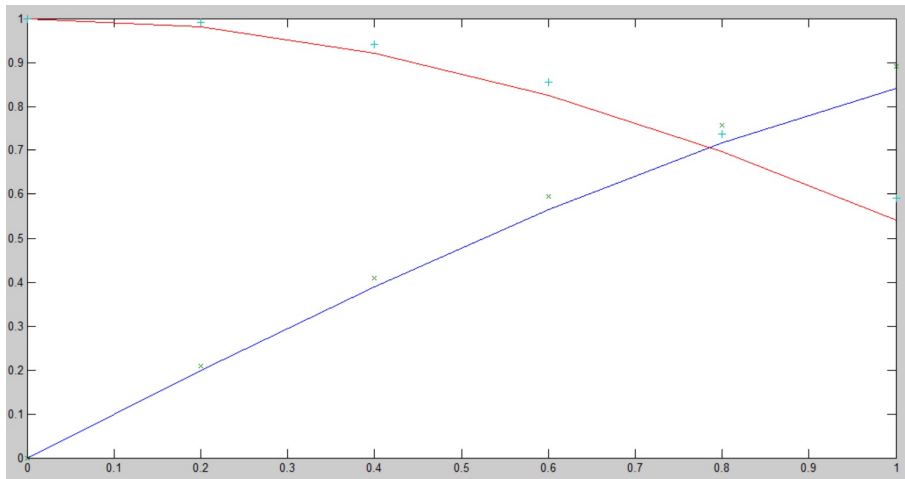
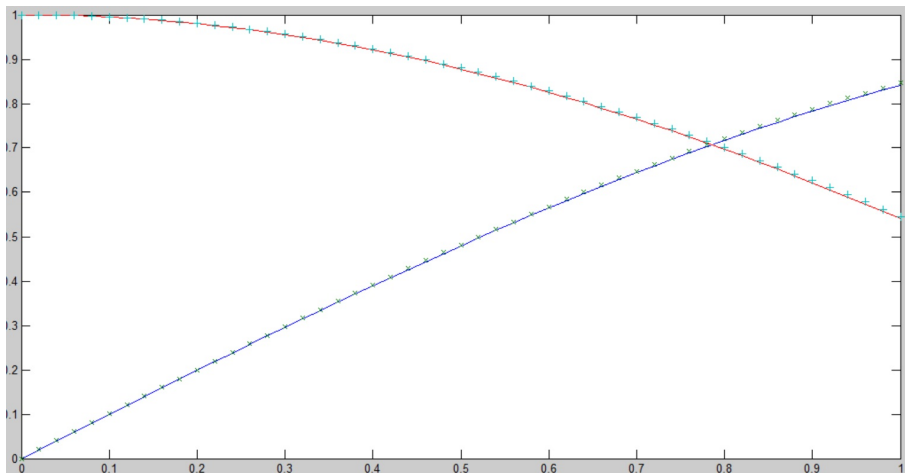
on a

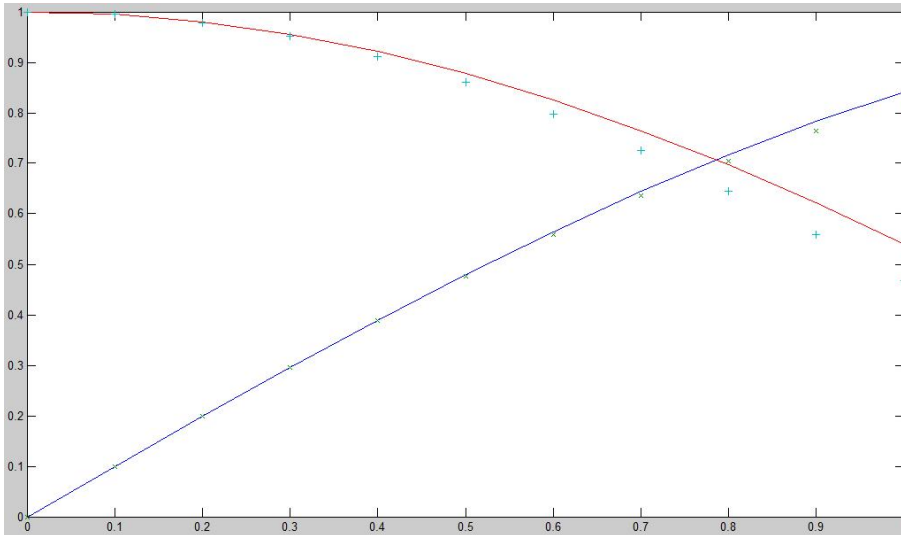
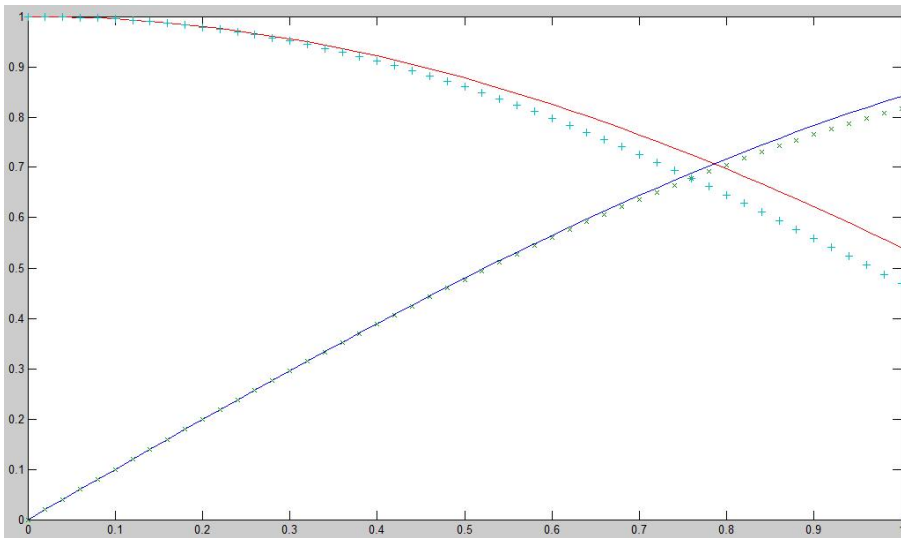
$$u(t) = \sin(t)$$

Le tableau suivant représente les résultats numériques obtenus en utilisant la méthode présentée dans cet article et celle présentée dans [6] pour Eq. (4.14).

Tableau 1. Nouvelle méthode de l'équation (4.14) par rapport à l'ancienne méthode.

$N$	Nouvelle méthode : $E_N$	Ancienne méthode : $F_N$
200	$6.95E - 4$	$6.55E - 4$
300	$4.54E - 4$	$4.21E - 4$
500	$1.26E - 4$	$1.09E - 4$
1000	$8.25E - 5$	$9.62E - 5$
1500	$5.42E - 5$	$6.15E - 5$

FIGURE 4.1 – Ancienne méthode  $n=5$ .FIGURE 4.2 – Ancienne méthode  $n=50$

FIGURE 4.3 – Nouvelle méthode  $n=5$ FIGURE 4.4 – Nouvelle méthode  $n=50$ 

**Exemple 4.3.2** Nous changeons le facteur  $u$  de 1 à 100 pour obtenir  $A > 1$ ,

$$u(t) = \int_0^t \frac{t(s+1)}{1 + (100u(s)^2, u'(s)^2)} ds + f(t) \quad (4.15)$$

on a alors

$$u(t) = t$$

Tableau 2. Nouvelle méthode de l'équation (4.15) par rapport à l'ancienne méthode.

$N$	Nouvelle méthode : $E_N$	Ancienne méthode : $F_N$
200	$8.05E - 4$	$7.63E + 1$
300	$3.33E - 4$	$7.57E + 1$
500	$1.12E - 4$	$7.48E + 1$
1000	$8.52E - 5$	$7.34E + 1$
1500	$5.51E - 5$	$7.28E + 1$

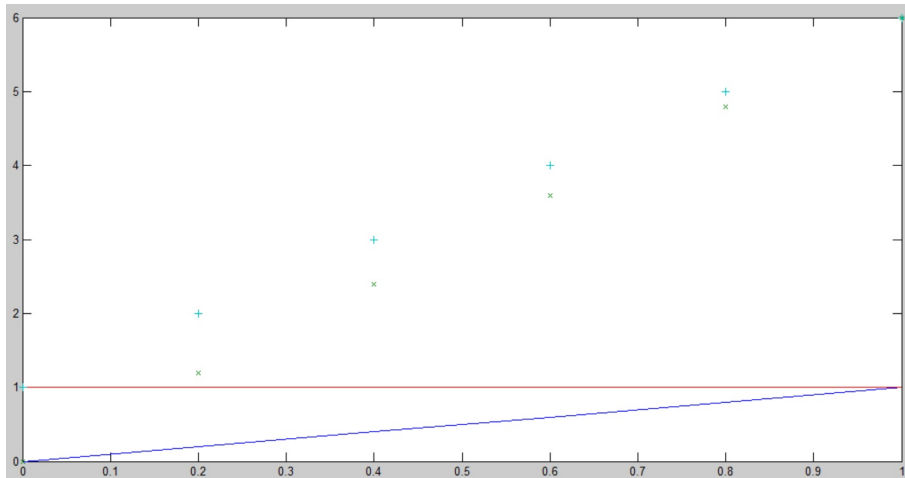
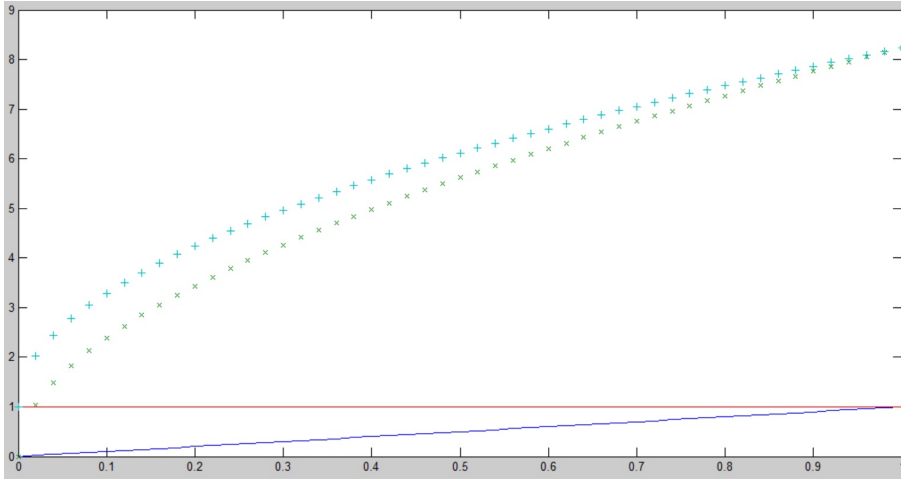
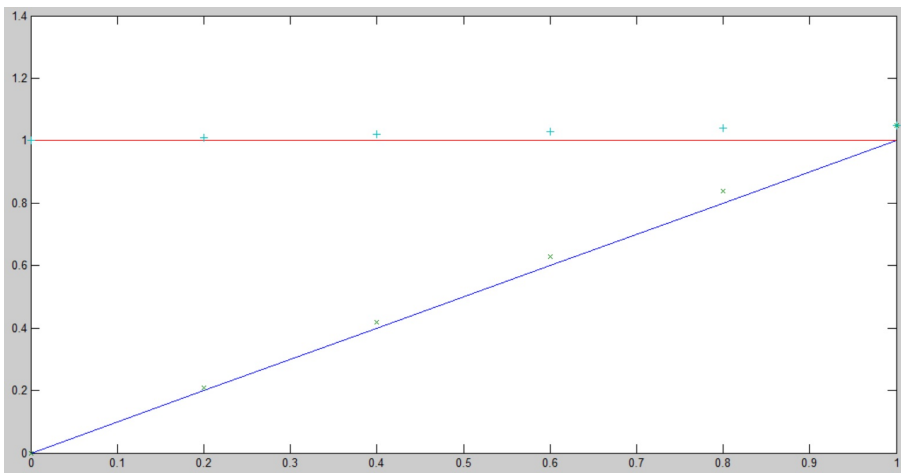
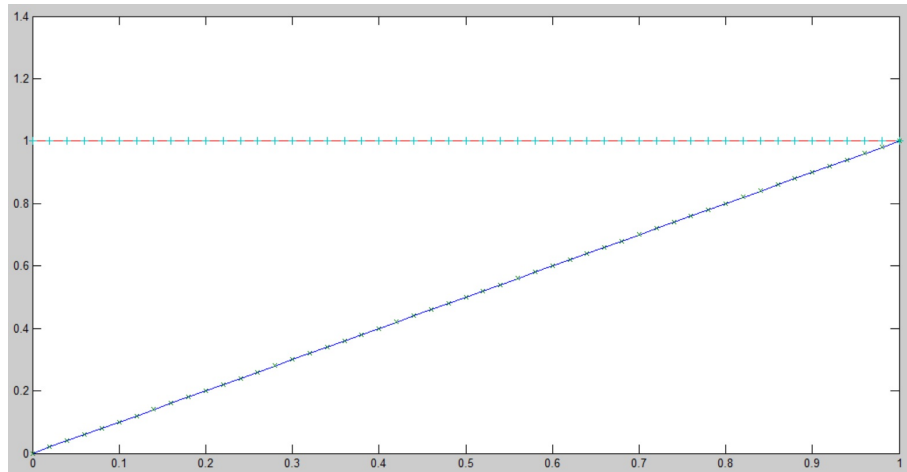


FIGURE 4.5 – Ancienne méthode n=5.



FIGURE 4.6 – Ancienne méthode  $n=50$ FIGURE 4.7 – Nouvelle méthode  $n=5$

FIGURE 4.8 – Nouvelle méthode  $n=50$

# Conclusion

Nous avons construit une méthode numérique basée sur celle de Nystöm. Cette méthode, contrairement à celle développée dans [6], n'a pas besoin de la condition restrictive  $A < 1$  pour converger. Les tests numériques développés montrent que :

- Si l'exemple sélectionné vérifie la condition  $A < 1$ , les deux méthodes convergent de la même manière.
- D'autre part, si  $A > 1$ , la méthode décrite dans [6] diverge et notre méthode converge parfaitement.

Les résultats numériques obtenus montrent que les hypothèses ( $H7$ ) sont largement suffisantes pour la construction d'une approximation numérique de la solution de notre équation. Ce qui montre qu'avec cette nouvelle méthode, nous pouvons rester sur le même chemin de recherche initié pour le cas non-différentiel. Les hypothèses ( $H7$ ) et la nouvelle méthode décrites dans cet article représentent la vraie généralisation du travail effectué dans le cas non différentiel. Reste à savoir si la condition  $B < 1$  peut être améliorée ou non. Nous croyons que c'est une bonne perspective de recherche.



# Bibliographie

- [1] A. Anber, Z. Dahmani, "The variational iteration method for solving the fractional coupled lotka-volterra equation", *Journal of Interdisciplinary Mathematics*. 14 (2011) No.4, p. 373-388.
- [2] A. Babaaghaie, K. Maleknejad, "Numerical solutions of nonlinear two-dimensional partial Volterra integro-differential equations by Haar wavelet". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Accepted paper (2016).
- [3] A. Amosov, M. Ahues, A, Largillier. (2009). "Superconvergence of some projection approximations for weakly singular integral equations using general grids". *SIAM journal on Numerical Analysis*, 47(1), 646-674.
- [4] A. Lotka. "On an integral equation in population analysis". *The Annals of Mathematical Statistics*, 10(2),(1939), 144-161.
- [5] A. Quarteron, Riccardo Sacco, Fausto Saleri, *Méthodes Numériques*. ISBN13978-88-470-0495-5 Springer Milan Berlin Heidelberg NewYork.
- [6] F. Chatelin, *Spectral approximation of linear operator*, Academic press, London, (1983).
- [7] H. Brunner, *The numerical treatment of Volterra integro-differential equations with unbounded delay*. *Journal of Computational and Applied*

- Mathematics. 28 5-23(1989)
- [8] H. Guebbai, M. Z. Aïssaoui, I. Debbar, B. Khalla, "Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equation". Applied Mathematics and Computation 229 367-373 (2014) .
- [9] Jean-Louis Merrien, Analyse numérique avec matlab, Sciences Sup, 6647747 ISBN 978-2-10-050863-1.
- [10] K. Atkinson, W. Han, Theoretical Numerical Analysis : A Functional Analysis Framework. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [11] K.E. Atkinson, A survey of numerical methods for the solution of Fredholm integral equations of the second kind, SIAM(1976).
- [12] L. Zhu, Y. Wang, "Numerical solutions of Volterra integral equation with weakly singular kernel using SCW method." Applied Mathematics and Computation, 260 (2015), p 63-70.
- [13] M. Ahues, A. Largillier and B.V. Limaye. "Spectral Computations for Bounded Operators." Chapman and Hall/CRC, 2001.
- [14] M. Ahues, A. Largillier, O. Titaud. (2001). The roles of a weak singularity and the grid uniformity in relative error bounds. Numerical Functional Analysis and Optimization, 22(7-8), 789-814.
- [15] M.V. Bulatov. Integro-differential systems with a degenerate matrix multiplying the derivative. Differential Equations, 38(5)(2002), 731-737.
- [16] M.V. Bulatov and Lima, P. M. (2011). "Two-dimensional integral algebraic systems : Analysis and computational methods". Journal of computational and applied mathematics, 236(2), 132-140.

- 
- [17] P. Linz, Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. SIAM Studies in Applied Mathematics. Philadelphia (1985)
- [18] R. A. Adams, Sobolev spaces. Academic Press, New York, 1975.
- [19] R. Kulkarni. "On improvement of the iterated Galerkin solution of the second kind integral equations". Journal of Numerical Mathematics jnma, 13(3)(2005), 205-218.
- [20] S. Segni, M. Ghiat, H. Guebbai. (2019). "New approximation method for Volterra nonlinear integro-differential equation". Asian-European Journal of Mathematics, 12(01), 1950016
- [21] T. Sato. "Sur l'équation intégrale non linéaire de Volterra". Compositio Mathematica, 11, (1953) : 271-290.
- [22] Z. Gu, X. Guo, D. Sun, "Series expansion method for weakly singular Volterra integral equations". Journal Applied Numerical Mathematics, 105 (2016) p. 112-123.