الجمـــــهورية الجزائريـــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université 8 mai 1945 Guelma

وزارة التعليـم العالـــي
و البحـث العلمـي
جامعـة 8 مـــاي 1945 قالمـــة

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière

Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat en sciences

Option : Mathématiques Appliquées

Intitulée

Méthode de discrétisation pour différents types des EDP.

Par

M^me^. REZGUI Nassima

Devant le jury composé de :

Mme. A. GUEZANE-LAKOUD	Prof. Université d'Annaba	Présidente
Mr. A. CHAOUI	Prof. Université de Guelma	Rapporteur
Mr. F. ELLAGGOUNE	Prof. Université de Guelma	Examinateur
Mr. K. BOUKERRIOUA	M.C.A. Université d'Annaba	Examinateur

Thèse soutenue le: **24/09/2018**

Remerciement

Je tiens avant tout à remercie le Professeur ***A. CHAOUI*** *pour avoir accepté d'être mon directeur de thèse. Sans l'aide précieuse qui ma accordé, ce travail n'aurait pu aboutir.*

Je lui suis profondément reconnaissante de m'avoir fait bénéficier de son expérience et de ses compétences pour la réalisation de cette thèse.

J'adresse mes chaleureux et vifs remerciements au Professeur ***A. GUEZANE-LAKOUD****, du département de Mathématiques de l'université d'Annaba, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury et d'examiner ma thèse.*

Je tiens également à exprimer mes profonds remerciements au Professeur ***F. ELLAGGOUNE*** *du département de Mathématiques de l'université de Guelma, de m'avoir fait l'honneur de juger ce travail en qualité d'examinateur.*

J'adresse mes sincères remerciements au Docteur ***K. BOUKERRIOUA****, Maître de Conférences au département de Mathématiques de l'université d'Annaba, pour avoir accepté d'être membre du jury. Je lui suis très reconnaissante d'avoir accepté de juger ce travail.*

Mes remerciements aux responsables, président et membres du comité scientifique du département de Mathématiques de l'université de Guelma.

Je tiens à témoigner ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à l'ensemble du corps administratifs et du conseil scientifique de la faculté MISM de l'université de Guelma.

Enfin, J'adresse un grand merci à toute ma famille en particulier à ma mère et à ma sœur El Haja Tefaha et son mari El Haj Aziz, j'espère qu'ils reviendront de la Mecque en bonne santé.

Je réserve les derniers mots pour mes enfants et pour mon mari Docteur ***Amar BOUDEFEL*** *pour son grand soutien.*

Table des matières

ملخص

نهدف في هذه الرسالة إلى تقديم تحديث مهم لطريقة روث لتشمل معالجة معادلات تفاضلية-تكاملية منحلة ومعادلات تفاضلية جزئية بمشتقات كسرية، مرفقة بشروط إبتدائية تكاملية.

الفكرة الأساسية المطروحة هي إجراء الحسابات في فضاءات مناسبة و إدخال مفهوم الحل الضعيف في المواضيع المطروحة. بعد ذلك نعطي تقديرات أولية مهمة التي على أساسها يتم البرهان على تقارب المخطط التقريبي المناسب. يتم الحصول على وجود ووحدانية الحل الضعيف وكذلك بعض النتائج المنتظمة.

كلمات مفتاحية

طريقة روث، تقديرات مسبقة، حل ضعيف، معادلات تفاضلية بمشتقات جزئية منحلة، معادلات تفاضلية بمشتقات كسرية.

Résumé

L'objectif de cette thèse est de développer la méthode de Rothe pour l'étude d'une équation parabolique dégénérée intégro-différentielle avec une condition non locale de type intégrale, ainsi que pour l'étude d'une équation pseudo-parabolique fractionnaire avec condition intégrale fractionnaire.

L'idée principale proposée est de mener les calculs dans des espaces convenables et d'introduire la notion de solution faible pour les problèmes étudiés. Par la suite, on établit les estimations a priori nécessaires, sur la base desquelles la convergence du schéma d'approximation correspondant est démontrée. L'existence et l'unicité de la solution faible ainsi que certains résultats de régularité sont obtenues.

Mots clefs : Méthode de Rothe, estimations a priori, solution faible, équation parabolique dégénérée intégro-différentielle, équation pseudo-parabolique fractionnaire.

Abstract

The aim of this thesis is to develop Rothe's method for the study of degenerate parabolic integrodifferential equation with initial, Neumann and non local integral conditions, as well as for the fractional pseudoparabolic equation with fractional integral condition.

The main idea proposed is to carry out the calculations in suitable spaces and to introduce the notion of weak solution for the studied problems. Subsequently, we establish the estimates a priori necessary, on the basis of which the convergence of the corresponding approximation scheme is demonstrated. The existence and uniqueness of the weak solution as well as some regularity results are obtained.

Key words : Rothe's method, estimates a priori, weak solution, degenerate parabolic integrodifferential equation, fractional pseudo-parabolic equation.

Chapitre 1

Introduction

Les équations aux dérivées partielles modélisent la majorité des phénomènes physiques, mécaniques, biologiques où économiques. Pour contribuer au développement de ces sciences, il est nécessaire de bien comprendre les propriétés des solutions de ces équations. Bien que la résolution directe est parfois difficile, les recherches sont orientés vers l'étude numérique de ces équations, ainsi la résolution numérique a pris une importance considérable ces dernières décennies pour les équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires.

En ce qui concerne les méthodes d'approximation numériques, la méthode de Rothe est l'une des plus populaires utilisées dans la discrétisation des équations d'évolutions.

Cette thèse est consacrée à l'étude de deux types différents d'équations aux dérivées partielles : celle de type parabolique dégénérée intégro-différentielle, avec des conditions : initiale, Neumann et intégrale, et celle de type pseudo-parabolique fractionnaire muni d'une condition intégrale fractionnaire, en utilisant la méthode de discrétisation de Rothe.

Tout d'abord, nous allons commencer par l'étude d'une équation de diffusion parabolique dégénérée intégro-différentielle

$$\partial_t \beta (u) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_0^t a (t - s) \, k (u (s, x)) \, ds + f (t, x, u) .$$

Avec condition initiale

$$u (0, x) = u_0 (x) , \; x \in (0, 1) ,$$

condition de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x} (t, 0) = 0, \; t \in I = [0, T] ,$$

et la condition intégrale non locale

$$\int_0^1 u (t, x) = 0.$$

Où $\beta(u)$ est une fonction non linéaire.

Ce problème inclut le modèle mathématique d'une grande classe de problèmes, par exemple il décrit le transport des contaminants dans des milieux poreux [12]. Il s'applique également dans la modélisation du flux d'huile et d'eau dans l'ingénierie des gisements pétroliers et des flux d'air et d'eau dans les champs agricoles [40].

Un exemple de la fonction β est donné dans l'équation différentielle partielle suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(c + \frac{\rho_b k}{\theta} c^p \right) - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + q \frac{\partial c}{\partial x} = 0.$$

Qui modélise l'écoulement d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux unidimensionnel, où le fluide est contaminé par un soluté en cas de réactions d'absorption à l'équilibre au moyen de l'isotherme de Freundlich, ici c est la concentration du fluide, ρ_b est la densité apparente du milieu poreux, $\theta > 0$ est la porosité, D est le coefficient de dispersion, q est la vitesse moyenne du fluide et $p \in (0, 1)$.

Rappelons que l'effet de régularité se produit pour les équations paraboliques linéaires mais pas pour les équations paraboliques dégénérées non linéaires, c'est-à-dire que la solution peut commencer d'une fonction initiale régulière mais devient non régulière dans le temps.

Le but principal de cette thèse, est d'étendre la méthode de Rothe pour couvrir des problèmes d'évolution contenant des équations différentielles fractionnaires. Ces problèmes apparaissent dans plusieurs domaines d'investigation par exemple en sciences et en ingénierie tels que la rhéologie, les flux de fluides, les réseaux électriques, la viscoélasticité, la physique chimique, les biosciences, traitement de signal, la théorie du contrôle des systèmes, l'électrochimie, la mécanique et les processus de diffusion. Pour les motivations générales, la théorie pertinente et son application voir les références [3, 4, 13, 17, 23, 24, 26, 28, 29, 31, 36 et 38].

La théorie des dérivées fractionnaires remonte à la fin de l'année 1695 quand L'Hospital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur le sens de la dérivée d'ordre un demi. A partir de ce jour, plusieurs mathématiciens comme Euler, Liouville, Abel, Riemann, Letnikov,..., ont contribué au développement de ce sujet. Les premières définitions de la dérivée fractionnaire sont dues à Liouville, après Riemann a proposé une approche plus importante est depuis elle porte le non "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories ont fait leurs apparitions comme celle de Grünwald-Letnikov, de Weyl et de Caputo [39].

Plusieurs auteurs ont confirmé que l'usage des dérivées et des intégrales fractionnaire est bien adapté pour la description des propriétés de plusieurs matériaux comme les polymères. La dérivée fractionnaire procure un excellent instrument pour la description de la propriété de mémoire de plusieurs matériaux et processus puisque, la dérivée fractionnaire d'une fonction tient compte de tout l'historique de la fonction et ne reflète pas uniquement des caractéristiques locales comme dans le cas de la dérivée d'ordre entier [33].

Les équations pseudo-paraboliques représentent une classe importante des équations aux dérivées partielles, elles sont caractérisées par l'apparition de dérivées mixtes de troisième ordre, plus précisément, du second ordre dans l'espace et du premier ordre en temps par exemple

$$u_t - \Delta u - \Delta u_t = f(u).$$

De tels problèmes ont de nombreuses applications dans diverses situations physiques, notamment dans les flux non réguliers de second ordre [11, 42]. Dans l'infiltration de fluides homogènes à travers des roches fissurées (voir [7]). D'autre part, les équations de diffusion fractionnaires incluent le modèle mathématique d'une grande classe de problèmes. Elles décrivent la diffusion anormale sur les fractales (objets physiques de dimension fractionnaire), la marche aléatoire fractionnaire (voir [6, 14, 27] et leurs références). Citons quelques documents intéressants traitant ce genre de problèmes. Le premier d'entre eux est celui d'Oldham et al. [32] qui ont étudié la relation entre l'équation de diffusion ordinaire et une équation de diffusion fractionnaire. Dans [27] F. Mainardi et al. ont établit le modèle de diffusion d'ondes en viscoélasticité basé sur le calcul fractal. Agarwal [1] a discuté les solutions de l'équation de diffusion d'onde fractionnaire définie dans un domaine borné.

El - Borai [14] a étudié les solutions fondamentales des équations d'évolution fractionnaires.

Récemment Mophou et al. [29] ont considéré l'équation d'évolution fractionnaire avec la condition intégrale fractionnaire dans l'espace de Sobolev, où les auteurs ont supposé que le coefficient opérationnel est un générateur de semi-groupe de contractions.

Le second problème étudié dans cette thèse est inspirée du problème précédent ainsi que d'autres travaux [6, 7, 17 et 18]. L'idée principale proposée consiste à développer la méthode de Rothe pour l'étude de l'équation pseudo-parabolique fractionnaire définie par

$$D_{R\ L}^{\alpha}u\left(t,x\right)-\Delta u\left(t,x\right)-\Delta u_{t}\left(t,x\right)=f\left(t,\ x\right),\qquad (t,x)\in Q_{T},$$

avec les conditions :

$$u\left(0,x\right)=u_{0}\left(x\right),\ x\in\Omega,$$

$$u=0\ sur\ I\times\Gamma,$$

$$I^{1-\alpha}u\left(0^{+}\right)=U_{1}\left(x\right),\ \text{dans }\Omega$$

où $\alpha\in\left]0,1\right[,\ I=[0,T]$ et Ω est un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, avec une frontière régulière Γ, $Q_T = I\times\Omega$. L'intégrale fractionnaire $I^{1-\alpha}$ et la dérivée D_{RL}^{α} sont prises dans le sens de Riemann-Liouville.

Dans le cas de $\alpha = 1$, notre équation se réduit à l'équation pseudo-parabolique ordinaire qui est bien documentée.

La présence des conditions intégrales est la source de grande complication. L'idée proposée est de mener les calculs dans des espaces fonctionnels non classique et d'introduire une définition appropriée de la notion de solution faible pour les problèmes étudiés. En choisissant la méthode de discrétisation de Rothe, nous établissons les estimations a priori nécessaires, sur la base des quelles la convergence d'un schéma d'approximation semi discrétisé correspondant est démontré.

La méthode de Rothe est couramment utilisée dans la discrétisation en temps des équations d'évolution où les dérivées par rapport à une variable sont remplacées par des quotients de différence qui mènent finalement à un système d'équations des variables restantes. Comme approche approximative, la méthode de Rothe est l'une des plus populaires, adaptée non seulement pour prouver les résultats d'existence, mais aussi pour diverses applications.

Cette technique a été introduite par Rothe en 1930 pour résoudre des équations linéaires paraboliques du second ordre à une seule variable spatiale [37]. Plus tard, cette méthode a été adoptée par Ladyzenskaja [23, 24] pour résoudre des problèmes paraboliques linéaires et quasi linéaires paraboliques du second ordre et d'équations linéaires d'ordre supérieur. Le développement ultérieur est lié à Rektorys [35, 36] qui a obtenu plus de solutions régulières. Récemment, la méthode de Rothe a été développée pour couvrir d'autres types d'équations comme nous pouvons le voir dans [5, 9, 17, 18 et 22].

Le schéma de discrétisation de la méthode de Rothe est présenté comme suit :

On divise l'intervalle du temps en n sous intervalles (t_{i-1}, t_i) , $i = 1, ..., n$. où $t_i = ih$ et $h = \frac{T}{n}$. On note par $u_i = u_i(x) = u_i(x,\ ih)$ les approximations de u.

On remplace les dérivées de la fonction u, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ par $\delta^2 u_i = \dfrac{\delta u_i - \delta u_{i-1}}{h}$ et $\delta u_i = \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h}$ pour tout $t = t_i,\ i = 1, ..., n$.

On obtient un système formé de n équations en x où l'inconnu est $u_i(x)$, donc on approche le problème posé en tout point t_i par un nouveau problème discret.

On détermine les fonctions u^n solutions du système obtenu.

On construit les fonctions de Rothe définies par

$$u^n(t) = u_{i-1} + \delta u_i (t - t_i), \quad t \in [t_{i-1},\ t_i],\ i = 1, ..., n$$

et les fonctions test correspondantes

$$\overline{u}^n(t) = \begin{cases} u_i & t \in [t_{i-1},\ t_i], \quad i = 1, ..., n \\ U_0 & t \in [-h,\ 0] \end{cases}$$

Après avoir démontré quelques estimations pour la solution approchée, nous établissons la convergence de la solution approchée $u^n(t)$ vers la solution du problème posé.

Cette thèse est composée de quatre chapitres.

Nous commençons par une introduction générale, au second chapitre nous rappelons quelques notions d'analyse fonctionnelle, comme les espaces de Sobolev et les espaces de Bochner ainsi que quelques lemmes et théorèmes utiles. Nous donnons aussi des définitions de base du calcul fractionnaire comme les intégrales et les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville ainsi que quelques propriétés essentielles.

Dans le troisième chapitre, on traite l'équation de diffusion parabolique dégénérée intégro-différentielle et sa discrétisation en utilisant la méthode de Rothe. On commence par une description de quelques espaces fonctionnels particuliers, nous donnons des hypothèses nécessaires dans notre étude et nous précisons le concept de solution faible. En suite, nous discrétisons l'équation, en utilisant un schéma implicite, on construit une solution numérique du problème discrétisé, après on déduit des estimations a priori des approximations ainsi que la convergence de la solution. Finalement nous discutons l'unicité de la solution faible.

Le dernier chapitre, est consacré à l'application du schéma de discrétisation de Rothe en temps pour trouver une solution approximative d'une équation pseudo-parabolique fractionnaire avec une condition intégrale fractionnaire. Après avoir donné quelques estimations a priori, nous établissons la convergence de la solution. L'existence et l'unicité de la solution faible ainsi que certains résultats de régularité sont obtenus. A la fin nous donnons un exemple illustratif. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication :

CHAOUI, A. et REZGUI, N. Solution to fractional pseudoparabolic equation with fractional integral condition. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2, 2017, p. 1-9.

On termine cette thèse par une conclusion et perspectives.

Chapitre 2

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions fondamentales d'analyse fonctionnelle, comme les espaces de Sobolev et les espaces de Bochner ainsi que quelques lemmes et théorèmes utiles. Nous présentons aussi des définitions et des lemmes de base du calcul fractionnaire ainsi que quelques propriétés essentielles des intégrales et des dérivées fractionnaires, le choix étant réduit aux définitions et propriétés introduites dans cette thèse. La majorité des rappels énoncés dans ce chapitre sont tirés des livres [2, 7, 8, 19, 21, 33, 39, 41].

2.1 Espaces de Sobolev

La notion de solution faible, fait intervenir les espaces de Sobolev qui sont des outils de base pour la résolution des équations aux dérivées partielles.

2.1.1 Espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

Définition 2.1 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$; on pose*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.1}$$

la norme correspondante.

Définition 2.2 *On pose*

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = Inf \{ C\ ;\ |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \}, \tag{2.2}$$

la norme correspondante.

Remarque 2.1 *On utilise souvent $L^2(\Omega)$, l'espace des fonctions mesurables de carré sommable dans Ω muni du produit scalaire*

$$(f, g) = \int_\Omega f(x) \, g(x) \, dx, \tag{2.3}$$

et la norme

$$\|f\|_{L^2} = (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4}$$

Définition 2.3 *Soit f une fonction de $L^2(\Omega)$. On dit que f est dérivable au sens faible dans*

$L^2(\Omega)$ s'il existe des fonctions $g_i \in L^2(\Omega), \forall\ i \in \{1, ..., N\}$, telles que,

pour toute fonction $\phi \in C_C^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega f(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega g_i(x) \phi(x) dx. \tag{2.5}$$

Chaque g_i est appelée la i-ème dérivée partielle faible de f et notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

$C_C^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω.

Définition 2.4 *On appelle espace de Sobolev $H^1(\Omega)$, l'espace défini par*

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall\ i \in \{1, ..., N\}, \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\},$$

où $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de f au sens de la définition 2.3.

Proposition 2.1 *L'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$(f, g)_{H^1} = \int_\Omega (f(x) g(x) + \nabla f(x) . \nabla g(x)) dx \tag{2.6}$$

et de la norme

$$\|f\|_{H^1} = (\int_\Omega (|f(x)|^2 + |\nabla f(x)|^2) dx)^{\frac{1}{2}} \tag{2.7}$$

est un espace de Hilbert.

Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui nous sera très utile dans notre travail.

Définition 2.5 *L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $C_C^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Il est défini aussi comme le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'an-*

nulent sur le bord $\partial\Omega$.

En général, $H_0^1(\Omega)$ est strictement plus petit que $H^1(\Omega)$ car $C_C^\infty(\Omega)$ est un sous-espace strict de $C_C^\infty(\overline{\Omega})$.

Une exception importante est le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$: en effet, dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$, $C_C^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, donc on a $H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$, puisque l'espace entier $\mathbb{R}^N$ n'a pas de bord.

Définition 2.6 *Le dual de l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est appelé $H^{-1}(\Omega)$.*

On note $\langle L, \phi\rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)} = L(\phi)$ le produit de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et son dual pour toute forme linéaire continue $L \in H^{-1}(\Omega)$ et toute fonction $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Le nombre $\|.\|_{-1}$ représente la norme sur $H^{-1}(\Omega)$.

Proposition 2.2 *L'espace $H^{-1}(\Omega)$ est caractérisé par*

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{ f = g_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \text{ avec } g_0,\ g_1, \ldots,\ g_N \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Autrement dit, toute forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$, notée $L \in H^{-1}(\Omega)$, s'écrit pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$,

$$L(\phi) = \int_\Omega (g_0\phi - \sum_{i=1}^{N} g_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}) dx,$$

avec $g_0,\ g_1, \ldots,\ g_N \in L^2(\Omega)$.

Maintenant nous allons généraliser la définition de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ à l'espace $H^m(\Omega)$.

Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ un multi-indice, c'est-à-dire un vecteur à N composantes entières positives $\alpha_i \geq 0$.

On note $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i$ et, pour une fonction f,

$$\partial^{\alpha} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_N} x_N}$$

Définition 2.7 *Pour un entier $m \geq 0$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est défini par*

$$H^m(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \ \text{tel que, } \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m, \ \partial^{\alpha} f \in L^2(\Omega) \right\},$$

où la dérivée partielle $\partial^{\alpha} f$ est à prendre au sens faible.

$H^m(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^{\alpha} f \partial^{\alpha} g \ dx, \tag{2.8}$$

et de la norme

$$\|f\|_{H^m} = (f, g)^{\frac{1}{2}}.$$

2.2 Espaces de Bochner

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $I = [0, T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

On définit les espaces suivants :

1- $C(I, \ L^2(\Omega)) = \left\{ f : I \to L^2(\Omega) \text{ qui associe à } t, \ f(t) \in L^2(\Omega) \text{ continue} \right\}$ muni de la norme

$$\|f\|_{C(I, \ L^2(\Omega))} = \max_{I} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.9}$$

2- $L^2\left(I,\ L^2(\Omega)\right)=\left\{f: I\rightarrow L^2(\Omega)\ \text{ à carré intégrable}\right\}$ muni de la norme

$$\|f\|^2_{L^2(I,\ L^2(\Omega))}=\int_I \|f\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt. \tag{2.10}$$

3- $L^\infty\left(I,\ H_0^1(\Omega)\right)=\left\{f: I\rightarrow H_0^1(\Omega)\ \text{ essentiellement bornée}\right\}$ muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty\left(I,\ H_0^1(\Omega)\right)}=\sup_I \|f\|_{H_0^1(\Omega)}\,. \tag{2.11}$$

2.3 Quelques inégalités et théorèmes utilisés

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

Théorème 2.1 [8] *(Inégalité de Cauchy-Schwarz).* $\forall\ f,\ g\in L^2(\Omega)$,*on a :*

$$\left|\int_\Omega f(x)\,g(x)\,dx\right|\leq\left(\int_\Omega |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.12}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{N} f_i(x)\,g_i(x)\,dx\right|\leq\left(\sum_{i=1}^{N}|f_i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{N}|g_i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Lemme 2.1 (Inégalité de Cauchy) $\forall\ a,\ b\geq 0,\ \forall\ \epsilon>0.$

$$ab\leq\frac{\varepsilon}{2}a^2+\frac{1}{2\varepsilon}b^2. \tag{2.13}$$

Lemme 2.2 (Inégalité de Young) $\forall\ a,\ b\geq 0,\ 1\leq p\leq\infty\ \ et\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$

$$ab\leq\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{p'}b^{p'}. \tag{2.14}$$

Définition 2.8 (Inégalité de Poincaré) *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$*. Il existe une constante* $C > 0$ *(dépendant de* Ω*) telle que, pour toute fonction* $f \in H_0^1(\Omega)$*,*

$$\|f\|_{L^2} \leq C \|\nabla f\|_{L^2}. \tag{2.15}$$

Lemme 2.3 (Inégalité de Gronwall) *(forme continue). Soient* $x(t)$, $h(t)$ *et* $y(t)$ *des fonctions réels intégrables sur l'intervalle* $I = [a, b]$*. Supposons que* $x(t) \geq 0$*. Si* $y(t)$ *satisfait l'inégalité intégrale*

$$y(t) \leq h(t) + \int_a^t x(s) y(s) ds, \ \forall t \in I,$$

alors

$$y(t) \leq h(t) + \int_a^t h(s) x(s) \exp\left(\int_a^t x(\tau) d\tau\right) ds, \forall t \in I. \tag{2.16}$$

En particulier, si $x(t) \equiv C$ *est une constante et* $h(t)$ *est décroissante, alors*

$$y(t) \leq h(t) e^{C(t-a)}, \forall t \in I. \tag{2.17}$$

Lemme 2.4 (Inégalité de Gronwall) *(forme discrète). Soit* $\{a_i\}_i$ *une suite de nombres réels telle que* $a_i \geq 0$, $\forall i$ *satisfaisant :*

$$a_i \leq A + Bh \sum_{k=1}^{i-1} a_k, \ \forall i = 1, \ 2, ...,$$

où A, B, *et* h *sont des constantes positives.*

alors

$$a_i \leq A exp\left[B(i-1)h\right], \tag{2.18}$$

est satisfaite pour tout $i = 1,\ 2, ...,$

Théorème 2.2 [34] (*Critère de compacité de Kolmogorov*). *Soit* Ω *un domaine borné de* $\mathbb{R}^N$, *l'ensemble* M *des fonctions* $f \in L^p(\Omega)$ *est précompacte, si et seulement si,* M *est borné et équicontinu, c'est-à-dire :*

$$\forall \varepsilon,\ \exists \delta > 0\ tq\ \forall f \in M,\ \int_\Omega |f(x+y) - f(x)|^p\, dx < \varepsilon \text{ pour } |y| < \delta. \tag{2.19}$$

Théorème 2.3 [34] (*Minty-Browder*). *Soit* $d : Q_t = (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *une application monotone pour la dernière variable c'est-à-dire :*

$(d(t,x,z_1) - d(t,x,z_2))(z_1 - z_2) \geq 0$ *pour* $z_1,\ z_2 \in \mathbb{R}^N$, *et* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* $L^p(Q_t)^N$,

$d(t,x,u_n) \rightharpoonup \chi$ *dans* $L^q(Q_t)^N$ *et* $\lim_{n\to\infty} \sup \int_\Omega d(t,x,u_n)u_n dx \leq \int_\Omega \chi u\, dx$. *Alors* $\chi = d(t,x,u)$.

Théorème 2.4 [2] (*Formule de Green*). *Soit* Ω *un ouvert borné régulier de classe* C^2.

Si $f \in H^2(\Omega)$ *et* $g \in H^1(\Omega)$, *on a*

$$\int_\Omega \Delta f(x)\, g(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla f(x) \nabla g(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial n}(x)\, g(x)\, ds. \tag{2.20}$$

Théorème 2.5 [8] (*Lax Milgram*). *Soit* V *un espace de Hilbert réel,* $L(.)$ *une forme linéaire continue sur* V, $a(.,.)$ *une forme bilinéaire continue et coercive sur* V. *Alors la formulation variationnelle :*

Trouver $u \in V$ *tel que* $a(u,v) = L(v)$ *pour toute fonction* $v \in V$, *admet une solution unique. De plus cette solution dépend continument de la forme linéaire* L.

2.4 Intégrales et dérivées fractionnaires

Dans cette section, nous rappelons les définitions des fonctions Gamma, Betta et Mittag-Leffler, ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire, en particulier dans la définition des intégrales et des dérivées fractionnaires. Après, nous allons définir les intégrales et les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville ainsi que quelques propriétés qui seront utilisées dans cette thèse.

2.4.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$, qui généralise le factoriel $n!$ et permet à n de prendre des valeurs non entiers et même complexes.

Définition 2.9 *L'intégrale d'Euler du second type*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad Re(z) > 0, \tag{2.21}$$

est appelée la fonction Gamma, avec $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(0_+) = +\infty$.

Propriétés 2.1

1- $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 \leq z < 1$.

2- La fonction Gamma converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $Re(z) > 0$.

3- L'une des propriétés de base de la fonction gamma est qu'elle vérifie l'équation suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad Re(z) > 0, \tag{2.22}$$

qui est prouvée par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^z dt \\
&= \left[-e^{-t} t^z\right]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \\
&= z\Gamma(z).
\end{aligned}$$

De plus

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)...(z+n-1)}, \quad Re(z) > -n, \quad n = 1,\ 2...,\ z \neq 0,\ \ -1,\ \ -2,... \tag{2.23}$$

En utilisant (2.22), on obtient pour $z = n$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \tag{2.24}$$

Selon la formule (2.23), la fonction Gamma est analytique sur $\mathbb{C}$ sauf pour $z = 0,\ -1,\ -2, ...,$ où elle a des pôles simples.

2.4.2 Fonction Béta

Définition 2.10 *L'intégrale d'Euler du premier type*

$$B(z,\omega) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}\, dt, \quad Re(z) > 0, \quad Re(\omega) > 0 \tag{2.25}$$

est appelé la fonction Béta.

La fonction Béta est liée à la fonction Gamma par la relation

$$B\left(z\ ,\omega\right)=\frac{\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(\omega\right)}{\Gamma\left(z+\omega\right)},\quad Re\left(z\right)>0,\quad Re\left(\omega\right)>0, \tag{2.26}$$

ce qui donne

$$B\left(z,\omega\right)=B\left(\omega,z\right),\quad Re\left(z\right)>0,\quad Re\left(\omega\right)>0. \tag{2.27}$$

2.4.3 Fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle e^z, joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation à un seul paramètre de la fonction exponentielle est la fonction notée par

$$E_\alpha\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(\alpha k+1\right)},\ z\in\mathbb{C},\ Re(z)>0. \tag{2.28}$$

Cette fonction est appelée la fonction de Mittag-Leffler.

Le développement en série :

$$E_{\alpha,\beta}\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(\alpha k+\beta\right)},\quad\left(\alpha>0,\ \beta>0\right), \tag{2.29}$$

est appelé la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres. Cette fonction a été introduite par Agarwal [1] .

Il suit de la relation (2.29) que

$$E_{1,1}\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(k+1\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z. \tag{2.30}$$

Pour $\beta = 1$, on trouve la fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \equiv E_\alpha(z). \tag{2.31}$$

2.4.4 Intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville

La suite des intégrales répétées n-fois est donnée par la formule suivante :

$$\int_a^s dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} g(t_n)\, dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^s (s-t)^{n-1} g(t)\, dt, \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.32}$$

Puisque $(n-1)! = \Gamma(n)$ on remarque que le membre droit de l'égalité (2.32) a un sens pour des valeurs non entière de n. Alors on peut définir l'intégration d'ordre non entier comme suit.

Définition 2.11 *Soit $g \in L^1(a,b)$ et $\alpha > 0$. On appelle intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville, les intégrales*

$$\left(I_{a+}^{\alpha} g\right)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{g(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, \quad t > a, \tag{2.33}$$

$$\left(I_{b-}^{\alpha} g\right)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \frac{g(s)}{(s-t)^{1-\alpha}} ds, \quad t < b. \tag{2.34}$$

Les intégrales (2.33) et (2.34) sont aussi appelées intégrales fractionnaires d'ordre α respectivement à gauche et à droite.

Quand $\alpha = 0$, on pose : $I_{a+}^0 = I$, l'opérateur d'identité c'est-à dire $I_{a+}^0 g(t) = g(t)$. De plus, $I_{a+}^{\alpha} g(0^+)$ désigne la limite (si elle existe) de $I_{a+}^{\alpha} g(t)$ quand $t \to 0^+$; (cette limite peut être infinie).

Remarque 2.2 *Les intégrales fractionnaires données par* (2.33) *et* (2.34) *définies sur l'inter-*

valle fini $[a,b]$, peuvent être eux mêmes étendues sur les demi-axes ou les axes des nombres réels. Ainsi on peut utiliser ces notations sur le demi axe $(0,\infty)$ et donner la définition suivante.

Définition 2.12 *Soit la fonction $g \in L^1(0,\infty)$ et $\alpha > 0$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville est défini par*

$$\left(I_0^{\alpha} g\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{g(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds. \tag{2.35}$$

2.4.5 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 2.13 *Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $0 < \alpha < 1$. Chacune des expressions suivantes*

$$\left(D_{a+}^{\alpha} g\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{g(s)\, ds}{(t-s)^{\alpha}}, \tag{2.36}$$

$$\left(D_{b-}^{\alpha} g\right)(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b \frac{g(s)\, ds}{(s-t)^{\alpha}}, \tag{2.37}$$

est appelée la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville ou dérivée fractionnaire d'ordre α, respectivement à gauche et à droite.

Notons que les dérivées fractionnaires sont introduites pour l'ordre $0 < \alpha < 1$, maintenant nous allons passer au cas $\alpha \geq 1$.

Nous utiliserons les notations : $[\alpha]$ pour la partie entière de α et $\{\alpha\}$ pour la partie fractionnaire, $0 \leq \{\alpha\} < 1$ alors

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}.$$

- Si α est un entier naturel, la dérivée d'ordre α n'est que la dérivée usuelle.

$$D_{a+}^{\alpha} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha},\ D_{b-}^{\alpha} = \left(-\frac{d}{dt}\right)^{\alpha}, \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3, ...$$

- Si α n'est pas un entier naturel nous avons

Définition 2.14 *Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α est définie par :*

$$D_{a+}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} g(s)\, ds, \quad n = [\alpha] + 1, \tag{2.38}$$

$$D_{b-}^{\alpha} g(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} g(s)\, ds, \quad n = [\alpha] + 1, \tag{2.39}$$

avec

$$D_{a+}^{\alpha} g(t) \equiv 0 \text{ si } g(t) = (t-a)^{\alpha-n}, \quad n = 1,\ 2, ..., 1 + [\alpha]\,. \tag{2.40}$$

Les dérivées fractionnaires données par (2.38) et (2.39) peuvent être eux mêmes étendues du cas d'un intervalle fini au cas des demi-axes ou des axes.

Définition 2.15 *Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est donnée par*

$$D_{RL}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}\, g(s)\, ds, \quad t > 0 \tag{2.41}$$

où $\alpha \in (n-1, n)\,,\ n \in \mathbb{N}$.

Maintenant nous allons donner quelques propriétés des intégrales et des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville souvent utilisées dans les calculs.

Propriétés 2.2

Théorème 2.6 [1] *Soit $\alpha,\ \beta \geq 0$. Soit $g(t)$ une fonction telle que $I_{a+}^{\alpha} g(t)\,,\ I_{a+}^{\beta} g(t)$ existent.*

Les intégrales de Riemann-Liouville possèdent les propriétés suivantes :

- ***Interpolation (continuité)***

$$\lim_{\alpha\to n} I_{a+}^{\alpha} g(t) = I_{a+}^{n} g(t),$$

où I^n $(n\in\mathbb{N})$ est l'opérateur usuel de n-fois intégration.

- ***Propriété des semi groupes (loi des exposants)***

$$I_{a+}^{\alpha}\left[I_{a+}^{\beta} g(t)\right] = I_{a+}^{\alpha+\beta} g(t), \tag{2.42}$$

pour tout $t\in[a,b]$

- ***Commutativité***

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} g(t) = I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} g(t) \tag{2.43}$$

pour tout $t\in[a,b]$.

Lemme 2.5 *(a) L'intégrale fractionnaire I_{a+}^{α} est bornée dans $L^p(a,b)$ $(1\le p\le\infty)$ si $\alpha>0$.*

$$\left\| I_{a+}^{\alpha} g\right\|_{L^p(a,b)} \le K\,\|g\|_{L^p(a,b)},\ \ K=\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

(b) Si $0<\alpha<1$ et $1<p<\frac{1}{\alpha}$, alors l'opérateur I_{a+}^{α} est borné de $L^p(a,b)$ dans $L^q(a,b)$, où $q=p/(1-\alpha p)$.

Lemme 2.6 *Si $g,\ h\in L^p(0,T)$, $1\le p\le\infty$, si de plus h est une fonction telle que $g\ge h$, alors*

$$I^{\alpha} g(t) \ge I^{\alpha} h(t), \tag{2.44}$$

ce qui signifie que I^{α} est une fonction croissante.

Lemme 2.7 *Soit $g(t)$ une fonction telle que $D_{a+}^{\alpha} g(t)$ existe.*

La première et peut être la plus importante propriété de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville pour $\alpha > 0$ et $t > a$ est donnée par

$$D_{a+}^{\alpha}\left(D_{a+}^{-\alpha} g(t)\right) = g(t), \tag{2.45}$$

qui signifie que l'opérateur de la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville est l'inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville du même ordre α.

Lemme 2.8 *Soit D_{a+}^{α}, $(m-1 \leq \alpha < m)$ et D_{a+}^{β}, $(n-1 \leq \beta < n)$ deux dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville, alors la relation*

$$D_{a+}^{\alpha}\left(D_{a+}^{\beta} g(t)\right) = D_{a+}^{\beta}\left(D_{a+}^{\alpha} g(t)\right) = D_{a+}^{\alpha+\beta} g(t) \tag{2.46}$$

n'est pas vérifiée sauf si

$g^{j}(a) = 0, \quad (j = 0,\ 1,\ 2...,\ m-1),$

$g^{j}(a) = 0, \quad (j = 0,\ 1,\ 2...,\ n-1).$

Par conséquent les opérateurs D_{a+}^{a} et D_{a+}^{β} commute si

$g^{r}(a) = 0, \quad (j = 0,\ 1,\ 2...,\ r-1),$ *où $r = max(n, m)$.*

2.4.6 Intégration et dérivation fractionnaire comme fonctions réciproques

Il est bien connue que l'intégration et la dérivation ordinaire sont des opérations réciproques si la dernière est appliquée en premier lieu, c'est-à-dire $\left(\frac{d}{dx}\right)\int_a^x g(t)\,dt = g(x)$.Tandis que

$\int_a^x g'(t)\,dt \neq g(x)$ dans le cas générale à cause de l'apparition de la constante $-g(a)$.

De la même façon $\left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a_+}^n g) \equiv g$, mais $I_{a_+}^n g^{(n)} \neq g$ par un polynôme d'ordre $n-1$. Aussi nous aurons toujours $D_{a_+}^\alpha I_{a_+}^\alpha g \equiv g$, mais $I_{a_+}^\alpha D_{a_+}^\alpha g$ ne coïncide pas nécessairement avec g.

Lemme 2.9 *Soit* $T > 0$, $g \in C^m([0,T])$, $\alpha \in (m-1, m)$, $m \in \mathbb{N}$.

Alors pour $t \in [0,T]$, *les propriétés suivantes sont vérifiées*

$$D_{RL}^\alpha g(t) = \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} g(t), \ m = 1, \tag{2.47}$$

$$D_{RL}^\alpha I^\alpha g(t) = g(t), \tag{2.48}$$

$$I^\alpha D_{RL}^\alpha g(t) = g(t) - \sum_{k=1}^{m} \frac{t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k)} \left(I^{m-\alpha} g\right)^{(m-k)}(0), \tag{2.49}$$

$$I^\alpha D_{RL}^\alpha g(t) = g(t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(I^{1-\alpha} g\right)(0), \ si\ m = 1. \tag{2.50}$$

Remarque 2.3 *Si* $g \in L^p(0,T)$, $1 \leq p \leq \infty$, *et* $\varphi :]0,T] \to \mathbb{R}^+$ *est une fonction définie par*

$$\varphi(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

alors

$$\varphi \times g \in L^p(0,T), \ où\ \varphi \times g(t) = \int_0^t \varphi(t-s)\, g(s)\, ds,$$

et $\varphi \times g$ *est absolument continue puisque*

$$\varphi(t-s)\, g(s) \in L^1(0,T).$$

2.4.7 Dérivée fractionnaire de Caputo

La définition de la dérivée de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie du calcul fractionnaire et pour ses applications en mathématiques pures (résolution d'équations différentielles d'ordre entier, définition d'une nouvelle classe de fonction, sommation de séries, ...).

Les problèmes appliqués nécessitent des définitions de dérivées fractionnaires permettant l'utilisation des conditions initiales physiquement interprétables, contenant $g\,(a)$, $g^{'}(a)$, etc.

Malheureusement, l'approche de Riemann-Liouville conduit à des conditions initiales contenant les valeurs limites de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à la borne inférieure $t = a$, ce qui est gênant dans l'interprétation physique des problèmes.

Une certaine solution à ce conflit a été proposée par M. Caputo d'abord dans son article et deux ans plus tard dans son livre, et récemment (en Espaces de Banach) par El-Sayed. La dérivée fractionnaire de Caputo est donnée par [33]

Définition 2.16 *Soit $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$. Si $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$, alors l'expression*

$$^{C}D^{\alpha}g\,(t) = \frac{1}{\Gamma\,(n-\alpha)} \int_{0}^{t} \frac{g^{(n)}\,(s)\,ds}{(t-s)^{\alpha-n+1}}, \;\; t > 0, \tag{2.51}$$

est appelée la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α.

2.4.8 Comparaison entre la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de Caputo

La dérivée de Caputo deviènne la $n^{ème}$ dérivée de la fonction $g\,(t)$ quand $\alpha \to n$, sous des conditions sur la fonction $g\,(t)$.

En effet, supposons que $(0 \leq n-1 < \alpha < n)$ et que la fonction $g(t)$ à $(n+1)$ dérivées bornées continues dans $[a, T]$ pour tout $T > a$. Alors

$$\lim_{\alpha \to n} {}^{C}D_{a}^{\alpha} g(t) = \lim_{\alpha \to n} \left(\frac{g^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha} g^{(n+1)}(s)\, ds \right)$$
$$= g^{n}(a) + \int_a^t g^{(n+1)}(s)\, ds,$$

d'où

$$\lim_{\alpha \to n} {}^{C}D_{a}^{\alpha} g(t) = g^{(n)}(t), \quad n = 1,\ 2, ... \tag{2.52}$$

Ainsi, l'approche de Caputo fournit aussi une interpolation entre des dérivées d'ordre entier comme pour l'approche de Riemann-Liouville.

Le principal avantage de l'approche de Caputo est que les conditions initiales pour les équation différentielles fractionnaires avec des dérivées de Caputo prennent la même forme que celle des équations différentielles d'ordre entier, c'est-à-dire qu'elles contiennent les valeurs limites des dérivées d'ordre entier de fonctions inconnues à la borne inférieure $t = a$.

Une autre différence entre la définition de Riemann-Liouville et la définition de Caputo est que la dérivée de Caputo d'une constante est 0, tandis que dans le cas d'une valeur fini de la borne inférieure a, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante c n'est pas égale à 0, mais

$$D_{RL}^{\alpha} c = \frac{c t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \tag{2.53}$$

On a aussi

$${}^{C}D_{a}^{\alpha} {}^{C}D_{a}^{m} g(t) = {}^{C}D_{a}^{\alpha+m} g(t), \quad (m = 0,\ 1,\ 2, ...; \quad n-1 < \alpha < n), \tag{2.54}$$

tandis que pour la dérivée de Riemann-Liouville

$$D_{a+}^{m}D_{a+}^{\alpha}g\left(t\right)=D_{a+}^{\alpha+m}g\left(t\right),\quad \left(m=0,\ 1,\ 2,...;\quad n-1<\alpha<n\right) \tag{2.55}$$

Le changement des dérivées dans les formules (2.46), (2.47) est permis sous différentes conditions

$$^{C}D_{a}^{\alpha C}D_{a}^{m}g\left(t\right)=^{C}D_{a}^{mC}D_{a}^{\alpha}g\left(t\right)=^{C}D_{a}^{\alpha+m}g\left(t\right),$$

si $g^{(s)}\left(0\right)=0,\ s=n,\, n+1,...m,\, \left(m=0,\ 1,\ 2,...;\ \ n-1<\alpha<n\right)$

$$D_{a+}^{m}D_{a+}^{\alpha}g\left(t\right)=D_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{m}g\left(t\right)=D_{a+}^{\alpha+m}g\left(t\right),$$

si $g^{(s)}\left(0\right)=0,\ s=0,\, 1,\, 2,...,m,\, \left(m=0,\ 1,\ 2,...;\quad n-1<\alpha<n\right).$

Chapitre 3

Solution d'une équation parabolique dégénérée intégro-différentielle avec condition intégrale

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions une équation parabolique dégénérée intégro-différentielle avec des conditions : initiale, Neumann et non locale de type intégrale. Nous allons utiliser la méthode de Rothe en temps pour établir un schéma de discrétisation dans des espaces convenables, ensuite nous montrons l'existence d'une solution faible ainsi que sa convergence vers la solution du problème et on termine par prouver l'unicité de cette solution.

3.2 Position du problème

Considérons l'équation parabolique dégénérée intégro-différentielle de la forme suivante

$$\partial_t \beta(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_0^t a(t-s) k(u(s,x))\, ds + f(t,x,u), \quad (x,t) \in (0,1) \times [0,T], \tag{3.1}$$

Avec condition initiale

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in (0,1) \tag{3.2}$$

Condition de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0, \quad t \in I = [0,T] \tag{3.3}$$

et la condition non locale intégrale

$$\int_0^1 u(t,x) = 0. \tag{3.4}$$

La fonction u représente l'inconnue, f est la source et l'intégrale $\int_0^t a(t-s) k(u(s,x))\, ds$ est le terme de mémoire.

$\beta(u)$ est une fonction non linéaire.

3.3 Hypothèses et définitions

Dans cette section, nous donnons quelques notations, définitions de base et nous faisons quelques hypothèses pour établir l'existence et l'unicité de la solution faible du problème considéré.

Soit $H = L^2(0,1)$ l'espace usuel de Lebesgue des fonctions réelles à carrée intégrables sur $(0,1)$ dont le produit scalaire et la norme seront respectivement notés par $(.)$ et $\|.\|$.

V désigne l'espace de Hilbert défini par :

$$V = \left\{ \phi \in L^2(0,1); \int_0^1 \phi \; dx = 0 \right\}.$$

Nous utiliserons dans ce chapitre les espaces de fonctions suivants :

$$C^{0,1}(I, X) = \{u : I \to X;\; u \text{ fonction Lipschitzienne continue}\}.$$

On note par $C_0^1(0,1)$ l'espace linéaire des fonctions continues à support compact sur $(0,1)$. Comme de telles fonctions sont intégrables au sens de Lebesgue, on peut définir sur $C_0^1(0,1)$ la forme bilinéaire suivante :

$$(u, v) = \int_0^1 \Im_x u \Im_x v dx,$$

où

$$\Im_x u = \int_0^x u(\xi) \, d\xi.$$

La forme bilinéaire (u, v) est considérée comme un produit scalaire sur $C_0^1(0,1)$ pour lequel $C_0^1(0,1)$ n'est pas complet.

Définition 3.1 *On note par $B(0,1)$ le complété de $C_0^1(0,1)$ pour le produit scalaire (u, v), qui est noté par $(.,.)_B$. $B(0,1)$ est appelé l'espace de Bouziani [7] ou l'espace des fonctions primitives à carrée intégrables sur $(0,1)$. La norme d'une fonction u de $B(0,1)$ est le nombre non négatif*

$$\|u\|_B = \sqrt{(u, u)_B} = \|\Im_x u\|.$$

Pour $u \in L^2(0,1)$, nous avons l'inégalité

$$\|u\|_B^2 \leq \frac{1}{2}\|u\|^2,$$

où $\|u\|$ est la norme de u dans $L^2(0,1)$.

Alors, nous avons donc l'injection continue $L^2(0,1) \hookrightarrow B(0,1)$.

Soit V_B l'espace défini par

$$V_B = \left\{ \phi \in B(0,1); \int_0^1 \phi \, dx = 0 \right\}.$$

Les coefficients et les données du problème doivent vérifier les hypothèses suivantes :

(H_1) β est une fonction croissante et Lipschitzienne continue telle que $h^m \leq \beta' \leq h^{-m}$, et $m \in (0, \frac{1}{3})$. Dans le cas dégénéré, nous remplaçons β' par $\beta'_h(s) = \max\left\{h^m,\ \min\left(\beta'(s),\ h^{-m}\right)\right\}$

(H_2) $f(t) \in L^2(0,1)$ et $\left\|f(t) - f(t')\right\|_B \leq l\left|t - t'\right|$.

(H_3) a est une fonction continue telle que

$$\left|a(t) - a(t')\right| \leq c_1 \left|t - t'\right|,$$

$k : I \times B(0,1) \rightarrow L^2(0,1)$ est continue et

$$\|k(t,u)\|_B \leq \|u\|_B.$$

(H_4) Pour $u(t)$, $v(t) \in V$ nous avons

$$|k(t,u) - k(t,v)| \leq L(t)\, \|u(t) - v(t)\|_B$$

pour presque tout $t \in I$, où $L \in L^1(I)$ est une fonction positive.

Nous cherchons une solution faible dans le sens suivant.

Définition 3.2 *Une solution faible du problème* (3.1), *est une fonction* $u : I \to L^2(0,1)$ *qui satisfait :*

(1) $u \in L^2(I,V)$ *avec* $\beta(u) \in C(I, B)$.

(2) $\partial_t \beta(u) \in L^2(I, B^*)$. B^* *est l'espace dual de* B.

(3) u *satisfait* (3.2) *et* (3.4).

(4) *Pour toute* $\phi \in V$, *nous avons*

$$\int_I (\partial_t \beta(u), \phi)_B + \int_I (u,\phi) = \int_I (f,\phi)_B + \int_I \left(\int_0^t a(t-s)\, k(u(s,x))\, ds, \phi \right)_B .$$

3.4 Construction d'un schéma de discrétisation

Le but principal de cette section est de construire un schéma numérique du problème (3.1) basé sur une discrétisation en temps pour aboutir à un système récurrent de problèmes elliptiques qui peut être résolu sur chaque sous intervalle de temps. Pour cela, nous allons introduire le schéma de discrétisation en temps qui correspond à la méthode de Rothe pour le problème considéré.

Soit n un entier positif, divisons l'intervalle $I = [0,T]$ en n sous-intervalles $I_i = [t_{i-1}, t_i]$, de longueur $h = \dfrac{T}{n}$ et notons : $t_i = ih$, $u_i = u(t_i, x)$, $\delta u_i = \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h}$, $f_i = f(t_i, x)$, $a_{ij} = a(t_i - t_j)$, $k(u_j) = k(t_j, u_j)$, $i = 1, ..., n$.

Pour simplifier nous allons négliger x.

Alors le problème (3.1) est approché par la suite récurrente des problèmes suivant :

Trouver $u_i \in V$, $i = 1, ..., n$, telle que

$$\left(\lambda_{i-1}\left(u_i - u_{i-1}\right), \phi_B - h\left(u_i^{''}, \phi\right)_B = h\left(f_i, \phi\right)_B + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij} k\left(u_j\right), \phi)_B, \; \forall \phi \in V, \right. \tag{3.5}$$

$$u_i^{'} = 0,\; t_i \in I_i, \tag{3.6}$$

$$\int_0^1 u_i = 0. \tag{3.7}$$

On a

$$\begin{aligned} \left(u_i^{''}, \phi\right)_B &= \int_0^1 \Im_x u_i^{''} \Im_x \phi dx = \int_0^1 \left[\int_0^X u_i^{''} dx\right] \Im_x \phi dx \\ &= \int_0^1 \left[u_i^{'}\left(x\right) - u_i^{'}\left(0\right)\right] \Im_x \phi dx, \end{aligned}$$

et comme $u_i^{'}(0) = 0$

$$\left(u_i^{''}, \phi\right)_B = \int_0^1 u_i^{'}\left(x\right) \Im_x \phi dx, \tag{3.8}$$

en intégrant par parties on obtient

$$\left(u_i^{''}, \phi\right)_B = \left[u_i\left(x\right) \Im_x \phi\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u_i \phi dx$$

et puisque $\int_0^1 \phi dx = 0$.

on obtient

$$\left(u_i^{''}, \phi\right)_B = -\left(u_i, \phi\right). \tag{3.9}$$

En remplaçant dans (3.5), on obtient finalement

$$\left(\lambda_{i\ -1}\left(u_i-u_{i-1}\right),\phi\right)_B+h\left(u_i,\phi\right)=h\left(f_i,\phi\right)_B+h^2\sum_{j=1}^{i-1}\left(a_{ij}k\left(u_j\right),\phi\right)_B \tag{3.10}$$

où le paramètre de relaxation $\lambda_{i\ -1}$ satisfait, $\lambda_i\ =\beta_h^{'}\left(u_i\right).$

En chaque point t_i de l'intervalle I, le problème (3.1) correspond à un problème elliptique ainsi, l'existence d'une solution faible $u_i\in V$ est assurée par le lemme de Lax-Milgram.

3.5 Estimations a priori

Dans cette section, nous établissons quelques estimations a priori utiles.

Lemme 3.1 *Il existe une constante $C>0$ indépendante de n, l, i, et h telle que la solution u_i du problème discrétisé satisfait les estimations suivantes*

$$h^m\sum_{i=1}^{l}h\left\|\delta u_i\right\|_B^2\le C,$$

$$\left\|u_i\right\|\le C, \tag{3.11}$$

$$\sum_{i=1}^{l}\left\|u_i-u_{i-1}\right\|^2\le C.$$

Preuve. Posons $\phi=u_i-u_{i-1}$ dans (3.10) et faisons la sommation pour $i=1,...,l$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{l}h(\lambda_{i-1}\delta\left(u_i\right),\ \delta u_i)_B+\sum_{i=1}^{l}(u_i,\ u_i-u_{i-1})=\sum_{i=1}^{l}h(f_i,\ \delta u_i)_B+\sum_{i=1}^{l}\left(h^2\sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij}k\left(u_j\right),\ \delta u_i)_B\right) \tag{3.12}$$

L'égalité (3.12) est brièvement notée par : $J_1 + J_2 = J_3 + J_4$. Maintenant nous allons estimer chaque terme.

On a

$$J_1 = \sum_{i=1}^{l} h(\lambda_{i-1}\delta\left(u_i\right), \delta u_i)_B$$

et

$$\lambda_{i-1} = \beta_h^{'}\left(u_{i-1}\right) \geq h^m$$

alors

$$J_1 \geq h^m \sum_{i=1}^{l} h \left\|\delta u_i\right\|_B^2 . \tag{3.13}$$

Pour J_2 utilisant la relation

$$(u, u - v) = \frac{1}{2}\left[\left\|u\right\|^2 - \left\|v\right\|^2 + \left\|u - v\right\|^2\right],$$

alors

$$2J_2 = 2\sum_{i=1}^{l}(u_i,\ u_i - u_{i-1}) = \sum_{i=1}^{l}\left[\left\|u_i\right\|^2 - \left\|u_{i-1}\right\|^2 + \left\|u_i - u_{i-1}\right\|^2\right],$$

d'où on obtient

$$2J_2 = \left\|u_l\right\|^2 - \left\|u_0\right\|^2 + \sum_{i=1}^{l}\left\|u_i - u_{i-1}\right\|^2 . \tag{3.14}$$

Pour J_3 nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour avoir

$$\left|J_3\right| = \left|\sum_{i=1}^{l} h(f_i,\ \delta u_i)_B\right| \leq \sum_{i=1}^{l} h \left\|f_i\right\|_B^2 \left\|\delta u_i\right\|_B^2 \leq C \sum_{i=1}^{l} h \left\|\delta u_i\right\|_B^2 ,$$

de plus l'inégalité de Cauchy donne

$$|J_3| \leq C\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{l} h \left\|\delta u_i\right\|_B^2\right). \tag{3.15}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Cauchy, le terme de mémoire peut être estimé par :

$$|J_4| = \left|\sum_{i=1}^{l} h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \left(a_{ij} k\left(u_j\right), \delta u_i\right)_B\right| \leq C\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{l} h \left\|\delta u_i\right\|_B^2\right). \tag{3.16}$$

En résumant toutes ces considérations, en recueillant (3.13)-(3.16), en choisissant ε suffisamment petit, alors le lemme discret de Gronwall conclut la preuve du Lemme 3.1. ■

Soit $\overline{u}^n$ une fonction d'état définie par

$$\overline{u}^n(t) = \begin{cases} u_i & t \in (t_{i-1}, t_i] \\ u_0 & t = 0 \end{cases}, \quad i = 1, ..., n \tag{3.17}$$

$$\overline{\beta}^n\left(\overline{u}^n(t)\right) = \begin{cases} \beta(u_i) & t \in (t_{i-1}, t_i] \\ \overline{\beta}^n\left(\overline{u}^n(0)\right) = \beta(u_0), & t = 0 \end{cases}, \quad i = 1, ..., n \tag{3.18}$$

On note par f^n et K^n les fonctions

$$f^n(t) = \begin{cases} f_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ f_0 & t = 0 \end{cases}, \quad i = 1, ..., n \tag{3.19}$$

$$K^n(t) = \begin{cases} h\sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij} k\left(u_j\right) & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ h a_{10} k_0, & t = 0 \end{cases}, \quad i = 1, ..., n \tag{3.20}$$

Nous définissons les fonctions de Rothe sur l'intervalle I par

$$u^n(t) = u_{i-1} + (t - t_{i-1})\,\delta u_i, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \qquad i = 1, ..., n \tag{3.21}$$

$$\beta^n(\overline{u}^n(t)) = \beta(u_{i-1}) + \lambda_{i-1}(t - t_{i-1})\,\delta u_i, \qquad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, ..., n \tag{3.22}$$

Lemme 3.2 *L'estimation a priori*

$$\|\lambda_{i-1}\delta u_i\|_* \leq C, \tag{3.23}$$

est satisfaite pour $1 \leq i \leq n$, *où* $\|\lambda_{i-1}\delta u_i\|_* = \underset{\|\phi\|\leq 1,\ \phi\in V}{sup} |(\lambda_{i-1}\delta u_i,\ \phi)|$.

Preuve. On a

$$\|\lambda_{i-1}\delta u_i\|_* \underset{\|\phi\|\leq 1,\ \phi\in V}{= sup} |(\lambda_{i-1}\delta u_i,\ \phi)| \leq \underset{\|\phi\|\leq 1,\ \phi\in V}{sup} \|\lambda_{i-1}\delta u_i\| \|\phi\|,$$

alors

$$\|\lambda_{i-1}\delta u_i\|_* \leq C.$$

■

Remarque 3.1 *Des lemmes 3.1 et 3.2, on déduit les estimations suivantes*

$$a)\ \|\partial_t\beta^n(\overline{u}^n)\|_{L^2(I,B^*)} \leq C,\ \ b)\ \|\overline{u}^n\|_{L^2(I,V)} \leq C,$$

$$c)\ \|\beta(\overline{u}^n) - \beta^n(\overline{u}^n)\|_{L^2(I,B)} \leq \frac{C}{n^{1-2m}},\ \ d)\ \|u^n - \overline{u}^n\|_{L^2(I,B)} \leq \frac{C}{n^{\frac{1-m}{2}}}$$

$$e)\ \|u^n - \overline{u}^n\|_{L^2(I,L^2(\Omega))} \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \tag{3.24}$$

3.6 Résultats de convergence

Selon le lemme 4.1 dans [13] nous avons

$$h^m \left\|\beta(u) - \beta^n(\overline{u}^n)\right\|_{L^2(I,B)} \leq C\left(h + h^{1-2m}\right), \tag{3.25}$$

ce qui donne

$$\beta^n(\overline{u}^n) \underset{n\to\infty}{\to} \beta(u) \text{ dans } L^2(I,B) \tag{3.26}$$

D'autre part, de la remarque (3.1) on a

$$\|\overline{u}^n\|_{L^2(I,V)} \leq C,$$

on déduit que la suite $\{\overline{u}^n\}_n$ est uniformément bornée dans $L^2(I,V)$, par la suite nous pouvons extraire une sous-suite $\{\overline{u}^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\overline{u}^{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u \tag{3.27}$$

dans $L^2(I,V)$.

On a

$$\|f^n(t) - f(t)\|_{L^2(I,\,B)} = \int_I \|f^n(t) - f(t)\|_B^2\, dt$$

Il suit de (H_2) que

$$\|f^n(t) - f(t)\|_{L^2(I,\, B)} \leq \frac{C}{n},$$

alors

$$f^n(t) \underset{n\to\infty}{\to} f(t) \text{ dans } L^2(I, B) \tag{3.28}$$

Lemme 3.3 *La suite $\{K^n\}_n$ est uniformément bornée et possède une sous suite $\{K^{n_k}\}_k$ telle que*

$$K^{n_k} \underset{k\longrightarrow\infty}{\rightharpoonup} K \text{ dans } L^2(I,\ B) \tag{3.29}$$

Preuve. La preuve est la même que dans [6] . ■

Lemme 3.4 *La convergence suivante est vérifiée*

$$\partial_t \beta^{n_k}(\overline{u}^{n_k}) \underset{k\longrightarrow\infty}{\rightharpoonup} \partial_t \beta(u) \text{ dans } L^2(I, B^*) \tag{3.30}$$

Preuve. De la remarque 3.1, on a

$$\|\partial_t \beta^n(\overline{u}^n)\|_{L^2(I,B^*)} \leq C,$$

d'où $\partial_t \beta^n(\overline{u}^n)$ est uniformément bornée dans B^* et ainsi, on peut extraire une sous suite $\{\partial_t \beta^{n_k}(\overline{u}^{n_k})\}_k$ telle que

$$\partial_t \beta^{n_k}(\overline{u}^{n_k}) \underset{k\longrightarrow\infty}{\rightharpoonup} \xi. \tag{3.31}$$

De l'égalité

$$(\beta^{n_k}(\overline{u}^{n_k}) - \beta^{n_k}(U_0), \phi) = \int_0^t (\partial_t \beta^{n_k} \overline{u}^{n_k}(s), \phi)\, ds, \tag{3.32}$$

on obtient quand $k \longrightarrow \infty$

$$\left(\beta\left(u\right)-\beta\left(U_0\right),\phi\right)=\int_0^t\left(\xi,\phi\right)ds, \tag{3.33}$$

ce qui implique

$$\left(\beta\left(u\right)-\beta\left(U_0\right)-\int_0^t\xi\left(s\right)ds,\phi\right)=0, \tag{3.34}$$

par conséquent nous avons $\partial_t\beta\left(u\right)=\xi$. ■

3.7 Existence et unicité

Le résultat principal de ce chapitre est donné dans le théorème suivant.

Théorème 3.1 *La limite u est une solution faible du problème* (3.1) *dans le sens de la définition 3.2.*

Preuve. D'après (3.17) – (3.22) l'égalité (3.10) peut être écrite comme suit

$$\int_I\left(\partial_t\beta^n\left(\overline{u}^n\right),\phi\right)_B+\int_I\left(\overline{u}^n,\phi\right)=\int_I\left(f^n,\phi\right)_B+\int_I(K^n,\phi)_B,\ \forall\phi\in V. \tag{3.35}$$

Selon (3.27), nous avons $u\in L^2\left(I,\ V\right)$ et puisque $u\left(t\right)\in V$ presque pour tout $t\in I$, alors u satisfait la condition (3.4). D'autre part (3.33) implique que $\beta\left(u\left(0\right)\right)=\beta\left(U_0\right)$ ce qui donne $u\left(0\right)=U_0$ (parce que β est une fonction continue et croissante). Maintenant, remplaçons n par $n_k\rightarrow\infty$ dans (3.35) et prenons en compte $(3.27),(3.29)$, les lemmes 3.3 et 3.4, on obtient :

$$\int_I\left(\partial_t\beta\left(u\right),\phi\right)_B+\int_I\left(u,\phi\right)=\int_I\left(f,\phi\right)_B+\int_I(Ku,\phi)_B,\ \forall\phi\in V.$$

Alors u est une solution faible du problème (3.1) dans le sens de la définition 3.2. ■

Maintenant, nous allons démontrer l'unicité de la solution faible, pour cela nous faisons l'hypothèse supplémentaire suivante :

(H_5) $\|\beta(u_1) - \beta(u_2)\|_B \geq C_0 \|u_1 - u_2\|_B$.

Notons que la monotonie de β implique $(\beta(u_1) - \beta(u_2),\ u_1 - u_2)_B \geq 0$.

Théorème 3.2 *Sous les hypothèses (H_1)-(H_5), le problème* (3.1) *a une solution faible unique.*

Preuve. On suppose que le problème (3.1) a deux solutions faibles $u_{1,}$ u_2, alors $u = u_1 - u_2$ satisfait

$$\int_I (\partial_t(\beta(u_1) - \beta(u_2)), \phi)_B dt + \int_I (u, \phi) dt = \int_I \left(\int_0^t a(t-s)\left[k(s,u_1) - k(s,u_2)\right] ds, \phi \right)_B dt \tag{3.36}$$

Soit $W = \dfrac{1}{C_0} \underset{I}{max} |a(t)| \int_0^T L(t)\, dt$. On devise l'intervalle I en deux sous-intervalles de longueur p tel que ; $W.p < 1$, après on choisit la fonction ϕ dans (3.36) tel que

$$\phi(t) = \begin{cases} u(t) & t \in [0.p] \\ 0 & t \in]p.T] \end{cases}.$$

On voit que $\phi \in L^2(I, V)$, alors on obtient

$$\begin{aligned} & (\beta(u_1(p)) - \beta(u_2(p)), u_1(p) - u_2(p))_B + \int_0^p \|u\|^2 dt \\ = & \int_0^p \left(\int_0^t a(t-s)\left[k(s,u_1) - k(s,u_2)\right] ds, u \right)_B dt. \end{aligned} \tag{3.37}$$

En utilisant la condition (H_5), on obtient

$$\beta(u_1(p)) - \beta(u_2(p)), u_1 - u_2)_B \geq C_0 \left\| u_1(p)) - u_2(p) \right\|_B^2 = C_0 \left\| u(p) \right\|_B^2$$

et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la condition (H_4), nous avons

$$\beta(u_1(p)) - \beta(u_2(p)), u_1 - u_2)_B \leq \int_0^p \left\| \int_0^t a(t-s) \left[k(s, u_1) - k(s, u_2) \right] ds \right\|_B . \left\| u(t) \right\|_B dt$$

$$\leq \int_0^p \left\| \int_0^t a(t-s) L(t) \left\| u(s) \right\|_B ds \right\|_B . \left\| u(t) \right\|_B dt$$

$$\leq \underset{I}{max} \left| a(t) \right| \int_0^T L(t)\, dt.p. \max_{t \in [0,p]} \left\| u(t) \right\|_B^2 .$$

Ainsi

$$C_0 \left\| u(p) \right\|_B^2 \leq (\beta(u_1(p)) - \beta(u_2(p)), u_1 - u_2) \leq \underset{I}{max} \left| a(t) \right| \int_0^T L(t)\, dt.p. \max_{t \in [0,p]} \left\| u(t) \right\|_B^2 . \tag{3.38}$$

Soit $t^* \in [0,p]$ tel que $\max_{t \in [0,p]} \left\| u(t) \right\|_B = \left\| u(t^*) \right\|_B$, alors

$$\int_0^{t^*} \frac{d}{dt} \left\| u(t) \right\|_B^2 dt \leq \int_0^p \frac{d}{dt} \left\| u(t) \right\|_B^2 dt = \left\| u(p) \right\|_B^2 , \tag{3.39}$$

et comme

$$\left\| u(p) \right\|_B^2 \leq \frac{1}{C_0} \underset{I}{max} \left| a(t) \right| \int_0^T L(t)\, dt.p. \max_{t \in [0,p]} \left\| u(t) \right\|_B^2 ,$$

cela implique

$$\|u(t^*)\|_B^2 = \int_0^{t^*} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_B^2 \, dt \leq \|u(p)\|_B^2 \leq W.p. \|u(t^*)\|_B^2 . \tag{3.40}$$

Puisque $W.p < 1$, donc

$$u(t) = 0, \forall t \in [0, p] .$$

On répète la même procédure sur les intervalles $[ip, \ (i+1)p]$, $i = 1, ...,$ on obtient

$$u(t) = 0, \ \forall t \in I,$$

et par conséquent

$$u_1 = u_2.$$

■

Chapitre 4

Solution d'une équation pseudo-parabolique fractionnaire avec condition intégrale fractionnaire

4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de trouver une solution approximative d'une équation pseudo-parabolique fractionnaire jointe d'une condition intégrale fractionnaire en applicant le schéma de discrétisation de Rothe en temps .

Nous començons par donner quelques hypothèses utilisées et nous précisons le concept de solution faible. Après une discrétisation du problème posé dans des espaces convenables en utilisant un schéma implicite, on construit une solution numérique discrète du problème et on démontre quelques estimations a priori des approximations.

Puis on établit la convergence et l'existence de la solution faible, ainsi que son unicité. A la fin, on donne un exemple illustratif.

4.2 Position du problème

Considérons l'équation pseudo-parabolique fractionnaire suivante :

$$D_{RL}^{\alpha} u\left(t,x\right) - \Delta u\left(t,x\right) - \Delta u_t\left(t,x\right) = f\left(t,x\right), \ \left(t,x\right) \in Q_T \tag{4.1}$$

Avec les conditions

$$u\left(0,x\right) = u_0\left(x\right), \quad x \in \Omega \tag{4.2}$$

$$u = 0 \ \text{ sur } \ I \times \Gamma, \tag{4.3}$$

$$I^{1-\alpha} u\left(0^+\right) = U_1\left(x\right), \quad \text{dans } \Omega, \tag{4.4}$$

où $\alpha \in \left]0,1\right[$.

$I = [0,T]$, $T > 0$ représente un intervalle de temps fini.

Ω un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, avec une frontière régulière Γ, $Q_T = I \times \Omega$.

La fonction u représente l'inconnue est f la source.

$I^{1-\alpha}$ et D_{RL}^{α} sont respectivement l'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

D'après la relation (2.47) dans le lemme 2.9, l'équation (4.1) peut être écrite comme

$$\frac{\partial}{\partial t} I^{1-\alpha} u\left(t,x\right) - \Delta u\left(t,x\right) - \Delta u_t\left(t,x\right) = f\left(t,x\right), \quad \left(t,x\right) \in \mathbb{Q}_T. \tag{4.5}$$

4.3 Hypothèses et schéma de discrétisation

Dans cette section, nous définissons le concept précis de solution faible du problème étudié et nous donnons les hypothèses qui assurent son existence.

Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H_1) $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

(H_2) $f(t) \in L^2(\Omega)$ et $\|f(t) - f(t')\| \leq l\,|t - t'|$.

Nous cherchons une solution faible dans le sens suivant.

Définition 4.1 *On désigne par une solution faible du problème* (4.1)*, une fonction u vérifiant*

1) $u \in L^2\left(I,\ H_0^1(\Omega)\right)$ *avec* $I^{1-\alpha}(u) \in C\left(I,\ H^{-1}(\Omega)\right)$.

2) $\partial_t I^{1-\alpha}(u) \in L^2\left(I,\ H^{-1}(\Omega)\right)$.

3) u *satisfait* (4.2) *et* (4.4).

4) *Pour tout* $\phi \in H_0^1(\Omega)$, *nous avons*

$$\int_I (\partial_t I^{1-\alpha}(u), \phi)dt + \int_I (\nabla u, \nabla\phi)dt + \int_I (\nabla u, \nabla\phi_t)dt = \int_I (f, \phi)dt. \tag{4.6}$$

Pour résoudre le problème (4.1) par la méthode de Rothe, nous allons commencer par le discrétiser en temps.

Soit n un entier positive, divisons l'intervalle I en n sous-intervalles $[t_{i-1}, t_i]$, de même longueur $h = \dfrac{T}{n}$ tel que $t_i = ih$.

Introduisons les notations $u_i = u(t_i, x)$, $\delta u_i = \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h}$, $f_i = f(t_i, x, u_i)$, $i = 1, ..., n$.

Pour simplifier, nous allons négliger x.

Le problème discrétisé associé à (4.1) est le suivant :

$$\left(I^{1-\alpha}\left(u_i\right)-I^{1-\alpha}\left(u_{i-1}\right),\phi\right)+h(\nabla u_i,\nabla\phi)+(\nabla u_i-\nabla u_{i-1},\nabla\phi)=h(f_i,\phi). \tag{4.7}$$

4.4 Estimations a priori

Dans cette section, nous établissons quelques estimations a priori utiles.

Lemme 4.1 *Les estimations suivantes sont uniformément vérifiées en n, i, j et h :*

$$\sum_{i=1}^{j}h\left\|\delta I^{1-\alpha}\left(u_i\right)\right\|^2\leq C,\ \ \left\|\nabla\left(u_i\right)\right\|\leq C,\ \sum_{i=1}^{j}\left\|\nabla u_i-\nabla u_{i-1}\right\|^2\leq C. \tag{4.8}$$

Preuve. Posons $\phi=u_i-u_{i-1}$ dans (4.7) et faisons la somme pour $i=1,...,j$, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{j}h(\delta I^{1-\alpha}\left(u_i\right),\delta u_i)+\sum_{i=1}^{j}h(\nabla u_i,\nabla u_i-\nabla u_{i-1})+\sum_{i=1}^{j}\left\|\nabla(u_i-u_{i-1})\right\|^2=\sum_{i=1}^{j}h^2(f_i,\delta u_i). \tag{4.9}$$

L'égalité (4.9) est brièvement notée par : $J_1+J_2+J_3=J_4$. Maintenant nous estimons chaque terme pour avoir

$$J_1\geq C\sum_{i=1}^{j}h\left\|\delta I^{1-\alpha}\left(u_i\right)\right\|^2. \tag{4.10}$$

$$2J_2=2\sum_{i=1}^{j}h(\nabla u_i,\nabla u_i-\nabla u_{i-1})=\left\|\nabla u_j\right\|^2-\left\|\nabla u_0\right\|^2+\sum_{i=1}^{j}\left\|\nabla u_i-\nabla u_{i-1}\right\|^2. \tag{4.11}$$

D'après l'inégalité de Poincaré, nous avons

$$|J_4|=\left|\sum_{i=1}^{j}h^2(f_i,\delta u_i)\right|\leq C\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{j}h^2\left\|\delta u_i\right\|^2\right)\leq C\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{j}h^2\left\|\nabla\delta u_i\right\|^2\right). \tag{4.12}$$

Résumons toutes ces considérations et rassemblons les relations (4.10 - 4.12). En choisissant ε suffisamment petit, et en appliquant le lemme discret de Gronwall, on conclut la preuve. ■

Soit $\overline{u}^n$ une fonction d'état définie par

$$\overline{u}^n(t) = \begin{cases} u_i & t \in (t_{i-1}, t_i] \\ u_0 & t = 0 \end{cases}, \quad i = 1, ..., n \tag{4.13}$$

$$\overline{I_n}(\overline{u}^n(t)) = \begin{cases} I^{1-\alpha}(u_i), & t \in (t_{i-1}, t_i] \\ U_1 & t = 0 \end{cases}, \quad i = 1, ..., n \tag{4.14}$$

On définit les fonctions de Rothe sur l'intervalle I par

$$u^n(t) = u_{i-1} + (t - t_{i-1})\,\delta u_i, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, ..., n \tag{4.15}$$

$$I_n(\overline{u}^n(t)) = I^{1-\alpha}(u_{i-1}) + (t - t_{i-1})\,\delta I^{1-\alpha}(u_i), \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, ..., n \tag{4.16}$$

On désigne par f^n la fonction

$$f^n(t) = \begin{cases} f_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ f_0 & t = 0 \end{cases}, \quad i = 1, ..., n \tag{4.17}$$

Lemme 4.2 *L'estimation a priori*

$$\int_I \|\partial_t I_n\|_{-1}^2 \leq C, \tag{4.18}$$

est satisfaite pour $1 \leq i \leq n$, *où* $\|\partial_t I_n\|_{-1} = \sup\limits_{\|\phi\| \leq 1,\ \phi \in H_0^1(\Omega)} |(\partial_t I_n, \phi)|$.

Preuve. En appliquant le lemme 4.1, on conclut la preuve. ■

4.5 Résultats de convergence et d'existence

Des lemmes $(4.1 - 4.2)$ on peut avoir

$$\underset{I}{max} \left\| \overline{I_n} \right\| + \left\| \partial_t I_n \right\|_{L^2(I,\ H^{-1})} \leq C.$$

Par conséquent, il existe (voir [18] lemme.1. 3.13) $w \in C\left(I,\ H^{-1}\right) \cap L^{\infty}\left(I,\ L^2\left(\Omega\right)\right)$, avec $\partial_t w \in L^2\left(I,\ H^{-1}\right)$ et une sous-suite In_k tel que

$$In_k \to \omega \text{ dans } C\left(I,\ H^{-1}\right),\ \overline{In_k}\left(t\right) \rightharpoonup \omega\left(t\right) \text{ dans } L^2\left(\Omega\right),$$

$$In_k\left(t\right) \rightharpoonup \omega\left(t\right) \text{ dans } L^2\left(\Omega\right),\ \partial_t I_{n_k} \rightharpoonup \partial_t\, \omega \text{ dans } L^2\left(I,\ H^{-1}\right). \tag{4.19}$$

Selon le lemme 4.1, on peut déduire que $\{\overline{u}^n\}_n$ et $\dfrac{du^n}{dt}$ (qui est égale à δu_i sur (t_{i-1}, t_i)) sont uniformément bornées dans $L^2\left(I,\ H_0^1\left(\Omega\right)\right)$, on peut donc extraire une sous-suite $\{\overline{u}^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\overline{u}^{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u \text{ dans } L^2\left(I,\ H_0^1\left(\Omega\right)\right),$$

$$\frac{du^{n_k}}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt} \text{ dans } L^2\left(I,\ H_0^1\left(\Omega\right)\right). \tag{4.20}$$

En utilisant le critère de compacité de Kolmogorov, on obtient

$$I_{n_k} \to \omega \text{ dans } L^2\left(I,\ L^2\left(\Omega\right)\right),$$

$$\overline{u}^{n_k} \to u \text{ dans } L^2\left(I,\ H_0^1(\Omega)\right). \tag{4.21}$$

Maintenant, nous sommes en mesure d'annoncer notre résultat principal.

Théorème 4.1 *La limite u est une solution faible du problème* (4.1) *dans le sens de la définition 4.1.*

Preuve. En vue de (4.27) et du théorème de Minty-Browder [34], on peut conclure que $\omega = I^{1-\alpha}(u)$.

D'autre part, de l'égalité

$$I_{n_k}\left(\overline{u}^{n_k}\right) - U_1 = \int_0^t \partial_t I_{n_k}\left(\overline{u}^{n_k}(s)\right) ds, \tag{4.22}$$

quand $k \to \infty$ on obtient

$$I^{1-\alpha}(u) - U_1 = \int_0^t \partial_t I^{1-\alpha} u(s)\, ds, \tag{4.23}$$

ce qui implique que

$$I^{1-\alpha}\left(u\left(0^+\right)\right) = U_1.$$

Par conséquent, la condition (4.4) est vérifiée. Evidemment, compte tenu de (4.18) - (4.23), l'égalité (4.7) peut être réécrite comme suit

$$\int_I (\partial_t I_n(t),\ \phi) + \int_I (\nabla(u^n),\ \nabla\phi) + \int_I \left(\nabla \frac{\partial(u^n)}{\partial t},\ \nabla\phi\right) = \int_I (f^n,\ \phi),\ \forall\phi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.24}$$

Maintenant, remplaçant n par $n_k \longrightarrow \infty$ dans (4.24), puis en tenant compte de (4.19) - (4.21), et (4.23) on aura

$$\int_I (\partial_t I^{1-\alpha}(u),\ \phi) + \int_I (\nabla u,\ \nabla\phi) + \int_I \left(\nabla u,\ \nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \int_I (f,\phi),\ \forall\phi\in H_0^1(\Omega).$$

Ainsi, u est une solution faible du problème (4.1). ■

4.6 Unicité de la solution faible

Dans cette section, nous prouvons l'unicité de la solution faible.

Théorème 4.2 *Sous les hypothèses* (H_1)-(H_2), *le problème* (4.1) *a une solution faible unique.*

Preuve. On suppose que le problème (4.1) a deux solutions faibles u_1, u_2 alors $u = u_1 - u_2$ satisfait

$$\begin{aligned} & \int_I (\partial_t(I^{1-\alpha}u_1 - I^{1-\alpha}u_2),\ \phi)dt + \int_I (\nabla u, \nabla\phi)dt + \int_I \left(\nabla u,\ \nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) dt \\ = & \int_I (f(t,x,u_1) - f(t,x,u_2),\ \phi)dt. \end{aligned} \tag{4.25}$$

On choisit pour $s \leq T$ la fonction ϕ dans (4.25) comme

$$\phi_s(t) = \begin{cases} \int_t^s u(\tau)\,d\tau,\ t<s \\ 0 \qquad\qquad \text{ailleurs} \end{cases},$$

et on intègre par partie, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \left(I^{1-\alpha}(u_1) - I^{1-\alpha}(u_2),\ u_1 - u_2\right) dt + \int_0^s \|\nabla u(t)\|^2 dt \\
\leq\ & \varepsilon \int_0^s \|\nabla u(t)\|^2 dt + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^s \|\nabla \phi_S(t)\|^2 dt. \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

La monotonie de $I^{1-\alpha}$ implique

$$\left(I^{1-\alpha}(u_1) - I^{1-\alpha}(u_2),\ u_1 - u_2\right) \geq 0. \qquad (4.27)$$

La dernière intégrale dans (4.26) satisfait l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
\int_0^s \|\nabla \phi_S(t)\|^2 dt &= \int_0^s \int_\Omega |\nabla \phi_S(t)|^2 dxdt \leq c \int_0^s \int_t^s \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dxd\tau dt \\
&= c \int_0^s \int_0^t \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dxd\tau dt. \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\int_0^s \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dxdt = 0,$$

ce qui prouve que

$$u(t) = 0,\ \forall t \in [0, T].$$

Ce qui donne

$$u_1 = u_2.$$

et ainsi la preuve est complète. ■

4.7 Exemple

Exemple 4.1 *Considérons l'équation différentielle fractionnaire*

$$D_{RL}^{\frac{1}{2}}u\left(t,x\right)-\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}u\left(t,x\right)-\frac{\partial^{3}}{\partial^{2}\partial t}u\left(t,x\right)=tx,\ \ \left(t,x\right)\in\left[0,T\right]\times\left(0,1\right). \tag{4.29}$$

Avec les conditions

$$u\left(0,x\right)=u_{0}\left(x\right)=x\left(1-x\right),\quad x\in\left(0,1\right) \tag{4.30}$$

$$u=0\ \ sur\ \ \left[0,T\right]\times\left\{0,1\right\}, \tag{4.31}$$

$$I^{\frac{1}{2}}u\left(0^{+}\right)=U_{1}\left(x\right)\in H_{0}^{1}\left(0,1\right). \tag{4.32}$$

Nous avons

$$\left\Vert f\left(t\right)\right\Vert=\left(\int_{0}^{1}\left(tx\right)^{2}dx\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{t}{\sqrt{3}}\leq\frac{T}{\sqrt{3}}<\infty,$$

alors $f\left(t\right)\in L^{2}\left(0,1\right)$ *et*

$$\left\Vert f\left(t_{1}\right)-f\left(t_{2}\right)\right\Vert=\frac{\left\vert t_{1}-t_{2}\right\vert}{\sqrt{3}}\leq\frac{2}{3}\left\vert t_{1}-t_{2}\right\vert$$

ce qui implique que (H_1) *est satisfaite. D'autre part, on peut voir que* $u_0\in L^2\left(0,1\right)$,

$u_0^{'}\in L^2\left(0,1\right)$ *et* $u_0\left(0\right)=u_0\left(1\right)=0,$ *ainsi* $u_0\in H_0^1\left(0,1\right)$. *De plus,* $u_0\left(x\right)=x\left(1-x\right)\leq 1$ *donc* $u_0\in L^{\infty}\left(0,1\right)$ *et par conséquent* (H_2) *est aussi vérifiée. Toutes les conditions des théorèmes 4.1 et 4.2 sont maintenant vérifiées, alors on déduit que* (4.29) *a une solution faible unique.*

Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié deux types différents de problèmes aux limites. Le premier concerne une équation parabolique dégénérée intégro-différentielle avec des conditions : initiale, Neumann, et non locale de type intégrale. Nous avons utilisé la méthode de discrétisation de Rothe, nous avons établis un schéma numérique composé d'une suite récurrente de problèmes elliptiques dont l'existence et l'unicité de la solution sur chaque sous intervalle de temps est garanti par le lemme de Lax- Milgram. Nous avons donner quelques estimations a priori nécessaires, sur la base des quelles la convergence du schéma d'approximation correspondant est démontrée. Après nous avons prouver l'existence et l'unicité d'une solution faible pour l'équation considérée.

Le deuxième problème étudié est modélisé par une équation pseudo-parabolique fractionnaire avec une condition intégrale fractionnaire. Nous avons choisis la dérivée et l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et grâce à leurs propriétés, nous avons établis une équation équivalente, de sorte que la méthode de Rothe peut être adaptée à sa résolution. Grâce à un choix précis des espaces, nous avons démontrer l'existence et l'unicité d'une solution faible de notre problème ainsi que quelques résultats de régularité.

Comme perspectives, on souhaite combiner la méthode de Rothe avec la méthode des éléments finis pour résoudre des EDP fractionnaires et faire l'analyse a priori et a postériori de l'erreur.

Bibliographie

[1] Agarwal, O.P. : Solution for fractional diffusion wave equation defined in bounded domain. Nonlinear Dyn. 29, 145–155 (2002).

[2] Allaire, G. : Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. Editions Ecole Polytechnique, 2005.

[3] Anh, V.V., Leonenko, N.N. : Spectral analysis of fractional kinetic equations with random data. J. Stat. Phys. 104, 1349–1387 (2001).

[4] Bagley, R.L. : Theorical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. J. Rheol. 27(03), 201–210 (1983).

[5] Bahuguna, D., Abbas, S., Dabas, J. : Partial functional differential equation with an integral condition and applications to population dynamics. Nonliear Anal. 69, 2623–2635 (2008).

[6] Bahuguna, D., Raghavendra, V. : Rothe's method to parabolic integrodiferential equation via abstact integrodifferential equation. Appl. Anal 33, 153–167 (1989).

[7] Bouziani, A., Merazga, N. : Solution to a semilinear pseudoparabolic problem with integral conditions. EJDE 115, 1–18 (2006).

[8] Brezis, H. : Analyse fonctionnelle : théorie et applications. Masson, Paris (1983).

[9] Chaoui, A., Guezane Lakoud, A. : Rothe-Galerkin's method for a nonlinear integrodifferential equation. Bound. Value Probl. 2012, 10 (2012).

[10] Chaoui, A., Guezane, A. : Lakoud, solution to an integrodifferential equation with integral codition. Appl. Math. Comput. 266, 903–908 (2015).

[11] Coleman, B.D., Noll, W. : Approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics. Arch. Anal. 6, 355–370 (1960).

[12] Dawson, C.N., vanDuijn, C.J., Grundy, R.F. : Large time asymptotes in contaminant transport in porous media. SIAMJ. Appl. Math. 56 (4) (1996) 965–993.

[13] El-Azab, M.S. : Solution of nonlinear transport diffusion problem by linearisation. Appl. Math. Comput. 192, 205–2015 (2007).

[14] EL-Borai, M. : Some probability densities and fundamental solutions of fractional evolution equations. Chaos Solitons Fractals 14, 433–440 (2002).

[15] Engeita, N. : On fractional calculus and fractional mulipoles in electromagnetism. IEEE Trans. 44(4), 554–566 (1996).

[16] Evans, L.C. : Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations. In : Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, vol. 74, American Mathematical Society, Providence, RI (1990).

[17] Guezane-Lakoud, A., Belakroum, D. : Rothe's method for a telegraph equation with integral conditions. Nonlinear Anal. 70, 3842–3853 (2009).

[18] Guezane-Lakoud, A., Jasmati, M.S., Chaoui, A. : Rothe's method for an integrodifferential equation with integral conditions. Nonlinear Anal. 72, 1522–1530 (2010).

[19] Hilfer, R. : Application of Fractional Calculus in Physics. World Scientific, Singapore (2000).

[20] Kacur, J. : Method of Roth in evolution equations, In : Teubner Texte zur Mathematik, vol. 80, Teubner, Leipzig (1985).

[21] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. : Theory and Applications of Fractional Differential Equations. ElsevierScience B. V, Amesterdam (2006).

[22] Kuliev, K., Petersson, L.-E. : An extension of Rothe's method to non-cylindrical domains. Appl. Math. 52(5), 365–389 (2007).

[23] Ladyzenskaja, O.A. : On solution of nonstationary operator equations. Math. Sb. 39(4), 491–524 (1956).

[24] Ladyzenskaja, O.A., Ural'ceva, N.N. : Boundary problems for linear and quasilinear parabolic equations. Am. Math. Soc. Transl. Ser. 2 47, 217–299 (1956).

[25] Magin, R. : Fractional calculus in bioengeenering. Crit. Rev. Biomed. Eng. 32(1), 1–104 (2004).

[26] Mainardi, F. : Fractal and Fractional Calculus in Cintinuum Mechanics. Springer, New York (1997).

[27] Mainardi, F., Paradisi, P. : Model of diffusion waves in viscoelasticity based on fractal calculus. In : Gonzales, O.R. (eds.) Proceedings of IEEE Conference of decision and Control, vol. 5, pp. 4961–4966. IEEE, New york (1997).

[28] Metzler, R., Klafter, J. : The random walk's guide to anoumalous diffusion : a fractional dynamics approach. Phys. Rep. 339, 1–77 (2000).

[29] Mophou, Gisèle M., N'Guérékata, Gaston M. : On class of fractional differential equations in Sobolev space. Appl. Anal. : Int. J. 91(1), 15–34 (2012).

[30] Nishimoto, K. : Fractional Calculus and Its Applications. Nihon University, Koriyama (1990).

[31] Oldham, K.B. : Fractional Differential equations in electrochemistry. Adv. Eng. Softw. 41(1), 9–12 (2010).

[32] Oldham, K.B., Spanier, J. : The Fractional Calculus. Academic press, New york (1974).

[33] Podlubny, I. : Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego (1999).

[34] Ptashnyk, Mariya. : Nonlinear pseudoparabolic equations and variational inequalities. 2004. Thèse de doctorat.

[35] Rektorys, K. : On application of direct variational methods to the solution of parabolic boundary value problems of arbitrary order in space variables. Czechoslov. Math. J. 21, 318–339 (1971).

[36] Rektorys, K. : The Method of Discretization in Time and Partial Differential Equations. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht (1982).

[37] Rothe, E. : Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenz fall eindimonsionaler Randwertaufgaben. Math. Ann. 102, 650–670 (1930).

[38] Sabatier, J., Agrawl, O.P., Machado, J.A.T. : Advances in Fractional Calculus. Springer, New York (2007).

[39] Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. : Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, vol. 1993, p. 44, 1993.

[40] Sander, G.C., Norbury, J., Weeks, S.W. : An exact solution to the non linear diffusion-convection equation for two phase flow. Q.J. Mech. Appl. Math. 46 (4) 709–723 (1993).

[41] Showalter, R. E. : Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations (Vol. 49). American Mathematical Soc. (2013).

[42] Ting, T.W. : Certain non-steady flows of second order fluids. Arch. Ration. Mech. Anal. 14, 1–26 (1963).