

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Laboratoire de Mathématiques Appliquées et de Modélisation
Département de Mathématiques



Thèse :

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en sciences

Option : Mathématiques Appliquées

Par : Mourad GHIAT

Intitulée

Etude analytique et numérique des équations
intégré-différentielle de Volterra :
Traitement des noyaux faiblement singuliers.

Sous la direction du : **M.C.A. Hamza GUEBBAI**

Co-encadreur : **Pr. Med zine AISSAOUI**

Devant le jury

Président	<i>Yamina LASKRI</i>	Prof	Univ- Annaba
Examineur	<i>Amara HITTA</i>	Prof	Univ- Guelma
Examineur	<i>Abdelhak BERKANE</i>	M.C.A	Univ- Constantine
Examinatrice	<i>Rachida AMIAR</i>	M.C.A	Univ- Annaba

à la mémoire de ma mère,
à mon père et ma femme, qui m'ont toujours soutenu,
à mes rayons de soleil, Oussama, Asma, Amir.

Il ne faut pas compter sur les gens à l'origine du problème pour le résoudre.
Albert Einstein

.

Le seul moyen de se délivrer d'une tentation, c'est d'y céder paraît-il ! Alors j'y cède en disant un grand Merci aux personnes qui ont cru en moi et qui m'ont permis d'arriver au bout de cette thèse.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements : À monsieur Hamza GUEBBAI qui fût pour moi un directeur de thèse attentif et disponible malgré ses nombreuses charges. Sa compétence, sa rigueur scientifique et sa clairvoyance m'ont beaucoup appris. Son soutien m'a permis de ne jamais faiblir et de poursuivre toujours plus loin mes travaux. Ils ont été et resteront des moteurs à ma réussite.

A monsieur Mohamed Zine AISSAOUI qui m'a aussi encadré tout au long de ma thèse. Ma considération est inestimable. Ses remarques et critiques pertinentes m'ont conduit vers la bonne voie.

Je suis très sensible à l'honneur que ma fait le professeur Yamina LASKRI président de jury en acceptant de présider mon jury de soutenance et d'examiner ma thèse.

Je tiens à remercier vivement Amara HITTA prof. Université de Guelma, Abdelhak BERKANE MCA. Université de Constantine et Rachida AMIAR MCA. Université d'Annaba, qui ont accepté de faire partie du jury.

Au cours de ces cinq années, j'ai bénéficié de très bonnes conditions de travail au sein du Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Modélisation LMAM pour mener à bien ce projet. Un grand merci à tous les membres du Laboratoire LMAM.

Je ne peux terminer ces lignes sans remercier mes collègues et amis pour leur soutien moral et matériel.

ملخص

في هذه الأطروحة، نحن مهتمون بالمعادلات فولتيرا غير الخطية التكاملية التفاضلية ذات نواة ضعيفة. وبشكل أدق، نكرس دراستنا على المعادلات التي تحتوي على مشتق المجهول بطريقة ضمنية غير خطية تحت التكامل. هذا النوع من المعادلة له أهمية علمية كبيرة، في مختلف مجالات الرياضيات التطبيقية والفيزياء.

الهدف من هذه الأطروحة هو بناء طريقة عددية جديدة لحل هذه المعادلات التكاملية. وقد تم البرهان على الدراسة التحليلية لهذه الطريقة الجديدة، حيث يتطلب إضافة شروط ضعيفة نوعا ما من الناحية العملية لضمان وجود ووحدانية الحل، الذي يقوم على طريقة بيكارد.

وأخيرا، يتم عرض بعض الأمثلة العددية باستعمال طريق التكامل المنتج، و نيبستروم، والتي تؤكد فعالية هذه الطريقة الجديدة.

الكلمات الرئيسية: معادلة فولتيرا- تكامل -| نقطة ثابتة - المعادلة غير الخطية- طريقة تكامل المنتج.

Résumé

On s'intéresse dans cette thèse aux équations intégro-différentielles non linéaires de Volterra avec noyau faiblement singulier. Plus précisément, notre étude est consacrée aux équations, où la dérivée de l'inconnu est se trouve d'une façon non linéaire à l'intérieur de signe intégrale. Ce type des équations présente un grand intérêt scientifique, elles touchent divers domaines des mathématiques appliquées et de la physique.

L'objectif de cette thèse est de construire une nouvelle méthode numérique pour résoudre ces équations intégrales. L'étude analytique de cette nouvelle méthode a été prouvée, où on exige des hypothèses assez faibles du point de vue pratique pour assurer l'existence et l'unicité de la solution, qui basé sur la méthode de picard.

Finalement, des tests numériques basés sur l'approximation par la méthode de Product intégration, et la quadrature de Nystrom , sont présentés qui nous confirment l'efficacité de cette nouvelle méthode.

Mots-clés : équation de Volterra- Intégro-différentiel- point fixe - équation non linéaire- Méthode produit d'intégration.

Abstracts

In this thesis, we are interested to study the Volterra nonlinear integrable-differential equations with weakly singular kernel. More precisely, our study is devoted to such equations, where the derivative of the unknown is found in a non-linear way of the integral sign. This type of equation represents a great interest in the fields of applied mathematics and physics.

The objective of this thesis is to build a new numerical method to solve these integral equations. The analytical study of this new method is proved, where we require rather weak assumptions from the practical point of view to ensure the existence and uniqueness of the solution, which is based on the Picard method.

Finally, numerical tests based on the approximation by the Product integral method, and the quadrature of Nystrom, this descritezation confirms the effectiveness of this new method.

Keywords : Volterra equation _ Integro-dierential _ Fixed point _ Nonlinear equation _ Product integration method.

Table des matières

Résumé	vii
Table des matières	ix
Introduction	1
1 Définitions et rappels	3
1 Propriété de dérivation	3
2 Théorème du point fixe de Banach	4
3 Intégration Numérique	5
3.1 Interpolant polynômiale par morceaux	5
3.2 Méthode de Newton-Côtes	6
3.3 Intégration produit	7
3.4 Lemme de majoration	8
4 Équation non linéaire de Volterra de deuxième espèce	9
4.1 Étude analytique	9
4.2 Étude Numérique	12
5 Équation intégró-différentielle non linéaire de Volterra	16
5.1 Étude analytique	16
5.2 Étude numérique	18
2 Équations intégrales faiblement singulière	23
1 Équation intégrale faiblement singulière non linéaire de Volterra	23
1.1 Étude analytique	24
1.2 Étude numérique	26
2 Équation intégró- différentielle faiblement singulière non linéaire de Volterra	30
2.1 Étude analytique	32
3 Étude numérique	37
1 Description numérique	38
1.1 La méthode PPP	38
1.2 La méthode NPP	45
1.3 La méthode PPN	49
1.4 La méthode NPN	54
2 Résultat numérique	56
3 Profil de performance	58
Conclusion	63

Bibliographie

65

Introduction

L'objet de cette thèse de doctorat est l'étude analytique et numérique des équations intégro-différentielles non linéaires de Volterra avec noyau faiblement singulier par des méthodes basées sur le principe du Product integration. Notre travail est la suite logique des résultats obtenus pour les équations intégrales non linéaires de Volterra avec noyau faiblement singulier [1] et ceux récemment développés au sein de notre laboratoire de recherche pour les équations intégro-différentielles non linéaires de Volterra [2]

Il est connu que ce genre d'équations représente un grand intérêt dans différents domaines de modélisation mathématiques [33, 34]. Le cas pour lequel la dérivé de l'inconnu intervient d'une façon non linéaire à l'intérieur de signe intégrale est peu étudié malgré sa grande importance. Il a été étudié d'une façon analytique et numérique par Guebbai et al en 2014, mais avec un noyau régulier. Nous proposons une étude analytique, qui en retraçant des techniques assez similaires avec celles utilisées dans [1–3], on arrive à construire des hypothèses assez acceptables d'un point de vue théorique pour assurer l'existence et l'unicité de la solution du même type d'équation lorsque son noyau est faiblement singulier.

Pour mieux montrer les similitudes et les différences entre nos méthodes analytiques et celles développées dans [1–3] et mieux assimiler les difficultés que nous devons appréhender pour notre nouvelle équation, nous reprenons en détails dans le chapitre I ces techniques analytiques et numériques pour les cas intégrale et intégro-différentiel avec noyau régulier, précédées par le rappel des outils mathématiques nécessaires pour la continuation de notre travail. Chaque méthode développée est validé par des tests numériques adéquats. Nous affirmons à ce niveau, que les programmes mathématiques développés sur MATLAB [14, 15] ont été développés par nos soins et nullement reproduits à partir de support bibliographique quelconque, ce qui représente un effort supplémentaire caché.

Dans le deuxième chapitre, nous commençons par rappeler l'étude effectué dans [1] sur les équations intégrales de Volterra avec noyau non linéaire qui inclus une partie faiblement singulière. Ce type d'équations nécessite une approche analytique et numérique assez différentes de celles développées dans le chapitre I. L'étude numérique montre une difficulté supplémentaire à cause du caractère singulier du noyau qui rend impossible l'application des méthodes d'intégrations numériques classiques.

Pour contourner cette difficulté, nous allons construire une méthode numérique basé sur l'idée du "Product Integration". Les tests numériques construits montrent son efficacité. La suite de ce chapitre constitue l'essentiel de notre étude analytique, nous construisons des hypothèses assez acceptables du point de vue théorique pour assurer l'existence et l'unicité de la solution d'une équation qui est le parfait mélange entre les différentes équations étudiées dans les parties précédentes, à savoir l'équation intégral-différentielle non linéaire de Volterra avec noyau faiblement singulier.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude numérique de la dernière équation du chapitre précédent. Nous allons développer quatre méthodes différentes pour approcher l'unique solution de l'équation intégral-différentielle non linéaire de Volterra avec noyau faiblement singulier. La consistance et la convergence de chaque méthodes développées est assurée avec les mêmes conditions obtenues par l'étude analytique. dans le but de rendre notre travail plus précis et vue que les théorèmes de convergences obtenus ne permettent pas une comparaison théorique entre ces quatre méthodes, nous utilisons le profil de performance [4] pour fournir une lecture précise de notre étude numérique en comparant ces quatre méthodes selon le temps d'exécution et la précision.

L'application du profil de performance, peu connue dans le cadre de l'analyse numérique des équations intégrales, nous permet de ressortir la méthode la plus adapté pour notre équation entre les quatre développées.

Chapitre 1

Définitions et rappels

L'équation intégrale de Volterra, à côté de l'équation de Fredholm, est l'une des équations les plus célèbres en mathématiques appliquées par son intérêt en modélisation et l'abondance des études effectuées dessus. Contrairement à l'équation intégrale de Fredholm qui est générée par une équation différentielle avec conditions aux limites fixes sur le bord, l'équation intégrale de Volterra est générée par une équation différentielle à valeur initiale de la forme

$$u'(t) = F(t, u(t)), \quad t \in [a, b], \quad (1.1)$$

$$u(a) = \alpha. \quad (1.2)$$

ce qui rend l'intervalle d'intégration variable. Elle se présente pour ce cas, sous la forme

$$u(t) = \int_a^t F(s, u(s))ds + \alpha, \quad t \in [a, b]. \quad (1.3)$$

Pour l'approximation numérique du problème (1.1)-(1.2), nous avons besoin d'approcher $u'(t)$, $t \in [a, b]$ sur une subdivision par la méthode de différence finis. L'approximation de la dérivée pose un grand problème dans la pratique, parce que le problème est instable. Contrairement au le problème (1.3), qui est en général bien conditionné, leur algorithme d'approximation est stable.

Dans notre travail nous avons besoin de quelques résultats, plus ou moins classiques, à fin de démontrer la convergence des techniques numériques que nous allons construire dans la suite. Ce chapitre, est dédié à ces résultats. Nous allons les citer et les démontrer sans entrer dans les détails et dans le sens dans lequel nous allons les utiliser après.

1 Propriété de dérivation

Soit ψ une fonction définie de $[a, b]^2$ à image dans \mathbb{R} , tel que pour tout $s \in [a, b]$, $\psi(\cdot, s) \in C^1(a, b)$. Nous définissons la fonction suivante

$$\varphi(t) := \int_a^t \psi(t, s)ds, \quad t \in [a, b].$$

Proposition 1.

$$\forall t \in [a, b], \quad \varphi'(t) = \psi(t, t) + \int_a^t \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, s) ds.$$

Preuve. *Nous avons :*

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{t+h} \psi(t+h, s) ds - \int_a^t \psi(t, s) ds}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^t \psi(t+h, s) ds + \int_t^{t+h} \psi(t+h, s) ds - \int_a^t \psi(t, s) ds}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \psi(t+h, s) ds + \int_a^t \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(t+h, s) - \psi(t, s)}{h} ds \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \psi(t+h, s) ds + \int_a^t \frac{d\psi}{dt}(t, s) ds \end{aligned}$$

Mais, en utilisant le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]0, h[$ tel que

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \psi(t+h, s) ds = \psi(t+h, t+\xi).$$

Il suffit de faire tendre h vers 0 pour obtenir le résultat.

2 Théorème du point fixe de Banach

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, T une application définie de X sur lui-même. Le théorème de Banach nous assure l'existence et l'unicité d'un point fixe x^* de T c-à-d, $x^* = T(x^*)$.

Définition 1. *On dit que T est une **application lipschitzienne** si*

$$\exists k > 0, \forall x, y \in X, \quad \|T(x) - T(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

Si $k < 1$, T est dite une contraction.

Théorème 2. *Si T est contractante, alors elle a un unique point fixe $x^* \in X$. De plus, la suite*

$$\begin{cases} x_0 & \in & X, \\ x_{n+1} & = & T(x_n) \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

converge vers x^ et on a*

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|$$

.

Preuve. *Voir [8]*

3 Intégration Numérique

3.1 Interpolant polynômiale par morceaux

Soit $\{t_j\}_{j=1}^n$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. Nous définissons la suite des fonctions $\{e_j\}_{j=1}^n$ par

$$e_j(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} & t \in [t_{j-1}, t_j], \\ \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j} & t \in [t_j, t_{j+1}], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad 2 \leq j \leq n-1,$$

$$e_1(t) = \begin{cases} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} & t \in [t_1, t_2], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$e_n(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} & t \in [t_{n-1}, t_n], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Ce qui s'appelle les **fonctions chapeaux**.

L'**interpolant polynômiale par morceaux d'ordre 1** d'une fonction $f \in C(a, b)$ est donné par

$$\forall t \in [a, b], P_{n,1}[f](t) = \sum_{j=1}^n f(t_j) e_j(t).$$

Pour $h > 0$, la fonction suivante

$$w_0(h, f) = \max_{\substack{|s-t| \leq h \\ a \leq s, t \leq b}} |f(s) - f(t)|,$$

est appelée le **module de continuité** de f . Donc, si h tend vers 0 alors $w_0(h, f)$ tend vers 0, puisque f est continue.

Théorème 3.

$$\sup_{t \in [a, b]} |f(t) - P_{n,1}[f](t)| \leq w_0(h_n, f).$$

Où,

$$h_n = \max_{1 \leq j \leq n-1} (t_{j+1} - t_j).$$

Preuve. Nous avons, pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}]$,

$$P_{n,1}[f](t) = f(t_j)(1 - \alpha_j(t)) + f(t_{j+1})\alpha_j(t),$$

où,

$$\alpha_j(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} \in [0, 1].$$

Ceci montre que pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}]$,

$$P_{n,1}[f](t) - f(t) = (f(t_j) - f(t))(1 - \alpha_j(t)) + (f(t_{j+1}) - f(t))\alpha_j(t),$$

ce qui donne,

$$\sup_{t \in [\alpha, \beta]} |f(t) - P_{n,1}[f](t)| \leq w_0(f, h_n).$$

3.2 Méthode de Newton-Côtes

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Dans cette section, nous allons rappeler les méthodes de Newton-Côtes pour l'approximation numérique de l'intégrale suivante $\int_a^b f(t)dt$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, nous définissons la subdivision suivante : $t_j = a + jh$, $0 \leq j \leq N$ et $h = \frac{b-a}{N}$. Les formules d'intégrations numériques sont

$$\int_a^b f(t)dt \simeq h \sum_{j=0}^N w_j f(t_j),$$

où, les w_j sont des quantités positives appelés poids, tel $\max_{0 \leq j \leq N} |w_j| \leq W$ fixe pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

Définition 2. La méthode des **trapèzes** est la méthode de quadrature qui a pour poids la suite suivante :

$$\begin{cases} w_0 = w_N = \frac{1}{2}, \\ w_j = 1, \quad 1 \leq j \leq N-1. \end{cases}$$

Ce qui donne

$$I = \int_a^b f(t)dt \simeq T_N = \frac{h}{2}f(t_0) + h \sum_{j=1}^{N-1} f(t_j) + \frac{h}{2}f(t_N).$$

Cette méthode est celle que nous allons utiliser dans nos calculs numériques, si l'intégrand est bornée. Nous l'avons choisi puisqu'elle assure la convergence du calcul sous la condition de continuité uniquement. Contrairement à d'autres méthodes, telle que Simpson, qui exige plus de régularité.

Théorème 4. Si $f \in C(a, b)$, alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |I - T_N(f)| = 0.$$

Preuve. Un simple calcul nous montre que $\forall N \geq 1$,

$$T_N(f) = \int_a^b P_{N,1}(f)(t) dt.$$

Où, $P_{N,1}$ est l'interpolant par morceaux d'ordre 1 de la fonction f correspondant à la subdivision $\{t_j\}_{j=0}^N$.

Donc, en utilisant le **Théorème 3** nous obtenons

$$\begin{aligned} |I - T_N(f)| &= \left| \int_a^b (f(t) - P_{N,1}(f)(t)) dt \right|, \\ &\leq (b-a) w_0(f, h). \end{aligned}$$

Et comme h tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$, le résultat est démontré.

Cette méthode est la meilleur méthode d'intégration, puisqu'elle exige le moins de régularité possible pour qu'il y est convergence. Mais, nous pouvons facilement démontrer que si $f \in C^2(a, b)$, il existe $c > 0$ telle que

$$|I - T_N(f)| \leq ch^2.$$

3.3 Intégration produit

Les règles d'intégration numérique standard, telles que les méthodes du trapèze et de Simpson, sont construites en supposant que l'intégrand est au moins bornée. Lorsque ce n'est pas le cas, ces méthodes peuvent ne pas fonctionner. Même si l'intégrand est continue, une grande précision est perdue si des dérivés plus élevés n'existent pas.

Des méthodes spéciales sont nécessaires pour traiter efficacement ces cas. L'un des outils le plus efficace pour traiter les intégrands qui se comportent mal est l'intégration produit, et pour simplifier cette idée, nous supposons que l'intégrale qu'on cherche à approximer est on sous la forme :

$$I = \int_a^t p(t)\varphi(t)dt.$$

où, $\varphi(t)$ est supposée être régulière (continue), ainsi, quelles que soient les singularités ou un mauvais comportement de l'intégrand, elles sont incluses dans $p(t)$. Nous approchons alors $\varphi(t)$ par une fonction $\hat{\varphi}(t)$ telle qu'on peut calculer l'intégrale

$$\hat{I} = \int_a^t p(t)\hat{\varphi}(t)dt.$$

Dans notre travail, on approche $\varphi(t)$ par l'interpolation par morceaux, puis nous devons être capables d'évaluer explicitement des intégrales de la forme :

$$I = \int_a^t tp(t)dt.$$

Où l'erreur produit et leur ordre de convergence sont lié par la relation :

$$|I - \hat{I}| \leq \max_{a \leq t \leq b} |\varphi(t) - \hat{\varphi}(t)| \int_a^t p(s)ds.$$

3.4 Lemme de majoration

Nous allons présenter deux lemmes de Gronewel

Lemme 1. Soit $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$|\xi_n| \leq A \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_i| + B_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

où,

$$A > 0, |B_n| \leq B.$$

Alors,

$$|\xi_n| \leq (1 + A)^{n-1} (B + A |\xi_0|), \quad n \geq 1.$$

Preuve. Voir [1]

Lemme 2. Supposons que

$$|\varepsilon_n| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_{nj}| |\varepsilon_j| + B, \quad n = r, r + 1, \dots,$$

où, $B > 0$, et

$$\sum_{j=0}^{r-1} |\varepsilon_j| \leq \eta.$$

— Si

$$\sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_{nj}| \leq \alpha < 1, \quad n = r, r + 1, \dots,$$

alors,

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{B + \eta}{1 - \alpha}, \quad n = 0, 1, \dots$$

— S'il existe des entiers $0 = J_0 < J_1 < \dots < J_m < J_{m+1}$, avec $0 \leq r < J_1$ et $J_m \leq n < J_{m+1}$, tel que, pour $v = 0, 1, \dots, m$, et $n = r, r + 1, \dots$,

$$\sum_{j=j_v}^{\min(n, j_{v+1}-1)} |\alpha_{nj}| \leq \alpha < 1,$$

alors,

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{B + \eta}{(1 - \alpha)^2} \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^m.$$

Preuve. Voir [1]

4 Équation non linéaire de Volterra de deuxième espèce

Une équation non linéaire de Volterra de deuxième espèce est une équation de la forme

$$u(t) = \int_a^t K(t, s, u(s))ds + f(t); \forall t \in [a, b], \quad (1.4)$$

où, u l'inconnu à chercher dans le même espace de f supposée appartenir à $C^0(a, b)$ et K une fonction définie par,

$$\begin{aligned} K : [a, b]^2 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, s, u) &\mapsto K(t, s, u). \end{aligned}$$

vérifiant l'hypothèse (H₁) suivante :

$$\text{to} \quad (H_1) \left\| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \right. \begin{array}{l} f(t) \in C(a, b), \\ K \in C([a, b]^2 \times \mathbb{R}), \\ \forall t, s \in [a, b], \forall u, \bar{u} \in \mathbb{R} \\ |K(t, s, u) - K(t, s, \bar{u})| \leq A|u - \bar{u}|. \end{array} \quad (1.5)$$

4.1 Étude analytique

Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (1.4), nous construisons deux suites successives, $\{u_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, u_{n-1}(s))ds, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ u_0(t) = f(t). \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_n(t) = u_n(t) - u_{n-1}(t), \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \varphi_0(t) = f(t). \end{array} \right., \quad (1.6)$$

ce qui donne,

$$\sum_{i=0}^n \varphi_i(t) = u_n(t).$$

En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) &= \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \\ &= \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^n u_n(t) - u_{n-1}(t) \\ &= \varphi_0(t) + u_n(t) - u_0(t) \\ &= u_n(t). \end{aligned}$$

Existence de la solution

Théorème 5. Si f, K , vérifient les conditions du hypothèse (H_1) , l'équation (1.4) admet une unique solution u .

Preuve. Nous allons démontrer que la série de terme générale $\{\varphi_n\}$, est normalement convergente. Soit $F > 0$ tel que

$$\max_{a \leq t \leq b} |f(t)| \leq F.$$

Démontrons par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|\varphi_n(t)| \leq A^n \frac{F(t-a)^n}{n!}.$$

Pour $n = 0$:

$$|\varphi_0(t)| = |f(t)| \leq F,$$

Supposons que,

$$|\varphi_n(t)| \leq A^n \frac{F(t-a)^n}{n!},$$

alors,

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(t)| &\leq A \int_a^t |\varphi_n(s)| ds \\ &\leq A^{n+1} \frac{F}{n!} \int_a^t (s-a)^n ds \\ &\leq A^{n+1} \frac{F(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

nous avons alors,

$$\max_{a \leq t \leq b} |\varphi_n(t)| \leq A^n \frac{F(b-a)^n}{n!},$$

mais,

$$\sum_{n \geq 0} A^n \frac{F(b-a)^n}{n!} = F \exp^{A(b-a)},$$

ce qui implique que $\sum_{n \geq 0} \max_{a \leq t \leq b} |\varphi_n(t)|$ est convergente. Par conséquent $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ est normalement convergente, donc, il existe $u \in C(a, b)$ tel que,

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) \tag{1.7}$$

Pour prouver que $u(t)$ vérifie l'équation d'origine (1.4), posons,

$$u(t) = u_n(t) + \Delta_n(t),$$

donc

$$u(t) - \Delta_n(t) = g(t) + \int_a^t K(t, s, u(s) - \Delta_{n-1}(s))ds,$$

et

$$u(t) - f(t) - \int_a^t K(t, s, u(s))ds = \Delta_n(t) + \int_a^t K(t, s, u(s) - \Delta_{n-1}(s)) - K(t, s, u'(s))ds.$$

Nous appliquons la condition de Lipschitz, pour obtenir

$$|u(t) - f(t) - \int_a^t K(t, s, u(s))ds| \leq |\Delta_n| + Lt\|\Delta_{n-1}\|,$$

où,

$$\|\Delta_{n-1}\| = \max_{a \leq s \leq t \leq b} |\Delta_{n-1}(s)|,$$

mais,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\Delta_n(t)| = 0,$$

ce qui donne,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t \in [a, b], |u(t) - f(t) - \int_a^t K(t, s, u(s))ds| < \varepsilon,$$

donc $f(t)$ vérifie,

$$u(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, u(s))ds,$$

elle est donc une solution de l'équation (1.4).

Unicité de la solution

Pour démontrer l'unicité, nous supposons qu'il existe deux solutions continues u_1 et u_2 , $\forall t \in [a, b]$,

$$u_1(t) - u_2(t) = \int_0^t K(t, s, u_1(s)) - K(t, s, u_2(s))ds,$$

il résulte que

$$|u_1(t) - u_2(t)| = L \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|ds.$$

D'autre part, $\forall t \in [a, b]$,

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq B,$$

$$|u(t) - u_2(t)| \leq L B t,$$

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq B(Lt)^n/n!,$$

nous faisons tendre n vers l'infini, pour conclure que $u_1(t) = u_2(t)$.

4.2 Étude Numérique

La méthode que nous allons utiliser est celle de Nyström. Elle consiste à remplacer l'intégrale qui apparaît dans l'équation par une formule d'intégration comme celle présentée dans (3.2).

La méthode de Nyström est une méthode classique bien connue pour résoudre numériquement les équations intégrales.

Soit la subdivision de l'intervalle $[a, b]$,

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b,$$

$h = \frac{b-a}{N}$, $t_j = a + jh$, nous remplaçons l'intégrale

$$I = \int_a^{t_i} K(t, s, u(s)) ds.$$

Par la formule de quadrature suivant :

$$I_i = h \sum_{j=0}^i w_j K(t_i, t_j, u(t_j)).$$

Nous choisissons la méthode des Trapèzes, pour obtenir,

$$I_i = \frac{h}{2} K(t_i, t_0, U_0) + h \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i, t_j, U_j) + \frac{h}{2} K(t_i, t_i, U_i),$$

nous remplaçons dans l'équation (1.4), on obtient l'approximation U_i de $u(t_i)$ vérifiant :

$$\begin{cases} U_0 = f(t_0) \\ U_i = f(t_i) + \frac{h}{2} k(t_i, t_0, U_0) + \sum_{j=1}^{i-1} k(t_i, t_j, U_j) + \frac{h}{2} k(t_i, t_i, U_i), \end{cases} \quad (1.8)$$

qui est une équation non linéaire pour trouver U_i , et équivalente à

$$\begin{cases} U_0 = & f(t_0) \\ X = & S + \frac{h}{2} k(t_i, t_i, X), \\ S = & f(t_i) + \frac{h}{2} k(t_i, t_0, U_0) + \sum_{j=1}^{i-1} k(t_i, t_j, U_j). \end{cases}$$

Existence et unicité de la solution du système

Proposition 6. *Si h est suffisamment petite, le système (1.8) admet une unique solution.*

Preuve. *Pour tout $i \geq 1$, nous définissons*

$$\begin{aligned} \Phi_i(X) &= S + \frac{h}{2} K(t_i, t_i, X), \\ S &= f(t_i) + \frac{h}{2} K(t_i, t_0, U_0) + \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i, t_j, U_j). \end{aligned}$$

Nous avons,

$$\begin{aligned}\Phi_i(X) - \Phi_i(X') &= \frac{h}{2}K(t_i, t_i, X) - \frac{h}{2}K(t_i, t_i, X'), \\ &\leq \frac{h}{2}A|X - X'|.\end{aligned}$$

Pour h suffisamment petite et d'après théorème du point fixe de Banach, alors Φ_i est contraction qui admet un unique point fixe.

Analyse de l'erreur

Dans cette partie nous allons démontrer que la méthode numérique, construite dans la partie précédente, converge vers la solution exacte de l'équation. Pour cela, nous définissons

$$\varepsilon_i = U_i - u(t_i), \quad 0 \leq i \leq N.$$

On dit que la méthode est convergente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i| \right) = 0.$$

Définition 3. Soit u une solution de (1.4), alors la fonction

$$\delta_n(h, t_i) = \int_a^{t_i} K(t_i, s, u(s))ds - h \sum_{j=0}^i w_j K(t_i, t_j, u(t_j)),$$

est appelée l'erreur de la consistance locale pour (1.4).

La méthode d'approximation est dite consistante si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq i \leq n} |\delta_n(h, t_i)| \right) = 0.$$

Théorème 7. Si la méthode d'approximation est consistante, alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i| \right) = 0.$$

Preuve. Nous avons, pour $1 \leq i \leq N$

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= h \sum_{j=0}^i w_j (k(t_i, t_j, U_j) - k(t_i, t_j, u(t_j))) - \delta_n(h, t_i), \\ |\varepsilon_i| &= \left| h \sum_{j=0}^i w_j A(U_j - u(t_j)) - \delta_n(h, t_i) \right|, \\ |\varepsilon_i| &\leq hWA \sum_{j=0}^i |\varepsilon_j| + |\delta_n(h, t_i)|,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{hWA}{1-hWA} \sum_{j=0}^{i-1} |\varepsilon_j| + \frac{|\delta_n(h, t_i)|}{1-hWA},$$

En appliquant le lemme (1) , nous obtenons

$$|\varepsilon_i| \leq \left(\frac{\max_{1 \leq i \leq n} |\delta_n(h, t_i)|}{1-hWA} \right) \exp \left(\frac{WAt_i}{1-hWA} \right).$$

Résultats Numériques

Dans cette partie, nous allons donner deux exemples différents afin de souligner l'efficacité de la méthode des Trapèzes, qui donne une grande précision pour approcher l'intégrale. Le premier exemple, dans le cas linéaire, et le deuxième dans le cas non linéaire.

Exemple 1. Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra définie comme suit

$$u(t) = 6t - 6 \sin(t) + \int_0^t \sin(t-s)u(s)ds, 0 \leq s \leq t \leq T = 1$$

$$\begin{aligned} K(t, s) &= \sin(t-s), 0 \leq s \leq t \leq T = 1 \\ K &\in C^0([0, 1] \times \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= 6t - 6 \sin(t), 0 \leq t \leq T = 1 \\ f &\in C^0([0, 1]). \end{aligned}$$

L'équation admet la solution continue exacte :

$$u(t) = t^3$$

Le tableau suivant donne, une estimation de l'erreur entre la solution exacte et celle approchée $|U_n - u(t_n)|$, de l'équation précédente.

Exemple 2. Dans cet exemple on suppose que le noyau est non linéaire et l'équation est définie comme suit

$$u(t) = \frac{1}{4} \log \left(\frac{3t^2 + 1}{t^2 + 1} \right) + \int_0^t \frac{s}{(t^2 + s^2 + u(s)^2 + 1)} ds, 0 \leq s \leq t \leq T = 1$$

$$K(t, s, u) = \frac{s}{(t^2 + s^2 + u^2 + 1)}, 0 \leq s \leq t \leq T = 1, u \in \mathbb{R}.$$

$$f(t) = t - \frac{1}{4} \log \left(\frac{3t^2 + 1}{t^2 + 1} \right), 0 \leq s \leq t \leq T = 1$$

Il est clair que f et K sont continues, pour $0 \leq s \leq t \leq T, u \in \mathbb{R}$ et le noyau K est Lipschitzien par rapport à la troisième variable u . D'après le théorème 6, l'équation admet la solution exacte $u \in C^0([0, 1])$.

$$u(t) = t$$

Le tableau suivant, donne une estimation de l'erreur, entre les solutions exacte et approchée $|U_n - u(t_n)|$, de la deuxième exemple.

t	$ U_n - u(t_n) $ $h = 0.1$	$ U_n - u(t_n) $ $h = 0.01$
00	00	4.6585 - 005
0.1	4.9988e - 007	8.3040e - 008
0.2	6.0064e - 006	6.6732e - 008
0.3	2.1576e - 005	2.2590e - 007
0.4	5.2365e - 005	5.3746e - 007
0.5	1.03680e - 004	1.0545e - 006
0.6	1.8102e - 004	1.8321e - 006
0.7	2.90162e - 004	2.9280e - 006
0.8	4.3713e - 004	4.4028e - 006
0.9	6.2836e - 004	6.3206e - 006
1	8.70636e - 004	8.74956e - 006

TABLE 1.1 – Équation linéaire de Volterra

t	$ U_n - u(t_n) $ $h = 0.1$	$ U_n - u(t_n) $ $h = 0.01$
00	00	00
0.1	4.7748e - 005	4.7433e - 007
0.2	1.6384e - 004	1.6317e - 006
0.3	2.9306e - 004	2.9225e - 006
0.4	3.9357e - 004	3.9287e - 006
0.5	4.51781e - 004	4.5126e - 006
0.6	4.7280e - 004	4.7244e - 006
0.7	4.6784e - 004	4.6758e - 006
0.8	4.4729e - 004	4.4709e - 006
0.9	4.1874e - 004	4.1860e - 006
1	3.8709e - 004	3.86981e - 006

TABLE 1.2 – Équation non linéaire de Volterra

◆ Nous remarquons dans les deux exemples précédents que lorsque n prend des valeurs assez grandes ($n \rightarrow \infty$), l'erreur entre la solution exacte et elle approchée, de l'équation de Volterra, tend vers zéro, ce qui prouve la convergence de la méthode de Nyström.

5 Équation intégral-différentielle non linéaire de Volterra

5.1 Étude analytique

Dans cette section nous effectuons une étude analytique et numérique d'équation intégral-différentielle non linéaire de Volterra Voir [2], qui est sous la forme :

$$u(t) = \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s))ds + f(t); \quad \forall t \in [a, b], \quad (1.9)$$

où $f \in C^1(0, T)$ et u l'inconnue à chercher dans le même espace. La fonction K est supposée vérifier les hypothèses suivantes

$$(H2) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad K \in C([0, T]^2 \times \mathbb{R}), \\ (2) \quad \exists M \in \mathbb{R}, \forall t, s \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}, \\ \quad \max \left(|K(t, s, x, y)|, \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, x, y) \right| \right) \leq M, \\ (3) \quad \exists a, b, \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}, \forall x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}, \forall t, s \in [0, T], \\ \quad |K(t, s, x, y) - K(t, s, \bar{x}, \bar{y})| \leq a|x - \bar{x}| + b|y - \bar{y}|, \\ \quad \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, x, y) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, \bar{x}, \bar{y}) \right| \leq \bar{a}|x - \bar{x}| + \bar{b}|y - \bar{y}| \\ (4) \quad b < 1. \end{array} \right.$$

La dérivé de cette fonction est définis par la formule

$$u'(t) = K(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s))ds + f'(t); \quad \forall t \in [a, b], \quad (1.10)$$

Proposition 8. Soit $f \in C^1(a, b)$. La fonctionnelle $\Phi(\cdot) := \int_a^t K(t, s, \cdot, \cdot)ds + f(t)$ est définie sur $C^1([a, b])$.

Preuve. Soit, pour tout $u \in C^1([a, b])$,

$$\bar{u}(t) := \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s))ds + f(t).$$

De la même façon que celle utilisé dans le premier chapitre, on montre que \bar{u} est continue. En appliquant (1.10), on obtient

$$\bar{u}'(t) = K(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s))ds + f'(t).$$

Ce qui donne le résultat.

Existence de la solution

Nous allons démontrer qu'on peut déterminer une solution de l'équation (1.9), mais sur un intervalle réduit.

Théorème 9. Il existe r tel que l'équation (1.9) réduite à $[a, a + r]$ admet une solution $u \in C^1(a, a + r)$

Preuve. Nous montrons que la fonctionnelle Φ est continue sur $C^1(a, a+r)$ dans lui même.

Pour, $\rho > 0$ et $0 < r \leq \frac{\rho}{M}$, on définit l'ensemble suivant

$$F := \{u \in C(a, b) : u(a) = f(a), \forall t \in [a, a+r], |u(t) - f(t)| \leq \rho, |u'(t) - f'(t)| \leq M + \rho\}.$$

Il est claire que l'ensemble F est fermé et convexe. Pour tout $u \in F$ et tout $t \in [a, a+r]$

$$\begin{aligned} \Phi(u)(a) &= f(a), \\ |\Phi(u)(t) - f(t)| &= \left| \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s)) ds \right|, \\ &\leq Mr, \\ &\leq \rho, \\ |\Phi(u)'(t) - f'(t)| &= \left| K(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds \right|, \\ &\leq M + Mr, \\ &\leq M + \rho. \end{aligned}$$

Donc, $\Phi(F) \subset F$. Pour conclure en utilisant le théorème de Schauder, il faut montrer que $\Phi(F)$ est relativement compact. Nous avons,

$$|\Phi(u)(t) - \Phi(u)(x)| \leq \left(M + \rho + \max_{s \in [a, b]} |f'(s)| \right) |t - x|,$$

ce qui donne le résultat.

Prolongement de la solution

Dans cette section, on va démontrer l'existence global de la solution.

Théorème 10. L'équation (1.9) admet une solution $u \in C([a, b])$.

Preuve. \bar{u} est la solution réduite dans l'intervalle $[a, a+r]$, soit l'équation se transforme suivante

$$u(t) = f(t) + \int_a^{a+r} k(t, s, \bar{u}(s), \bar{u}'(s)) ds + \int_{a+r}^t k(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad t \in [a+r, b],$$

oou, \bar{u} est la solution réduite dans l'intervalle $[a, a+r]$.

On pose

$$g(t) = f(t) + \int_a^{a+r} k(t, s, \bar{u}, \bar{u}'(s)) ds,$$

alors, nous avons

$$u(t) = g(t) + \int_{a+r}^t k(t, s, u(s), u'(s)) ds.$$

En appliquant la méthode de Nystöm, et en utilisant la quadrature donnée dans (3.2), on récupère le système suivant

$$U_0 = f(0), \quad (1.11)$$

$$V_0 = f'(t_n) + K(0, 0, U_0, V_0) \quad (1.12)$$

$$U_n = f(t_n) + h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, U_i, V_i), \quad (1.13)$$

$$V_n = f'(t_n) + K(t_n, t_n, U_n, V_n) + h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, U_i, V_i) \quad 1 \leq n \leq \mathbb{N}, \quad (1.14)$$

où, U_n approche $u(t_n)$ et V_n approche $u'(t_n)$.

Existence et unicité de la solution du système

Contrairement au chapitre précédent, les hypothèses (H2)-(H3) ne suffisent pas pour assurer l'existence et l'unicité du système (1.11) – (1.14). Donc, on doit rajouter l'hypothèse suivante

$$(H4) \quad \|a\| < 1$$

Théorème 12. *Pour h suffisamment petite, le système (1.11) – (1.14) admet une unique solution.*

Preuve. \mathbb{R}^2 est supposée être muni de la norme suivante

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\|_1 = |X| + |Y|.$$

Pour tout $n \geq 1$, nous définissons

$$\Phi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(t_n) + h w_n K(t_n, t_n, X, Y) + h \sum_{i=0}^{n-1} w_i K(t_n, t_i, U_i, V_i) \\ f'(t_n) + K(t_n, t_n, X, Y) + h w_n \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, X, Y) + h \sum_{i=0}^{n-1} w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, U_i, V_i) \end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$\left\| \Phi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Phi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\|_1.$$

Où,

$$\beta_1 = h w_n (k(t_n, t_n, X, Y) - k(t_n, t_n, X', Y')),$$

$$\beta_2 = k(t_n, t_n, X, Y) - k(t_n, t_n, X', Y') + h w_n \left(\frac{\partial k}{\partial t}(t_n, t_n, X, Y) - \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, t_n, X', Y') \right),$$

mais,

$$|\beta_1| \leq hW (a|X - Y| + b|X' - Y'|),$$

$$|\beta_2| \leq (a + hW a') |X - Y| + (b + b' hW) |X' - Y'|,$$

alors

$$\left\| \Phi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Phi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \max \left(hW a, hW b, (a + hW a'), (b + b' hW) \right) \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1$$

puisque $a < 1$, en appliquant le théorème de Banach, nous obtenons le résultat.

Analyse de l'erreur

Dans cette section nous allons démontrer que la méthode numérique, construite dans la section précédente, converge vers la solution exacte de l'équation. Contrairement au chapitre précédent et puisque maintenant nous travaillons sur $C^1(0, T)$, nous allons définir une erreur plus adaptée.

$$\varepsilon_i = |U_i - f(t_i)| + |V_i - f'(t_i)|, \quad 0 \leq i \leq N.$$

On dit que la méthode est convergente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq i \leq N} |\varepsilon_i|) = 0.$$

L'erreur de consistance change elle aussi pour cette équation

$$\begin{aligned} \delta(h, t_i) &= \left| \int_0^{t_i} K(t_n, s, u(s), u'(s)) ds - h \sum_{j=0}^i w_j K(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \right| \\ &+ \left| \int_0^{t_i} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, s, u(s), u'(s)) ds - h \sum_{j=0}^i w_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \right|. \end{aligned}$$

Théorème 13. *Si l'erreur de consistance est logique pour l'équation (1.9), alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq i \leq N} |\varepsilon_i|) = 0.$$

Preuve. *Pour $n \geq 1$,*

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &\leq (a + ahW + \bar{a}hW) |U_i - f(t_i)| + (b + bhW + \bar{b}hW) |V_i - f'(t_i)| \\ &+ hW \sum_{j=0}^{i-1} ((a + \bar{a}) |U_j - f(t_j)| + (b + \bar{b}) |V_j - f'(t_j)|) \\ &+ \delta(h, t_i). \end{aligned}$$

Pour h assez petit, $\alpha := \min(1 - (a + ahW + \bar{a}hW), 1 - (b + bhW + \bar{b}hW)) > 0$, et

$$\varepsilon_i \leq \frac{hW \max(a + \bar{a}, b + \bar{b})}{\alpha} \sum_{j=0}^{i-1} \varepsilon_j + \frac{1}{\alpha} \delta(h, t_i).$$

En appliquant le lemme 1, on récupère

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{hW \max(a + \bar{a}, b + \bar{b})}{\alpha} \right)^{i-1} \left(\max_{1 \leq i \leq N} |\delta(h, t_i)| + hW \max(a + \bar{a}, b + \bar{b}) \varepsilon_0 \right),$$

et du fait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{hW \max(a + \bar{a}, b + \bar{b})}{\alpha} \right)^{n-1} < +\infty,$$

on obtient le résultat souhaité.

Résultats Numériques

Nous avons arbitrairement choisi des équations pour illustrer l'efficacité de notre méthode. A notre connaissance, ces équations ne représentent aucun intérêt physique, mais elles ont un grand intérêt mathématiques dans nos applications.

Nous allons utiliser la méthode des trapèzes puisqu'elle assure que l'erreur de consistance est logique pour les deux équations. Les termes F_n , U_n et V_n ne seront pas exactement calculés mais ils seront approchés à l'aide du procédé d'itération du théorème de Banach avec une condition d'arrêt du type

$$\|x - T(x)\| \leq \frac{1}{10N}$$

Pour le troisième chapitre, on a choisi l'équation suivante

$$u(t) = f(t) + \int_0^t \frac{t(s+1)}{5 + (u(s) + u'(s))^2} ds, \quad t \in [0, 1],$$

$K(t, s, x, y) = \frac{t(s+1)}{5 + (x+y)^2}$ vérifie (H2) et (H3) avec $M = a = b = \bar{a} = \bar{b} = \frac{2}{5}$. Si on prend

$$f(t) = t - \frac{t}{2} \ln(6 + 2t + t^2) + \frac{t}{2} \ln(6),$$

on trouve que,

$$u(t) = t.$$

N	$\max_{1 \leq j \leq N} \left(U_j - u(t_j) + V_j - u'(t_j) \right)$
10	1.7130e-002
50	3.3778e-003
100	1.6859e-003
200	8.4219e-004
300	5.6130e-004
500	3.3670e-004
1000	1.6832e-004
1500	1.1221e-004

TABLE 1.3 – Équation intégro-différentielle

Chapitre 2

Équations intégrales faiblement singulière

Dans ce chapitre nous représentons un autre type d'équations de Volterra, avec des noyaux toujours non linéaires, mais, contrairement aux ceux étudiés dans le premier chapitre, les nouveaux noyaux sont composés de deux parties, la première est régulière et contient l'inconnue et sa dérivé d'une façons non linéaire et la deuxième ne contient pas l'inconnue mais elle représente une singularité faible.

Nous allons étudier ce genre d'équations du coté analytique c-à-d l'existence et l'unicité de la solution. Le cas sans la dérivé, sera suivi par l'étude numérique, contrairement aux méthodes numérique destinées au cas intégro-différentielle, qui seront présentées dans le chapitre suivant

1 Équation intégrale faiblement singulière non linéaire de Volterra

Dans cette section nous étudions un autre type d'équations intégrale de Volterra avec un noyau qui contient une partie faiblement singulière, mais sans l'intervention de la dérivé de l'inconnu, cette équation se présente sous la forme,

$$u(t) = \int_a^t p(t-s)K(t,s,u(s))ds + f(t); \quad \forall t \in [a,b], \quad (2.1)$$

où, $u \in C(a,b)$ inconnu, et K est une fonction définie par,

$$\begin{aligned} K : [a,b]^2 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (t,s,u) &\mapsto K(t,s,u), \end{aligned}$$

vérifiant les hypothèses suivantes :

$$(H4) \left\| \begin{array}{l} (1) \quad K \in C([a,b]^2 \times \mathbb{R}), \\ (2) \quad \exists A > 0, \forall t,s \in [a,b], \forall X,Y \in \mathbb{R} \\ |K(t,s,X) - K(t,s,Y)| \leq A|X - Y|. \end{array} \right.$$

La partie faiblement singulière p vérifie les hypothèses suivantes :

$$(H5) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad p \in L^1(a-b, b-a), \\ (2) \quad \forall t \geq 0 \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_t^{t+\delta} |p(t+\delta-s)| ds = 0. \end{array} \right.$$

1.1 Étude analytique

Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2.1) nous construisons deux suites de fonctions, $\{u_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(t) = f(t) + \int_a^t p(t-s)K(t,s,u_{n-1}(s))ds, \forall t \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ u_0(t) = f(t). \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_n(t) = u_n(t) - u_{n-1}(t), \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \varphi_0(t) = f(t). \end{array} \right.$$

Il est clair que :

$$\sum_{i=0}^n \varphi_i(t) = u_n(t).$$

Théorème 14. *Sous les hypothèses (H4) et (H5) et sachant qu'il existe des points $a = T_0, T_1, \dots, T_n = b$, tel que, pour $0 \leq i \leq n$, et pour $t \in [T_i, T_{i+1}]$*

$$A \int_{T_i}^{\min(t, T_{i+1})} |p(t-s)| ds \leq \rho, \quad (2.2)$$

où, ρ est indépendant de t et de n , donc (2.1) admet une unique solution dans $C(a, b)$.

Preuve. Existence de la solution

Nous procédons par sous intervalle $[T_i, T_{i+1}]$, nous commençons par montrer l'existence dans $[T_0, T_1]$:

On définit $\{u_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation précédente dans $[a, T_1]$.

Il est clair que $\{u_i(t)\}_{i=1}^n$ et $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^n$ sont dans $C(a, b)$.

Nous avons, $\forall t \in [T_0, T_1]$

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t)| &\leq A \int_a^t |p(t-s)| |\varphi_{n-1}(s)| ds \\ &\leq \rho \|\varphi_{n-1}\|_{C(T_0, T_1)}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\|\varphi_n\|_{C(T_0, T_1)} \leq (\rho)^n \|\varphi_0\|_{C(T_0, T_1)} \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \|\varphi_i\|_{C(T_0, T_1)} \leq \|\varphi_0\|_{C(T_0, T_1)} \frac{1}{1 - \rho}.$$

Comme, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $u \in C(T_0, T_1)$. Alors, nous pouvons écrire, $\forall t \in [T_0, T_1]$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t) = u(t).$$

Pour prouver que $u(t)$ satisfait l'équation originale (2.1), nous supposons que

$$u(t) = u_n(t) + \Delta_n(t),$$

nous avons,

$$\begin{aligned} & \left| u(t) - f(t) - \int_a^t p(t-s)K(t, s, u(s))ds \right| \\ &= \left| \Delta_n(t) + u_n(t) - f(t) - \int_a^t p(t-s)K(t, s, u(s))ds \right| \\ &\leq |\Delta_n(t)| + \left| \int_a^t p(t-s) (K(t, s, u_{n-1}(s)) - K(t, s, u(s))) ds \right| \\ &\leq |\Delta_n(t)| + \int_a^t |p(t-s)| \{A |\Delta_{n-1}(s)|\} ds, \\ &\leq |\Delta_n(t)| + \rho \|\Delta_{n-1}\|_{C(T_0, T_1)} \leq \|\Delta_n\|_{C(T_0, T_1)} + \|\Delta_{n-1}\|_{C(T_0, T_1)}. \end{aligned}$$

mais,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\Delta_n\|_{C(T_0, T_1)} = 0,$$

Alors u est solution de (2.1).

Unicité de la solution

Nous supposons qu'il existe deux solutions u_1 et u_2 de l'équation (2.1). Alors, pour tout $t \in [T_0, T_1]$:

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq \rho \|u_1 - u_2\|_{C(T_0, T_1)}.$$

Puisque $\rho < 1$, cela ne peut être vrai que si $u_1(t) = u_2(t)$, pour tout $t \in [T_0, T_1]$.

Prolongement de la solution

Pour $t \in [T_1, T_2]$, nous écrivons l'équation sous la forme :

$$u_1(t) = F(t) + \int_{T_1}^t p(t-s)K(t, s, u_1(s))ds, \quad T_1 \leq t \leq T_2, \quad (2.3)$$

avec,

$$F(t) = f(t) + \int_a^{T_1} p(t-s)K(t, s, u_0(s))ds,$$

et $u_0(s)$ est la solution obtenue dans la première étape. Mais, (2.3) est justement la même équation de Volterra avec $a \rightarrow T_1$. Nous pouvons donc appliquer les mêmes étapes précédentes pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution u_1 dans l'intervalle $[T_1, T_2]$.

Nous définissons

$$u(t) = \begin{cases} u_0(t) & t \in [T_0, T_1], \\ u_1(t) & t \in [T_1, T_2]. \end{cases}$$

Il est clair que $u \in C(T_0, T_2)$, donc l'équation (2.1) admet une solution unique dans $[T_0, T_2]$.

Nous répétons cette opération et puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de sous-intervalles sur $[a, b]$, nous construisons ainsi la solution unique en $C(a, b)$.

1.2 Étude numérique

Pour construire une méthode numérique qui donne une approximation de la solution de l'équation (2.1), nous utilisons la méthode product Intégration pour enlever la singularité du noyau, cette méthode consiste à approcher la partie régulière K , par les fonctions chapeaux qui apparaissent à chaque fois que s rejoint t :

$$P_{n,1}[K](t, s, u(s)) = \frac{s-t_j}{h}K(t, t_{j+1}, u(t_{j+1})) + \frac{t_{j+1}-s}{h}K(t, t_j, u(t_j)), \quad t_j \leq s \leq t_{j+1}.$$

Ce qui permet l'approximation du terme intégrale de notre équation par la formule suivante :

$$\begin{aligned} & \int_a^{t_n} p(t_n-s)K(t_n, s, u(s))ds \simeq \alpha_{n,1}K(t_n, t_0, u(t_0)) \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j})K(t_n, t_j, u(t_j)) + \beta_{n,n}K(t_n, t_n, u(t_n)), \end{aligned} \quad (2.4)$$

où, pour $0 \leq j \leq n - 1$,

$$\begin{aligned}\alpha_{n,j+1} &= \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p(t_n - s)(t_{j+1} - s) ds, \\ \beta_{n,j+1} &= \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p(t_n - s)(s - t_j) ds.\end{aligned}$$

Une fois les termes, $\alpha_{n,j+1}$, $\beta_{n,j+1}$, sont calculés explicitement, la méthode numérique pour résoudre (2.1), est donnée par :

$$U_0 = f(a), \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}U_n &= f(t_n) + \alpha_{n,1}K(t_n, t_0, U_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j})K(t_n, t_j, U_j) \\ &\quad + \beta_{n,n}K(t_n, t_n, U_n),\end{aligned} \tag{2.6}$$

où $\{U_n\}_{0 \leq n \leq N}$ approche les valeurs $u(t_n)$.

Étude du système

Théorème 15. *pour h suffisamment petit, le système (2.5)–(2, 6) admet une unique solution.*

Preuve. *Pour $n \geq 1$, nous définissons*

$$\begin{aligned}\Psi_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\rightarrow \Psi_n(X) = S_n + \beta_{n,n}K(t_n, t_n, X)\end{aligned}$$

où,

$$S_n = f(t_n) + \alpha_{n,1}K(t_n, t_0, U_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j})K(t_n, t_j, U_j).$$

Supposons que U_0, U_1, \dots, U_{n-1} , sont connues, U_n est solution de $U_n = \Psi_n(U_n)$,

nous avons,

$$\begin{aligned}|\psi_n(X) - \psi_n(X')| &= |\beta_{n,n}K(t_n, t_n, X) - \beta_{n,n}K(t_n, t_n, X')|, \\ &\leq A\beta_{n,n}|X - X'|.\end{aligned}$$

Mais, $\lim_{h \rightarrow 0} \max(\hat{\beta}_{n,n}, \beta_{n,n}) = 0$, donc, pour h suffisamment petit les fonctions ψ_n sont contractantes et le système (2.5) – (2, 6) admet une unique solution $\{U_j\}_{0 \leq j \leq n}$.

Analyse de l'erreur

Pour u l'unique solution de (2.1) nous définissons la fonction, $\forall h > 0, 0 \leq n \leq N$,

$$\delta(h, t_n) = \int_{t_0}^{t_n} p(t_n - s)K(t_n, s, u(s)) ds - \sum_{j=0}^n \omega_{nj}K(t_n, t_j, u(t_j)),$$

Où ,

$$\omega_{nj} = \begin{cases} \alpha_{n,1}, & j = 0, \\ \alpha_{n,j+1} + \beta_{nj}, & 1 \leq j \leq n-1, \\ \beta_{n,n}, & j = n, \end{cases}$$

qui est appelée l'erreur de consistance locale pour (2.1).

Proposition 16.

$$\max_{0 \leq j \leq n} |\delta(h, t_j)| \leq w_0(h, f) + \max_{a \leq t \leq b; x \in \mathbb{R}} w_0(h, K(t, \cdot, x)) \|p\|_{L^1(a,b)} + w_0(h, H),$$

où,

$$\begin{aligned} \forall h > 0, \forall \varphi \in C(a, b), w_0(h, \varphi) &= \max_{|\tau - \theta| < h} |\varphi(\tau) - \varphi(\theta)|, \\ \forall t \in [a, b], H(t) &= \int_a^t p(t-s)K(t, s, u(s)) ds. \end{aligned}$$

Preuve. Nous avons, $\forall h > 0, 0 \leq n \leq N$

$$\begin{aligned} |\delta(h, t_n)| &\leq \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| |K(t_n, s, u(s)) - P_{n1}[K](t_n, s, u(s))| ds \\ &\leq \max_{|\tau - \theta| < h} (|K(t_n, \tau, u(\tau)) - K(t_n, \theta, u(\theta))|) \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| ds, \\ &\leq \max_{|\tau - \theta| < h} (|K(t_n, \tau, u(\tau)) - K(t_n, \tau, u(\theta))| \\ &\quad + |K(t_n, \tau, u(\theta)) - K(t_n, \theta, u(\theta))|) \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| ds, \\ &\leq \max_{|\tau - \theta| < h} |u(\theta) - u(\tau)| A \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| ds \\ &\quad + \max_{a \leq t \leq b; x \in \mathbb{R}} |K(t, \tau, x) - K(t, \theta, x)| \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| ds, \\ &\leq \rho w_0(h, u) + \max_{a \leq t \leq b; x \in \mathbb{R}} |K(t, \tau, x) - K(t, \theta, x)| \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| ds. \end{aligned}$$

mais,

$$u(\theta) - u(\tau) = f(\theta) - f(\tau) + \int_a^\theta p(\theta - s)K(\theta, s, u(s)) ds - \int_a^\tau p(\tau - s)K(\tau, s, u(s)) ds$$

donc,

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\delta(h, t_j)| \leq w_0(h, f) + \max_{a \leq t \leq b; x \in \mathbb{R}} w_0(h, K(t, \cdot, x)) \|p\|_{L^1(a,b)} + w_0(h, H).$$

Pour $0 \leq i \leq N$, nous définissons l'erreur de discrétisation par

$$\varepsilon_i = |U_i - u(t_i)|$$

La méthode numérique (2.5) – (2.6) est convergente si,

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon_n|) = 0.$$

Théorème 17. *Sous les hypothèses (H1)–(H2) et en supposant que l'intervalle $[a, b]$ peut être divisé en un nombre fini de sous-intervalles $[a = z_0, z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_{m-1}, z_m = b]$, tel que si j_v désigne le plus grand nombre entier inférieur ou égal à z_v/h et $\omega_{nj} = 0$ pour $j > n$, les poids ω_{nj} , satisfont la condition suivante :*

$$\sum_{j=j_v}^{j_{v+1}-1} |\omega_{nj}| \leq \rho < 1, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq v \leq m.$$

Cette subdivision doit être indépendante de h , alors,

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\varepsilon_j| \leq \left(\frac{1}{1 - \rho} \right)^m \max_{1 \leq j \leq n} |\delta(h, t_j)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Exemple Numérique :

Considérons l'équation intégrale non linéaire de Volterra définie comme suit :

$$u(t) = \arcsin(t) - 4/3\sqrt[3]{t^2} + \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \sin(f(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq T = 1$$

$$K(t, s, u) = \sin(u), \quad 0 \leq s \leq t \leq T = 1,$$

$$f(t) = \arcsin(t) - 4/3\sqrt[3]{t^2}.$$

Le tableau suivant donne une estimation de l'erreur entre la solution exacte et approchée $|U_n - u(t_n)|$, de l'équation précédente.

t	$ \varepsilon_n = U_n - u(t_n) $ $h = 0.1$	$ \varepsilon_n = U_n - u(t_n) $ $h = 0.01$
00	00	00
0.2	0.1605e - 009	6.6732e - 016
0.4	0.3976e - 009	5.3746e - 016
0.6	0.6197e - 009	3.8321e - 016
0.8	0.7346e - 009	4.4028e - 016
1	0.54586e - 009	eps

TABLE 2.1 – Équation intégrale faiblement singulière non linéaire de Volterra

2 Équation intégro- différentielle faiblement singulière non linéaire de Volterra

Cette section représente l'essentiel de nos résultats analytiques, nous cherchons à montrer l'existence et l'unicité de la solution d'une équation de Volterra intégro-différentielle faiblement singulière non linéaire.

Le problème est de trouver, pour f donné dans $C^1(a, b)$, une fonction $u \in C^1(a, b)$ qui vérifie l'équation suivante :

$$\forall t \in [a, b], u(t) = \int_a^t p(t-s)K(t, s, u(s), u'(s))ds + f(t). \quad (2.7)$$

Nous supposons que la partie singulière, c-à-d p satisfait les hypothèse suivantes :

$$(H6) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad p \in W^{1,1}(a-b, b-a), \\ (2) \quad p(0) = 0, \end{array} \right. ,$$

où, $W^{1,1}(a-b, b-a) = \{x \in L^1(a-b, b-a) : x' \in L^1(a-b, b-a)\}$, x' est la dérivé faible ou sens des distribution de x . $W^{1,1}(a-b, b-a)$ est un espace de Banach avec la norme suivante :

$$\begin{aligned} \|x\|_{W^{1,1}(a-b, b-a)} &= \|x\|_{L^1(a-b, b-a)} + \|x'\|_{L^1(a-b, b-a)} \\ &= \int_{a-b}^{b-a} |x(s)| ds + \int_{a-b}^{b-a} |x'(s)| ds. \end{aligned}$$

Nous avons, $\forall t \in [a, b], \forall \delta > 0$,

$$\int_t^{t+\delta} \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t+\delta-s) \right| ds = \int_0^\delta |p'(\tau)| d\tau,$$

ce qui implique que, $\forall t \in [a, b]$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_t^{t+\delta} \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t+\delta-s) \right| ds = 0.$$

En plus, $\forall t, s \in [a, b]$,

$$|p(t-s)| = \left| \int_0^{t-s} p'(\tau) d\tau \right| \leq \int_{a-b}^{b-a} |p'(\tau)| d\tau < \infty.$$

Cela signifie que la singularité vient du terme $\frac{\partial p}{\partial t}(t-s)$ parce qu'en général, nous avons $\lim_{s \rightarrow t} \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) = +\infty$. Mais, cette singularité reste faible car $\forall t \in [a, b]$,

$$\int_a^t \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) \right| ds \leq \int_0^{t-a} |p'(\tau)| d\tau \leq \int_{a-b}^{b-a} |p'(\tau)| d\tau < \infty.$$

Cette équation contient des informations supplémentaires sur la solution u . Si nous calculons la dérivée des deux côtés de l'équation, nous obtenons, $\forall t \in [a, b]$,

$$u'(t) = \int_a^t \frac{\partial p}{\partial t}(t-s)K(t, s, u(s), u'(s))ds + \int_a^t p(t-s) \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s))ds + f'(t).$$

Supposons aussi que la partie régulière K défini par,

$$\begin{aligned} K : [a, b]^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, s, u, v) &\mapsto K(t, s, u, v), \end{aligned}$$

vérifie les hypothèses suivantes :

$$(H7) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\partial K}{\partial t} \in C([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2), \\ (2) \quad \exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall t, s \in [a, b], \forall u, v, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}, \\ \quad \max \left(|K(t, s, u, v)|, \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u, v) \right| \right) \leq M. \\ (3) \quad \exists A, B, \bar{A}, \bar{B} \in \mathbb{R}_+^*, \forall t, s \in [a, b], \forall u, v, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}, \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} |K(t, s, u, v) - K(t, s, \bar{u}, \bar{v})| \leq A |u - \bar{u}| + B |v - \bar{v}|, \\ \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u, v) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, \bar{u}, \bar{v}) \right| \leq \bar{A} |u - \bar{u}| + \bar{B} |v - \bar{v}|. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Le problème qui se pose en premier lieu est sur la bonne construction de l'équation c-à-d est ce que les deux cotés de l'équation (2, 7) appartienne au même espace $C^1(a, b)$? Pour cela nous définissons la fonctionnelle, Φ_f par,

$$\forall \xi \in C^1(a, b), \forall t \in [a, b], \quad \Phi_f(\xi)(t) := \int_a^t p(t-s)K(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds + f(t).$$

Proposition 18. *Pour tout $f \in C^1(a, b)$, Φ_f est continu de $C^1(a, b)$ dans lui-même.*

Preuve. Soit $\xi \in C^1(a, b)$. Il est clair que $\Phi_f(\xi)$ est continu sur $[a, b]$. Pour tout $t \in [a, b]$,

$$\Phi_f(\xi)'(t) := \int_a^t \frac{\partial p}{\partial t}(t-s)K(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds + \int_a^t p(t-s) \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds + f'(t),$$

qui est continue sur $[a, b]$ et pour tout $t \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} |\Phi_f(\xi)'(t)| &\leq M \left(\int_a^t \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) \right| ds + \int_a^t |p(t-s)| ds \right) + \|f\|_{C^1(a,b)} \\ &\leq M \left(\int_0^{t-a} |p'(\tau)| d\tau + \int_0^{t-a} |p(\tau)| d\tau \right) + \|f\|_{C^1(a,b)} \\ &\leq M \|p\|_{W^{1,1}(a-b, b-a)} + \|f\|_{C^1(a,b)}, \end{aligned}$$

alors, $\Phi_f(\xi) \in C^1(a, b)$. Soit $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $C^1(a, b)$ qui converge vers $\xi \in C^1(a, b)$, nous avons,

$$\begin{aligned} \Phi_f(\xi)(t) - \Phi_f(\xi_n)(t) &= \int_a^t p(t-s)(K(t, s, \xi(s), \xi'(s)) - K(t, s, \xi_n(s), \xi_n'(s))) ds \\ \Rightarrow \max_{t \in [a, b]} |\Phi_f(\xi)(t) - \Phi_f(\xi_n)(t)| &\leq \max_{t \in [a, b]} |\xi(t) - \xi_n(t)| A \int_a^t |p(t-s)| ds \\ &\quad + \max_{t \in [a, b]} |\xi'(t) - \xi_n'(t)| B \int_a^t |p(t-s)| ds \\ &\leq \|p\|_{W^{1,1}(a-b, b-a)} \max(A, B) \|\xi - \xi_n\|_{C^1(a,b)}, \\ \max_{t \in [a, b]} |\Phi_f(\xi)'(t) - \Phi_f(\xi_n)'(t)| &\leq \|p\|_{W^{1,1}(a-b, b-a)} (\max(A, B) + \max(\bar{A}, \bar{B})) \|\xi - \xi_n\|_{C^1(a,b)}. \end{aligned}$$

Donc, Φ_f est continu de $C^1(a, b)$ dans lui-même.

Dans ce qui suit, nous désignons $\|\cdot\|_{C^1(a,b)} = \|\cdot\|$.

2.1 Étude analytique

Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2.7), nous utilisons la méthode classique appelée méthode de Picard. Cette méthode est basée sur la construction de deux suites récurrentes $\{u_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$, qui sont définies par les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(t) = f(t) + \int_a^t p(t-s)K(t, s, u_{n-1}(s), u'_{n-1}(s))ds \quad , \forall n \in \mathbb{N}^* \\ u_0(t) = f(t). \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u'_n(t) = f'(t) + \int_a^t \frac{\partial p}{\partial t}(t-s)K(t, s, u_{n-1}(s), u'_{n-1}(s))ds \\ \quad + \int_a^t p(t-s) \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u_{n-1}(s), u'_{n-1}(s))ds \quad , \forall n \in \mathbb{N}^* \\ u'_0(t) = f'(t). \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_n(t) = u_n(t) - u_{n-1}(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \varphi_0(t) = f(t). \end{array} \right. \quad (2.8)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi'_n(t) = u'_n(t) - u'_{n-1}(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \varphi'_0(t) = f'(t). \end{array} \right. \quad (2.9)$$

En plus, de (2.8) et (2.9), $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) = u_n(t) \quad , \\ \sum_{i=0}^n \varphi'_i(t) = u'_n(t) \quad . \end{array} \right.$$

Théorème 19. *Sous les hypothèses (H6) et (H7) et sachant qu'il existe des points $a = T_0, T_1, \dots, T_n = b$, tel que, pour $0 \leq i \leq n$, et pour $t \in [T_i, T_{i+1}]$*

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \{A, B, \bar{A}, \bar{B}\} \int_{T_i}^{\min(t, T_{i+1})} |p(t-s)| ds \leq \rho < \frac{1}{3}, \\ \max \{A, B\} \int_{T_i}^{\min(t, T_{i+1})} \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) \right| ds \leq \rho < \frac{1}{3}, \end{array} \right. \quad (2.10)$$

où, ρ est indépendant de t et de n , alors (2.7) admet une unique solution dans $C^1(a, b)$.

Preuve. *Pour la démonstration, nous montrons l'existence et l'unicité sur l'intervalle réduit $[T_0, T_1]$, puis nous prolongeons la solution sur tout l'intervalle $[a, b]$.*

Existence sur l'intervalle $[T_0, T_1]$

Supposons $t \in [T_0, T_1]$, nous définissons $\varphi_n(t)$ comme avant. D'après la définition de $\{u_i(t)\}_{i=1}^n$ et $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^n$, nous déduisons qu'ils sont dans $C^1(a, b)$. Nous avons, $\forall t \in [T_0, T_1]$

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t)| &\leq \int_a^t |p(t-s)| \left| K(t, s, u_{n-1}(s), u'_{n-1}(s)) - K(t, s, u_{n-2}(s), u'_{n-2}(s)) \right| ds \\ &\leq A \int_a^t |p(t-s)| |\varphi_{n-1}(s)| ds + B \int_a^t |p(t-s)| |\varphi'_{n-1}(s)| ds \\ &\leq \rho \|\varphi_{n-1}\|_{C^1(T_0, T_1)}. \end{aligned}$$

En plus,

$$\begin{aligned} |\varphi'_n(t)| &= |u'_n(t) - u'_{n-1}(t)| \\ &= \left| \int_a^t p(t-s) \left(\frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u_n(s), u'_n(s)) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u_{n-1}(s), u'_{n-1}(s)) \right) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_a^t \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) (K(t, s, u_n(s), u'_n(s)) - K(t, s, u_{n-1}(s), u'_{n-1}(s))) ds \right| \\ &\leq A \int_a^t \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) \varphi_{n-1}(s) \right| ds + B \int_a^t \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) \varphi'_{n-1}(s) \right| ds \\ &\quad + \bar{A} \int_a^t |p(t-s) \varphi_{n-1}(s)| ds + \bar{B} \int_a^t |p(t-s) \varphi'_{n-1}(s)| ds \\ &\leq \left(\max \{A, B, \bar{A}, \bar{B}\} \int_{T_0}^t |p(t-s)| ds + \max \{A, B\} \int_{T_0}^t \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) \right| ds \right) \|\varphi_{n-1}\|_{C^1(T_0, T_1)} \\ &\leq 2\rho \|\varphi_{n-1}\|_{C^1(T_0, T_1)}, \end{aligned}$$

alors,

$$\|\varphi_n\|_{C^1(T_0, T_1)} \leq 3\rho \|\varphi_{n-1}\|_{C^1(T_0, T_1)}.$$

ce qui donne,

$$\|\varphi_n\|_{C^1(T_0, T_1)} \leq (3\rho)^n \|\varphi_0\| \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \|\varphi_i\|_{C^1(T_0, T_1)} \leq \|\varphi_0\| \frac{1}{1-3\rho}.$$

Donc, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $u \in C^1(T_0, T_1)$, et nous pouvons écrire,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t) = u(t).$$

Pour prouver que u satisfait l'équation originale (2.7), nous définissons

$$u(t) = u_n(t) + \Delta_n(t) \implies u'(t) = u'_n(t) + \Delta'_n(t).$$

Nous avons,

$$\begin{aligned}
 & \left| u(t) - f(t) - \int_a^t p(t-s)K(t,s,u(s),u'(s))ds \right| \\
 = & \left| \Delta_n(t) + u_n(t) - f(t) - \int_a^t p(t-s)K(t,s,u(s),u'(s))ds \right| \\
 \leq & |\Delta_n(t)| + \left| \int_a^t p(t-s) (K(t,s,u_{n-1}(s),u'_{n-1}(s)) - K(t,s,u(s),u'(s))) ds \right| \\
 \leq & |\Delta_n(t)| + \int_a^t |p(t-s)| \{A|\Delta_{n-1}(s)| + B|\Delta'_{n-1}(s)|\} ds, \\
 \leq & |\Delta_n(t)| + \rho \|\Delta_{n-1}\|_{C^1(T_0,T_1)} \leq \|\Delta_n\|_{C^1(T_0,T_1)} + \|\Delta_{n-1}\|_{C^1(T_0,T_1)},
 \end{aligned}$$

mais,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\Delta_n\|_{C^1(T_0,T_1)} = 0,$$

donc u est une solution de (2.7).

Unicité de la solution

Supposons qu'il existe deux solutions u_1 et u_2 pour l'équation (2.7), alors pour, $t \in [T_0, T_1]$:

$$\begin{aligned}
 |u_1(t) - u_2(t)| &= \left| \int_a^{t_1} p(t-s)(K(t,s,u_1(s),u'_1(s)) - K(t,s,u_2(s),u'_2(s)))ds \right| \\
 &\leq \int_a^{t_1} |p(t-s)| (A|u_1(s) - u_2(s)| + B|u'_1(s) - u'_2(s)|) ds \\
 &\leq \rho \left(\max_{t \in [a, T_1]} |u_1(t) - u_2(t)| + \max_{t \in [a, T_1]} |u'_1(t) - u'_2(t)| \right) \\
 &\leq \rho \|u_1 - u_2\|_{C^1(a, T_1)}.
 \end{aligned}$$

De la même manière

$$\begin{aligned}
 |u'_1(\tau) - u'_2(\tau)| &\leq \left| \int_a^{t_1} \frac{\partial p}{\partial t}(t-s)(K(t,s,u_1(s),u'_1(s)) - K(t,s,u_2(s),u'_2(s)))ds \right| \\
 &+ \left| \int_a^{t_1} p(t-s) \left(\frac{\partial K}{\partial t}(t,s,u_1(s),u'_1(s)) - \frac{\partial K}{\partial t}(t,s,u_2(s),u'_2(s)) \right) ds \right| \\
 &\leq \int_a^{t_1} \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) \right| (A|u_1(s) - u_2(s)| + B|u'_1(s) - u'_2(s)|) ds \\
 &+ \int_a^{t_1} |p(t-s)| (\bar{A}|u_1(s) - u_2(s)| + \bar{B}|u'_1(s) - u'_2(s)|) ds \\
 &\leq \max_{t \in [a, T_1]} |u_1(t) - u_2(t)| A \int_a^{t_1} \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) \right| ds \\
 &+ \max_{t \in [a, T_1]} |u'_1(t) - u'_2(t)| B \int_a^{t_1} \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) \right| ds \\
 &+ \max_{t \in [a, T_1]} |u_1(t) - u_2(t)| \bar{A} \int_a^{t_1} |p(t-s)| ds \\
 &+ \max_{t \in [a, T_1]} |u'_1(t) - u'_2(t)| \bar{B} \int_a^{t_1} |p(t-s)| ds \\
 &\leq 2\rho \left(\max_{t \in [a, T_1]} |u_1(t) - u_2(t)| + \max_{t \in [a, T_1]} |u'_1(t) - u'_2(t)| \right) \\
 &\leq 2\rho \|u_1 - u_2\|_{C^1(T_0, T_1)},
 \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}
 \|u_1 - u_2\|_{C^1(a, T_1)} &= \max_{t \in [a, T_1]} |u_1(t) - u_2(t)| + \max_{t \in [a, T_1]} |u'_1(t) - u'_2(t)| \\
 &\leq 3\rho \|u_1 - u_2\|_{C^1(a, T_1)}.
 \end{aligned}$$

Du fait que $\rho < \frac{1}{3}$, cela ne peut être vrai que si $u_1(t) = u_2(t)$ pour tous $t \in [a, T_1]$.

Prolongement de la solution

Maintenant pour $t \in [T_1, T_2]$, nous écrivons l'équation comme suit,

$$u_1(t) = F(t) + \int_{T_1}^t p(t-s)K(t,s,u_1(s),u'_1(s))ds, \quad T_1 \leq t \leq T_2, \quad (2.11)$$

avec,

$$F(t) = f(t) + \int_a^{T_1} p(t-s)K(t,s,u_0(s),u_0'(s))ds,$$

et $u_0(s)$ est la solution obtenue dans la première étape. Mais (2.11) est exactement la même équation de Volterra avec l'origine décalée de $a \rightarrow T_1$. Nous pouvons donc appliquer les mêmes étapes de base.

Nous définissons :

$$u(t) = \begin{cases} u_0(t) & t \in [T_0, T_1], \\ u_1(t) & t \in [T_1, T_2]. \end{cases}$$

Il est clair que $u \in C^1(T_0, T_2)$, est la solution unique de (2.7) sur $[T_0, T_2]$.

Cet argument peut être répété et puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de sous intervalles dans $[a, b]$, nous construisons ainsi la solution unique sur $C^1(a, b)$.

Chapitre 3

Étude numérique

Dans ce chapitre nous intéressons à l'approximation numérique de la solution u de l'équation intégrale-différentielle faiblement singulière de Volterra définie par :

$$\forall t \in [a, b], u(t) = \int_a^t p(t-s)K(t, s, u(s), u'(s))ds + f(t); \quad (3.1)$$

où, l'existence et l'unicité de la solution de cette équation sont assurée par les conditions des hypothèses $H(6)$ et $H(7)$ proposées dans le chapitre 2.

Nous rappelons qu'une fois dériver, cette équation devient

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], u'(t) &= \int_a^t \frac{\partial p}{\partial t}(t-s)K(t, s, u(s), u'(s))ds \\ &+ \int_a^t p(t-s)\frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s))ds + f'(t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

Pour construire une solution approchée de notre équation sur l'intervalle $[a, b]$, nous avons alors besoin de construire des approximations pour les trois intégrales ci-dessus qui apparaissent dans le deuxième membre des deux équations (3.1) et (3.2),

$$I_1 = \int_a^t p(t-s)k(t, s, u(s), u'(s))ds, \quad (3.3)$$

$$I_2 = \int_a^t \frac{\partial p}{\partial t}(t-s)k(t, s, u(s), u'(s))ds, \quad (3.4)$$

$$I_3 = \int_a^t p(t-s)\frac{\partial k}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s))ds. \quad (3.5)$$

Les noyaux dans les intégrales I_1 et I_3 sont réguliers et presque toutes les méthodes d'intégration numérique sont applicables pour les approcher.

D'autre part, pour I_2 , qui contient une partie singulière, nous sommes obligés d'utiliser la méthode "product integral".

Les différents combinaisons entre les méthodes d'intégration numérique que nous utilisons pour l'approximation de I_1 , I_2 et I_3 forment quatre méthodes d'approximation de la solution de notre équation et se résument dans le tableau suivant :

	I_1	I_2	I_3
mehtod 1(PPP)	product integral	product integral	product integral
mehtod 2(NPP)	Nystrôme method	product integral	product integral
mehtod 3(PPN)	product integral	product integral	Nystrôme method
mehtod 4(NPN)	Nystrôme method	product integral	Nystrôme method

TABLE 3.1 – Méthodes d'approximations

Dans la suite, nous allons construire les systèmes numériques issues de chaque méthode, puis étudier leurs convergence. Pour montrer leurs efficacités des tests numériques sont effectués sur quelques exemples pratiques.

A la fin, nous comparons qualitativement entre les quatre méthodes en utilisant le profil de performance.

1 Description numérique

Pour déterminer une approximation numérique de $u(t)$, $t \in [a, b]$, nous définissons la subdivision $\{t_j\}_{0 \leq j \leq n}$ de l'intervalle $[a, b]$ par :

$$\forall N \geq 1, h = \frac{b-a}{N}, \quad (3.6)$$

$$t_j = a + jh, \quad 0 \leq j \leq N. \quad (3.7)$$

Nous remplaçons dans les équations (3.1) et (3.2) les approximations des intégrales I_1 , I_2 et I_3 par la quadrature choisie par chaque méthode décrite dans le tableau. Nous étudions la convergence du système obtenu qui est directement lié à la consistance de la méthode utilisée.

1.1 La méthode PPP

Dans cette section, nous utilisons uniquement la méthode "product integration" pour l'approximation des trois intégrales I_1 , I_2 et I_3 :

Premièrement, nous approchons les parties régulières

$$K(t, s, u(s), u'(s)), \quad \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)),$$

sur la subdivision $\{t_j\}_{0 \leq j \leq n}$, par les fonctions chapeaux, ce qui donne :

$$\begin{aligned} P_{n,1}[K](t, s, u(s), u'(s)) &= \frac{s-t_j}{h} K(t, t_{j+1}, u(t_{j+1}), u'(t_{j+1})) \\ &+ \frac{t_{j+1}-s}{h} K(t, t_j, u(t_j), u'(t_j)), \quad t_j \leq s \leq t_{j+1}, \\ P_{n,1}\left[\frac{\partial K}{\partial t}\right](t, s, u(s), u'(s)) &= \frac{s-t_j}{h} \frac{\partial K}{\partial t}(t, t_{j+1}, u(t_{j+1}), u'(t_{j+1})), \\ &+ \frac{t_{j+1}-s}{h} \frac{\partial K}{\partial t}(t, t_j, u(t_j), u'(t_j)), \quad t_j \leq s \leq t_{j+1}. \end{aligned}$$

Cela conduit à la formule d'intégration suivante :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_a^{t_n} p(t_n - s)K(t_n, s, u(s), u'(s))ds \simeq \alpha_{n,1}K(t_n, t_0, u(t_0), u'(t_0)) \\
 &+ \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j})K(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)) + \beta_{n,n}K(t_n, t_n, u(t_n), u'(t_n)), \\
 \\
 I_2 &= \int_a^{t_n} \frac{\partial p}{\partial t}(t_n - s)K(t_n, s, u(s), u'(s))ds \simeq \hat{\alpha}_{n,1}K(t_n, t_0, u(t_0), u'(t_0)) \\
 &+ \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\alpha}_{n,j+1} + \hat{\beta}_{n,j})K(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)) + \hat{\beta}_{n,n}K(t_n, t_n, u(t_n), u'(t_n)), \\
 \\
 I_3 &= \int_a^{t_n} p(t_n - s)\frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s))ds \simeq \alpha_{n,1}\frac{\partial}{\partial t}K(t_n, t_0, u(t_0), u'(t_0)) \\
 &+ \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j})\frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)) + \beta_{n,n}\frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, u(t_n), u'(t_n)),
 \end{aligned}$$

où, pour $0 \leq j \leq N - 1$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \alpha_{n,j+1} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p(t_n - s)(t_{j+1} - s)ds, \\
 \beta_{n,j+1} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p(t_n - s)(s - t_j)ds, \\
 \hat{\alpha}_{n,j+1} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial p}{\partial t}(t_n - s)(t_{j+1} - s)ds, \\
 \hat{\beta}_{n,j+1} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial p}{\partial t}(t_n - s)(s - t_j)ds.
 \end{array} \right.$$

Deuxièmement, nous calculons, $\alpha_{n,j+1}$, $\beta_{n,j+1}$, $\hat{\alpha}_{n,j+1}$, $\hat{\beta}_{n,j+1}$ explicitement. Nous les remplaçons dans les équations d'origines (3.1), (3.2), ce qui donne le système

(PPP) suivant :

$$U_0 = f(a), \quad (3.8)$$

$$V_0 = f'(a), \quad (3.9)$$

$$U_n = f(t_n) + \alpha_{n,1}K(t_n, t_0, U_0, V_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j})K(t_n, t_j, U_j, V_j) \\ + \beta_{n,n}K(t_n, t_n, U_n, V_n), \quad 1 \leq n \leq N \quad (3.10)$$

$$V_n = f'(t_n) + \hat{\alpha}_{n,1}K(t_n, t_0, U_0, V_0) \\ + \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\alpha}_{n,j+1} + \hat{\beta}_{n,j})K(t_n, t_j, U_j, V_j) + \hat{\beta}_{n,n}K(t_n, t_n, U_n, V_n) \\ + \alpha_{n,1} \frac{\partial}{\partial t} K(t_n, t_0, U_0, V_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j}) \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_j, U_j, V_j) \\ + \beta_{n,n} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, U_n, V_n), \quad 1 \leq n \leq N \quad (3.11)$$

où, U_n approche $u(t_n)$ et V_n approche $u'(t_n)$.

Étude du système (PPP)

Dans cette partie, nous allons montrer que le système (3.8) – (3.11) admet une unique solution.

Théorème 20. *Pour h suffisamment petit, le système (3.8) – (3.11) a une solution unique.*

Preuve. *Supposons que l'espace \mathbb{R}^2 est muni par la norme suivante :*

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\|_1 = |X| + |Y|. \quad (3.12)$$

Pour tout $n \geq 1$, nous définissons :

$$\Psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} S + \beta_{n,n}K(t_n, t_n, X, Y) \\ \hat{S} + \hat{\beta}_{n,n}K(t_n, t_n, X, Y) + \beta_{n,n} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, X, Y) \end{pmatrix}$$

où,

$$S = f(t_n) + \alpha_{n,1}K(t_n, t_0, U_0, V_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j})K(t_n, t_j, U_j, V_j), \\ \hat{S} = f'(t_n) + \hat{\alpha}_{n,1}K(t_n, t_0, U_0, V_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\alpha}_{n,j+1} + \hat{\beta}_{n,j})K(t_n, t_j, U_j, V_j) \\ + \alpha_{n,1} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_0, U_0, V_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j}) \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_j, U_j, V_j).$$

Si, $U_0, U_1, \dots, U_{n-1}, V_0, V_1, \dots, V_{n-1}$, sont connus alors (3.8) – (3.11) est un système d'équations implicite pour définir U_n et V_n .

$$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \Psi_n \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}.$$

Nous avons, $\forall X, Y, X', Y' \in \mathbb{R}^2$,

$$\left\| \Psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \right\|_1,$$

$$\gamma_1 = \beta_{n,n}(K(t_n, t_n, X, Y) - K(t_n, t_n, X', Y')),$$

$$\gamma_2 = \hat{\beta}_{n,n}(K(t_n, t_n, X, Y) - K(t_n, t_n, X', Y')) + \beta_{n,n} \left(\frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, X, Y) - \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, X', Y') \right).$$

En appliquant (H_6) et (H_7) , nous obtenons

$$\begin{aligned} |\gamma_1| &\leq \beta_{n,n} (A |X - X'| + B |Y - Y'|), \\ |\gamma_2| &\leq \hat{\beta}_{n,n} (A |X - X'| + B |Y - Y'|) + \beta_{n,n} (\bar{A} |X - X'| + \bar{B} |Y - Y'|), \\ &\leq 2 \max(\hat{\beta}_{n,n}, \beta_{n,n}) (\max(A, \bar{A}) |X - X'| + \max(B, \bar{B}) |Y - Y'|). \end{aligned}$$

Ce qui donne,

$$\left\| \Psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 \leq 2 \max(\hat{\beta}_{n,n}, \beta_{n,n}) \max(A, B, \bar{A}, \bar{B}) \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1.$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \max(\hat{\beta}_{n,n}, \beta_{n,n}) = 0$, Ψ_n est une contraction pour h assez petit. Nous utilisons le théorème de Bannach pour obtenir le résultat désiré.

Analyse de l'erreur de la méthode (PPP)

Avant passé a l'étude de l'erreur, il faut d'abord montré que cette méthode est consistante. Pour cela nous définissons l'erreur de consistence locale de l'équation (3.1), qui est l'erreur entre la valeur exacte de l'intégrale et sa quadrature. L'erreur est définie par la formule :

pour $0 \leq n \leq N$,

$$\Delta^{\text{PPP}}(h, t_n) = \left| \delta^{\text{PPP}}(h, t_n) \right| + \left| \hat{\delta}^{\text{PPP}}(h, t_n) \right|,$$

où, pour $0 \leq n \leq N$,

$$\delta^{\text{PPP}}(h, t_n) = \int_{t_0}^{t_n} p(t_n - s) K(t_n, s, u(s), u'(s)) ds - \sum_{j=0}^n \kappa_{n,j} K(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)),$$

$$\begin{aligned} \hat{\delta}^{\text{PPP}}(h, t_n) &= \int_{t_0}^{t_n} \frac{\partial p}{\partial t}(t_n - s) K(t_n, s, u(s), u'(s)) ds - \sum_{j=0}^n \hat{\kappa}_{n,j} K(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \\ &+ \int_{t_0}^{t_n} p(t_n - s) \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) ds - \sum_{j=0}^n \kappa_{n,j} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)), \end{aligned}$$

avec,

$$\kappa_{n,j} = \begin{cases} \alpha_{n,1}, & j = 0, \\ \alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j}, & 1 \leq j \leq n-1, \\ \beta_{n,n}, & j = n, \end{cases}$$

et

$$\hat{\kappa}_{n,j} = \begin{cases} \hat{\alpha}_{n,1}, & j = 0, \\ \hat{\alpha}_{n,j+1} + \hat{\beta}_{n,j}, & 1 \leq j \leq n-1, \\ \hat{\beta}_{n,n}, & j = n. \end{cases}$$

Proposition 21.

$$\max_{1 \leq j \leq n} \left| \hat{\Delta}^{\text{PPP}}(h, t_j) \right| \leq w_1(h, f) + 3 \max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} w_1(h, K(t, \cdot, x, y)) \|p\|_{W^{1,1}(a-b, b-a)} + w_1(h, H_1),$$

où,

$$\begin{aligned} w_1(h, \varphi) &= \max_{|\tau - \theta| < h} |\varphi(\tau) - \varphi(\theta)| + \max_{|\tau - \theta| < h} |\varphi'(\tau) - \varphi'(\theta)|, \\ H(t) &= \int_a^t p(t-s) K(t, s, u(s), u'(s)) ds, \end{aligned}$$

Preuve. Nous avons,

$$\begin{aligned} \left| \hat{\delta}^{\text{PPP}}(h, t_n) \right| &\leq \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| |K(t_n, s, u(s), u'(s)) - P_{n1}[K](t_n, s, u(s), u'(s))| ds, \\ &\leq \max_{|\tau - \theta| < h} (|K(t_n, \tau, u(\tau), u'(\tau)) - K(t_n, \theta, u(\theta), u'(\theta))|) \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| ds, \\ &\leq \max_{|\tau - \theta| < h} (|K(t_n, \tau, u(\tau), u'(\tau)) - K(t_n, \tau, u(\theta), u'(\theta))| \\ &+ |K(t_n, \tau, u(\theta), u'(\theta)) - K(t_n, \theta, u(\theta), u'(\theta))|) \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| ds, \\ &\leq \max_{|\tau - \theta| < h} |u(\tau) - u(\theta)| A \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| ds \\ &+ \max_{|\tau - \theta| < h} |u'(\tau) - u'(\theta)| B \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| ds \\ &+ \max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} |K(t, \tau, x, y) - K(t, \theta, x, y)| \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| ds, \\ &\leq \rho \max_{|\tau - \theta| < h} |u(\tau) - u(\theta)| + \rho \max_{|\tau - \theta| < h} |u'(\tau) - u'(\theta)| \\ &+ \max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} |K(t, \tau, x, y) - K(t, \theta, x, y)| \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| ds, \end{aligned}$$

mais,

$$\begin{aligned} u(\theta) - u(\tau) &= f(\theta) - f(\tau) + \int_a^\theta p(\theta - s)K(\theta, s, u(s), u'(s))ds \\ &\quad - \int_a^\tau p(\tau - s)K(\tau, s, u(s), u'(s))ds, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \max_{|\tau-\theta|<h} |u(\theta) - u(\tau)| \leq \max_{|\tau-\theta|<h} |f(\theta) - f(\tau)| + \max_{|\tau-\theta|<h} |H(\theta) - H(\tau)|,$$

en plus,

$$\begin{aligned} u'(\theta) - u'(\tau) &= f'(\theta) - f'(\tau) \\ &\quad + \int_a^\theta \frac{\partial p}{\partial \theta}(\theta - s)K(\theta, s, u(s), u'(s))ds - \int_a^\tau \frac{\partial p}{\partial \tau}(\tau - s)K(\tau, s, u(s), u'(s))ds \\ &\quad + \int_a^\theta p(\theta - s)\frac{\partial K}{\partial \theta}(\theta, s, u(s), u'(s))ds - \int_a^\tau p(\tau - s)\frac{\partial K}{\partial \tau}(\tau, s, u(s), u'(s))ds \\ &= f'(\theta) - f'(\tau) + H'(\theta) - H'(\tau), \end{aligned}$$

donc

$$\max_{|\tau-\theta|<h} |u'(\theta) - u'(\tau)| \leq \max_{|\tau-\theta|<h} |f'(\theta) - f'(\tau)| + \max_{|\tau-\theta|<h} |H'(\theta) - H'(\tau)|,$$

alors,

$$\left| \overset{\text{PPP}}{\delta}(h, t_n) \right| \leq \rho(w_1(h, f) + w_1(h, H)) + \max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} w_1(K(t, \cdot, x, y), h) \|p\|_{W^{1,1}(a-b, b-a)}.$$

En utilisant des étapes similaires, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left| \overset{\text{PPP}}{\hat{\delta}}(h, t_n) \right| &\leq \int_a^{t_n} \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t_n - s) \right| |K(t_n, s, u(s), u'(s)) - P_{n1}[K](t_n, s, u(s), u'(s))| ds \\ &\quad + \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) - P_{n1}[K'](t_n, s, u(s), u'(s)) \right| ds \end{aligned}$$

$$\left| \overset{\text{PPP}}{\hat{\delta}}(h, t_n) \right| \leq 2\rho(w_1(h, f) + w_1(h, H)) + 2 \max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} w_1(K(t, \cdot, x, y), h) \|p\|_{W^{1,1}(a-b, b-a)}.$$

Le résultat précédent montre que la méthode est consistante puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\max_{0 \leq j \leq N} \overset{\text{PPP}}{\Delta}(h, t_j) \right) = 0.$$

Pour montrer que cette méthode est convergente nous introduisons la notion de l'erreur de discrétisation $\{E_i\}_{0 \leq i \leq N}$ définie par

$$E_i = |\varepsilon_i| + |\hat{\varepsilon}_i|, \quad (3.13)$$

où,

$$\begin{cases} \varepsilon_i = U_i - u(t_i), \\ \hat{\varepsilon}_i = V_i - u'(t_i). \end{cases}$$

La méthode est dite convergente si,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq i \leq N} E_i \right) = 0.$$

Théorème 22. *Sous des hypothèses (H6) – (H7) et en supposant que l'intervalle $[a, b]$ peut être divisé en un nombre fini de sous-intervalles*

$$[a = z_0, z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_{m-1}, z_m = b],$$

tel que si j_v désigne le plus grand nombre entier inférieur ou égal à z_v/h et $\kappa_{nj} = \hat{\kappa}_{n,j} = 0$ pour $j > n$, les poids $\kappa_{n,j}, \hat{\kappa}_{n,j}$, satisfaisent la condition,

$$\sum_{j=j_v}^{j_{v+1}-1} \left| \frac{[\max(A, B)\kappa_{n,j} + \max(A, B)\hat{\kappa}_{n,j} + \max(\bar{A}, \bar{B})\kappa_{n,j}]}{1 - [\max(A, B)\kappa_{n,n} + \max(A, B)\hat{\kappa}_{n,n} + \max(\bar{A}, \bar{B})\kappa_{n,n}]} \right| \leq 3\rho < 1, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq v \leq m.$$

Cette subdivision doit être indépendante de h . Alors,

$$\max_{1 \leq j \leq n} |E_j| \leq \left(\frac{1}{1 - 3\rho} \right)^{m+2} \max_{1 \leq j \leq n} |\Delta(h, t_j)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Preuve. *Nous avons*

$$\varepsilon_i^{\text{PPP}} = \sum_{j=0}^i \kappa_{ij} K(t_i, t_j, U_j, V_j) - \int_{t_0}^{t_i} p(t_i - s) K(t_i, s, u(s), u'(s)) ds.$$

D'après la définition de $\delta^{\text{PPP}}(h, t_n)$, nous avons

$$\varepsilon_i^{\text{PPP}} = \sum_{j=0}^i \kappa_{i,j} \{K(t_i, t_j, U_j, V_j) - K(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j))\} - \delta^{\text{PPP}}(h, t_i),$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} |\varepsilon_i^{\text{PPP}}| &\leq \sum_{j=0}^i \kappa_{i,j} \left(A |\varepsilon_j^{\text{PPP}}| + B |\hat{\varepsilon}_j^{\text{PPP}}| \right) + |\delta^{\text{PPP}}(h, t_i)|, \\ &\leq \max(A, B) \sum_{j=0}^i \kappa_{i,j} E_j + |\delta^{\text{PPP}}(h, t_i)|, \end{aligned}$$

Nous avons aussi,

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_i^{\text{PPP}} &= \sum_{j=0}^i \kappa_{i,j} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, U_j, V_j) - \int_{t_0}^{t_i} p(t_i - s) \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, s, u(s), u'(s)) ds. \\ &+ \sum_{j=0}^i \hat{\kappa}_{i,j} K(t_i, t_j, U_j, V_j) - \int_{t_0}^{t_i} \frac{\partial p}{\partial t}(t_i - s) K(t_i, s, u(s), u'(s)) ds \end{aligned}$$

D'après la définition de $\hat{\delta}^{\text{PPP}}(h, t_i)$, nous obtenons,

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_i^{\text{PPP}} &= \sum_{j=0}^i \hat{\kappa}_{i,j} \{K(t_i, t_j, U_j, V_j) - K(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j))\} \\ &+ \sum_{j=0}^i \kappa_{i,j} \left\{ \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, U_j, V_j) - \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \right\} - \hat{\delta}^{\text{PPP}}(h, t_i), \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} |\hat{\varepsilon}_i^{\text{PPP}}| &\leq \sum_{j=0}^i \hat{\kappa}_{i,j} \left(A |\varepsilon_j^{\text{PPP}}| + B |\hat{\varepsilon}_j^{\text{PPP}}| \right) + \sum_{j=0}^i \kappa_{i,j} \left(\bar{A} |\varepsilon_j^{\text{PPP}}| + \bar{B} |\hat{\varepsilon}_j^{\text{PPP}}| \right) + |\hat{\delta}^{\text{PPP}}(h, t_i)|, \\ &\leq \max(A, B) \sum_{j=0}^i \hat{\kappa}_{i,j} E_j^{\text{PPP}} + \max(\bar{A}, \bar{B}) \sum_{j=0}^i \kappa_{i,j} E_j^{\text{PPP}} + |\hat{\delta}^{\text{PPP}}(h, t_i)|, \end{aligned}$$

alors,

$$E_i^{\text{PPP}} \leq \sum_{j=0}^i \left[\max(A, B) \kappa_{i,j} + \max(A, B) \hat{\kappa}_{i,j} + \max(\bar{A}, \bar{B}) \kappa_{i,j} \right] E_j^{\text{PPP}} + \Delta^{\text{PPP}}(h, t_i).$$

Pour h assez petit, nous obtenons

$$\begin{aligned} E_i^{\text{PPP}} &\leq \sum_{j=0}^{i-1} \frac{[\max(A, B) \kappa_{i,j} + \max(A, B) \hat{\kappa}_{i,j} + \max(\bar{A}, \bar{B}) \kappa_{i,j}]}{1 - [\max(A, B) \kappa_{i,i} + \max(A, B) \hat{\kappa}_{i,i} + \max(\bar{A}, \bar{B}) \kappa_{i,i}]} E_j^{\text{PPP}} \\ &\quad + \frac{\Delta^{\text{PPP}}(h, t_i)}{1 - [\max(A, B) \kappa_{i,i} + \max(A, B) \hat{\kappa}_{i,i} + \max(\bar{A}, \bar{B}) \kappa_{i,i}]} . \end{aligned}$$

En appliquant lemme 2, nous obtenons le résultat désiré.

1.2 La méthode NPP

Dans cette méthode, nous approchons l'intégrale I_1 par la méthode de Nystrôme, en utilisant la même subdivision $\{t_j\}_{0 \leq j \leq n}$. Soit

$$\int_a^{t_n} p(t_n - s) k(t_n, s, u(s), u'(s)) ds \simeq h \sum_{j=0}^n \omega_{n,j} p(t_n - t_j) k(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)),$$

où, $\{\omega_{n,j}\}$ sont supposés vérifiés

$$\sup_{n \geq 1} \max_{0 \leq j \leq n} |\omega_{n,j}| \leq W \leq \infty, \quad (3.14)$$

$$\forall \varphi \in C^0(a, b), \lim_n \left| \int_a^b \varphi(t) dt - h \sum_{j=0}^n \omega_{n,j} \varphi(t_j) \right| = 0. \quad (3.15)$$

Reprenons les mêmes coefficients de la méthode (PPP), $\alpha_{n,j+1}$, $\beta_{n,j+1}$, $\hat{\alpha}_{n,j+1}$ et

$\hat{\beta}_{n,j+1}$, supposés être calculer explicitement pour obtenir le système (NPP) :

$$U_0 = f(a), \quad (3.16)$$

$$V_0 = f'(a), \quad (3.17)$$

$$U_n = f(t_n) + h \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{n,j} p(t_n - t_j) K(t_n, t_j, U_j, V_j), \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} V_n &= f'(t_n) + \hat{\alpha}_{n,1} K(t_n, t_0, U_0, V_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\alpha}_{n,j+1} + \hat{\beta}_{n,j}) K(t_n, t_j, U_j, V_j) \\ &+ \hat{\beta}_{n,n} K(t_n, t_n, U_n, V_n) + \alpha_{n,1} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_0, U_0, V_0) \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j}) \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_j, U_j, V_j) + \beta_{n,n} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, U_n, V_n). \end{aligned} \quad (3.19)$$

où, U_n approche $u(t_n)$ et V_n approche $u'(t_n)$.

Étude du système (NPP)

Ce système nous donne U_n explicitement, contrairement à la précédente méthode, dans laquelle sa valeur est déterminée d'une façon implicite.

Théorème 23. *Pour h suffisamment petit, le système (NPP) a une solution unique.*

Preuve. *Supposons que l'espace \mathbb{R}^2 est muni de la même norme (3.12).*

Pour tout $n \geq 1$, nous définissons :

$$\Psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} S \\ \hat{S} + \hat{\beta}_{n,n} K(t_n, t_n, X, Y) + \beta_{n,n} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, X, Y) \end{pmatrix},$$

où,

$$\begin{aligned} S &= f(t_n) + h \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{n,j} p(t_n - t_j) K(t_n, t_j, U_j, V_j), \\ \hat{S} &= f'(t_n) + \hat{\alpha}_{n,1} K(t_n, t_0, U_0, V_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\alpha}_{n,j+1} + \hat{\beta}_{n,j}) K(t_n, t_j, U_j, V_j) \\ &+ \alpha_{n,1} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_0, U_0, V_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j}) \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_j, U_j, V_j). \end{aligned}$$

Si, $U_0, U_1, \dots, U_{n-1}, V_0, V_1, \dots, V_{n-1}$, sont connus, alors (3.16) – (3.19) est une équation implicite pour définir U_n et V_n .

$$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \Psi_n \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}.$$

Nous avons, $\forall X, Y, X', Y' \in \mathbb{R}$,

$$\left\| \Psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \right\|_1,$$

$$\gamma_2 = \hat{\beta}_{n,n}(K(t_n, t_n, X, Y) - K(t_n, t_n, X', Y')) + \beta_{n,n}\left(\frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, X, Y) - \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, X', Y')\right).$$

En appliquant (H_6) et (H_7) , nous obtenons

$$\begin{aligned} |\gamma_2| &\leq \hat{\beta}_{n,n}(A|X - X'| + B|Y - Y'|) + \beta_{n,n}(\bar{A}|X - X'| + \bar{B}|Y - Y'|), \\ &\leq \max(\hat{\beta}_{n,n}, \beta_{n,n}) (\max(A, \bar{A})|X - X'| + \max(B, \bar{B})|Y - Y'|), \end{aligned}$$

alors,

$$\left\| \Psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \max(\hat{\beta}_{n,n}, \beta_{n,n}) \max(A, B, \bar{A}, \bar{B}) \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1.$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \max(\hat{\beta}_{nn}, \beta_{nn}) = 0$, Ψ_n est une contraction pour h assez petit, nous appliquons le théorème de Bannach pour obtenir le résultat désiré.

Analyse de l'erreur de la méthode (NPP)

Dans cette méthode, $\overset{\text{NPP}}{\delta}(h, t_n)$ et $\overset{\text{NPP}}{\hat{\delta}}(h, t_n)$, sont définies par :

$$\overset{\text{NPP}}{\delta}(h, t_n) = \int_{t_0}^{t_n} p(t_n - s) K(t_n, s, u(s), u'(s)) ds - \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{nj} p(t_n - t_j) K(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)),$$

et

$$\overset{\text{NPP}}{\hat{\delta}}(h, t_n) = \overset{\text{PPP}}{\hat{\delta}}(h, t_n)$$

Proposition 24.

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq n} \left| \overset{\text{NPP}}{\Delta}(h, t_j) \right| &\leq 2\rho w_1(h, f) + 2 \max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} w_1(h, K(t, \cdot, x, y)) \|p\|_{W^{1,1}(a-b, b-a)} \\ &+ 2\rho w_1(h, H) + (b-a) \max_{a \leq t \leq b} w_0(h, H_3(t, \cdot)), \end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned} w_1(h, \varphi) &= \max_{|\tau - \theta| < h} |\varphi(\tau) - \varphi(\theta)| + \max_{|\tau - \theta| < h} |\varphi'(\tau) - \varphi'(\theta)|, \\ w_0(h, \varphi) &= \max_{|\tau - \theta| < h} |\varphi(\tau) - \varphi(\theta)|, \\ H(t) &= \int_a^t p(t-s) K(t, s, u(s), u'(s)) ds, \\ H_3(t, s) &= p(t-s) K(t, s, u(s), u'(s)) ds \end{aligned}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
 \left| \overset{\text{NPP}}{\delta}(h, t_n) \right| &= \left| \int_{t_0}^{t_n} p(t_n - s) K(t_n, s, u(s), u'(s)) ds - \sum_{j=0}^n \omega_{nj} p(t_n - t_j) K(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \right|, \\
 &\leq \int_{t_0}^{t_n} |p(t_n - s) K(t_n, s, u(s), u'(s)) - P_{n1} H_3(t_n, s)| ds \\
 &\leq \max_{|\tau - \theta| < h} |H_3(t_n, \theta) - H_3(t_n, \tau)| \int_{t_0}^{t_n} ds \\
 &\leq (b - a) \max_{a \leq t \leq b} w_0(h, H_3(t, \cdot)). \\
 \left| \overset{\text{NPP}}{\hat{\delta}}(h, t_n) \right| &= \left| \overset{\text{PPP}}{\hat{\delta}}(h, t_n) \right|.
 \end{aligned}$$

Pour montrer la convergence de cette méthode, nous reprenons la même notion de l'erreur de discrétisation décrite en (3.13).

Théorème 25. *Sous des hypothèses (H6) – (H7) et en supposant que l'intervalle $[a, b]$ peut être divisé en un nombre fini de sous-intervalles*

$$[a = z_0, z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_{m-1}, z_m = b],$$

tel que si j_v désigne le plus grand nombre entier inférieur ou égal à z_v/h et $\kappa_{nj} = \hat{\kappa}_{n,j} = 0$ pour $j > n$, les poids $\kappa_{n,j}, \hat{\kappa}_{n,j}$, satisfaire la condition,

$$\sum_{j=j_v}^{j_{v+1}-1} \left| \frac{[hW \|p\|_{C[a,b]} \max(A, B) + \max(A, B) \hat{\kappa}_{ij} + \max(\bar{A}, \bar{B}) \kappa_{i,i}]}{1 - [\max(A, B) \hat{\kappa}_{i,i} + \max(\bar{A}, \bar{B}) \kappa_{i,i}]} \right| \leq 3\rho < 1, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq v \leq m.$$

Cette subdivision doit être indépendante de h , alors,

$$\max_{1 \leq j \leq n} |E_j| \leq \left(\frac{1}{1 - 3\rho} \right)^{m+2} \max_{1 \leq j \leq n} |\Delta(h, t_j)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Preuve.

$$\overset{\text{NPP}}{\varepsilon}_i = h \sum_{j=0}^{i-1} \omega_j p(t_i - t_j) K(t_i, t_j, U_j, V_j) - \int_{t_0}^{t_i} p(t_i - s) K(t_i, s, u(s), u'(s)) ds.$$

D'après la définition de $\overset{\text{NPP}}{\delta}(h, t_i)$, nous avons

$$\overset{\text{NPP}}{\varepsilon}_i = h \sum_{j=0}^{i-1} \omega_j p(t_i - t_j) \{K(t_i, t_j, U_j, V_j) - K(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j))\} - \overset{\text{NPP}}{\delta}(h, t_i),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 \left| \overset{\text{NPP}}{\varepsilon}_i \right| &\leq hW \|p\|_{C[a,b]} \sum_{j=0}^{i-1} \left(A \left| \overset{\text{NPP}}{\varepsilon}_j \right| + B \left| \overset{\text{NPP}}{\hat{\varepsilon}}_j \right| \right) + \overset{\text{NPP}}{\delta}(h, t_i), \\
 &\leq hW \|p\|_{C[a,b]} \max(A, B) \sum_{j=0}^{i-1} E_j + \overset{\text{NPP}}{\delta}(h, t_i),
 \end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\hat{\varepsilon}_i^{\text{NPP}} = \hat{\varepsilon}_i^{\text{PPP}},$$

alors,

$$\begin{aligned} E_i^{\text{NPP}} &\leq \sum_{j=0}^{i-1} [hW\|p\|_{C[a,b]} \max(A, B) + \max(A, B)\hat{\kappa}_{i,j} + \max(\bar{A}, \bar{B})\kappa_{i,i}] E_j^{\text{NPP}} \\ &+ [\max(A, B)\hat{\kappa}_{i,i} + \max(\bar{A}, \bar{B})\kappa_{i,i}] E_i^{\text{NPP}} + \Delta^{\text{NPP}}(h, t_i). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} E_i^{\text{NPP}} &\leq \sum_{j=0}^{i-1} \frac{[hW\|p\|_{C[a,b]} \max(A, B) + \max(A, B)\hat{\kappa}_{i,j} + \max(\bar{A}, \bar{B})\kappa_{i,i}] E_j^{\text{NPP}}}{1 - [\max(A, B)\hat{\kappa}_{i,i} + \max(\bar{A}, \bar{B})\kappa_{i,i}]} \\ &+ \frac{\Delta^{\text{NPP}}(h, t_i)}{1 - [\max(A, B)\hat{\kappa}_{i,i} + \max(\bar{A}, \bar{B})\kappa_{i,i}]}. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 1.2, nous obtenons le résultat désiré.

1.3 La méthode PPN

Dans cette méthode, nous approchons l'intégrale I_3 par la méthode de Nystrôme, en utilisant la même subdivision $\{t_j\}_{0 \leq j \leq n}$. Nous avons donc :

$$I_3 = \int_a^{t_n} p(t_n - s)k(t_n, s, u(s), u'(s))ds \simeq h \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{n,j} p(t_n - t_j) \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)),$$

où, $\omega_{n,j}$ sont supposés vérifier (3.14) – (3.15).

Reprenons les mêmes coefficients de la méthode (PPP), $\alpha_{n,j+1}$, $\beta_{n,j+1}$, $\hat{\alpha}_{n,j+1}$ et $\hat{\beta}_{n,j+1}$, supposés être calculer explicitement pour obtenir le système (PPN) :

$$U_0 = f(a), \quad (3.20)$$

$$V_0 = f'(a), \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} U_n &= f(t_n) + \alpha_{n,1}K(t_n, t_0, U_0, V_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j})K(t_n, t_j, U_j, V_j) \\ &+ \beta_{n,n}K(t_n, t_n, U_n, V_n), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} V_n &= f'(t_n) + \hat{\alpha}_{n,1}K(t_n, t_0, U_0, V_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\alpha}_{n,j+1} + \hat{\beta}_{n,j})K(t_n, t_j, U_j, V_j) \\ &+ \hat{\beta}_{n,n}K(t_n, t_n, U_n, V_n) + \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{n,j} p(t_n - t_j) \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_j, U_j, V_j), \end{aligned} \quad (3.23)$$

où, U_n approche $u(t_n)$ et V_n approche $u'(t_n)$.

Étude du système (PPN)

Théorème 26. *Pour h suffisamment petit, le système (PPN) a une solution unique.*

Preuve. *Supposons que l'espace \mathbb{R}^2 est muni par la même norme (3.12). Pour tout $n \geq 1$, nous définissons :*

$$\Psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} S + \beta_{n,n}K(t_n, t_n, X, Y) \\ \hat{S} + \hat{\beta}_{n,n}K(t_n, t_n, X, Y) \end{pmatrix}$$

où,

$$\begin{aligned} S &= f(t_n) + \alpha_{n,1}K(t_n, t_0, U_0, V_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j})K(t_n, t_j, U_j, V_j), \\ \hat{S} &= f'(t_n) + \hat{\alpha}_{n,1}K(t_n, t_0, U_0, V_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\alpha}_{n,j+1} + \hat{\beta}_{n,j})K(t_n, t_j, U_j, V_j) \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{n,j} p(t_n - t_j) \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_j, U_j, V_j). \end{aligned}$$

Si, $U_0, U_1, \dots, U_{n-1}, V_0, V_1, \dots, V_{n-1}$, sont connus alors (3.20) – (3.23) est une équation implicite pour définir U_n et V_n .

$$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \Psi_n \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}.$$

Nous avons, $\forall X, Y, X', Y' \in \mathbb{R}$,

$$\left\| \Psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \right\|_1,$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \beta_{n,n}K(t_n, t_n, X, Y) - K(t_n, t_n, X', Y') \\ \gamma_2 &= \hat{\beta}_{n,n}(K(t_n, t_n, X, Y) - K(t_n, t_n, X', Y')). \end{aligned}$$

En appliquant (H_1) et (H_2) , nous obtenons

$$|\gamma_1| \leq \beta_{n,n} \max(A, B)(|X - X'| + |Y - Y'|),$$

et

$$|\gamma_2| \leq \hat{\beta}_{n,n} \max(A, B)(|X - X'| + |Y - Y'|),$$

alors,

$$\left\| \Psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \max(\hat{\beta}_{n,n}, \beta_{n,n}) \max(A, B) \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1.$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \max(\hat{\beta}_{n,n}, \beta_{n,n}) = 0$, Ψ_n est une contraction pour h assez petit. Nous utilisons le théorème de Bannach pour obtenir le résultat désiré.

Analyse de l'erreur de la méthode (PPN)

Dans la troisième méthode, $\overset{\text{PPN}}{\delta}(h, t_n)$ et $\overset{\text{PPN}}{\hat{\delta}}(h, t_n)$, définit par :

$$\overset{\text{PPN}}{\delta}(h, t_n) = \overset{\text{PPP}}{\delta}(h, t_n),$$

et

$$\begin{aligned} \overset{\text{PPN}}{\hat{\delta}}(h, t_n) &= \int_{t_0}^{t_n} \frac{\partial p}{\partial t}(t_n - s) K(t_n, s, u(s), u'(s)) ds - \sum_{j=0}^n \hat{\kappa}_{n,j} K(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \\ &+ \int_{t_0}^{t_n} p(t_n - s) \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) ds - \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{n,j} p(t_n - t_j) \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)), \end{aligned}$$

Proposition 27.

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq n} \left| \overset{\text{PPN}}{\Delta}(h, t_j) \right| &\leq 2\rho w_1(h, f) + 2 \max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} w_1(h, K(t, \cdot, x, y)) \|p\|_{W^{1,1}(a-b, b-a)} \\ &+ 2\rho w_1(h, H) + (b-a) \max_{a \leq t \leq b} w_0(h, H_4(t, \cdot)), \end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned} w_1(h, \varphi) &= \max_{|\tau - \theta| < h} |\varphi(\tau) - \varphi(\theta)| + \max_{|\tau - \theta| < h} |\varphi'(\tau) - \varphi'(\theta)|, \\ w_0(h, \varphi) &= \max_{|\tau - \theta| < h} |\varphi(\tau) - \varphi(\theta)|, \\ H(t) &= \int_a^t p(t-s) K(t, s, u(s), u'(s)) ds, \\ H_4(t, s) &= p(t-s) \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds. \end{aligned}$$

Preuve. *Nous avons,*

$$\left| \overset{\text{PPN}}{\delta}(h, t_n) \right| = \left| \overset{\text{PPP}}{\delta}(h, t_n) \right|.$$

Nous avons aussi,

$$\begin{aligned}
 \left| \hat{\delta}^{\text{PPN}}(h, t_n) \right| &\leq \int_a^{t_n} \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t_n - s) \right| |K(t_n, s, u(s), u'(s)) - P_{n1}[K](t_n, s, u(s), u'(s))| ds \\
 &+ \left| \int_{t_0}^{t_n} p(t_n - s) \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) ds \right. \\
 &- \left. \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{nj} p(t_n - t_j) \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \right|, \\
 &\leq \max_{|\tau - \theta| < h} (|K(t_n, \tau, u(\tau), u'(\tau)) - K(t_n, \theta, u(\theta), u'(\theta))|) \int_a^{t_n} \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t_n - s) \right| ds \\
 &+ \int_{t_0}^{t_n} |p(t_n - s) \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) - P_{n1}[H_4](t_n, s)| ds, \\
 &\leq \rho(w_1(h, f) + w_1(h, H)) + \max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} w_1(K(t, \cdot, x, y), h) \|p\|_{w^{1,1}(a-b, b-a)} \\
 &+ \int_{t_0}^{t_n} |p(t_n - s) \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) - P_{n1}[H_4](t_n, s)| ds, \\
 &\leq \rho(w_1(h, f) + w_1(h, H)) + \max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} w_1(K(t, \cdot, x, y), h) \|p\|_{w^{1,1}(a-b, b-a)} \\
 &+ \max_{|\tau - \theta| < h} |H_4(t_n, \theta) - H_4(t_n, \tau)| \int_{t_0}^{t_n} ds, \\
 &\leq \rho(w_1(h, f) + w_1(h, H)) + \max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} w_1(K(t, \cdot, x, y), h) \|p\|_{w^{1,1}(a-b, b-a)} \\
 &+ (b - a) \max_{a \leq t \leq b} w_0(h, H_4(t, \cdot)).
 \end{aligned}$$

Pour montrer la convergence de cette méthode, nous reprenons la même notion de l'erreur de discrétisation décrite en (3.13).

Théorème 28. *Sous des hypothèses (H6) – (H7) et en supposant que l'intervalle $[a, b]$ peut être divisé en un nombre fini de sous-intervalles*

$$[a = z_0, z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_{m-1}, z_m = b],$$

tel que si j_v désigne le plus grand nombre entier inférieur ou égal à z_v/h et $\kappa_{n,j} = \hat{\kappa}_{n,j} = 0$ pour $j > n$, les poids $\kappa_{n,j}, \hat{\kappa}_{n,j}$, satisfaire la condition,

$$\sum_{j=j_v}^{j_{v+1}-1} \left| \frac{[\max(A, B)\kappa_{ij} + \max(A, B)\hat{\kappa}_{i,j} + \max(\bar{A}, \bar{B})hW \|p\|_{C[a,b]}}{1 - [\max(A, B)\kappa_{i,i} + \max(A, B)\hat{\kappa}_{i,i}]} \right| \leq 3\rho < 1, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq v \leq m.$$

Cette subdivision doit être indépendante de h , alors,

$$\max_{1 \leq j \leq n} |E_j| \leq \left(\frac{1}{1 - 3\rho} \right)^{m+2} \max_{1 \leq j \leq n} |\Delta(h, t_j)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Preuve. *Nous avons,*

$$\overset{\text{PPN}}{\varepsilon}_i = \overset{\text{PPP}}{\varepsilon}_i,$$

et

$$\begin{aligned} \overset{\text{PPN}}{\hat{\varepsilon}}_i &= h \sum_{j=0}^{i-1} \omega_j p(t_i - t_j) \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, U_j, V_j) - \int_{t_0}^{t_i} p(t_i - s) \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, s, u(s), u'(s)) ds. \\ &+ \sum_{j=0}^i \hat{\kappa}_{i,j} K(t_i, t_j, U_j, V_j) - \int_{t_0}^{t_i} \frac{\partial p}{\partial t}(t_i - s) K(t_i, s, u(s), u'(s)) ds \end{aligned}$$

D'après la définition de $\overset{\text{PPN}}{\hat{\delta}}(h, t_i)$, nous avons

$$\begin{aligned} \overset{\text{PPN}}{\hat{\varepsilon}}_i &= \sum_{j=0}^i \hat{\kappa}_{i,j} \{K(t_i, t_j, U_j, V_j) - K(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j))\} \\ &+ h \sum_{j=0}^{i-1} \omega_j p(t_i - t_j) \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, U_j, V_j) - \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j))\} - \overset{\text{PPN}}{\hat{\delta}}(h, t_i), \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} |\overset{\text{PPN}}{\hat{\varepsilon}}_i| &\leq \sum_{j=0}^i \hat{\kappa}_{i,j} \left(A |\overset{\text{PPN}}{\varepsilon}_j| + B |\overset{\text{PPN}}{\hat{\varepsilon}}_j| \right) + \sum_{j=0}^i \kappa_{i,j} \left(\bar{A} |\overset{\text{PPN}}{\varepsilon}_j| + \bar{B} |\overset{\text{PPN}}{\hat{\varepsilon}}_j| \right) + |\overset{\text{PPN}}{\hat{\delta}}(h, t_i)|, \\ &\leq \max(A, B) \sum_{j=0}^i \hat{\kappa}_{i,j} \overset{\text{PPN}}{E}_j + hW \|p\|_{C[a,b]} \max(\bar{A}, \bar{B}) \sum_{j=0}^{i-1} E_j + |\overset{\text{PPN}}{\hat{\delta}}(h, t_i)|, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} \overset{\text{PPN}}{E}_i &\leq \sum_{j=0}^{i-1} \left[\max(A, B) \kappa_{i,j} + \max(A, B) \hat{\kappa}_{i,j} + \max(\bar{A}, \bar{B}) hW \|p\|_{C[a,b]} \right] \overset{\text{PPN}}{E}_j \\ &+ \left[\max(A, B) \kappa_{i,i} + \max(A, B) \hat{\kappa}_{i,i} \right] \overset{\text{PPN}}{E}_i + \overset{\text{PPN}}{\Delta}(h, t_i). \\ \overset{\text{PPN}}{E}_i &\leq \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\left[\max(A, B) \kappa_{i,j} + \max(A, B) \hat{\kappa}_{i,j} + \max(\bar{A}, \bar{B}) hW \|p\|_{C[a,b]} \right] \overset{\text{PPN}}{E}_j}{1 - \left[\max(A, B) \kappa_{i,i} + \max(A, B) \hat{\kappa}_{i,i} \right]} \\ &+ \frac{\overset{\text{PPN}}{\Delta}(h, t_i)}{1 - \left[\max(A, B) \kappa_{i,i} + \max(A, B) \hat{\kappa}_{i,i} \right]}. \end{aligned}$$

en appliquant le lemme 2, nous obtenons le résultat.

1.4 La méthode NPN

Dans cette méthode, nous approchons l'intégrale I_1 et I_3 . Nous utilisons la méthode de Nystrôme, en considérant la même subdivision $\{t_j\}_{0 \leq j \leq n}$, nous avons donc

$$\int_a^{t_n} p(t_n - s)k(t_n, s, u(s), u'(s))ds \simeq h \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{n,j} p(t_n - t_j) K(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)).$$

$$\int_a^{t_n} p(t_n - s) \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) ds \simeq h \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{n,j} p(t_n - t_j) \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)),$$

avec, $\omega_{n,j}$ sont supposés vérifier (3.14) – (3.15). Reprenons les même coefficient de la méthode (*PPP*), $\alpha_{n,j+1}$, $\beta_{n,j+1}$, $\hat{\alpha}_{n,j+1}$ et $\hat{\beta}_{n,j+1}$, supposés être calculer explicitement pour obtenir le système (*NPN*) :

$$U_0 = f(a), \quad (3.24)$$

$$V_0 = f'(a), \quad (3.25)$$

$$U_n = f(t_n) + h \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{n,j} p(t_n - t_j) K(t_n, t_j, U_j, V_j), \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} V_n = & f'(t_n) + \hat{\alpha}_{n,1} K(t_n, t_0, U_0, V_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\alpha}_{n,j+1} + \hat{\beta}_{n,j}) K(t_n, t_j, U_j, V_j) \\ & + \hat{\beta}_{n,n} K(t_n, t_n, U_n, V_n) + h \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{n,j} p(t_n - t_j) \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \end{aligned} \quad (3.27)$$

où, U_n approche $u(t_n)$ et V_n approche $u'(t_n)$.

Étude du système (NPN)

Ce système nous donne U_n explicitement comme le système (*NPP*), mais les valeurs de V_n déterminées d'une façon implicite.

Théorème 29. *Pour h suffisamment petit, le système (NPN) a une solution unique.*

Preuve. *Supposons que l'espace \mathbb{R}^2 est muni par la même norme (3.12). Pour tout $n \geq 1$, nous définissons :*

$$\Psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} S \\ \hat{S} + \hat{\beta}_{n,n} K(t_n, t_n, X, Y) \end{pmatrix}$$

où,

$$S = f(t_n) + \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{n,j} p(t_n - t_j) K(t_n, t_j, U_j, V_j),$$

$$\hat{S} = f'(t_n) + \hat{\alpha}_{n,1} K(t_n, t_0, U_0, V_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\alpha}_{n,j+1} + \hat{\beta}_{n,j}) K(t_n, t_j, U_j, V_j)$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{n,j} p(t_n - t_j) \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)).$$

Si, $U_0, U_1, \dots, U_{n-1}, V_0, V_1, \dots, V_{n-1}$, sont connus alors (NPN) est une équation implicite pour définir U_n et V_n .

$$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \Psi_n \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}.$$

Nous avons, $\forall X, Y, X', Y' \in \mathbb{R}$,

$$\left\| \Psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \right\|_1,$$

$$\gamma_2 = \hat{\beta}_{n,n}(K(t_n, t_n, X, Y) - K(t_n, t_n, X', Y')).$$

En appliquant (H₆) et (H₇), nous obtenons

$$|\gamma_2| \leq \hat{\beta}_{n,n}(A|X - X'| + B|Y - Y'|),$$

alors,

$$\left\| \Psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \hat{\beta}_{n,n} \max(A, B) \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1.$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \hat{\beta}_{n,n} = 0$, Ψ_n est une contraction pour h suffisamment petit, en appliquant le théorème de Banach, nous obtenons le résultat.

Analyse de l'erreur de la méthode (NPN)

Dans cette méthode, $\overset{\text{NPN}}{\delta}(h, t_n)$ et $\overset{\text{NPN}}{\hat{\delta}}(h, t_n)$, sont définies par,

$$\overset{\text{NPN}}{\delta}(h, t_n) = \overset{\text{NPN}}{\delta}(h, t_n),$$

et,

$$\overset{\text{NPN}}{\hat{\delta}}(h, t_n) = \overset{\text{PPN}}{\hat{\delta}}(h, t_n).$$

Pour montrer la convergence de cette méthode, nous reprenons la même notion de l'erreur de discrétisation décrite en (3.13).

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq i \leq N} E_i) = 0.$$

Théorème 30. *Sous des hypothèses (H₆) – (H₇) et en supposant que l'intervalle $[a, b]$ peut être divisé en un nombre fini de sous-intervalles*

$$[a = z_0, z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_{m-1}, z_m = b],$$

tel que si j_v désigne le plus grand nombre entier inférieur ou égal à z_v/h et $\kappa_{n,j} = \hat{\kappa}_{n,j} = 0$ pour $j > n$, les poids $\kappa_{n,j}, \hat{\kappa}_{n,j}$, satisfont la condition, pour

$$n \geq 1, 0 \leq v \leq m$$

$$\sum_{j=j_v}^{j_v+1-1} \left| \frac{[hW\|p\|_{C[a,b]} \max(A, B) + \max(A, B)\hat{\kappa}_{i,j} + \max(\bar{A}, \bar{B})hW\|p\|_{C[a,b]}]}{1 - \max(A, B)\hat{\kappa}_{i,i}} \right| \leq 3\rho < 1,$$

Cette subdivision doit être indépendante de h , alors,

$$\max_{1 \leq j \leq n} |E_j| \leq \left(\frac{1}{1 - 3\rho} \right)^{m+2} \max_{1 \leq j \leq n} |\Delta(h, t_j)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Preuve. Nous avons,

$$\overset{\text{NPN}}{\mathcal{E}}_i = \overset{\text{NPP}}{\mathcal{E}}_i.$$

$$\overset{\text{NPN}}{\hat{\mathcal{E}}}_i = \overset{\text{PPN}}{\hat{\mathcal{E}}}_i,$$

alors,

$$\begin{aligned} \overset{\text{NPN}}{E}_i &\leq \sum_{j=0}^{i-1} [hW\|p\|_{C[a,b]} \max(A, B) + \max(A, B)\hat{\kappa}_{i,j} + \max(\bar{A}, \bar{B})hW\|p\|_{C[a,b]}] \overset{\text{NPN}}{E}_j \\ &+ \max(A, B)\hat{\kappa}_{ii} \overset{\text{NPN}}{E}_i + \overset{\text{NPN}}{\Delta}(h, t_i). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\text{NPN}}{E}_i &\leq \sum_{j=0}^{i-1} \frac{[hW\|p\|_{C[a,b]} \max(A, B) + \max(A, B)\hat{\kappa}_{i,j} + \max(\bar{A}, \bar{B})hW\|p\|_{C[a,b]}]}{1 - \max(A, B)\hat{\kappa}_{i,i}} \overset{\text{NPN}}{E}_j \\ &+ \frac{\overset{\text{NPP}}{\Delta}(h, t_i)}{1 - \max(A, B)\hat{\kappa}_{i,i}}. \end{aligned}$$

en appliquant le lemme 2, nous obtenons le résultat.

2 Résultat numérique

Exemple 3. Considérons l'équation intégrale non linéaire suivante :

$$\forall t \in [0, 1], u(t) = f(t) + \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}} \frac{e^t s^2}{u^2(s) + (u'(s))^2 + 1} ds. \quad (3.28)$$

Le noyau

$$K(t, s, x, y) = \frac{e^t s^2}{x^2 + y^2 + 1},$$

satisfais (H7) avec

$$M = e, \quad A = B = \bar{A} = \bar{B} = 2e,$$

Si nous prenons

$$f(t) = \sin(t) - 8/105t^{\frac{7}{2}}e^t,$$

nous obtenons

$$u(t) = \sin(t).$$

Les termes U_n et V_n ne sont pas calculés exactement, ils sont approchés en utilisant la méthode d'itération de Bannach avec

$$\| X_{new} - X_{old} \| \leq 10^{-7},$$

comme condition d'arrêt.

Le tableau suivant donne une estimation de l'erreur entre la solution exacte et approximative de l'équation (3.28) par tout les méthodes.

$$E(h) = \max_{0 \leq i \leq n} |U_i - u(t_i)| + \max_{0 \leq i \leq n} |V_i - u'(t_i)|;$$

h	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
$E^{PPP}(h)$	$3.16E - 003$	$7.98E - 004$	$3.22E - 005$	$8.08E - 006$	$3.24E - 007$
$E^{NPP}(h)$	$1.42E - 002$	$4.78E - 003$	$3.96E - 004$	$1.37E - 004$	$1.19E - 005$
$E^{PPN}(h)$	$8.8E - 003$	$3.24E - 003$	$3.08E - 004$	$1.1E - 004$	$1.00E - 005$
$E^{NPN}(h)$	$1.02E - 002$	$3.77E - 003$	$3.55E - 004$	$1.27E - 004$	$1.15E - 005$

TABLE 3.2 – Résultats numérique de l'exemple 1 par tout les méthodes

Exemple 4. Considérons l'équation intégrale non linéaire suivante :

$$\forall t \in [0, 1], u(t) = f(t) + \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}} \frac{ts^2(1 + \exp(-s^2) + \exp(-2s))}{1 + \exp(-u(s)) + \exp(-u'(s))} ds. \quad (3.29)$$

Le noyau

$$K(t, s, x, y) = \frac{ts^2(1 + \exp(-s^2) + \exp(-2s))}{1 + \exp(-x) + \exp(-y)},$$

satisfait (H2) avec

$$M = 3, A = B = \bar{A} = \bar{B} = 3,$$

Si nous prenons

$$f(t) = t^2 - 16/105t^{\frac{9}{2}},$$

nous obtenons

$$u(t) = t^2.$$

Les termes U_n et V_n ne sont pas calculés exactement, ils sont approchés en utilisant la méthode d'itération de Bannach avec

$$\| X_{new} - X_{old} \| \leq 10^{-7},$$

comme condition d'arrêt.

Le tableau suivant donne une estimation de l'erreur

$$E(h) = \max_{0 \leq i \leq n} |U_i - u(t_i)| + \max_{0 \leq i \leq n} |V_i - u'(t_i)|;$$

entre la solution exacte et la solution approximative de l'équation (14).

h	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
$E(h)^{\text{PPP}}$	$4.14E - 003$	$1.04E - 003$	$4.22E - 005$	$1.05E - 005$	$4.23E - 007$
$E(h)^{\text{NPP}}$	$8.52E - 003$	$2.77E - 003$	$2.24E - 004$	$7.62E - 005$	$7.19E - 006$
$E(h)^{\text{PPN}}$	$6.86E - 003$	$2.59E - 003$	$2.52E - 004$	$9.10E - 005$	$8.38E - 006$
$E(h)^{\text{NPN}}$	$1.24E - 002$	$4.62E - 003$	$4.39E - 004$	$1.57E - 004$	$1.43E - 005$

TABLE 3.3 – Résultats numérique de l'exemple 2 par tout les méthodes

3 Profil de performance

Dans la section précédente nous avons montré la convergence et l'efficacité des quatre méthodes pour deux exemples pratiques.

Dans cette section, nous examinons la performance de ces méthodes, dans le temps d'exécution et la précision de convergence.

Le profil de performance [4, 5] est une très bonne méthode de comparaison entre les méthodes d'approximations numériques, surtout lorsque la comparaison théorique (ordre de convergence, complexité,...) est impossible ou peu concluante. Il a connu une grande célébrité surtout dans le domaine d'optimisation.

En reprenant les théorèmes de convergence développés dans la section précédente, nous remarquons qu'il est impossible de comparer entre les quatre méthodes développées. Pour cela nous allons construire trois séries de tests numériques autour de l'erreur de convergence et le temps d'exécution. Les résultats obtenus sont introduits dans le "performance profil" qui va générer la courbe performance pour chaque méthode : plus la courbe est proche de 1, plus la méthode est performante.

Nos expériences sont faites sur des intervalles de la forme $[0, b_i], i = 1, \dots, n$. Chaque série d'expériences a sa propre famille $\{b_i\}_{1 \leq i \leq n}$, résumée comme suit,

1. Série 1

Dans ce cas $b_i \leq 1, 1 \leq i \leq n$, nous utilisons un pas d'approximation $h = 0.01$ pour chaque méthode. les figures (3.1), (3.2) résument les résultats obtenus pour l'erreur et le temps d'exécution respectivement.

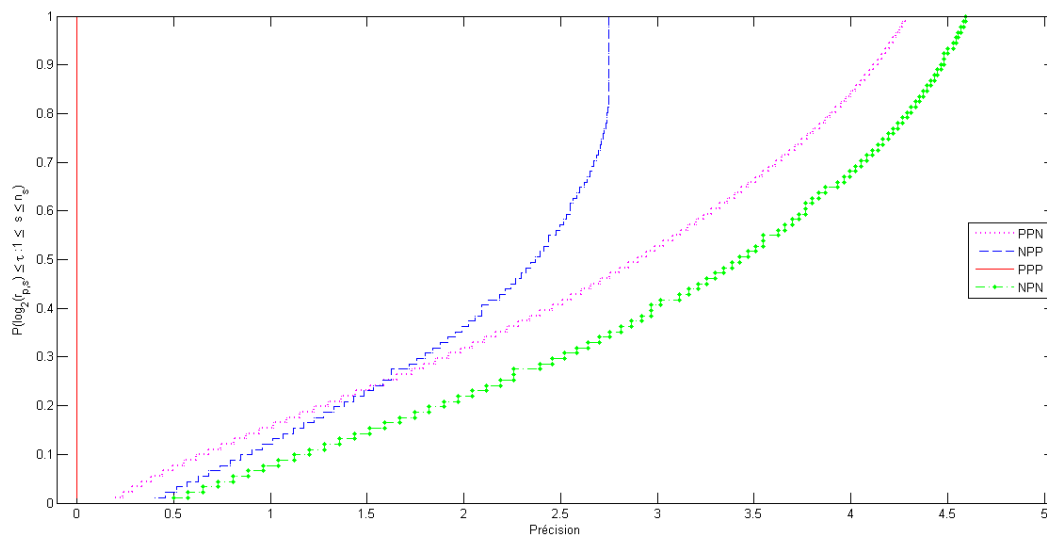


FIGURE 3.1 – L'erreur de convergence sur $[0,1]$.

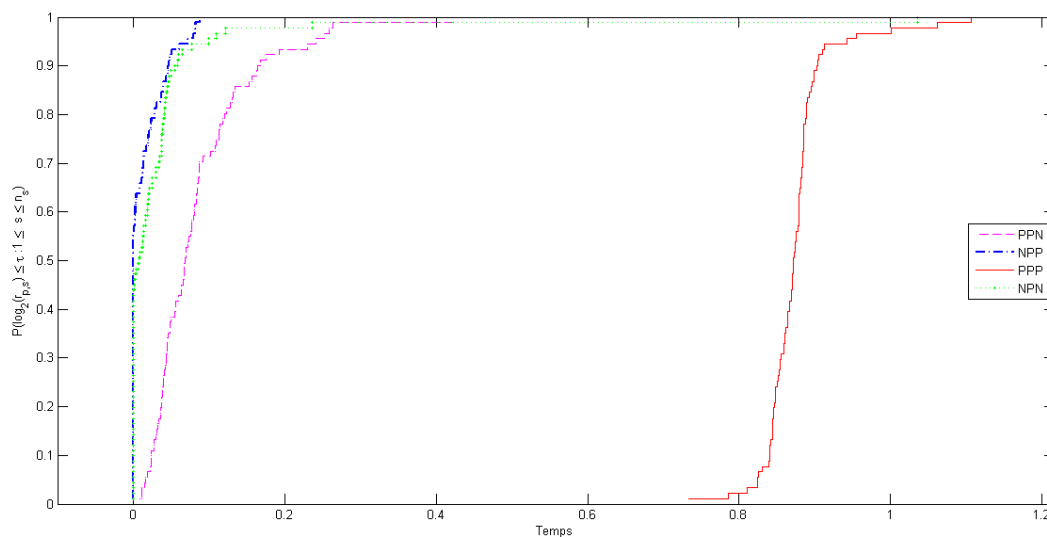


FIGURE 3.2 – Temps d'exécution sur $[0,1]$.

2. Série 2

Dans ce cas $b_i \leq 3, 1 \leq i \leq n$, nous utilisons un pas d'approximation $h = 0.01$ pour chaque méthode. les figures (3.3), (3.4) résument les résultats obtenus pour l'erreur et le temps d'exécution respectivement.

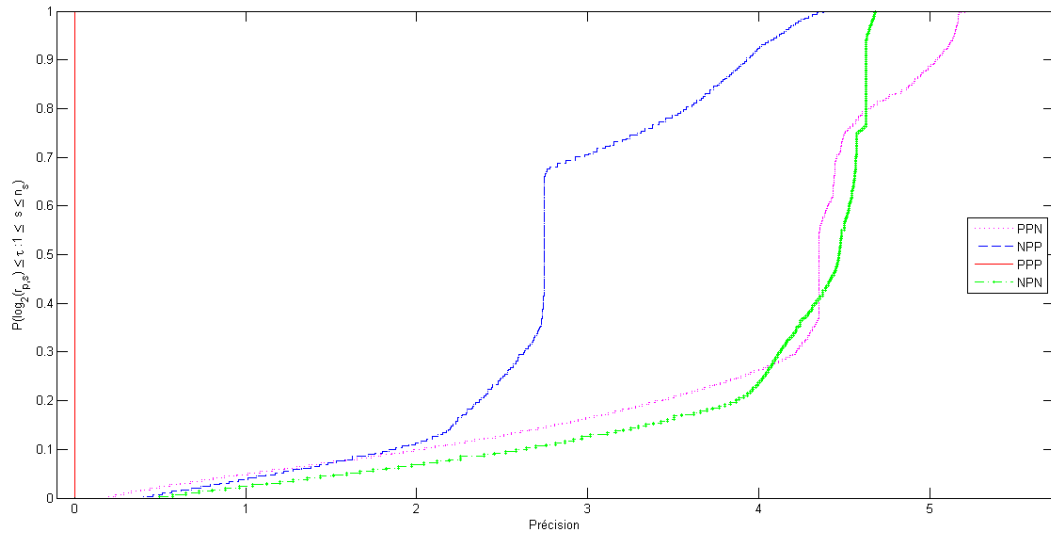


FIGURE 3.3 – L'erreur de convergence sur $[0,3]$.

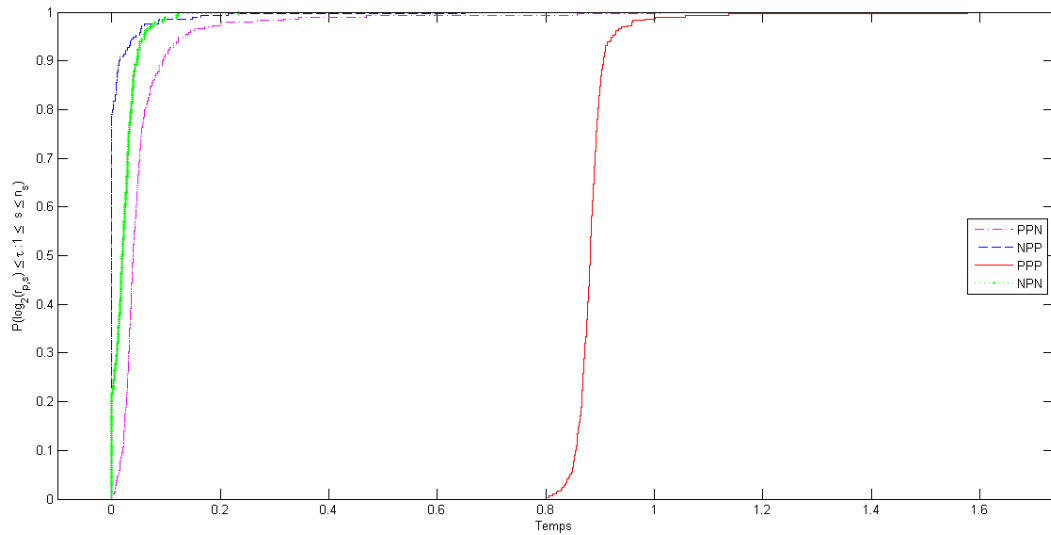


FIGURE 3.4 – Temps d'exécution sur $[0,3]$.

3. Série 3

Dans ce cas $b_i \leq 5, 1 \leq i \leq n$, nous utilisons un pas d'approximation $h = 0.01$ pour chaque méthode. les figures (3.5), (3.6) résument les résultats obtenus pour l'erreur et le temps d'exécution respectivement.

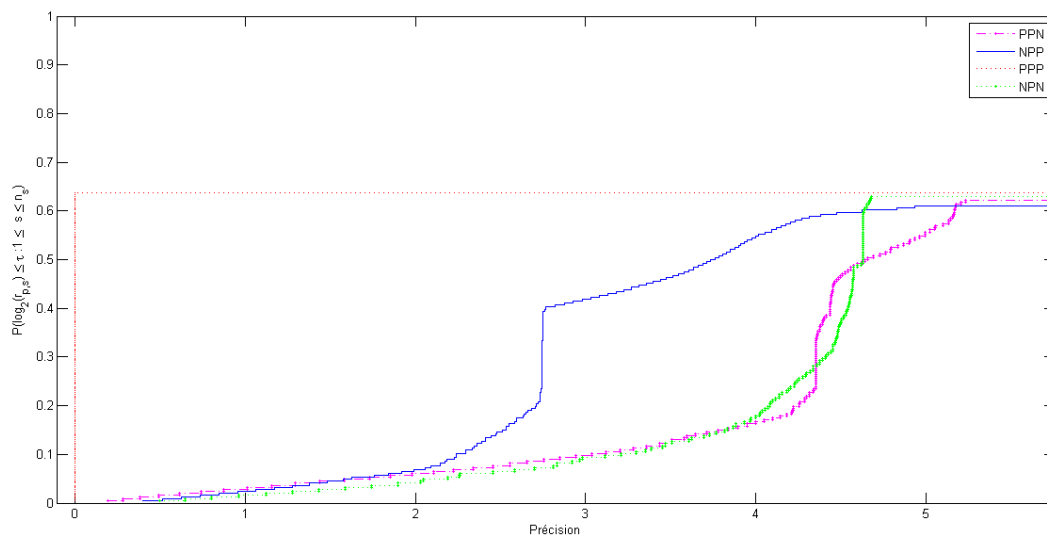


FIGURE 3.5 – L'erreur de convergence sur $[0,5]$.

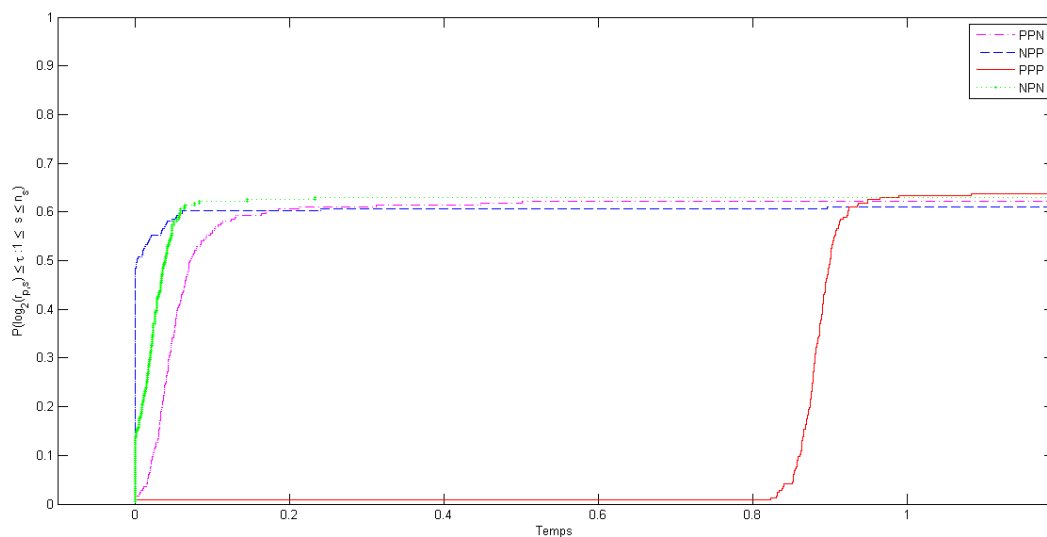


FIGURE 3.6 – Temps d'exécution sur $[0,5]$.

Commentaires et conclusions

Dans cette partie, nous allons interpréter les figures obtenus par le profil de performance pour chaque séries d'expériences effectuées sur notre équation désirée dans l'exemple 2.

Les figures (3.1),(3,2) montrent que toutes les méthodes atteignent un taux de réussite parfait et égale à 100/100 sur l'intervalle $[0, 1]$, avec une très forte performance de la méthode (PPP) en taux de convergence, qui engendre en contre partie un temps d'exécutions très long, comparé aux autres méthodes.

Globalement, nous arrivons à conclure que la meilleure méthode est la (NPP), vue qu'elle se classe en deuxième position en taux de convergence et la première lorsqu'il s'agit du temps d'exécution. Elle apparait comme le meilleur compromis en pratique.

Les figures (3.3), (3.4) montrent un comportement similaire aux deux premières figures et avec une légère baisse de performance globale, des quatre méthodes pour le taux de convergence et le temps d'exécution.

Par contre les figures (3.5), (3.6) montrent une grande déficience globale pour les quatre méthodes. Ce problème représente un grand défi mathématiques à soulever dans l'avenir.

Conclusion

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés aux équations intégrales non linéaires de Volterra. Nous avons effectué une étude complète de ces deux types intégral et intégral-différentielle, analytiquement et numériquement.

Pour atteindre notre but, qui est l'étude de l'équation intégral-différentielle non linéaire à noyau faiblement singulier. Pour mieux comprendre, et mieux introduire notre vision, nous avons présenté l'étude analytique et numérique des équations intégrales et des équations intégral-différentielles aux noyaux régulières, ce qui a fait l'objet du premier chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous avons repris les résultats analytiques et numérique obtenues dans le cadre de l'équation intégrale faiblement singulière. Comme nous avons présenté nos résultats pour le cas intégral-différentielle à noyau faiblement singulière. Les hypothèses exigées montrent une grande applicabilité dans la pratique et une grande similitude avec le cas sans la dérivée.

Vue la particularité de l'équation intégral-différentielle qui est composée de deux équations : Une pour la solution et une autre pour sa dérivée, il s'est avéré qu'il ya quatre méthodes numériques pour approcher cette solution, que nous avons nommé (PPP), (NPP), (PPN) et (NPN).

Le chapitre trois est consacré à l'étude de la consistance et la convergence de ces quatre méthodes et la comparaison entre ces dernières en utilisant le profil de performance sur l'erreur et le temps. Ce dernier a montré que la méthode (NPP) est la plus performante parmi les quatre.

Comme perspectives, nous allons essayé d'appliquer ce genre de méthodes sur d'autre cas plus générale, nous allons reproduire ces résultats dans d'autre espaces fonctionnels plus faibles comme les L^p et surtout essayer d'affaiblir les hypothèses exigées dans l'étude numérique.

Bibliographie

- [1] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] AHUES M. AND LARGILLIER A, "Two numerical approximations for a class of weakly singular integral operators". *Applied Numerical Mathematics*, 17 :347-362, 1995.
- [3] AHUES M., D'ALMEIDA F., LARGILLIER A., TITAUD O, "An L1 refined projection approximate solution of the radiation transfert equation in stellar atmospheres." *Journal of Comp. and Appl. Math.*, 2001.
- [4] AHUES M., LARGILLIER A. AND LIMAYE B.V., "Spectral Computations for Bounded Operators." Chapman and Hall/CRC, 2001.
- [5] AHUES M., LARGILLIER A. AND TITAUD O, "The roles of weak singularity and the grid uniformity in relative error bounds.". Accepted for publication in *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2001
M. AHUES, A. LARGILLIER, B. V. LIMAYE, *Spectral Computations with Bounded Operator*, CRC, Boca Raton, 2001.
- [6] M. AHUES, F. D'ALMEIDA, R. FERNANDES, "Piecewise Constant Galerkin Approximations of Weakly Singular Integral Equations", *Internat. J. Pure Appl. Math*, volume 55 4 (2009) 569-580.
- [7] ALFIO QUARTERON, RICCARDO SACCO, FAUSTO SALERI, *Méthodes Numériques*. ISBN 13 978-88-470-0495-5 Springer Milan Berlin Heidelberg New York.
- [8] K. ATKINSON, W. HAN, *Theoretical Numerical Analysis : A Functional Analysis Framework*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [9] K.E. ATKINSON, *A survey of numerical methods for the solution of Fredholm integral equations of the second kind*, SIAM (1976).
- [10] M. AHUES, A. LARGILLIER, O. TITAUD, "The roles of a weak singularity and the grid uniformity in relative error bounds", *Numer. Funct. Anal. Optim.* 22 (2001), no. 7-8, 789-814.
- [11] A. AMOSOV, M. AHUES, A. LARGILLIER, "Superconvergence of some projection approximations for weakly singular integral equations using general grids", *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. 47, No 1 (2009) 646-674.
- [12] ALLAIRE GRÉGOIRE, "Analyse numérique et optimisation", les éditions de l'école polytechnique.
- [13] BREZIS HAIM, "Analyse fonctionnelle Théorie et applications", collection mathématiques appliquées pour la maîtrise.
- [14] NOUREDDINE BENRABIA, YAMINA LASKRI, HAMZA GUEBBAI MEHIDDIN AL-BAALI, "Applying Powell's Symmetrical Technique to Conjugate Gradient

- Methods with the Generalized Conjugacy Condition". Numerical Functional Analysis and Optimization, (2016), DOI :10.1080/01630563.2016.1178142.
- [15] H. BRUNNER, "The numerical treatment of Volterra integro-differential equations with unbounded delay". Journal of Computational and Applied Mathematics, 28 (1989), p 5-23.
- [16] A. BABAAGHAIE, K. MALEKNEJAD, "Numerical solutions of nonlinear two-dimensional partial Volterra integro-differential equations by Haar wavelet". Journal of Computational and Applied Mathematics, Accepted paper (2016).
- [17] M.V. BULATOV, "Integro-differential systems with a degenerate matrix multiplying the derivative, Differ ", Equ. 38 (2002) 731737.
- [18] M.V. BULATOV, P.M. LIMA, "Two-dimensional integral-algebraic systems : Analysis and computational methods ", J. Comput. Appl. Math. 236 (2011) 132140.
- [19] F. CHATELIN, *Spectral approximation of linear operator*, Academic press, London, (1983).
- [20] ELIZABETH D. DOLAN Û JORGE J. MORÉ, *Benchmarking optimization software with performance profiles*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1985.
- [21] C. GASQUET ET P. WITOMSKI, *Analyse de Fourier et applications*, Masson, Paris, (1995).
- [22] F. GHOREISHI, M. HADIZADEH, " Numerical computation of the Tau approximation for the Volterra Hammerstein integral equations, Numer ", Algorithms 52 (2009) 541,559.
- [23] MOURAD GHIAT, HAMZA GUEBBAI, *Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear volterra equation with weakly singular kernel*. Computational Applied Mathematics, 2018, DOI : 10.1007/s40314-018-0597-3.
- [24] MOURAD GHIAT, HAMZA GUEBBAI, *New approximation method for Volterra nonlinear integro-differential equation*. Asian-European Journal of Mathematics, 2018, DOI : 10.1142/S1793557119500165.
- [25] H. GUEBBAI, M. Z. AÏSSAOUI, I. DEBBAR, B. KHALLA, "Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equation". AMC, 229 (2014), p 367-373.
- [26] Z. GU, X. GUO, D. SUN, "Series expansion method for weakly singular Volterra integral equations". Journal Applied Numerical Mathematics, 105 (2016) p. 112-123.
- [27] C.W. GEAR, "Differential-algebraic equations, indices, and integral-algebraic equations ", SIAM J. Numer. Anal. 27 (1990) 1527?1534.
- [28] JEAN-LOUIS MERRIEN, *ANALYSE NUMÉRIQUE AVEC MATLAB*, SCIENCES SUP, 6647747 ISBN 978-2-10-050863-1.
- [29] REKHA P.KULKARNI, "On Improvement of the Iterated Galerkin Solution of the Second Kind Integral Equations", Journal of numerical mathematics **13** (2005) 3, p.205-218.
- [30] T. KATO, *Perturbation Theory of Linear Operators*, Second edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1980.

-
- [31] A.J. LOTKA, "On an integral equation in population analysis ", Ann. Math. Stat. 10 (1939) 144,161.
- [32] D.B. POUGAZA, "The Lotka integral equation as a stable population mode ", Postgraduate Essay, African Institute for Mathematical Sciences (AIMS), 2007.
- [33] P. LINZ, *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1985.
- [34] integrals.wolfram.com
- [35] OLIVIER LOUISNARD, *Initiation 'a MATLAB*, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA.
- [36] S. PISHBIN, F. GHOREISHI, M. HADIZADEH, "The semi-explicit Volterra integral algebraic equations with weakly singular kernels : the numerical treatments ", J. Comput. Appl. Math. 236 (2011) 132,140. J. Comput. Appl. Math. 245 (2013) 121?132.
- [37] S. PISHBIN, "Optimal convergence results of piecewise polynomial collocation solutions for integral-algebraic equations of index-3 ", J. Comput. Appl.Math. 279 (2015) 209,224.
- [38] S. ROCH AND B. SILBERMANN, "C* -algebra techniques in numerical analysis", J. Operator Theory **35** (1996) 241-280.
- [39] TOKUI SATO, L'équation Intégrale non Linéaire de Volterra. Compositio Mathematica. tome 11 (1953) 271,290.
- [40] L. N. TREFETHEN, *Pseudospectra of matrices*, pp 234-266 in D. F. Griffiths and G. A. Watson, *Numerical Analysis*, 1991, Longman Sci. Tech. Publ., Harlow, UK, 1992.
- [41] L. ZHU, Y. WANG, "Numerical solutions of Volterra integral equation with weakly singular kernel using SCW method". Applied Mathematics and Computation, 260 (2015), p 63-70.