

M/621.918

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8Mai 1945 – Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Electrotechnique et Automatique



Domaine : Sciences et Technologie
Filière : Automatique et Informatique Industriel
Spécialité : Commande et diagnostic des systèmes Industriels

Mémoire de fin d'études
pour l'obtention du diplôme de Master Académique

*conception d'un contrôleur d'ordre fractionnaire à base de la
commande à modèle interne(IMC)*

Présenté par :

- KEZIZ Bouziane
- BRAHMIA Haroun

Sous la direction de :

- Mr : BOUDJEHEM Badreddine

JUIN 2016

Remerciements

16/3342

*Avant tout on remercie le dieu tout puissant pour
Sa générosité de nous donner la santé, la volonté et
la patience tout au long de la vie universitaire.
Ensuite, nous adressons nos sincères remerciements
à nos enseignants notamment à notre promoteur
Boudjahem . Qui franchement nous a
donné son maximum en vue d'élaborer un très bon
mémoire ; sans oublier aussi :*

*IMANE, KHAIRO LAKHDER LAVERO, HEMZA KIFAHJAT,
SALIM WRASYEMA, WALID ATCHIRABI, TOUFIK
AMARA, TAREK, KAYS, LALOÛ, NADIR, ISLAM, IYAD, HAMOUDA
ABDALLAH,*

*Nous remercions avec sincérité toutes les personnes
qui ont nous contribué de près ou de loin à réussir ce
travail.*

Nos vives salutations.

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail :

À mes très chers parents qui m'ont soutenu durant toute la durée de mes études.

À mes frères et ma sœur et à ma grande famille.

À Haroune, Khiro, Walid, Mohamed, Salim.

À tous mes amis.

À tous ceux qui m'aiment et que j'aime.

TABLE DES MATIÈRES

| | | Page |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------|
| Remerciements | | i |
| Liste des figures | | vi |
| Liste des tableaux | | v |
| INTRODUCTION GÉNÉRALE | | Page |
| I. 1. Introduction | | 01 |
| I. 2. Motivation | | 03 |
| I. 3. Objectif de la thèse | | 03 |
| I. 4. Présentation de la thèse | | 04 |
| BIBLIOGRAPHIES | | |
| CHAPITRE I: ÉLÉMENTS DE CALCUL, SYSTÈMES ET COMMANDES D'ORDRE FRACTIONNAIRE | | |
| PARTIE 1 : ÉLÉMENTS DE CALCUL FRACTIONNAIRE | | Page |
| I. 1. 1. Introduction | | 05 |
| I. 1. 2. Aperçu historique | | 06 |
| I. 1. 3. Exemples d'application des systèmes fractionnaires | | 07 |
| I. 1. 3. 1. Automatique: Système et commande | | 07 |
| I. 1. 3. 2. Électricité: Impédance de capacité | | 07 |
| I. 1. 3. 3. Thermique: Diffusion et équation de la chaleur | | 08 |
| I. 1. 3. 4. Acoustique: Instruments de musique | | 08 |
| I. 1. 3. 5. Mécanique: Milieux continus | | 08 |
| I. 1. 4. Bases mathématiques du calcul fractionnaire | | 09 |
| I. 1. 4. 1. Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire | | 09 |
| I. 1. 4. 1. 1. La fonction Gamma | | 09 |
| I. 1. 4. 1. 2. La fonction Mittag-Leffler | | 09 |
| I. 1. 5. Définitions et propriétés | | 10 |
| I. 1. 5. 1. L'intégration d'ordre non entière | | 10 |
| I. 1. 5. 1. 1. Définition de Riemann-Liouville (R-L) | | 10 |
| I. 1. 5. 2. Dérivation non entière | | 10 |
| I. 1. 5. 2. 1. Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (R-L) | | 10 |
| I. 1. 5. 2. 2. Dérivée fractionnaire au sens de Caputo (C) | | 11 |
| I. 1. 5. 2. 3. Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov (G-L) | | 11 |
| I. 1. 5. 3. Propriétés des opérateurs fractionnaires | | 12 |
| I. 1. 6. Exemple de calcul de dérivée d'ordre fractionnaire | | 13 |
| I. 1. 7. Conclusion de la partie I | | 13 |

| PARTIE 2 : SYSTÈMES ET COMMANDES D'ORDRE RACTIONNAIRE | | Page |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------|
| I. 2. 1. Introduction | | 14 |
| I. 2. 2. Méthodes opérationnelles fractionnaires | | 14 |
| I. 2. 2. 1. Éléments sur la transformée de Laplace | | 15 |
| I. 2. 2. 2. Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire | | 15 |
| I. 2. 3. Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire | | 16 |
| I. 2. 4. Représentation et analyse de systèmes d'ordre fractionnaire | | 17 |
| I. 2. 4. 1. Fonction de transfert d'ordre fractionnaire | | 17 |
| I. 2. 4. 2. Systèmes fractionnaires d'ordres commensurable et non commensurable ... | | 18 |
| I. 2. 4. 2. 1. Systèmes fractionnaires d'ordre non commensurable | | 18 |
| I. 2. 4. 2. 2. Systèmes fractionnaires d'ordre commensurable | | 19 |
| I. 2. 5. Système de commande d'ordre fractionnaire | | 20 |
| I. 2. 6. Structure de commande d'ordre fractionnaire | | 20 |
| I. 2. 6. 1. Le contrôleur CRONE | | 21 |
| I. 2. 6. 2. Contrôleur PI^2D^m d'ordre fractionnaire | | 21 |
| I. 2. 6. 3. Fonction de transfert idéal de Bode | | 23 |
| I. 2. 6. 3. 1. En en boucle ouverte : | | 24 |
| I. 2. 6. 3. 2. En en boucle fermée : | | 24 |
| I. 2. 6. 3. 3. Réponse indicielle et paramètres caractéristiques | | 24 |
| I. 2. 6. 3. 4. Réponse fréquentielle et paramètres caractéristiques | | 25 |

| PARTIE 3 : APPROXIMATION DES SYSTÈMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE | | Page |
|------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------|
| I. 3. 1. Introduction | | 27 |
| I. 3. 2. Implémentation des correcteurs d'ordre non entier | | 28 |
| I. 3. 2. 1. Méthode basée sur l'expression analytique de le la sortie | | 28 |
| I. 3. 2. 2. Méthodes basées sur l'approximation du modèle ONE par un modèle RD.... | | 29 |
| I. 3. 2. 3. Méthodes basées sur l'approximation du modèle ONE par un modèle RC.... | | 30 |
| I. 3. 3. Approche CRONE | | 31 |
| I. 3. 3. 1. La version idéale | | 31 |
| I. 3. 3. 2. Version réel | | 31 |
| I. 3. 3. 2. 1. Droite de lissage de gain | | 33 |
| I. 3. 3. 2. 2. Droite de lissage de phase | | 33 |
| I. 3. 4. Conclusion | | 35 |

BIBLIOGRAPHIES CH I

| CHAPITRE II: SUR LA COMMANDE À MODÈLE INTERNE | | Page |
|----------------------------------------------------------|-------|-------------|
| II. 1. Introduction | | 36 |
| II. 2. Structure de base de l'IMC | | 37 |
| II. 3. Théorie de système de l'IMC | | 37 |
| II. 3. 1. Propriété 1 : Stabilité duale | | 40 |
| II. 3. 2. Propriété 2 : Contrôle parfait | | 40 |

| | | |
|---------------------------------------------------------------------|-------|----|
| II. 3. 3. Propriété 3 : Système Type-1 | | 40 |
| II. 3. 4. Propriété 4 : Système Type-2 | | 41 |
| II. 3. 4. 1. Les zéros du demi-plan droit (RHP: Right-Half Plane) | | 41 |
| II. 3. 4. 2. Retard | | 41 |
| II. 3. 4. 3. Les contraintes sur les variables de commande | | 41 |
| II. 3. 4. 3. 1. Définition 1 | | 42 |
| II. 3. 4. 3. 1. 1. Système propre | | 42 |
| II. 3. 4. 3. 1. 2. Système strictement propre | | 42 |
| II. 3. 4. 3. 1. 3. Système semi-propre | | 42 |
| II. 3. 4. 3. 1. 4. Erreur de modélisation | | 42 |
| II. 3. 4. 3. 2. Définition 2 | | 43 |
| II. 3. 4. 3. 2. 1. Système inversible (minimum de phase) | | 43 |
| II. 3. 4. 3. 2. 2. Système strictement inversible | | 43 |
| II. 3. 4. 3. 3. Définition 3 | | 43 |
| II. 3. 4. 3. 3. 1. Système non minimum de phase | | 43 |
| II. 3. 4. 3. 3. 2. Système à un temps mort | | 43 |
| II. 4. Exigences de la réalisabilité physique sur le contrôleur IMC | | 44 |
| II. 4. 1. Stabilité | | 44 |
| II. 4. 2. La propreté | | 44 |
| II. 4. 3. Causalité | | 44 |
| II. 5. Procédure de conception de l'IMC | | 44 |
| II. 5. 1. Étapes 1: Factorisation du modèle en deux parties | | 44 |
| II. 5. 2. Étapes 2: Amélioration de la robustesse | | 45 |
| II. 6. IMC pour les systèmes instable | | 46 |
| II. 7. Modèle de référence | | 47 |
| II. 8. Conclusion | | 48 |

BIBLIOGRAPHIES CH II

**CHAPITRE III:
CONCEPTION D'UN CONTRÔLEUR FRACTIONNAIRE À BASE D'IMC**

| | Page |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| III. 1. 1. Introduction | 49 |
| III. 1. 2. Principe de la commande | 50 |
| III. 1. 3. Commande à modèle interne (IMC) vs la structure en boucle fermée classique.. | 51 |
| III. 1. 4. Les procédures de conception | 52 |
| III. 1. 5. Conception des PID avec un filtre fractionnaire à base d'IMC | 54 |
| III. 1. 5. 1. Modèle tous ses pôles sans retard | 55 |
| III. 1. 5. 2. Modèle non minimum de phase | 55 |
| III. 1. 5. 3. Modèle de premier ordre en cascade avec un intégrateur | 56 |
| III. 1. 5. 4. Modèle de premier ordre avec un retard | 56 |
| III. 1. 5. 4. 1. En utilisant l'approximation du Padé | 56 |
| III. 1. 5. 4. 2. Séries de Taylor de premier du terme $e^{-\theta s}$ | 57 |

APPLICATIONS ET SIMULATION

| | Page |
|--------------------------------------------|-------------|
| III. 2. 1. Introduction | 58 |
| III. 2. 2. Modèle du servomécanisme étudié | 59 |

| | | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-------|----|
| III. 2. 3. Implémentation et simulation | | 60 |
| III. 2. 3. 1. But de la simulation | | 60 |
| III. 2. 3. 2. Représentation en schéma block du processus | | 60 |
| III. 2. 4. Conception des trois contrôleurs pour le servomoteur | | 62 |
| III. 2. 4. 1. Conception de contrôleur IMC pour le servomoteur | | 62 |
| III. 2. 4. 2. Conception de contrôleur d'OE à IMC équivalent au retour classique..... | | 63 |
| III. 2. 4. 3. Conception du contrôleur fractionnaire pour le servomoteur | | 65 |
| III. 2. 5. Conclusion | | 70 |

BIBLIOGRAPHIES CH III

LISTE DES FIGURES

| CHAPITRE I : | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| ÉLÉMENTS DE CALCUL, SYSTÈMES ET COMMANDES D'ORDRE FRACTIONNAIRE | Page |
| Fig. I. 1. Système de commande à retour unitaire | 21 |
| Fig. I. 2. $PI^{\lambda}D^{\mu}$ vs PID, (a): ordre entier, (b) : ordre fractionnaire | 23 |
| Fig. I. 3. Système de référence | 24 |
| Fig. I. 4. Réponse indicielle de la fonction de Bode en BF, $K = 1$ | 25 |
| Fig. I. 5. Réponse fréquentielle de la fonction de Bode en BF | 26 |
| Fig. I. 6. Diagramme de Bode de l'approche CRONE idéal | 31 |
| Fig. I. 7. Diagrammes asymptotiques de Bode idéal (a) et (b) réel pour $m \in [0.1]$ | 32 |
| Fig. I. 8. Approximation numérique d'un dérivateur et intégrateur d'ordre $\frac{1}{2}$ par CRONE.. | 34 |
| CHAPITRE II : | |
| SUR LA COMMANDE À MODÈLE INTERNE | Page |
| Fig. II. 1. Structure de Base de l'IMC | 37 |
| Fig. II. 2. Évolution de la structure IMC | 39 |
| Fig. II. 3. Stabilisation de système instable | 46 |
| Fig. II. 4. Schéma modifié d'IMC | 47 |
| Fig. II. 5. Structure IMC avec filtre de robustesse et modèle de référence | 47 |
| CHAPITRE III : | |
| CONCEPTION D'UN CONTRÔLEUR FRACTIONNAIRE À BASE D'IMC | Page |
| Fig. III. 1. Système de commande à un retour unitaire simple | 51 |
| Fig. III. 2. A. Structure IMC | 51 |
| Fig. III. 2. B. Commande à retour classique | 51 |
| Fig. III. 3. Vu général du servomécanisme à étudier | 59 |
| Fig. III. 4. Réponse de la boucle ouvert du servomécanisme | 60 |
| Fig. III. 5. Réponse indicielle en boucle ouvert du servomécanisme | 61 |
| Fig. III. 6. Boucle fermée en retour unitaire du servomécanisme | 61 |
| Fig. III. 7. Boucle fermée en retour unitaire du servomécanisme | 61 |
| Fig. III. 8. Conception IMC en schéma block du servomécanisme | 62 |
| Fig. III. 9. Réponse indicielle du servomécanisme par IMC (filtre $\lambda = 1$ et $\lambda = 0.1$) | 63 |
| Fig. III. 10. Conception du PD à base d'IMC en schéma block du servomécanisme..... | 64 |
| Fig. III. 11. Réponse indicielle du servomécanisme par PD à base d'IMC | 64 |
| Fig. III. 12. Réponse indicielle du servomécanisme par PD à filtre fractionnaire à base d'IMC | 66 |
| Fig. III. 13. Diagramme de Bode de la boucle ouverte du système | 67 |
| Fig. III. 14. Diagramme de Bode de la boucle fermée du système | 67 |
| Fig. III. 15. Réponse indicielle pour ($K=109/6$; $T=0.16667$; $T=0.125$; $T=0.08333$; $T=0.05556$). | 68 |
| Fig. III. 16. Réponse indicielle pour ($T=1/6$; $K=18.1667$; $K=363.3333$; $K=908.3333$; $K=1635$). | 68 |
| Fig. III. 17. Réponse indicielle avec une variation de %5 de la constante T et $K=18.1667$ | 69 |
| Fig. III. 18. Réponse indicielle avec une augmentation de 1.5 fois du gain K et $T=0.1667$ | 69 |

LISTE DES TABLEAUX

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| CHAPITRE I : | |
| ÉLÉMENTS DE CALCUL, SYSTÈMES ET COMMANDES D'ORDRE FRACTIONNAIRE | Page |
| TAB. I. 1. Approximation de l'opérateur s^a en temps discret | 29 |
| CHAPITRE II : | |
| SUR LA COMMANDE À MODÈLE INTERNE | Page |
| / | / |
| CHAPITRE III : | |
| CONCEPTION D'UN CONTRÔLEUR FRACTIONNAIRE À BASE D'IMC | Page |
| TAB. III. 1. Paramètres de la boucle fermée en retour unitaire du servomécanisme.... | 62 |
| TAB. III. 2. Paramètres du PD résultant | 64 |

INTRODUCTION GÉNÉRALE

I. 1. Introduction

L'automatique a été définie comme étant une science qui utilise des méthodes théoriques et des moyens technologiques pour la conception et la construction de systèmes automatisés. Fondée sur la notion de contre réaction, son objectif principal est de synthétiser des correcteurs afin d'assurer au système un certain niveau de performance. Le plus souvent, le comportement d'un système est évalué à l'aide d'une quantité mesurée par un capteur, c'est donc une sortie du système. La réalisation de cette tâche fait intervenir trois étapes essentielles. La première est la modélisation qui consiste à déterminer les relations mathématiques liant les différentes variables constituant le système. Une fois établi le modèle, il est ensuite nécessaire d'analyser son comportement et d'établir ses propriétés : C'est la phase d'analyse. Une fois l'analyse effectuée, vient enfin la phase de commande dont le rôle est de déterminer le correcteur permettant d'y remédier aux insuffisances des performances du système. Dans le cas des systèmes linéaires et non linéaires d'ordre entier temps invariant, plusieurs travaux portant sur la stabilité et la stabilisation ont été publiés et différents correcteurs ont été implantés avec succès sur ces systèmes. On peut citer les correcteurs PID, les correcteurs à structure variable, commande par retour d'état, etc. Ces différentes commandes ont été étendues au cas des systèmes à retards constants ou variables. Or, beaucoup de systèmes dynamiques peuvent être mieux modélisés par un modèle dynamique non entier, basé sur la notion de différentiation ou d'intégration d'ordre non entier appelée également dérivation et intégration fractionnaires. Il est donc légitime de s'intéresser à ces systèmes en vue de leur synthétiser des commandes adéquates pour rendre compte de leur comportement.

Le calcul fractionnaire représente la généralisation de l'intégration et de la différentiation à un ordre arbitraire. Il y a actuellement un intérêt croissant en la théorie des commandes classiques généralisées et en développement des stratégies de commande qui utilisent le calcul fractionnaire. La méthode la plus généralement utilisée pour commander une grande gamme des processus industriels est le contrôleur PID, qui est en fait un cas particulier d'ordre fractionnaire de $PI^{\mu}D^{\lambda}$. Le problème de conception des contrôleurs d'ordre fractionnaire a été l'intérêt de beaucoup d'automaticiens, dans lesquels les contrôleurs d'ordre fractionnaire ont été appliqués à une variété de processus pour

augmenter la robustesse et la performance des systèmes de commande [1]-[4]. Le choix des contrôleurs d'ordre fractionnaire est basé sur leur potentiel pour améliorer les performances de contrôle, en raison de variables de réglage supplémentaires impliquées, par exemple μ et λ pour les $PI^{\mu}D^{\lambda}$. Comme le contrôleur d'ordre fractionnaire a plus de paramètres que le contrôleur classique, plus de spécifications peuvent être réalisées, améliorant la performance globale du système et le rendre plus robuste aux incertitudes de modélisation. En plus, quelques prolongations et généralisations des stratégies de commande avancées en utilisant le calcul fractionnaire ont été proposé, tels que la commande optimale fractionnaire [5], la commande adaptative floue fractionnaire [6], la commande d'apprentissage itératif fractionnaire [7], la commande prédictive fractionnaire [8] et la commande adaptative à modèle de référence fractionnaire [9].

Le contrôleur PID à base de modèle interne (IMC Internal Model Control) a gagné une grande acceptation dans la communauté de commande, principalement en raison de la simplicité de conception qui est basée sur l'inversion du modèle de processus. L'approche IMC a été proposée comme une méthode pour le réglage des contrôleurs $PI^{\mu}D^{\lambda}$ fractionnaire [10]. En ce mémoire, on présente la conception d'un contrôleur d'ordre fractionnaire à base d'un modèle interne IMC. Le travail est basé sur des approches de conception existantes. Un contrôleur IMC d'ordre entier est d'abord réglé pour répondre à des exigences de temps de stabilisation. Ensuite, le contrôleur IMC-FO (IMC-Fractional Order) est réglé selon les mêmes spécifications de performance. Toutefois, en raison du paramètre de réglage supplémentaire, l'ordre du filtre fractionnaire de FO-IMC, un second critère de performance est prélevé pour augmenter les performances en boucle fermée et la robustesse de la commande. En suite, par une simulation on compare les résultats de contrôleur IMC-FO conçu avec sa version d'ordre entier en tenant compte les erreurs de modélisation,

I. 2. Motivation

Le stimulus principal de choisir ce travail est le progrès énorme dans la conception de systèmes de contrôle qui permettent les idées et les concepts de valeur à être développés pour servir ce domaine. Cela résulte d'une bonne contribution qui rend le problème de contrôle plus facile et garantit la réponse. La structure IMC est l'une des techniques les plus fortes qui soulèvent ces motivations:

1. La technique IMC a été utilisée dans de nombreux systèmes linéaires pour contrôler ses états et elle est considérée comme un contrôleur robuste tandis que le modèle de processus est plus proche de son procédé réel. Dans ce travail de mémoire, nous allons appliquer la technique IMC sur un contrôleur d'ordre fractionnaire qui en fait un travail de plusieurs chercheurs de domaine.
2. Parce qu'un contrôleur d'ordre fractionnaire est une version étendue d'un contrôleur d'ordre entier classique qui a des paramètres supplémentaires qui doivent être réglés plus précisément. Alors les procédures de conception du système de contrôle est plus compliqué que dans les contrôleurs d'ordre entiers et ce sera un bon défi à IMC doit être approuvé.
3. Comme la modélisation d'ordre fractionnaire est plus proche au procédé réel qu'une modélisation d'ordre entier. Alors l'écart entre le modèle de processus et son procédé réel a été diminué, l'incertitude du système a également diminuée et l'IMC ici sera attendu de donner de bons résultats pour la robustesse même si les valeurs des paramètres seront variés.

I. 3. Objectif du mémoire

L'objectif principal est de concevoir un contrôleur d'ordre fractionnaire à base d'un modèle interne IMC qui:

1. Peut faciliter la synthèse du contrôle classique,
2. Satisfaire la spécification de réponse,
3. Réduire l'effet des perturbations dues aux incertitudes dans la modélisation,
4. Assurer et augmenter la robustesse du système à contrôler,
5. Corriger la stabilité d'un système instable,

I. 4. Organisation du mémoire

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de l'utilisation des propriétés des opérateurs intégrro-différentiels d'ordre fractionnaire en vue de contribuer au développement de schémas de commande par modèle IMC d'ordre fractionnaire des systèmes linéaires à dérivations entières.

Le premier chapitre qui sera divisé en deux parties, fera l'objet d'une étude théorique du calcul fractionnaire et des systèmes de commande d'ordre fractionnaire.

Dans la première partie, nous donnerons les définitions de base de la dérivation fractionnaire, l'intégration fractionnaire, définitions relatives aux opérateurs d'ordre fractionnaire et d'autres notions. La deuxième partie sera consacrée aux systèmes et commandes d'ordre fractionnaires et les différentes représentations des systèmes fractionnaires permettant de comprendre les formalismes mathématiques mis en jeu pour l'obtention des modèles appropriés aux systèmes fractionnaires. Enfin, pour terminer ce chapitre, nous retracera d'une manière succincte la chronologie des commandes d'ordre fractionnaire en commençant par le correcteur CRONE jusqu'à l'implémentation des correcteurs fractionnaire.

Le second chapitre traite les principales propriétés et les procédures de conception de l'IMC. Une rapide évolution de l'approche de conception et de réglage des systèmes de commande IMC sera également établie.

Le dernier chapitre a été consacré à la conception des contrôleurs fractionnaire, notamment les contrôleurs à filtre fractionnaire appliqués aux quatre classe des procédés d'ordre entier les plus rencontrés dans la littérature. La partie pratique de ce chapitre est un contrôleur avec un filtre fractionnaire conçu pour la partie linéaire d'un système de commande d'un servomécanisme. Les résultats de la conception à base de la méthode étudiée sont satisfaisants pour la poursuite du point de consigne et le rejet de perturbations.

BIBLIOGRAPHIES

[01] C. A. Monje, Y. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, and V. Feliu: *Fractional-Order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*, London: Springer, 2010.

[02] D. Xue, C. Zhao, and Y. Q. Chen, "Fractional order PID control of a DC-Motor with elastic Shaft: A case study," in *Proc. American Control Conference*, Minnesota, USA, 2006, pp. 3182-3187.

[03] C. I. Pop (Muresan), C. Ionescu, R. De Keyser, and E. H. Dulf, "Robustness evaluation of fractional order control for varying time delay processes," *Signal, Image and Video Processing* vol. 6, pp.453-461, 2012.

[04] A. Oustaloup, *La Commande CRONE: Commande Robust d'ordre non Entiere*, Paris: Hermes, 1991.

[05] O. P. Agrawal and D. Baleanu, "A Hamiltonian formulation and a direct numerical scheme for fractional optimal control problems," *Journal of Vibration and Control*, vol. 13, pp. 1269–1281, 2007.

[06] M. O. Efe, "Fractional fuzzy adaptive sliding-mode control of a 2-DOF direct-drive robot arm," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, vol. 38, pp. 1561–1570, 2008.

[07] Y. Li, Y. Chen, and H. S. Ahn, "Fractional-order iterative learning control for fractional-order linear systems," *Asian Journal of Control*, vol. 13, pp. 54–63, 2011.

[08] M. Romero, A. P. de Madrid, C. Mañoso, and R. Hernández, "Generalized predictive control of arbitrary real order," in *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*, D. Baleanu, et al., Eds., Dordrecht: Springer, 2009, pp. 411-418.

[09] B. Shi, J. Yuan, and C. Dong, "On fractional model reference adaptive control," *The Scientific World Journal*, vol. 2014, 2014.

[10] T. Vinopraba, N. Sivakumaran, S. Narayanan, and T. K. Radhakrishnan, "Design of internal model control based fractional order PID controller," *Journal of Control Theory and Applications*, vol. 10, pp. 297-302, 2012.

[11].

[12].

[13]

[14]

[15]

CHAPITRE I

ÉLÉMENTS DE CALCUL FRACTIONNAIRE

&

SYSTÈMES ET COMMANDES D'ORDRE
FRACTIONNAIRE

CHAPITRE I : PARTIE 1

ÉLÉMENTS DE CALCUL FRACTIONNAIRE

I. 1. 1. Introduction

Ce chapitre est divisé en deux parties, la première partie est consacrée aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que : la dérivation fractionnaire, l'intégration fractionnaire, définitions relatives aux opérateurs d'ordre fractionnaire, l'exponentielle de Mittag-Leffler et d'autres notions, la deuxième partie sera consacrée aux systèmes et commandes d'ordre fractionnaires et les différentes représentations des systèmes fractionnaires permettant de comprendre les formalismes mathématiques mis en jeu pour l'obtention des modèles appropriés aux systèmes fractionnaires, dont on aura besoin dans la suite de notre travail.

Nous commencerons par donner un aperçu historique sur le développement de la théorie de dérivation fractionnaire.

I. 1. 2. Aperçu historique

Notre but dans cette partie n'est pas de dresser un état de l'art complet sur le calcul fractionnaire et ce pour deux raisons :

1. Les domaines de recherche sont actuellement si variés qu'il semble difficile d'avoir un aperçu complet, même si plusieurs ouvrages tels que [05, 06] offrent une vision très large sur ce domaine.
2. Des historiques très détaillés sont donnés dans les ouvrages de références tels que [07, 08].

Les concepts de dérivation et d'intégration fractionnaire sont souvent associés aux noms de Riemann et de Liouville, alors que l'interrogation sur la généralisation de la notion de dérivée à des ordres fractionnaires est plus ancienne. En effet, l'histoire du calcul fractionnaire commença par une question clé de Leibniz, à qui on doit l'idée de la dérivation fractionnaire. Il introduisit le symbole de dérivation d'ordre n , $\frac{d^n y}{dx^n} \equiv D^n y$, où n est un entier positif. Ce fut peut être un jeu naïf des symboles qui poussa l'Hospital à s'interroger sur la possibilité d'avoir n dans \mathcal{Q} . Il posa la question : et si $n = \frac{1}{2}$? En 1695, dans une lettre à l'Hospital, Leibniz écrivit prophétiquement : « Ainsi il s'ensuit que " $d^{1/2}(x) = x \sqrt{dx} : x$ ", un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences ». Sur ces questions, nous retrouvons les contributions de grands mathématiciens tels qu'Euler ou Lagrange au XVIII^e siècle, Laplace, Fourier, Liouville (1832; 1837) ou Riemann (1847) au XIX^e siècle, ainsi qu'à Grünwald (1867) et Letnikov (1868) dans la seconde moitié du même siècle. Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché un succès plus grand de la théorie, qui n'est certes pas encore unifiée ; de plus, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à ce que des champs de recherche passionnants restent dans l'ombre. Le paradoxe des définitions distinctes fut résolu par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière.

On peut généraliser les opérateurs d'intégration et de différentiation en un seul opérateur fondamental ${}_0D_t^\alpha$ où a et t sont les limites de l'opération. L'opérateur intégro-différentiel continu est défini comme suit :

$${}_0D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \int_0^t (d\tau)^{-\alpha} & \alpha < 0 \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est l'ordre de l'opération.

I. 1. 3. Exemples d'application des systèmes fractionnaires

Dans la littérature, on attribue souvent le nom de la dérivation fractionnaire à la généralisation de la dérivation à un ordre quelconque, entier ou non entier, réel ou complexe. Les systèmes fractionnaires apparaissent de plus en plus fréquemment dans les différents champs de recherches. Toutefois, l'intérêt progressif que l'on porte à ces systèmes et les applications en sciences de l'ingénieur restent encore peu développés. On peut noter que pour la majeure partie des domaines présentés ci-dessous, les opérateurs fractionnaires sont utilisés pour prendre en compte des effets de mémoire.

I. 1. 3. 1. Automatique: Système et commande

En automatique, peu d'auteurs ont utilisé des lois de commande introduisant des dérivées fractionnaires. Podlubny [13] a montré que la meilleure méthode pour assurer un contrôle efficace des systèmes fractionnaires, est l'utilisation de contrôleurs fractionnaires. Il propose une généralisation des contrôleurs traditionnels PID. Le groupe CRONE, fondé par Oustaloup dans les années 70, applique ces méthodes à de nombreux systèmes industriels : spectroscope, suspension de voitures [14], robot-cueilleur, charrue électro-hydraulique, batterie pour voitures, etc.

I. 1. 3. 2. Électricité: Impédance de capacité

Grâce à des données expérimentales, Shmidt et Drumheller [15] montrent que le courant qui traverse un condensateur est proportionnel à la dérivée non entière de la tension. En effet, en utilisant un composé ($LiN_2H_5SO_4$) et en procédant à des mesures sur une large gamme de températures et de fréquences, ils constatent que les parties réelle et imaginaire de la susceptibilité ou encore, de la fonction diélectrique $\epsilon = \epsilon' + j \epsilon''$ sont très grandes ($\epsilon' \approx \epsilon'' \approx 10^6$) et varient en fonction de la fréquence suivant un ordre de puissance $\frac{1}{2}$ (avec $\epsilon' \in \mathbb{R}$ et $\epsilon'' \in \mathbb{R}$). En utilisant la relation entre la fonction diélectrique et l'impédance, on obtient la relation:

$$Z = \frac{1}{j\omega C_e \epsilon} = \frac{K}{(j\omega)^{\frac{1}{2}}} \text{ où } K = \frac{1}{\sqrt{2} C_e \epsilon'} \dots \dots \dots (I.01)$$

ou encore, en fonction de la variable de Laplace s :

$$Z = \frac{K}{s^{\frac{1}{2}}} \dots \dots \dots (I.02)$$

L'équation (I.02) montre en effet que l'on peut bien définir une impédance fractionnaire de capacité, qui peut être fabriquée à partir de composition de matériaux. La réalisation d'une impédance fractionnaire peut se faire par juxtaposition en série de cellules Résistance-Capacité (d'impédance traditionnelle).

I. 1. 3. 3. Thermique: Diffusion et équation de la chaleur

L'exemple le plus simple de système fractionnaire est l'équation de la chaleur à une dimension spatiale, commandée aux bords. En opérant un bon choix de la variable de sortie, nous obtenons un dérivateur d'ordre $\frac{1}{2}$. A partir de ce transfert, il n'est pas compliqué de construire un système physique idéalisé qui représente un transfert fractionnaire propre, à savoir un transfert d'ordre deux avec une dérivation d'ordre $\frac{2}{3}$. L'équation de transfert de la chaleur avec l'entrée u et la sortie y peut s'écrire avec un dérivateur d'ordre $\frac{1}{2}$.

$$\hat{y}(s) = s^{\frac{1}{2}} \hat{u}(s) \dots \dots \dots (I.03)$$

I. 1. 3. 4. Acoustique: Instruments de musique

Pour certains instruments de musique à vent les pertes visco-thermique peuvent être modélisées efficacement à l'aide de dérivées fractionnaires temporelles [22].

I. 1. 3. 5. Mécanique: Milieux continus

La déformation des milieux continus (solides ou liquides) est souvent décrite à l'aide de deux tenseurs, celui des déformations noté ϵ_{ij} et celui des contraintes σ_{ij} . Certains matériaux, comme les polymères (gommes, caoutchouc,...), présentent un comportement intermédiaire entre caractères visqueux et élastiques, qualifié de viscoélastique. De tels systèmes peuvent être modélisés à l'aide de la relation suivante entre les deux tenseurs :

$$\sigma_{ij} = E \epsilon_{ij}(t) + \eta \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \epsilon_{ij}(t), \quad 0 < \alpha < 1. \dots \dots \dots (I.04)$$

Cette loi est justifiée par Bagley et Torvik dans [23, 24] (pour $\alpha = \frac{1}{2}$). Dans [25], l'introduction de dérivée fractionnaire dans le cas de polymères est motivée par l'analyse suivante : à cause de la longueur des fibres, les déformations appliquées prennent du temps à être communiquées de proche en proche (la longueur des fibres, enroulées, étant bien supérieure à la distance géométrique). Elles sont progressivement amorties et induisent des effets de mémoire (l'état à l'instant t va dépendre des états antérieurs). Si la contrainte décroît comme $t^{-(1+\alpha)}$, elle pourra induire une dérivée fractionnaire d'ordre α . Cet opérateur permet ainsi de donner une description macroscopique simple (ne nécessitant que peu de paramètres) de phénomènes microscopiques complexes. Une présentation de la visco-élasticité via la dérivation fractionnaire est donnée dans [26].

I. 1. 4. Bases mathématiques du calcul fractionnaire

I. 1. 4. 1. Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma et Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

I. 1. 4. 1. 1. La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \text{ avec } \Gamma(1) = 1, \Gamma(0_+) = +\infty \dots \dots \dots (I.05)$$

$\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$. Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante:

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \dots \dots \dots (I.06)$$

Qu'en peut démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z) \dots \dots \dots (I.07)$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n + 1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

I. 1. 4. 1. 2. La fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle, e^z , joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler [29, 30] et désignée par la fonction suivante [31–33] :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \dots \dots \dots (I.08)$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette dernière a été introduite par Agarwal [34] et elle est définie par le développement en série suivant [31–33] :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, (\alpha > 0, \beta > 0) \dots \dots \dots (I.09)$$

Pour $\beta = 1$, on retrouve la relation (I.08). À partir de la relation (I.09) on montre que:

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \dots \dots \dots (I.10)$$

Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle.

I. 1. 5. Définitions et propriétés

Dans ce paragraphe, nous présentons les opérateurs d'ordre fractionnaire. Une définition unique de l'intégration d'ordre fractionnaire et plusieurs définitions de la dérivation non entière sont considérées.

I. 1. 5. 1. L'intégration d'ordre non entière

I. 1. 5. 1. 1. Définition de Riemann-Liouville (R-L)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, \infty)$. L'intégrale d'ordre α de f de borne inférieure t_0 définie par:

$${}_t I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \dots \dots \dots (I. 11)$$

L'équation (I.11), est appelée intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville. Avec $\Gamma(\alpha)$ la fonction Gamma d'Euler. Quand on s'intéresse aux systèmes dynamiques, la fonction $f(t)$ est une fonction causale, alors l'intégrale d'ordre non entier est définie connue suit:

$${}_0 I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad t > 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \dots \dots \dots (I. 12)$$

Dans (I.12) nous pouvons voir que l'intégrale d'ordre fractionnaire peut être exprimée sous forme de produit de convolution de la forme suivante:

$${}_0 I_t^\alpha f(t) = \phi_\alpha(t) * f(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \dots \dots \dots (I. 13)$$

Avec:

$$\phi_\alpha(t) = \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \text{et } t_+^{\alpha-1} = 0 \text{ pour } t < 0; \quad t_+^{\alpha-1} = t^{\alpha-1} \text{ pour } t \geq 0 \dots \dots \dots (I. 14)$$

I. 1. 5. 2. Dérivation non entière

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, malheureusement elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette partie les définitions de Riemann-Liouville, Liouville, Caputo ainsi que Grunwald-letnikov qui sont les plus utilisées.

I. 1. 5. 2. 1. Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (R-L)

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est la plus connue et la plus répandue. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$, n un entier positif, $t_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, \infty)$. La dérivée d'ordre α de f de borne inférieure t_0 est définie par:

$${}_{t_0}^{RL} D_t^\alpha f(t) \triangleq \frac{d^n}{dt^n} ({}_t I_t^{(n-\alpha)} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \dots \dots \dots (I. 15)$$

Avec $(n - 1) < \alpha < n$.

I. 1. 5. 2. 2. Dérivée fractionnaire au sens de Caputo (C)

Dans le développement de la théorie de l'intégration et de la dérivation fractionnaires ainsi que ses applications en mathématiques pures, la définition de Riemann-Liouville a joué un rôle très important. Néanmoins, les résolutions des problèmes physiques requièrent une certaine révision de cette approche bien établie.

En générale, les applications requièrent des définitions permettant l'utilisation de conditions initiales interprétables physiquement. Caputo propose une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire qui porte d'ailleurs son nom et qui incorpore les conditions initiales de la fonction à traiter, ainsi que ses dérivées entières. La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction $f(t)$ est définie par la relation suivante:

$${}_{t_0}^C D_t^\alpha f(t) \triangleq I^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad n-1 < \alpha < n \dots \dots \dots (I.16)$$

Avec $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$, où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma Euler.

L'avantage principal de l'approche est que les conditions initiales de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo des équations différentielles fractionnaires prennent la même forme que dans le cas des équations différentielles d'ordre entier.

Pour $t_0 = 0$, entre les deux définitions (I.15) et (I.16), il existe les deux relations suivantes

$${}^{RL} D^\alpha f(t) = {}^C D^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+) \dots \dots \dots (I.17)$$

$${}^{RL} D^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \right) = {}^C D^\alpha f(t) \dots \dots \dots (I.18)$$

I. 1. 5. 2. 3. Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov (G-L):

Elle est basée sur la généralisation de la dérivée classique d'une fonction $f(t)$ d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la forme:

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n}{j} f(t-jh) \dots \dots \dots (I.19)$$

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \dots \dots \dots (I.20)$$

En remplaçant l'entier n par $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha > 0$), l'expression (I.20) s'écrit :

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{j! \Gamma(\alpha-j+1)} \dots \dots \dots (I.21)$$

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de G-L est donc:

$${}^G D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \dots \dots \dots (I. 22)$$

Où $[x]$ dénotes la partie entière de x . h le pas d'échantillonnage et $\binom{\alpha}{j}$ sont appelés coefficient binomiaux. Cette définition sera utilisée pour la simulation et l'évaluation numérique de la dérivée fractionnaire.

I. 1. 5. 3. Propriétés des opérateurs fractionnaires

Nous utiliserons dans notre travail la notation ${}_0 D_t^\alpha$, où les réels a et t désignent respectivement la condition initiale et la variable par rapport à laquelle on applique l'opérateur de dérivation fractionnaire.

Les principales propriétés des dérivées et intégrales fractionnaires sont les suivantes:

- ☀ Si $f(z)$ est une fonction analytique en z alors sa dérivée fractionnaire ${}_0 D_z^\alpha f(z)$ est une fonction analytique en z et α .
- ☀ Pour $\alpha = n$, où n est un nombre entier, l'opération ${}_0 D_t^\alpha f(t)$ produit le même résultat que la dérivation classique d'ordre entier.
- ☀ Pour $\alpha = 0$, l'opérateur ${}_0 D_t^\alpha$ est l'opérateur identité, ainsi

$${}_0 D_t^\alpha f(t) = f(t) \dots \dots \dots (I. 23)$$

☀ La différentiation et l'intégration fractionnaires sont des opérations linéaires.

$$D_t^\alpha [\gamma f(t) + \delta g(t)] = \gamma D_t^\alpha f(t) + \delta D_t^\alpha g(t) \dots \dots \dots (I. 24)$$

☀ La loi de l'exposant au sens de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

$${}_0 D_t^\alpha {}_0 D_t^\beta f(t) = {}_0 D_t^\beta {}_0 D_t^\alpha f(t) = {}_0 D_t^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^m \left[{}_0 D_t^{\beta-j} f(t) \right]_{t=0} \frac{t^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)} \dots \dots (I. 25)$$

Avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, et $m \in \mathbb{Z}$, la relation (I.25) est remplacée par:

$${}_0 D_t^\alpha {}_0 D_t^\beta f(t) = {}_0 D_t^{\alpha+\beta} f(t) \dots \dots \dots (I. 26)$$

Avec des "contraintes raisonnables" sur $f(t)$. Cette propriété est valide sous la causalité; c'est-à-dire que la fonction est intégrable-différentiable au point initial de la fonction (l'initialisation de la fonction étant zéro)".

I. 1. 6. Exemple de calcul de dérivée d'ordre fractionnaire

Évaluer la dérivée d'ordre α : $D^\alpha x(t) = \lambda t^{\lambda-1}$, pour $\alpha = [0.5]$, $\lambda = [2]$.

$$D^{0.5}x(t) = 2 t^{2-1} \Rightarrow x(t) = \frac{2\Gamma(0.5)t^{2+0.5-1}}{\Gamma(2+0.5)} + x(0)$$

$$\Gamma(t) = \int_{t=0}^{\infty} t^{(t-1)} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(0.5) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{t=0}^{\infty} t^{(-\frac{1}{2})} e^{-t} dt = \sqrt{\pi} = \left(-\frac{1}{2}\right)!$$

En utilisant la propriété (1.18) de la fonction Gamma \Rightarrow

$$\Gamma(2+0.5) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2} \times \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}-1\right)! = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)!$$

$$= \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3 \times \sqrt{\pi}}{4}$$

$$\rightarrow D^{0.5}(2t) = \frac{2 \times \sqrt{\pi}}{\frac{3 \times \sqrt{\pi}}{4}} \times t^{\frac{3}{2}} + 0$$

$$D^{0.5}(2t) = \frac{8}{3} \times t^{\frac{3}{2}}$$

I. 1. 7. Conclusion de la partie I

Cette partie est une introduction aux éléments de base du calcul fractionnaire. En effet, nous avons exhibé quelques exemples d'applications des systèmes fractionnaires, notamment en automatique avec la commande CRONE, en thermique dans l'équation de la chaleur, en électricité dans l'impédance fractionnaire d'un circuit type intégrateur fractionnaire, en rhéologie dans l'exemple du comportement "contrainte-déformation" d'un solide. La théorie de la dérivation non entière a été introduite à partir de quelques rappels sur les fonctions de Gamma Euler et Mittag-Leffler. Enfin on a clôturé cette partie par les principales propriétés des dérivées et intégrales fractionnaires.

À travers les différentes définitions présentées dans cette partie, on peut remarquer que le calcul fractionnaire représente la généralisation de l'intégration et de la différentiation à un ordre arbitraire, qui bénéficient d'avoir un intérêt croissant continuellement en la théorie des commandes classiques généralisées et en développement des stratégies de commande qui utilisent le calcul fractionnaire.

CHAPITRE I : PARTIE 2

SYSTÈMES ET COMMANDES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

I. 2. 1. Introduction

Dans la partie précédente, nous avons rappelé quelques définitions et propriétés principales des opérateurs d'ordre fractionnaire, ainsi que quelques exemples de systèmes fractionnaires. Cette partie est consacrée aux systèmes et commandes d'ordre fractionnaires et les différentes représentations des systèmes fractionnaires comme l'équation différentielle généralisée, le modèle fonction de transfert non entier ainsi que sa représentation d'état permettant de comprendre les formalismes mathématiques mis en jeu pour l'obtention des modèles appropriés aux systèmes fractionnaires. Ensuite on a clôturé cette partie par une présentation générale de la fonction de transfert en boucle ouverte idéal de Bode et un état de l'art sur la commande d'ordre fractionnaire en commençant par le correcteur CRONE, qu'on aura besoin dans la suite de notre travail.

I. 2. 2. Méthodes opérationnelles fractionnaires

Le calcul opérationnel est un outil souvent utilisé pour la résolution des problèmes d'ingénierie. Il s'avère être puissant et indispensable notamment dans l'étude des systèmes fractionnaires. C'est pourquoi, nous allons rappeler dans ce paragraphe quelques éléments de base de la transformée de Laplace dans le cas entier que nous allons par la suite étendre au cas fractionnaire.

I. 2. 2. 1. Éléments sur la transformée de Laplace

Soit $F(s)$, la transformée de Laplace de $f(t)$ définie par :

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \dots \dots \dots (I. 27)$$

$f(t)$ est la fonction originale qui peut être obtenue par la transformée de Laplace inverser de $F(s)$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-st} F(s) ds, \quad c = \text{Re}(s) > c_0 \dots \dots \dots (I. 28)$$

où c_0 est l'indice de convergence de l'intégrale (II.28). Le produit de convolution des fonctions f et g est donné par :

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t g(t - \tau)f(\tau)d\tau \dots \dots \dots (I. 29)$$

La transformée de Laplace du produit de convolution des fonctions f et g peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t); s] = F(s)G(s) \dots \dots \dots (I. 30)$$

Sous l'hypothèse que les fonctions $F(s)$ et $G(s)$ existent. La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre n de la fonction f peut s'écrire :

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t); s] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{(n-k-1)} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \dots \dots \dots (I. 31)$$

I. 2. 2. 2. Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire comme le produit de convolution de la fonction $g(t) = t^{\alpha-1}$ et $f(t)$

$${}_0D_t^{-\alpha} f(t) = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t) \dots \dots \dots (I. 32)$$

La transformée de Laplace de la fonction $g(t) = t^{\alpha-1}$ est donnée par : [35]

$$G(s) = \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha} \dots \dots \dots (I. 33)$$

Ainsi, en utilisant la formule de la transformée de Laplace de convolution, on obtient la transformée de Laplace de l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

$$\mathcal{L}\{{}^{RL}D_t^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\{{}^{GL}D_t^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) \dots \dots \dots (I. 34)$$

Pour obtenir la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)$, posons:

$$D^\alpha = g^{(n)}(t) \dots \dots \dots (I. 35)$$

Ce qui entraîne:

$$g(t) = D^{-(n-\alpha)}f(t) \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\tau-1} f(\tau) d\tau, \quad (n-1) < \alpha < n \dots \dots \dots (I. 36)$$

L'utilisation de la transformée de Laplace de la dérivation d'ordre entier conduit à

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \dots \dots \dots (I. 37)$$

$$\text{Où: } G(s) = s^{-(n-\alpha)}F(s) \dots \dots \dots (I. 38)$$

A partir de la définition de la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville, il vient

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0D_t^{-(n-\alpha)}f(t) = {}_0D_t^{(\alpha-k-1)}f(t) \dots \dots \dots (I. 39)$$

En substituant (I.38) et (I.39) dans (I.37), nous obtenons l'expression finale de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D_t^{(\alpha-k-1)}f(t) \Big|_{t=0^+}, \quad n-1 < \alpha < n \dots \dots \dots (I. 40)$$

I. 2. 3. Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

L'analyse d'une large catégorie de processus physiques tel que le bruit électronique, les réseaux de télécommunication, les systèmes hydrauliques, la mécanique des fluides, la polarisation électrode-électrolyte, montre que le comportement temporel régit par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Ce type de processus est connu comme système d'ordre fractionnaire. L'utilisation des modèles entiers n'est donc pas convenable pour représenter ce type de systèmes. Alors, une nouvelle catégorie de modèles appelés modèles d'ordre fractionnaire, basés sur le concept de la différentiation d'ordre fractionnaire, a été développée.

Un système linéaire d'ordre fractionnaire est par définition un système décrit, dans le cas monovariant, par des équations différentielles faisant intervenir des opérateurs de dérivation d'ordre fractionnaire, si $u(t)$ désigne l'entrée d'un système et $y(t)$ sa sortie, alors pour le cas général :

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \dots \dots \dots (I. 41)$$

Où les ordres de dérivation α_n et β_m sont des nombres non entiers.

La raison de l'utilisation des modèles entiers est due principalement à l'absence d'outils mathématiques permettant l'analyse, la simulation et la réalisation de ces systèmes fractionnaires. Des recherches ont été entamées dans ce sens et actuellement, il existe plusieurs méthodes d'approximations de la dérivée et de l'intégrale fractionnaires dans le cas continu et dans le cas discret.

I. 2. 4. Représentation et analyse de systèmes d'ordre fractionnaire

Si plusieurs formes de représentation sont à même de décrire un système entier (équation différentielle, équation récurrente, représentation d'état, fonction de transfert...), le comportement d'un système d'ordre fractionnaire est le plus souvent décrit par des équations différentielles ou des fonctions de transfert contenant des opérateurs d'ordre fractionnaire.

I. 2. 4. 1. Fonction de transfert d'ordre fractionnaire

Un système d'ordre non entier mono-variable temps invariant d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ est décrit implicitement par l'équation suivante:

$$H(D^{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n})(y_1, y_2, \dots, y_l) = G(D^{\beta_0 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m})(u_1, u_2, \dots, u_l) \dots \dots \dots (I. 42)$$

où y_l et u_l sont des fonctions du temps, respectivement la sortie et l'entrée du système décrit par le modèle (II.2), H et G sont des combinaisons (pas nécessairement linéaires) d'opérateurs de dérivation d'ordre fractionnaire et $(\alpha_i$ et $\beta_j)$ sont les ordres de dérivation fractionnaire relatifs respectivement à la sortie et à l'entrée du système. Pour le cas d'un système fractionnaire linéaire invariant mono-variable, le modèle suivant peut être obtenu

$$H(D^{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}) y(t) = G(D^{\beta_0 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}) y(t) \dots \dots \dots (I. 43)$$

Avec

$$H(D^{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}) = \sum_{k=0}^n a_k D^{\alpha_k}, \quad G(D^{\beta_0 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}) = \sum_{k=0}^m b_k D^{\beta_k}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R} \dots \dots \dots (I. 44)$$

où explicitement

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \dots \dots \dots (I. 45)$$

Dans l'équation (I.46), qui décrit la dynamique d'un système linéaire invariant mono-variable d'ordre fractionnaire, deux cas se présentent et conduisent à deux types de systèmes : les systèmes commensurables ou d'ordres commensurables et les systèmes non commensurables ou d'ordres non commensurables.

I. 2. 4. 2. Systèmes fractionnaires d'ordres commensurable et non commensurable

Un système est dit commensurable si tous les ordres de dérivation de l'équation différentielle fractionnaire qui le régit sont des multiples entiers d'un ordre de base α . C'est à dire dans l'équation (I.46), la condition suivante est remplie:

$$a_k, \beta_k = k\alpha, \alpha \in R^+ \dots \dots \dots (I.46)$$

L'équation (I.46) peut alors être écrite sous la forme:

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{k\alpha} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{k\alpha} u(t) \dots \dots \dots (I.47)$$

Un système est dit non commensurable si la condition (I.47) n'est pas remplie.

I. 2. 4. 2. 1. Systèmes fractionnaires d'ordre non commensurable

A présent, nous allons essayer d'étendre cette notion de représentation d'état aux systèmes fractionnaires. Considérons l'équation (I.46) régissant la dynamique d'un système fractionnaire linéaire mono-variable.

$$\begin{aligned} a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) \\ = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \dots \dots \dots (I.48) \end{aligned}$$

Qu'on écrit sous la forme semi-condensée

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = \sum_{k=0}^m h_k D^{\beta_k} u(t) \dots \dots \dots (I.49)$$

On obtient donc la relation suivante

$$D^{\alpha_n} y(t) = - \frac{a_{n-1}}{a_n} D^{\alpha_{n-1}} y(t) - \dots - \frac{a_0}{a_n} D^{\alpha_0} y(t) + \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{a_n} D^{\beta_k} u(t) \dots \dots \dots (I.50)$$

qui peut être réécrite en introduisant des variables d'état sous la forme

$$x_n^{\alpha_n - \alpha_{n-1}}(t) = - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) - \dots - \frac{a_1}{a_n} x_1(t) - \frac{a_0}{a_n} x_1(t) + \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{a_n} D^{\beta_k} u(t) \dots \dots \dots (I.51)$$

En considérant un système fractionnaire de type

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = e(t) \dots \dots \dots (I.52)$$

Où $e(t)$ est la nouvelle variable d'entrée, le choix légitime $\alpha_0 = 0$ de l'ordre de dérivation de la sortie correspondant au coefficient a_0 nous permet d'établir une équation d'état augmentée par une équation de sortie de la forme $y(t) = C_x(t)$, d'où la réalisation suivante.

$$\begin{cases} x^{(\bar{\alpha})}(t) = A x(t) + B e(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \dots \dots \dots (I.53)$$

I. 2. 4. 2. Systèmes fractionnaires d'ordre commensurable

Dans le cas des systèmes commensurables, très intéressants en pratique, on peut obtenir une représentation d'état analogue à celle des systèmes d'ordre entier. Les ordres de dérivation α_k et β_k relatifs à l'entrée et à la sortie étant tous deux des multiples d'un ordre non entier α , on peut toujours établir une relation entre les variables d'états fractionnaires équivalente à celle obtenue pour les systèmes entiers, de la forme:

$$D^\alpha x_i = x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \dots \dots \dots (I.54)$$

En introduisant les variables d'états $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ définis ci-dessus, on obtient la représentation d'état suivante:

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \dots \dots \dots (I.55)$$

La représentation (I.56) correspond à une réalisation propre dans le cas fractionnaire lorsque $m < n$. Dans un cas contraire, un transfert direct entrée-sortie via une matrice D apparaîtra dans l'équation de sortie de la réalisation d'état, comme dans le cas linéaire classique

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} \dots \dots \dots (I.56)$$

Grâce à la propriété de linéarité de l'opérateur de dérivation fractionnaire D^α , on peut toujours obtenir plusieurs réalisations d'état, comme par exemple, la forme canonique d'observabilité ou la forme modale etc...

En appliquant la transformée de Laplace sur la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo, l'équation (I.56) devient:

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) = AX(s) + BU(s) \dots \dots \dots (I.57)$$

$$X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1}B U(s) + (s^\alpha I - A)^{-1}s^{\alpha-1}x(0) \dots \dots \dots (I.58)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \dots \dots \dots (I.59)$$

Si les conditions initiales nulles, l'équation (I.49) devient:

$$X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1}B U(s) \dots \dots \dots (I.60)$$

Et l'équation (I.60) s'écrit:

$$Y(s) = G(s)U(s) \dots \dots \dots (I.61)$$

$$G(s) = C(s^\alpha I - A)^{-1}B + D \dots \dots \dots (I.62)$$

Pour ce cas, l'équation (I.46) devient:

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{k\alpha} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{k\alpha} u(t) \dots \dots \dots (I.63)$$

En appliquant la transformée de Laplace à de telles équations, la fonction de transfert d'un système d'ordre fractionnaire commensurable est donnée par l'équation:

$$G(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (s^\alpha)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (s^\alpha)^k} \dots \dots \dots (I.64)$$

I. 2. 5. Système de commande d'ordre fractionnaire

Dans la littérature, pour les systèmes de commande en boucle fermée il y a quatre situations peuvent être listée ci-dessous:

1. Système d'ordre entier avec contrôleur d'ordre entier (IOP avec IOC),
2. Système d'ordre entier avec contrôleur d'ordre fractionnaire (IOP avec FOC),
3. Système d'ordre fractionnaire avec contrôleur d'ordre entier (IOF avec IOC),
4. Système d'ordre fractionnaire avec contrôleur d'ordre fractionnaire (IOF avec FOC),

Cependant, parce que la majorité des systèmes sont modélés comme des systèmes d'ordre entier, la commande d'ordre fractionnaire est principalement appliquée en utilisant des contrôleurs fractionnaires pour des systèmes d'ordre entier. Ce cas est le plus populaire.

Les contrôleurs d'ordre fractionnel ont suscité une attention considérable dans les deux dernières décennies. Ils fournissent plus de flexibilité dans la conception des contrôleurs par rapport aux contrôleurs standards. (Par exemple pour les PID classiques, où ses forme généralisée est le $PI^\mu D^\lambda$ ils ont cinq paramètres à choisir au lieu de trois paramètres).

I. 2. 6. Structure de commande d'ordre fractionnaire

La signification de commande d'ordre fractionnaire, du point de vue ingénierie, est une généralisation de la théorie de la commande d'ordre entier classique. Son intérêt majeur est d'améliorer les performances des systèmes en utilisant les concepts de la dérivation non entière et des systèmes d'ordre non entier. Les systèmes dynamiques et les contrôleurs d'ordre fractionnaire, qui sont basés sur le calcul fractionnaire, ont attiré l'attention de plusieurs chercheurs. Les structures de commande d'ordre fractionnaire les plus utilisées actuellement sont les suivantes:

- Le correcteur CRONE (Commande Robuste d'Ordre non Entier), proposé par Oustaloup au début des années 90 [38].

- ☑ Le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire proposé par Podlubny [39] en 1999. Ce correcteur est une généralisation du correcteur PID classique. Il comprend un intégrateur d'ordre λ et un dérivateur d'ordre μ et donne une meilleure réponse que le PID lorsqu'il est utilisé pour la commande des systèmes d'ordre non entier.
- ☑ Le correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire, étudié dans [43]. Ce correcteur est une généralisation du correcteur avance-retard de phase classique.

Et enfin, la commande à modèle interne (IMC: Internal model control) qui est en effet, une structure généralisée de la boucle ouverte d'ordre fractionnaire, qui elle aussi, a fait son apparition récemment. Elle est, en tant que méthode de synthèse directe habituellement utilisé dans le système d'asservissement classique. Cette structure fera l'objet du chapitre suivant. Elle est motivée par les qualités de robustesse vis-à-vis des perturbations (paramétriques ou externes).

I. 2. 6. 1. Le contrôleur CRONE

Il a été proposé par Oustaloup au début des années 90 [38]. Oustaloup a étudié les algorithmes d'ordre fractionnaire pour la commande des systèmes dynamiques et a montré la supériorité des performances de la commande CRONE sur le PID. L'idée développée pour la synthèse du contrôleur CRONE dans le domaine fréquentiel, vient sans doute des caractéristiques de robustesse que possède la fonction de transfert idéale de Bode, prise comme modèle de référence. L'objectif est alors d'obtenir en boucle ouverte une marge de phase constante autour de la fréquence de transition (fréquence au gain unité) et par conséquent un dépassement constant des réponses temporelles aux variations de gain du système. Ce correcteur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée. Trois stratégies bien distinctes assurant d'excellentes performances de robustesse ont fait l'objet de développements théoriques et technologiques importants. Chacune d'elles définit une génération de la commande CRONE. 1^{ère}, 2^{ème} et 3^{ème} génération [38]. [42].

I. 2. 6. 2. Contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire

Considérons le système de commande à retour unitaire suivant:

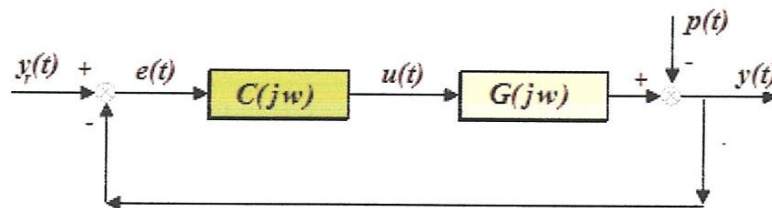


Fig. I. 1. Système de commande à retour unitaire

Le régulateur standard le plus utilisé dans l'industrie est le régulateur PID (Proportionnel Intégral Dérivé). Sa structure classique avec les actions P, I et D sur l'erreur e , est décrite par la figure (Fig. I. 4.). La commande $u(t)$, dans sa forme classique est donnée par:

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \dots \dots \dots (I. 65)$$

Elle est la somme de trois termes dont les paramètres sont le gain proportionnel K_p , le temps intégral T_i , et le temps dérivatif T_d . Ces paramètres influencent la réponse du système de la manière suivante: Lorsque K_p augmente, le temps de montée est plus court mais il y a un dépassement important. Le temps de réponse varie peu et l'erreur statique est améliorée. L'augmentation du terme intégral ($1/T_i$) a pour conséquence de réduire le temps de montée mais d'avoir un dépassement important et un temps de réponse assez lent. Par contre l'erreur statique est nulle. Donc plus ce paramètre est élevé, plus la réponse du système est ralentie. L'action intégrale rend le système moins stable. Lorsque le terme T_d augmente, le dépassement diminue et le temps de réponse est meilleur. L'action dérivée permet donc d'atténuer les oscillations et rend le système plus stable. Notons que dans le domaine fréquentiel, ces effets se traduisent par une courbe d'amplitude de pente nulle (0dB) et une phase nulle pour le terme proportionnel, une pente de -20dB/déc et une phase de $-\pi/2$ pour le terme intégral et une pente de +20dB/déc et une phase de $+\pi/2$ pour le terme dérivé. La stabilité du système dépend du réglage de ces trois paramètres. Au delà d'un seuil trop élevé de réglage, ceci a pour effet d'engendrer une oscillation du système de plus en plus importante menant à l'instabilité. Pour avoir un bon système, il faut un bon compromis entre la rapidité, la stabilité et l'erreur statique. Pour l'analyse des systèmes avec un correcteur PID, il existe plusieurs méthodes de réglage dans la littérature. On peut citer la méthode de Ziegler-Nichols, la méthode d'identification par modèle de Broïda, la méthode par approximations successives...etc.

Le contrôleur PID, de part sa simplicité, est très utilisé dans le monde industriel, néanmoins, ses performances deviennent insuffisantes en raison par exemple de la présence d'un retard non négligeable dans le modèle du procédé ou lorsque les paramètres du procédé varient. Dans ce cas, on fait appel à d'autres algorithmes de réglage tels que, le réglage par retour d'état, le réglage par régime glissant, le réglage par modèle interne, etc. Mais récemment, Podlubny, pour améliorer le comportement du correcteur PID, a proposé le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire, comportant un intégrateur d'ordre λ et un différentiateur d'ordre μ , où λ et μ appartiennent à l'ensemble des nombres réels.

L'équation de sortie du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ dans le domaine temps est donnée sous la forme :

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} D^{-\lambda}(e(t)) + T_d D^\mu(e(t)) \right] \dots \dots \dots (I. 66)$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (I.84) avec les conditions initiales nulles, la fonction de transfert de ce correcteur peut être exprimée par :

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu \dots \dots \dots (I.67)$$

Où les gains d'intégration K_i et de dérivation K_d sont liés aux paramètres de la forme classique par les relations suivantes :

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} \text{ et } K_d = K_p T_d \dots \dots \dots (I.68)$$

Si l'élément différentiel n'est pas considéré, le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ est transformé en contrôleur PI^λ dont la fonction de transfert est :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} \dots \dots \dots (I.69)$$

En choisissant ($\lambda = 1$ et $\mu = 1$) dans l'équation (I.84), on obtient le correcteur PID classique, ($\lambda = 1$ et $\mu = 0$), ($\lambda = 0$ et $\mu = 1$) donnent respectivement les correcteurs PI et PD classiques, et ($\lambda = 0$ et $\mu = 0$) donnent un gain. Tous ces types de correcteurs PID classiques sont des cas particuliers du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire donné par l'équation (I.84). Ainsi, comme le montre la figure (Fig. II. 5.), le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ généralise le correcteur PID classique.

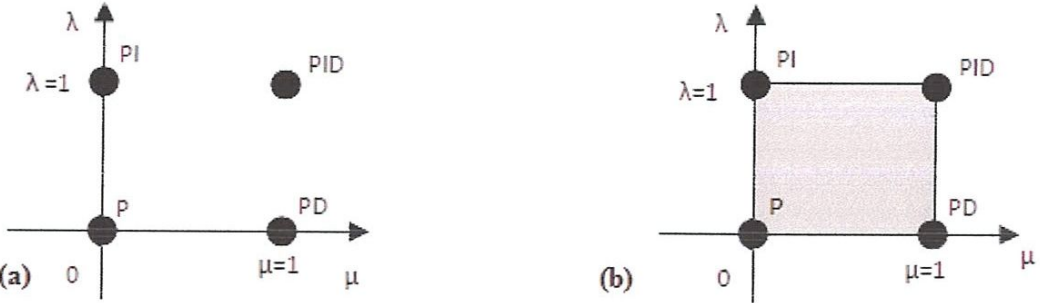


Fig. I. 2. $PI^\lambda D^\mu$ vs PID, (a): ordre entier, (b) : ordre fractionnaire

En plus de K_p , K_i et K_d , le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ possède deux paramètres de réglage supplémentaires, μ et λ . Ceci le rend plus flexible et donne une opportunité pour mieux ajuster les propriétés dynamiques des systèmes de commande d'ordre fractionnaire. S'inspirant de l'idée du correcteur $PI^\lambda D^\mu$, plusieurs travaux sur les techniques de réglage sont actuellement publiés.

I. 2. 6. 3. Fonction de transfert idéal de Bode

Dans son travail sur les amplificateurs à réaction, en 1945. Bode a proposé une forme idéale de la fonction de transfert de la boucle de commande, dont le tracé de Nyquist est une ligne droite passant par l'origine donnant une marge de phase invariante aux variations du gain de l'amplificateur. Clairement, ce système idéal est un intégrateur fractionnaire de fonction de transfert en boucle ouverte

$G(s) = K/s^\alpha$ appelée fonction de transfert idéale de Bode, où K désigne un gain et $0 < \alpha < 2$. Compte tenu de ses propriétés, ce système est pris comme un modèle de référence. La fonction de transfert en boucle fermée avec retour unitaire négatif est:

$$F(s) = \frac{K}{s^\alpha + K} \quad 0 < \alpha < 2, \dots \dots \dots (I.70)$$

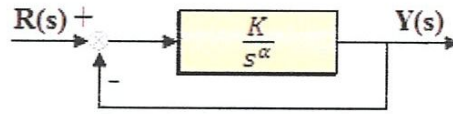


Fig. I. 3. Système de référence

Les caractéristiques générales de la fonction de transfert de Bode sont les suivantes:

☀ Les caractéristiques générales:

1. En en boucle ouverte :

- La courbe de gain a une pente constante de $-20\alpha dB/dec$.
- Fréquence de passage à $0 dB$ dépend de K ,
- Le diagramme de phase est une droite horizontale de valeur $-\alpha\pi/2$,
- Le diagramme de Nyquist est une ligne droite qui part de l'origine avec un argument de $-\alpha\pi/2$,

2. En en boucle fermée :

- La marge de gain est infinie,
- La marge de phase est constante avec la valeur $\phi_m = \pi (1 - \alpha/2)$,
- La réponse indicielle est de la forme

$$y(t) = Kt^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-Kt^\alpha), \dots \dots \dots (I.71)$$

3. Réponse indicielle et paramètres caractéristiques

- Réponse en échelon pour $K = 1$ et différentes valeurs pour α ,
- Les courbes correspondent à des taux d'amortissement et la fréquence propre peut être obtenue à partir des racines du dénominateur de $F(s)$.
- Ces racines sont :

$$s_{1,2} = A^{1/\alpha} e^{j\pi/\alpha} = A^{1/\alpha} (\cos \frac{\pi}{\alpha} + j \sin \frac{\pi}{\alpha}), \dots \dots \dots (I.72)$$

$$\omega_n = |s_{1,2}|, -\delta\omega_n = \Re(s_{1,2}), \omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}, \dots \dots \dots (I.73)$$

- Pour la fréquence propre ω_n , le tau d'amortissement δ , et la fréquence propre amortie du système ω_p en fonction de la position des pôles, ces paramètres caractéristiques peuvent être déterminées par:

$$\delta = -\cos \frac{\pi}{\alpha}, \omega_n = A^{1/\alpha}, \omega_p = A^{1/\alpha} \sqrt{1 - (-\cos \frac{\pi}{\alpha})^2} = A^{1/\alpha} \sin \frac{\pi}{\alpha}, \dots \dots \dots (I.74)$$

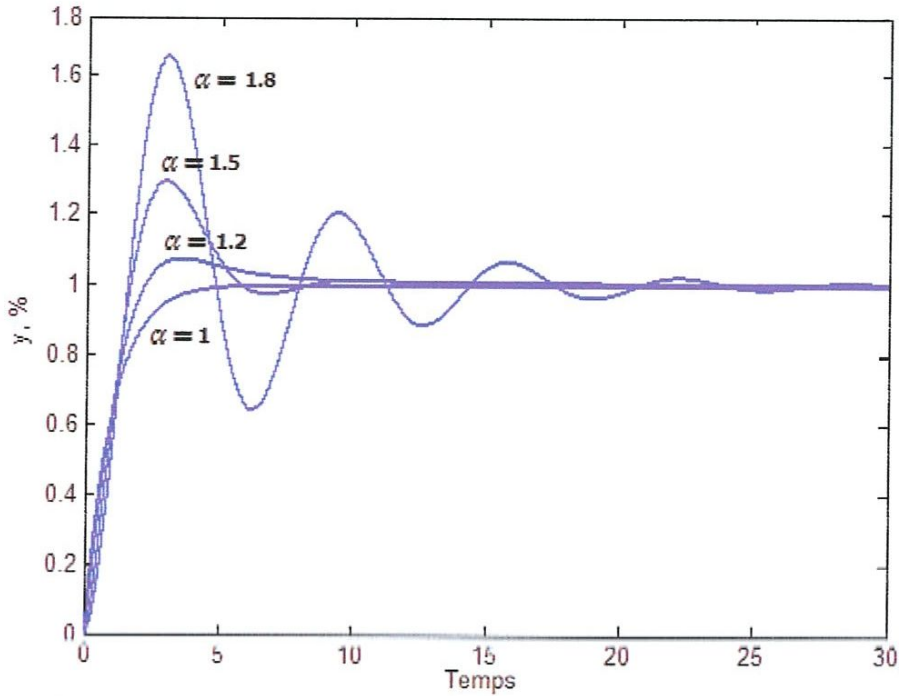


Fig. I. 4. Réponse indicielle de la fonction de Bode en BF, K = 1

4. Réponse fréquentielle et paramètres caractéristiques

Comme pour les systèmes d'ordre entier, pour déterminer les paramètres caractéristiques en réponse fréquentielle, nous allons mettre $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{A}{(j\omega)^\alpha + A} = \frac{A}{(\omega^\alpha \cos \alpha \pi/2 + A) + j\omega^\alpha \sin \alpha \pi/2} \dots \dots \dots (I.75)$$

Donc:

$$|G(j\omega)| = \frac{A}{\sqrt{\omega^{2\alpha} + 2A\omega^\alpha \cos \alpha \pi/2 + A^2}} \dots \dots \dots (I.76)$$

Présentant un maximum à

$$\omega^\alpha = -A \cos \alpha \frac{\pi}{2} \rightarrow \omega_r = (A \cos \alpha \frac{\pi}{2})^{1/\alpha}, \alpha > 1. \dots \dots \dots (I.77)$$

En substituant la fréquence de résonance ω_r dans l'équation obtenue dans l'équation d'amplitude, l'équation de pic de résonance est:

$$M_r = \frac{1}{\sin \alpha \pi/2} \dots \dots \dots (I.78)$$

Comme le tau d'amortissement le pic de résonance dépend seulement de α .

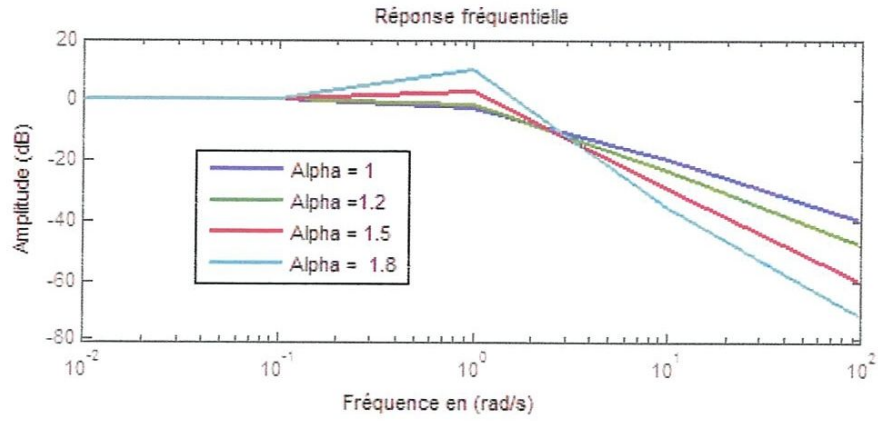


Fig. I. 5. Réponse fréquentielle de la fonction de Bode en BF

CHAPITRE I : PARTIE 3

APPROXIMATION DES SYSTÈMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

I. 3. 1. Introduction

Puisque les systèmes physiques réels ont généralement un comportement fractionnaire sur une bande de fréquences donnée (fréquences de coupure de Shannon pour la borne supérieure et le spectre du signal d'entrée pour la borne inférieure), l'opérateur non entier est généralement approché par un modèle rationnel d'ordre élevé. Ainsi, un modèle fractionnaire et son approximation rationnelle possèdent les mêmes dynamiques dans cette bande de fréquences. Il existe différentes approches d'approximation de l'opérateur non entier. Pour les besoins de ce mémoire, on ne présentera qu'une seule méthode d'approximation, qui est la méthode d'Oustaloup.

I. 3. 2. Implémentation des correcteurs d'ordre non entier

Les fonctions de transfert telles que (I.65) rendent difficile l'implémentation des contrôleurs d'ordre fractionnaire. La mise en œuvre de ces contrôleurs nécessite l'utilisation de fonctions de transfert d'ordre entier à dimension finie. Pour le terme simple s^α avec α un nombre réel, il y a plusieurs schémas d'approximations qui sont proposés. En général, nous avons des réalisations analogiques et des réalisations numériques [37]. Ce paragraphe décrit différentes méthodes d'approximations ou mises en œuvre des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire. Elles se distinguent selon que le modèle entier obtenu est continu ou discret. Dans le domaine 's', on parle d'approximations continues ou approximations dans le domaine des fréquences, alors que dans le domaine 'z', on parle d'approximations discrètes ou d'approximations dans le domaine temps. La plupart des méthodes de simulation sont basées sur l'approximation dans le domaine fréquentiel ou temporel de l'opérateur de dérivation s^α .

La problématique est la suivante: Comment évaluer la sortie d'un système d'ordre non entier connaissant son entrée ?

Pour résoudre ce problème, trois solutions sont alors proposées:

1. Méthode analytique, elle est basée sur l'expression analytique de la sortie du système,
2. Méthodes basées sur les modèles discrets, c'est l'approximation du modèle d'ordre fractionnaire par un modèle rationnel discret,
3. Méthodes basées sur les modèles continus, c'est l'approximation du modèle d'ordre fractionnaire par un modèle rationnel continu.

La partie suivante, sera consacrée aux méthodes d'approximation et de simulation des systèmes d'ordre fractionnaire.

I. 3. 2. 1. Méthode basée sur l'expression analytique de la sortie

La forme modale de la fonction de transfert d'un système d'ordre fractionnaire $G(s)$ est donnée par.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \sum_{k=0}^n \frac{r_k}{s^\alpha - \lambda_k}, \quad 0 < \alpha < 1 \dots \dots \dots (I.79)$$

L'utilisation de cette forme nous conduit à calculer la sortie du système.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{r_k}{s^\alpha - \lambda_k} \right\} * u(t) = g(t) * u(t) \dots \dots \dots (I.80)$$

Où * dénote le produit de convolution

La réponse indicielle est donnée par l'équation suivante

$$y(t) = \sum_{k=0}^n r_k t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(\lambda_k t^\alpha) \dots \dots \dots (I.81)$$

I. 3. 2. 2. Méthodes basées sur l'approximation du modèle d'ordre fractionnaire par un modèle rationnel discret

Dans ce cas on utilise des fonctions génératrices notées $w(z^{-1})$. La méthode consiste à remplacer l'opérateur de Laplace "s" du modèle non entier par la fonction $w(z^{-1})$ de la variable z . On obtient ainsi un modèle discret équivalent au modèle non entier continu. Dans le cas d'une fonction de transfert déduite de l'équation (I.64). On a :

$$G(z) = \frac{b_0(w(z^{-1}))^{\beta_0} + b_1(w(z^{-1}))^{\beta_1} \dots \dots + b_m(w(z^{-1}))^{\beta_m}}{a_0(w(z^{-1}))^{\alpha_0} + a_1(w(z^{-1}))^{\alpha_1} \dots \dots + a_n(w(z^{-1}))^{\alpha_n}} \dots \dots \dots (I.82)$$

Quatre fonctions génératrices sont proposées à partir desquelles découlent quatre méthodes

| |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Euler (Grünwald):</i> $(w(z^{-1}))^\alpha = \left(\frac{1}{T}(1 - z^{-1})\right)^\alpha = \frac{1}{T^\alpha} \left(1 - \alpha z^{-1} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} z^{-2} \dots \dots \dots\right)$ |
| <i>Tustin:</i> $(w(z^{-1}))^\alpha = \left(\frac{2}{T} \times \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)^\alpha = \left(\frac{2}{T}\right)^\alpha (1 - 2\alpha z^{-1} + 2\alpha^2 z^{-2} \dots \dots \dots)$ |
| <i>Simpson:</i> $(w(z^{-1}))^\alpha = \left(\frac{3}{T} \times \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})^\alpha}{1 + 4z^{-1} + z^{-2}}\right)^\alpha = \left(\frac{3}{T}\right)^\alpha (1 - 4\alpha z^{-1} + 2\alpha(4\alpha + 3)z^{-2} + \dots)$ |
| <i>Al - Alaoui:</i> $(w(z^{-1}))^\alpha = \left(\frac{8}{7T} \times \frac{(1 - z^{-1})}{1 + \frac{z^{-1}}{7}}\right)^\alpha = \left(\frac{8}{7T}\right)^\alpha \left(1 - \frac{8}{7}\alpha z^{-1} + \left(-\frac{24}{49}\alpha + \frac{32}{49}\alpha^2\right)z^{-2} \dots\right)$ |
| TAB. I. 1. Approximation de l'opérateur s^α en temps discret |

Remarque (1)

Récemment, de nouvelles formules de discrétisation sont apparues et qui sont des interpolations pondérées entre Euler-Tustin, Tustin-Simpson. Par exemple, ¾ de l'opérateur d'Euler avec ¼ de l'opérateur de Tustin donne l'opérateur Al-Alaoui. Notons que le modèle discret équivalent obtenu est irrationalnel, il doit être approximé par un modèle rationnel de dimension finie.

I. 3. 2. 3. Méthodes basées sur l'approximation du modèle d'ordre fractionnaire par un modèle rationnel continu

Dans le domaine fréquentiel on cherche à approximer l'opérateur de dérivation non entière s^n par une transmittance dont les pôles et zéros sont liés par des relations de récurrence. L'approximation de s^n par un modèle entier nécessite trois étapes:

- a) Approximation de l'opérateur non entier sur une bande de fréquence $[W_A \ W_B]$ avec un modèle non entier $s^n_{[W_A \ W_B]}$
- b) Approximation du modèle non entier obtenu par un modèle entier,
- c) Calcul du modèle entier global et / ou la sortie du modèle.

Les méthodes généralement utilisées sont celles de Charef [44] et d'Oustaloup [42].

I. 3. 3. Approche CRONE

A. Oustaloup [42] a montré qu'il existe un lien étroit entre dérivation « ou intégration » non entière et récursivité, ses travaux ont aboutit une réalisation d'un système d'ordre fractionnaire dont la réponse fréquentielle est une fonction rationnelle décrite par des zéros et des pôles.

I. 3. 3. 1. La version idéale

L'approche CRONE à phase constante est définie par la transmittance d'ordre non entier de la forme :

$$C_m(p) = c_0 \left(\frac{1 + p/\omega_b}{1 + p/\omega_h} \right)^m \dots \dots \dots (I. 83)$$

Dont les diagrammes de Bode sont donnés sur la figure suivante :

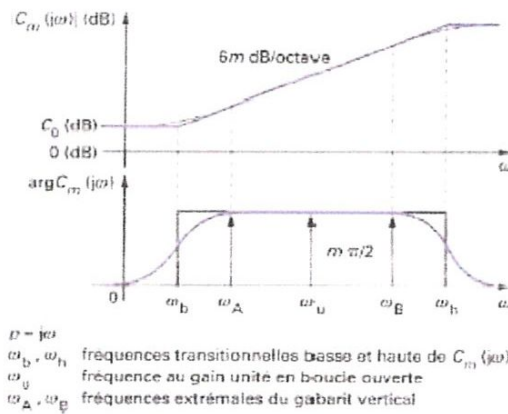


Fig. I. 6. Diagramme de Bode de l'approche CRONE idéal

I. 3. 3. 2. Version réel

La version idéale de l'approche CRONE à phase constante est définie par une transmittance d'ordre entier résultant d'une distribution récursive de zéros et de pôles, dont les diagrammes asymptotiques de Bode sont donnés par la figure (Fig. I. 2. 5).

La figure (Fig. I. 2. 6) présentes le diagramme asymptotique de transmittance (I.80) sur cette figure, les coefficients α et η sont les coefficients récursifs de distribution.

Leur relation via à vis des pulsations de la transmittance (I.80) sont donnés par :

$$C_n(p) = c_0 \prod_{i=1}^N \left(\frac{1 + p/\omega_i}{1 + p/\omega_i} \right) \dots \dots \dots (I. 84)$$

Avec

$$\frac{\omega'_{i+1}}{\omega_i} = \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \alpha\eta > 1 \dots\dots\dots (I.85)$$

$$\frac{\omega_i}{\omega_i} = \alpha \text{ et } \frac{\omega'_{i+1}}{\omega_i} = \eta \dots\dots\dots (I.86)$$

$$\alpha\eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{1/N} \dots\dots\dots (I.87)$$

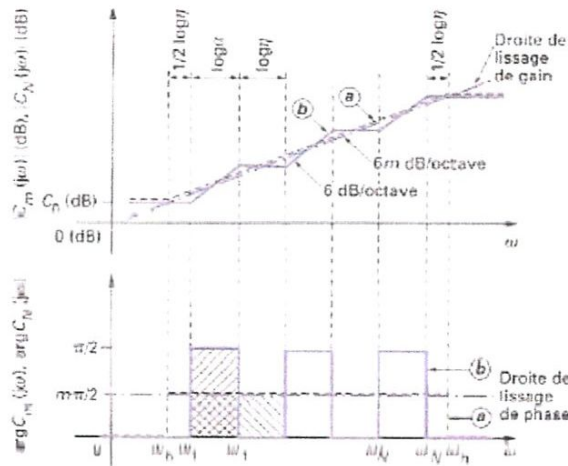


Fig. I. 7. Diagrammes asymptotiques de Bode du CRONE idéal (a) et (b) réel pour $m \in [0,1]$

$$\alpha = (\alpha\eta)^m \text{ et } \eta = (\alpha\eta)^{1-m} \dots\dots\dots (I.88)$$

$$\omega'_i = \omega_b \eta^{\frac{1}{2}} \text{ et } \omega_N = \omega_h \eta^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (I.89)$$

La synthèse paramétrique s'effectue généralement en se fixant une valeur de N qui assure une valeur de $\alpha\eta$ de l'ordre de 5, ce choix pratique qu'il convient de considérer pour des raisons de simplicité peut néanmoins être affiné par une réduction d'ordre optimale fondée sur l'énergie ou les moments de la réponse impulsionnelle. En ce qui concerne les expressions des facteurs récursifs α et η donné par (I.84), leur détermination exige celle de m en fonction de α et η . Deux possibilités s'offrent pour déterminer la relation qui lie l'ordre m à ces coefficients récursifs.

I. 3. 3. 2. 1. Droite de lissage de gain

Le lissage des marches de l'escalier qui constitue le diagramme asymptotique de gain de $C_m(j\omega)$ entre ω_b et ω_h (Fig. I. 2. 6), peut être matérialisé par une droite appelée droite de lissage de gain de pente inférieure à $6m$ dB/oct avec m compris entre 0 et 1, cette droite supporte l'asymptote de gain de $C_m(j\omega)$ entre ω_b et ω_h , en désignant par s la hauteur des marches d'escalier, les pentes de la droite de lissage de gain et d'une contre marche sont respectivement donnés par les équations :

$$6m \frac{dB}{oct} = \frac{\Delta db}{\log \alpha + \log \eta} \dots \dots \dots (I. 90)$$

$$6m \frac{dB}{oct} = \frac{\Delta db}{\log \alpha + \log \eta} \dots \dots \dots (I. 91)$$

$$6m \frac{dB}{oct} = \frac{\Delta db}{\log \alpha} \dots \dots \dots (I. 92)$$

Des quelles on tire, en effectuant leur rapport, l'expression de l'ordre non entier en fonction des facteurs récursifs α et η :

$$m = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha\eta)} \dots \dots \dots (I. 93)$$

I. 3. 3. 2. 2. Droite de lissage de phase

Le lissage des créneaux qui constitue le diagramme asymptotique de phase de $C_m(j\omega)$ entre ω_b et ω_h (Fig. I. 2. 6), peut être matérialisé par une droite de lissage de phase d'ordonnée inférieure à $\pi/2$ avec m compris entre 0 et 1, cette droite supporte l'asymptote de phase de $C_m(j\omega)$ entre ω_b et ω_h , en désignant par s l'air des surfaces hachurées, l'ordonnée de la droite de lissage de phase et la hauteur d'un créneau s'expriment respectivement par les équations :

$$m \frac{\pi}{2} = \frac{S}{\log \alpha + \log \eta} \dots \dots \dots (I. 94)$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{S}{\log \alpha} \dots \dots \dots (I. 95)$$

Dont se déduit, en effectuant leur rapport, l'expression de m obtenue à partir du gain soit réécrite sous la forme :

$$\log \alpha = m \log(\alpha \eta) \dots \dots \dots (I.96)$$

$$\log \alpha = m \log(\alpha \eta) \dots \dots \dots (I.97)$$

La relation (I.86) et (I.87) se traduit par : $\alpha = (\alpha \eta)^m$

D'où l'on tire :

$$\eta = \frac{\alpha \eta}{\alpha} = \frac{\alpha \eta}{(\alpha \eta)^m} = (\alpha \eta)^{1-m} \dots \dots \dots (I.97)$$

Expressions qui sont bien celles données par (I.84) quand aux expressions des fréquences transitionnelles extrémales de $C_N(j\omega)$ donné par (I.85) ω_l et ω_N , celle se déterminent en fonction des fréquences transitionnelles ω_b et ω_h de $C_m(j\omega)$. En effet la position relative des diagrammes asymptotiques de gain de $C_m(j\omega)$ et $C_N(j\omega)$ telle que l'illustre la figure (Fig. I. 2. 6), montre que l'asymptotiques de gain de $C_m(j\omega)$ entre ω_b et ω_h coupe les marches d'escalier de $C_N(j\omega)$ au milieu des paliers de longueur $\log \eta$ aussi sur une échelle logarithmique ω_l et ω_N , se situe respectivement à $\frac{1}{2} \log \eta$ de ω_b et ω_h .

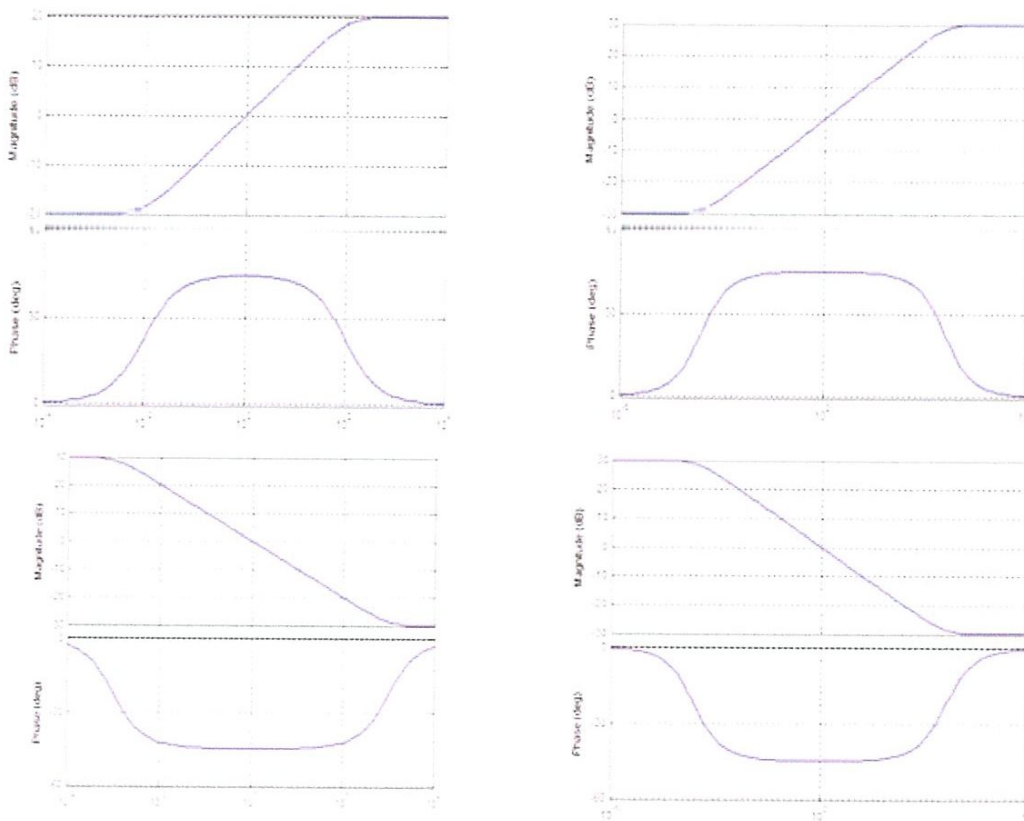


Fig. I. 8. Approximation numérique d'un dérivateur et intégrateur d'ordre $\frac{1}{2}$ approchée par la méthode CRONE

La figure (Fig. I. 2. 7) présente quelques résultats de la simulation d'un dérivateur et intégrateur fractionnaire d'ordre $\frac{1}{2}$.

I. 3. 4. Conclusion

Ce chapitre est divisé en trois parties. Dans la première partie, nous avons introduit définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que : la dérivation fractionnaire, l'intégration fractionnaire, définitions relatives aux opérateurs d'ordre fractionnaire, l'exponentielle de Mittag-Leffler et d'autres notions. Ensuite, Les différentes représentations des systèmes fractionnaires équation différentielle, fonction de transfert et représentation d'état. Enfin, nous avons illustré la simplicité et l'élégance de la représentation diffusive et l'approche CRONE. Les deux approches ont permis d'approcher le système fractionnaire, chaque méthode demande de respecter le choix de ses paramètres pour obtenir une meilleure approximation dans une bande très large.

BIBLIOGRAPHIE

-
- [01] Dr. Concepción A. Monje, Dr. YangQuan Chen, Dr. Blas M. Vinagre, Dr. Vicente Feliu, Fractional-order Systems and Controls "Fundamentals and Applications" Springer 2010.
-
- [02] Ying Luo | YangQuan Chen "Fractional Order Motion Controls" 2013
-
- [03] Jan van Mill. "Theory And Applications Of Fractional Differential Equations" 2006.
-
- [04] YangQuan Chen, Ivo Petras and Dingyü Xue "*Fractional Order Control - A Tutorial*"2009.
-
- [05] R. Hilfer. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific Publ.Co (2000).
-
- [06] J. Sabatier, O.P. Agrawal, and J.A. Tenreiro Machado. *Advances in fractional calculus*. Springer (2007).
-
- [07] K.B. Oldham and J. Spanier. *The Fractional Calculus*. Academic Press, York and London (1974).
-
- [08] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*. Gordon and Breach (1993).
-
- [09] HOUMOR Tarek Analyse du Chaos dans un Système d'Équations Différentielles Fractionnaires Mémoire de Doctorant. 2014.
-
- [10] A. DZIELIŃSKI, D. SIEROCIUK, and G. SARWAS "Some applications of fractional order calculus" 2010.
-
- [11] Abdelbaki DJOUAMBI. Université Mentouri De Constantine "Contribution A La Commande CRONE" Mémoire de Doctorant 2008
-
- [12] Khalfa BETTOU. Mémoire de Doctorant. 2011. Analyse Et Réalisation De Correcteurs Analogiques D'ordre Fractionnaire
-
- [13] I. Podlubny. Fractional-order system and fractional-order controllers. Technical report uef-03-94 Institut of Experimental Physics, Academy of Sciences, Slovakia (1994).
-
- [14] A. Oustaloup, X. Moreau, and M. Nouillant. *The crone suspension*. Control Eng. Practice 4(8), 1101–1108 (1996).
-
- [15] V. H. Schmidt and J. E. Drumheller. *Dielectric properties of lithium hydrazinium sulfate*. Physical Review B 4, 4582–4597 (1971).
-
- [16] HAMMOUCHE-Sofiane-Mémoire de Magister Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou. Identification d'un modèle fractionnaire à l'aide des réseaux de neurones. 2012.
-
- [17] Roberto Ayala and Alfredo Tuesta Professor Mihir Sen Undergraduate Research. Introduction to the Concepts and Applications of Fractional and Variable Order Differential Calculus May 13, 2007.
-
- [18] Das, S. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Control*. Springer-Verlag Berlin 2008.
-
- [19] Bertram ROSS. *Calculus and its Applications*, volume 457.
-
- [20] Igor Podlubny. *Fractional Calculus & Applied Analysis "Geometric And Physical Interpretation Of Fractional Integration And Fractional Differentiation"* 2002.
-

-
- [21] Ibrahima N'DOYE. Université Ain Chock-Casablanca "Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires". Mémoire de Doctorant. 2011.
-
- [22] T. Hélie and D. Matignon. *Diffusive representations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses*. Math. Mod. and Meth. in Appl. Sc. pages 503–536 (2006).
-
- [23] R. L. Bagley and P. J. Torvik. *A theoretical basis for the application of fractional calculus in viscoelasticity*. Journal of Rheology 27, 201–210 (1983).
-
- [24] R. L. Bagley and P. J. Torvik. *On the fractional calculus model of viscoelasticity behavior*. Journal of Rheology 30, 133–155 (1986).
-
- [25] T. Pfitzenreiter. *A physical basis for fractional derivatives in constitutive equations*. Z. Angew. Math. Mech. 84(4), 284–287 (2004).
-
- [26] F. Dubois, A. C. Galucio, and N. Point. *Introduction à la dérivation fractionnaire, théorie et applications*. Techniques de l'Ingénieur AF510 (2010).
-
- [27] Duan-yuan Bai, Chun-yang Wang. and Ji Zou. "Design and Simulation of Fractional Order Control Systems Based on Bode's Ideal Transfer Function". 2015.
-
- [28] D. BALEANU, Z.B. GÜVENÇ, J.A. TENREIRO MACHADO "New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications". Springer. 2010.
-
- [29] G.M. Mittag-Leffler. *Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$* . C. R. Académie des Sciences 137, 554–558 (1903).
-
- [30] G.M. Mittag-Leffler. *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogène*. Acta Mathematica 29, 101–182 (1905).
-
- [31] A. Erdélyi. *Higher Transcendental Functions, volume 1*. McGraw-Hill, New York (1955).
-
- [32] A. Erdélyi. *Higher Transcendental Functions, volume 2*. McGraw-Hill, New York (1955).
-
- [33] A. Erdélyi. *Higher Transcendental Functions, volume 3*. McGraw-Hill, New York (1955).
-
- [34] R.P. Agarwal. *A propos d'une note de M. Pierre Humbert*. C. R. Académie des Sciences 236, 2031–2032 (1953).
-
- [35] Podlubny I., *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, San Diego: Academic Press, 1999.
-
- [36] R.E. Kalman. Mathematical description of linear dynamical systems. SIAM J. Contr., 1 :152–192, 1963.
-
- [37] Vinagre. B. M., Podlubny, I., Hernandez, A., Feliu, V. (2000). Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications. Fractional Calculus & applied Analysis. vol. 3, p.231-248.
-
- [38] Oustaloup, A. (1991). La commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier). Paris, Hermès.
-
- [39] Podlubny, I. (1999). Fractional-order systems and PI'D' controllers. IEEE Trans. Aut. Control. 44(1) :208-214.
-

[40] LADACI, S. (2007). Contribution à la commande adaptative d'ordre fractionnaire. Thèse de Doctorat. Université Mentouri, Constantine. Algerie.

[41] Si Ammour. A., Djennoune, S., Bettayeb, M. (2009). A sliding mode control for linear fractional systems with input and state delay. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 14, p.2310-2318.

[42] Oustaloup, A. (1995). La dérivation non entière. Paris. Hermès.

[43] Monje, A., Chen, Y.Q., Vinagre. B.M., Xue, D., Feliu, V. (2010). Fractional-order Systems and Controls : Fundamentals and Applications. Springer-Verlag. London.

[44] A. Charef, "Analogue realization of fractional order integrator, differentiator and fractional $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controller," IEE Proc. Control Theory Appl, Vol. 153, No. 6, pp: 714-720, 2006.

[45]

[46]

CHAPITRE II

SUR LA COMMANDE À MODÈLE INTERNE

CHAPITRE II

SUR LA COMMANDE À MODÈLE INTERNE

II. 1. Introduction

Ce chapitre est dédié à l'étude de la structure et théorie de système de la commande à modèle interne, l'évolution de la structure IMC et les procédures de conception de commande à modèle interne (IMC). Le choix de cette structure vient du fait qu'elle est présentée dans la littérature comme une structure de commande robuste ce qui a permis son utilisation très répandue en milieu industriel. Le principal avantage de cette structure réside dans la simplicité de sa construction, et l'interprétation aisée des rôles de ses blocs constitutifs. La structure de commande à modèle interne est présentée comme une alternative à la boucle fermée classique [1-10].

II. 2. Structure de base de l'IMC

Comme son nom l'indique, la commande à modèle interne (IMC: Internal Model Control) incorpore une simulation du processus par un modèle G_m interne dans sa structure de commande.

Le procédé G muni de la structure IMC peut se schématiser comme l'indique la figure (Fig. II. 1).

G_{IMC} et G_m sont respectivement les fonctions de transfert du contrôleur et du modèle. Le procédé est représenté par le transfert G reliant sa sortie à la commande U . $d(s)$ est une perturbation non mesurée et additive sur la sortie du procédé.

Dans la structure de base de l'IMC, la commande U issue du contrôleur G_{IMC} est appliquée simultanément au procédé G et à son modèle G_m . L'IMC exploite alors cet écart de comportement pour corriger l'erreur sur la consigne. Le signal d'erreur comprend l'influence des perturbations extérieures ainsi que les erreurs de modélisation.

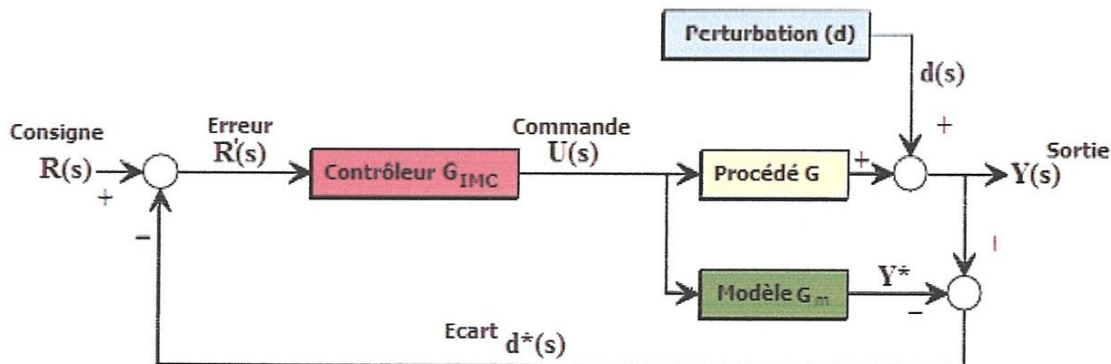


Fig. II. 1. Structure de Base de l'IMC

II. 3. Théorie de système de l'IMC

Le but de la conception du système de commande est de poursuivre le point de consigne rapidement et précisément.

$$y \approx r \quad \forall t, \forall d \dots\dots\dots (II. 1)$$

Cela implique que l'effet des perturbations externes doit être corrigé de manière aussi efficace que possible (bon comportement de régulation).

$$(r' \approx r - d^*) \quad \forall t, \forall d \dots\dots\dots (II. 2)$$

En outre, le concepteur du système de contrôle souhaite obtenir (II.1) et (II.2), tout en assurant également l'insensibilité à l'erreur de modélisation. Il est bien connu que le schéma en boucle ouverte (action directe) de la figure (Fig. II. 2. A) représente la meilleure façon de satisfaire l'équation (II.1).

Pour le schéma en boucle ouverte, le système est stable lorsque le contrôleur et le système sont stables; le contrôleur est également facile à concevoir:

$$G_{IMC}(s) = \frac{1}{G_m(s)} \dots\dots\dots (II. 3)$$

Les inconvénients sont la sensibilité de la performance aux incertitudes procédé/modèle et l'inaptitude de faire face aux perturbations non mesurées. Les incertitudes procédé/modèle peut être causée, par exemple, par réduction de modèle (la représentation d'un système de commande d'ordre élevé en un modèle approché d'ordre inférieur) ou par des paramètres du système qui dépendent des conditions de fonctionnement [14].

Le schéma en boucle fermée de la figure (Fig. II. 2. B), la situation est inversée. Les incertitudes procédé/modèle et des perturbations non mesurées peuvent être traitées de manière efficace, mais le réglage est devient compliquée par le problème de la stabilité en boucle fermée. Nous pouvons maintenant augmenter les systèmes en boucle ouverte et en boucle fermée, comme indiqué sur la figure (Fig. II. 2. C) et (Fig. II. 2. D) sans affecter les performances. Sur la figure (Fig. II. 2. C), $d = 0$, et par conséquent, le système est reste encore en boucle ouverte; dans la figure (Fig. II. 2. D), les deux blocs $G_m(s)$ l'un annule l'autre par simplification de diagramme de bloc.

À partir des figures (Fig. II. 2. C) et (Fig. II. 2. D).

$$G_{IMC} = \frac{C(s)}{1 + C(s)G_m(s)} \dots\dots\dots (II. 4)$$

$$C(s) = \frac{G_{IMC}(s)}{1 - G_{IMC}(s)G_m(s)} \dots\dots\dots (II. 5)$$

Nous arrivons à la structure générale de la figure (Fig. II. 2. E) qui présente les avantages des deux structures en boucle ouverte et en boucle fermée:

Lorsque le modèle du procédé est parfait ($G_m(s) = G(s)$) et il n'y a pas de perturbations ($d = 0$), le retour n'est pas nécessaire et la structure (Fig. II. 2. E) se comporte de manière identique à la structure (Fig. II. 2. A), nous informe de deux cas :

1. En supposant que nous avons une connaissance complète du processus (encapsulé dans le modèle de processus) contrôlé, alors un contrôle parfait peut être réalisé.
2. Le retour est seulement nécessaire lorsque les connaissances sur le processus sont inexactes ou incomplets.

Parce que le modèle du procédé $G_m(s)$ apparaît explicitement dans (Fig. II. 2. E), cette structure est appelée la structure de commande à modèle interne (IMC). Pour simplifier, on peut dire que le contrôleur dans (Fig. II. 2. E), peut être conçu avec la facilité d'un contrôleur en boucle ouverte, tout en

conservant les avantages d'un retour de système. Notre objectif est de décrire, en détail, une telle procédure de conception.

À partir du schéma blocs de la structure IMC (Fig. II. 2. E). La sortie, $Y(s)$, est comparée à la sortie du modèle de processus, donnant le signal $d^*(s)$.

$$d^*(s) = [G(s) - G_m(s)]U(s) + d(s) \dots \dots \dots (II. 6)$$

Si $d(s) = 0$ alors $d^*(s)$ est une mesure de la différence de comportement entre le processus et le modèle. Si $G_m(s) = G(s)$, alors $d(s) = d^*(s)$.

Ainsi $d^*(s)$ est considéré comme information d'incertitude dans le modèle de processus $G_m(s)$, et peut donc être utilisée pour améliorer le contrôle.

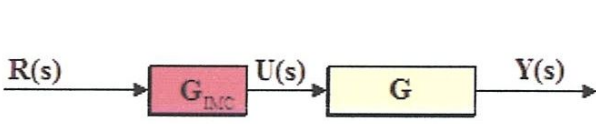


Fig. II. 2. A. Système en boucle ouverte,

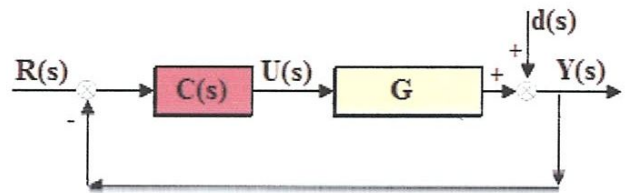


Fig. II. 2. B. Système en boucle fermée,

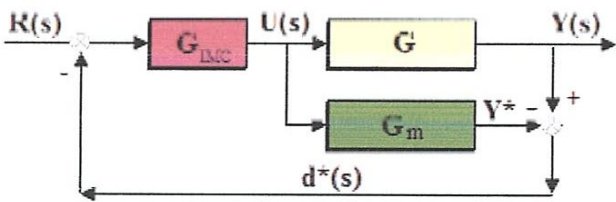


Fig. II. 2. C. IMC sans perturbation,

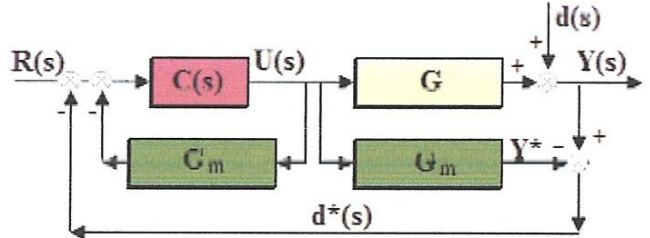


Fig. II. 2. D. IMC avec perturbation,

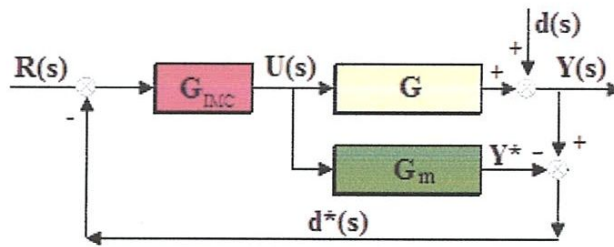


Fig. II. 2. E. Structure finale de l'IMC avec perturbation.

Fig. II. 2. Évolution de la structure IMC

Ensuite, $d^*(s)$ est utilisé pour soustraire de la valeur de consigne $R(s)$ ci-dessous,

$$U(s) = [R(s) - d^*(s)]G_{IMC}(s) \dots \dots \dots (II. 7)$$

$$U(s) = [R(s) - \{[G(s) - G_m(s)]U(s) + d(s)\}]G_{IMC}(s) \dots \dots \dots (II. 8)$$

$$U(s) = \frac{[R(s) - d(s)]G_{IMC}(s)}{1 + [G(s) - G_m(s)]G_{IMC}(s)} \dots \dots \dots (II. 9)$$

Substitue $U(s)$, dans la sortie $Y(s)$ ci-dessous,

$$Y(s) = G(s)U(s) + d(s) \dots \dots \dots (II. 10)$$

L'expression en boucle fermée du système est :

$$Y(s) = \frac{G_{IMC}(s)G(s)R(s) + [1 - G_{IMC}(s)G_m(s)]d(s)}{1 + [G(s) - G_m(s)]G_{IMC}(s)} \dots \dots \dots (II. 11)$$

1. Si $G_{IMC}(s) = G_m^{-1}(s)$ et $G_m(s) = G(s)$, alors théoriquement poursuite d'une consigne d'erreur nulle et rejet de perturbation peut les deux être réaliser.
2. Si $G_m(s) \neq G(s)$ rejet de perturbation d'erreur nulle peut être réaliser, à condition que $G_{IMC}(s) = G_m^{-1}(s)$ donne le terme : $[1 - G_{IMC}(s)G_m(s)]d(s) = 0$.

Quatre propriétés peuvent être représentées qui suggèrent les avantages de cette structure [15].

II. 3. 1. Propriété 1: Stabilité duale

Supposons que $G_m(s) = G(s)$. Ensuite, le système est effectivement en boucle ouverte et "la stabilité en boucle fermée" est impliqué par la stabilité de $G(s)$ et $G_{IMC}(s)$:

$$Y(s) = G(s)G_{IMC}(s)[R(s) - d^*(s)] + d(s) \dots \dots \dots (II. 12)$$

Alors que pour la structure classique (Fig. II. 2. B), il est pas du tout clair quel type de contrôleur $C(s)$ et quel choix de paramètre conduisent à des systèmes stables en boucle fermée, la structure IMC garantie la stabilité en boucle fermée pour tous les contrôleurs $G_{IMC}(s)$ stable.

La difficulté d'analyser de la stabilité en boucle fermée en fonction des paramètres du contrôleur $C(s)$ a été supprimée par la structure IMC. Le problème, si le procédé est instable en boucle ouverte l'IMC ne peut pas être utilisé avant de stabiliser le procédé instable. En outre, il est impossible dans la pratique d'espérer que le contrôleur peut annuler les pôles instables du procédé exactement. Pour le problème de stabilité, la question du meilleur choix pour $G_{IMC}(s)$ se pose.

II. 3. 2. Propriété 2: Contrôle parfait

Sous l'hypothèse que $G_{IMC}(s) = 1/G_m(s)$ et que $G(s)$ est stable, la somme des carrés des erreurs (l'erreur quadratique) est minimisée lorsque:

$$G_{IMC}(s) = \frac{1}{G(s)} \dots \dots \dots (II. 13)$$

Si l'équation (II.13) est réalisable, i.e., si le système IMC est stable en boucle fermée, alors $y(t) = r(t)$ pour tout $t > 0$ et pour toutes les perturbations $d(t)$. Cette performance de contrôle parfait ne peut généralement pas être réalisée dans la pratique. Par ailleurs, si le contrôleur parfait est utilisé, le système sera très sensible à des erreurs de modélisation.

II. 3. 3. Propriété 3: Système Type-1

On suppose que le gain stable du contrôleur est égal à l'inverse du gain du modèle et que le système en boucle fermée sur la figure (Fig. II. 2. E) est stable. Ensuite, le système est de type-1 et l'erreur de commande disparaît asymptotiquement pour toutes les entrées $r(t)$ et $d(t)$ constantes

asymptotiquement. Cette propriété n'implique pas de décalage en régime permanent ou zéro erreur en régime permanent.

$$G_{IMC}(0) = \frac{1}{G_m(0)} \dots \dots \dots (II. 14)$$

II. 3. 4. Propriété 4: Système Type-2

Sélectionnez $G_{IMC}(s)$ pour satisfaire **P3** et

$$\left. \frac{d}{ds} G_m(s)G_{IMC}(s) \right|_{s=0} = 0 \dots \dots \dots (II. 15)$$

Ensuite, le système est de type-2 et l'erreur de commande disparaît asymptotiquement pour toutes les entrées $r(t)$ et $d(t)$ en forme de rampe asymptotiquement.

P1 exprime simplement le fait que, en l'absence d'incertitudes procédé/modèle, le problème de stabilité est trivial, aussi longtemps que le système en boucle ouverte est stable. **P2** affirme que le contrôleur idéal en boucle ouverte conduit à parfaire les performances en boucle fermée lorsque la structure IMC est utilisée. **P3** et **P4** indiquent que l'action intégrale inhérente peut être atteinte sans la nécessité d'introduire des paramètres de réglage supplémentaires. **P2**, cependant, représente une situation idéalisée. Nous savons intuitivement que **P2** nécessite un gain de commande infinie; ceci est confirmé par la substitution de $G_{IMC}(s) = 1/G_m(s)$ dans l'équation (II.5). En faisant $G_{IMC}(0) = 1/G_m(0)$ comme postulé pour **P3**, nous trouvons $C(0) = \infty$, ce qu'implique une action de contrôle intégral, comme prévu.

Il y a plusieurs raisons pour lesquelles le "contrôleur parfait" implicite par **P2** ne peut pas être réalisé dans la pratique [15].

II. 3. 4. 1. Les zéros du demi-plan droit (RHP: Right-Half Plane)

Si le modèle a un zéro RHP, le contrôleur $G_{IMC}(s) = 1/G_m(s)$ a un pôle RHP, et si $G_m(s) = G(s)$, le système en boucle fermée sera instable suivant **P1**.

II. 3. 4. 2. Retard

Si le modèle contient un retard, le contrôleur $G_{IMC}(s) = 1/G_m(s)$ est prédictif et ne peut pas être réalisée.

II. 3. 4. 3. Les contraintes sur les variables de commande

Si le modèle est strictement propre, alors le contrôleur parfait $G_{IMC}(s) = 1/G_m(s)$ est non propre, ce qui implique $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_{IMC}(s)| = \infty$. Ainsi, les perturbations à haute fréquence infiniment petites provoqueraient des excursions infiniment grandes des variables de commandes qui sont physiquement non réalisable.

II. 3. 4. 3. 1. Définition 1

Cela nous dirige à définir ce que nous avons appelé l'inversibilité du système.

II. 3. 4. 3. 2. Définition 2

II. 3. 4. 3. 1. Système inversible (minimum de phase)

Un système $G(s)$ peut être appelé inversible si $G(s)$ contient seulement des minimums de phase.

II. 3. 4. 3. 2. Système strictement inversible

Si nous augmentons, $1/G_m(s)$ d'être plus propre, alors $G(s)$ est strictement inversible.

II. 3. 4. 3. 3. Définition 3

II. 3. 4. 3. 3. 1. Système non minimum de phase

Une fonction de transfert à minimum de phase ne comporte que des zéros dans le demi-plan gauche (c.-à-d., tous les zéros sont négatifs). Une fonction de transfert non minimum de phase comporte un ou plusieurs zéros dans le demi-plan droit.

II. 3. 4. 3. 3. 2. Système à un temps mort

Un temps mort est souvent appelé un élément non minimum de phase parce qu'il ne peut pas inverser et il est dans cette manière similaire à une fonction de transfert de non minimum de phase, qui également n'a pas un inverse stable.

Pour résoudre ces problèmes, l'idéal de la commande parfaite doit être abandonné. La procédure de conception d'IMC manipule cela en deux étapes; En premier, la performance est traitée sans tenir compte de la robustesse ou contraintes des entrées. En suite, un filtre est introduit et conçu pour rendre la commande propre (contraintes d'entrée) et robuste sans voir comment cela affecte les performances. Bien qu'il n'existe évidemment pas un principe de séparation qui rend cette approche «optimale», la procédure de conception est très simple et directe.

II. 4. Exigences de la réalisabilité physique sur le contrôleur IMC

Pour $G_{IMC}(s)$, le contrôleur IMC, afin d'avoir des réponses des variables d'entrée physiquement réalisables, il doit satisfaire les critères suivants:

II. 4. 1. Stabilité

Le contrôleur doit générer des réponses bornées pour des entrées bornées; par conséquent, tous les pôles de $G_{IMC}(s)$ doivent se situer à l'issue de demi-plant gauche.

II. 4. 2. La propreté

Nous savions que la différenciation des entrées indicielle par un contrôleur à retour mène à des changements impulsionnels dans u , qui ne sont pas physiquement réalisable. Afin d'éviter la différenciation pure des signaux, nous devons exigeons que $G_{IMC}(s)$ soit propre.

II. 4. 3. Causalité

$G_{IMC}(s)$ doit être causale, qui signifie que le contrôleur ne doit pas exiger la prédiction, c.-à-d, il doit fonder sur des mesures actuelles et précédentes de processus. Un exemple simple d'une fonction de transfert non causale est l'inverse d'une fonction de transfert a un retard.

$$G_{IMC}(s) = \frac{u(s)}{\sigma(s)} = K_c e^{\theta s} \dots \dots \dots (II. 19)$$

La transformée inverse de (II.19) repose sur des entrées futures pour générer une sortie actuelle; elle est clairement pas réalisable.

$$u(t) = K_c e^{(t+\theta)} \dots \dots \dots (II. 20)$$

II. 5. Procédure de conception de l'IMC

La procédure de conception d'IMC est une approche à deux étapes qui, bien que sous-optimal dans un sens, fournit un compromis raisonnable entre la performance et la robustesse. L'avantage principal de l'approche IMC est la possibilité de spécifier directement les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaires η et ε , qui, (comme il est indiqué précédemment), préciser directement la nature de la réponse en boucle fermée.

La procédure de conception d'IMC se compose de deux étapes principales. La première étape assurera qu'est stable et causal; la deuxième étape, elle exigera d'être propre.

Les étapes de la procédure de conception de l'IMC sont :

II. 5. 1. Étape 1: Factorisation du modèle $G_m(s)$ en deux parties

$$G_m(s) = G_m^+(s) \times G_m^-(s) \dots \dots \dots (II. 21)$$

$G_m^+(s)$ contient tous les éléments non-minimum de phase dans le modèle du processus, qui sont tous des zéros du Demi- Plan Droit (RHP) et des retards. La partie $G_m^-(s)$, entre-temps, est minimum de phase et inversible comme indiqué dans *Défi. 2*, et *Défi. 3*.

Ensuite, un contrôleur IMC défini comme suit:

$$G_{IMC} = Inv[G_m^-(s)] \dots \dots \dots (II. 22)$$

Est stable et causal.

La factorisation de $G_m^+(s)$ à partir de $G_m^-(s)$ dépend de la fonction objectif choisi. Par exemple.

$$G_m^+(s) = e^{-\theta s} \prod_i (-\beta_i s + 1) \quad Re(\beta_i) > 0 \dots \dots \dots (II. 23)$$

Est l'intégrale absolue d'erreur optimale (IAE-optimal) pour une consigne indicielle et des changements de perturbation de sortie. Entretemps, la factorisation:

$$G_m^+(s) = e^{-\theta s} \prod_i \frac{(-\beta_i s + 1)}{(\beta_i s + 1)} \quad Re(\beta_i) > 0 \dots \dots \dots (II. 24)$$

Est l'intégrale quadratique d'erreur optimal (ISE-optimal) pour des perturbatrices indicielle sur l'entrée / sortie, où les β_i^{-1} sont tous les zéros RHP et θ est le temps de retard. En raison de cette factorisation, les pôles correspondant à l'image LHP des zéros RHP ont été ajoutés à la réponse en boucle fermée [18].

II. 5. 2. Étape 2: Amélioration de la robustesse

Pour améliorer la robustesse, les effets de l'incertitude entre le processus et le modèle de processus devrait être réduit au minimum. Puisque les différences entre les processus et le modèle de processus se produit généralement à la fin de la réponse des systèmes en haute fréquence, un filtre $f(s)$ passe-bas est généralement ajouté pour atténuer cet effet [13]. Ainsi, l'IMC est conçu en utilisant l'inverse du modèle de processus en série avec un filtre passe-bas. Augmenter $G_{IMC}(s)$ avec un filtre $f(s)$ de telle sorte que le contrôleur l'IMC final est maintenant,

$$G_{IMC}(s) = Inv[G_m^-(s)] \times f(s) \dots \dots \dots (II. 25)$$

En plus stable et causal, propre. Avec l'inclusion de la fonction de transfert du filtre, la forme finale pour les fonctions de transfert en boucle fermée qui caractérisent le système est:

$$\eta(s) = G_m(s) \times G_{IMC}(s) \times f(s) \dots \dots \dots (II. 26)$$

$$\varepsilon(s) = 1 - G_m(s) \times G_{IMC}(s) \times f(s) \dots \dots \dots (II. 27)$$

L'inclusion de la fonction de transfert d'un filtre dans l'étape 2 signifie que nous obtenons plus "un contrôle optimal", comme impliqué dans l'étape 1. Nous désirons définir des formes de filtres qui ne

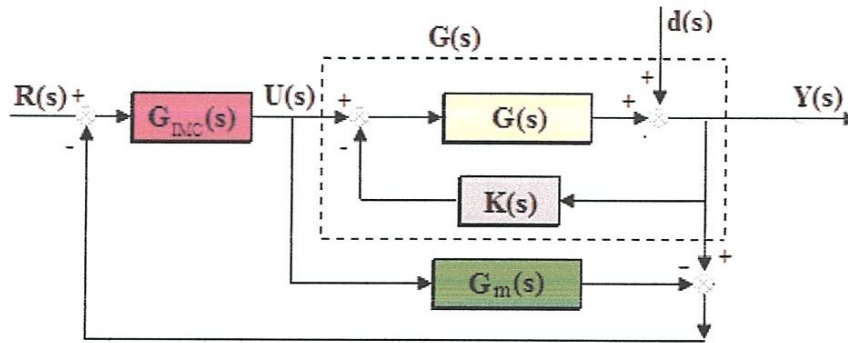


Fig. II. 4. Schéma modifié d'IMC

Ensuite, nous obtenons un système stabilisé $G(s)$. Ainsi, le modèle de référence $G_m(s)$ sera égal à $G(s)$ et le contrôleur IMC sera conçu pour ce nouveau système tel que mentionné dans les sections précédentes de procédures de conception.

II. 7. Modèle de référence

Le modèle de référence noté P_r est introduit au niveau de la consigne (Fig. II. 11.). Il permet de spécifier le comportement dynamique que l'on désire obtenir à la sortie du procédé ceci en vue d'adoucir la commande et de l'adapter au mieux à la dynamique du procédé.

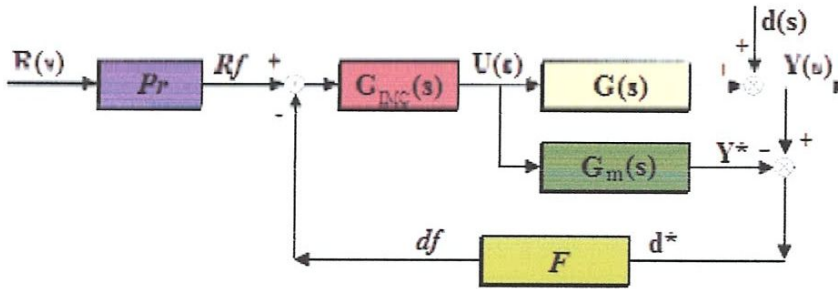


Fig. II. 5. Structure IMC avec filtre de robustesse et modèle de référence

L'asservissement de la sortie du procédé se fera en considérant, non pas la consigne, mais la consigne filtrée. Il est à noter que l'écart filtré intervient aussi dans le calcul de la commande.

II. 8. Conclusion

La philosophie de commande à modèle interne (IMC) repose sur le principe du modèle interne, qui stipule que le contrôle peut être réalisé que si le système de commande encapsule, implicitement ou explicitement, une certaine représentation du processus à contrôler. En particulier si le système de contrôle a été développé sur la base d'un modèle exact du processus, alors le contrôle parfait est théoriquement possible.

Une nouvelle approche de conception de la commande IMC a été étudiée dans ce mémoire. La méthode de conception étudiée basée sur la modification de l'ancienne structure générale de l'IMC et a obtenu une nouvelle avec conservation du même concept général d'utiliser la version inversible du système dans la conception du contrôleur. La nouvelle approche combine la structure d'IMC et la structure classique d'un problème de commande, ce qui démontre une excellente performance et le comportement contre les entrées de perturbation différentes et l'incertitude du modèle présenté dans l'incertain modèle.

Un aperçu de la théorie d'IMC, la révolution de sa structure à côté des limites et des obstacles qui empêchent le contrôle parfait, les procédures de conception pour obtenir la meilleure réponse ont été répertoriés et développés en détail.

L'IMC modifiée représente une nouvelle procédure de conception pour traiter les systèmes instables et les systèmes à retard.

BIBLIOGRAPHIES

-
- [01] M. Morari, E. Zafiriou, "Robust Process Control", Ed. Prentice Hall, Engelwood cliffs, N. J, 1989.
-
- [02] C. E. Garcia, M. Morari, "Internal Model Control. 1. A Unifying Review and Some Results", Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., Vol. 21, pp. 308-323, 1982.
-
- [03] C. E. Garcia, Morari M., "Internal Model Control. 2. Design Procedure for Multivariable Systems", Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., No. 24, pp. 472- 484, 1985.
-
- [04] L. Saidi, "Commande à modèle interne : Inversion et équivalence structurelle", Thèse de doctorat, Université de Savoie, 1996.
-
- [05] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella, I. Zambettakis, "Commandes et optimisation des processus", Méthodes et techniques de l'ingénieur, collection dirigée par P. Borne, Série Automatique, Editions Technip, 2000.
-
- [06] P. M. Francis, W. M. Wonham, "The internal model principle of control theory". Automatica, Vol°12. pp. 457-468, 1976.
-
- [07] K. Watanabe, E. Muramatsu, "Error-Independent Stabilization of Internal Model Control", SICE Annual Conference in Fukui University, Japan, August 4-6, 2003.
-
- [08] K. Yamada, "Modified Internal Model Control for unstable systems", Proceedings of the 7th Mediterranean conference and automation (MED99) Haifa, Israel-june 28-30-1999.
-
- [09] I. Saidi, Z. Dibi, M. Mokhtari, "Elaboration d'une méthode d'inversion de modèles dans l'espace d'état", Proc. of la première conférence internationale sur les systèmes électroniques, pp.1-4, Batna, Algérie, 2005.
-
- [10] L. Saidi, M. Litim, "New inversion method for IMC controller design", article soumis à Automatica.
-
- [11] Coleman Brosilow, Babu Joseph, "*Techniques of Model-Based Control*", 2002.
-
- [12] I. L. Chien and Fruehauf, "*Consider IMC tuning to improve controller performance*", Chem. Eng. Prog., Vol. 86, No. 10, pp. 33, 1990.
-
- [13] Brosilow, C.B., "*The structure and design of Smith predictors from the viewpoint of inferential control*", 1979.
-
- [14] Brosilow, "Personal Communication", Case Western Reserve University, Cleveland, OH, 1983.
-
- [15] Daniel Rivera, Manfred Morari and Sigurd Skogestad, "*Internal Model Control*", 1986.
-
- [16] Ricardo S. Sanchez-Pena, & Mario Sznaiier, "*Robust Systems Theory and Applications*", John Wiley & Sons, Inc., Canada, 1998.
-
- [17] Muing, T Tham, "*Internal Model Control (Introduction to Robust Control)*".
-
- [18] Holt, B. R., Morari, M. Chem. Eng. Sci. in press, 1985.
-
- [19]

CHAPITRE III

CONCEPTION D'UN CONTRÔLEUR FRACTIONNAIRE

À

BASE D'IMC

CHAPITRE III

CONCEPTION D'UN CONTRÔLEUR FRACTIONNAIRE À BASE D'IMC

III. 1. 1. Introduction

La commande à modèle interne (IMC) a gagné l'acceptation répandue dans la communauté de commande, principalement en raison de la simplicité dans la conception qui est basée sur l'inversion du modèle de processus. Dans ce chapitre nous allons présenter d'une manière générale les procédures de conception d'un contrôleur d'ordre fractionnaire à base de cette approche. L'une des raisons d'utiliser la structure IMC comme une méthode de réglage de commande est de bénéficier de ses propriétés déjà étudiée dans le chapitre précédent afin d'augmenter la robustesse et la performance des systèmes de commande. Le choix de contrôleur d'ordre fractionnaire est basé sur leur potentiel pour améliorer les performances de contrôle, en raison de variables de réglage supplémentaires impliquées.

En premier temps de ce chapitre, nous étudions les modèles des systèmes à commander les plus rencontrés dans la littérature. Enfin, nous présentons un exemple d'application avec simulation d'un système de commande d'un servomoteur afin de déterminer un contrôleur adapté au système du servomoteur, les résultats sont comparés par ceux de la structure IMC des contrôleurs d'ordre entier.

la boucle ouverte $G_{OL}(s) = G(s) \times C(s)$ est identique au modèle de référence en boucle ouverte $L(s)$, c'est le principe de CRONE [03, 04] le principe qu'est l'objectif de toutes les méthodes de réglage des contrôleurs fractionnaires dans le domaine fréquentiel.

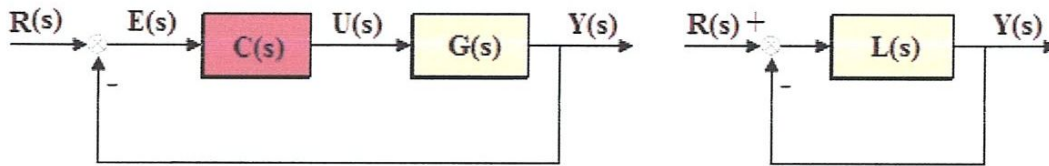
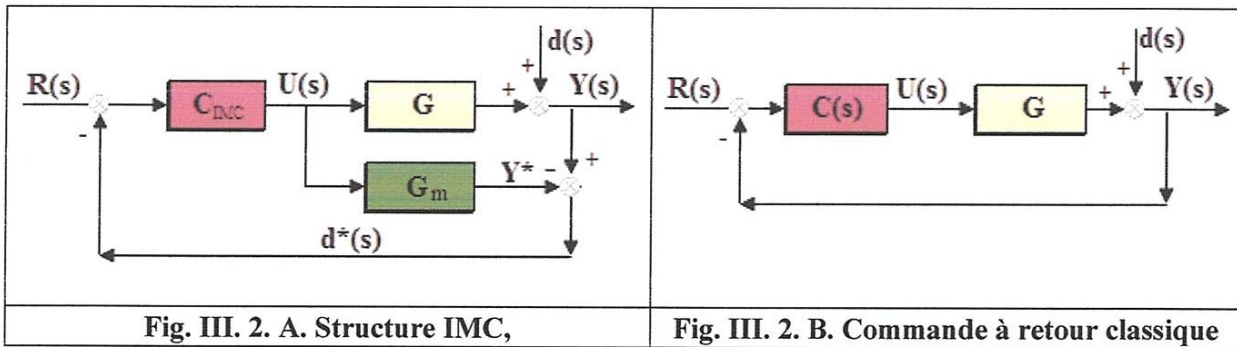


Fig. III. 1. Système de commande à un retour unitaire simple

III. 1. 3. Commande à modèle interne (IMC) vs la structure en boucle fermée classique

Comme elle est présentée dans le chapitre deux, l'IMC c'est une méthode de conception basée sur un modèle de processus à commander. La méthode IMC, comme la méthode de synthèse directe habituellement utilisée dans la commande à retour classique, est basée sur des modèles de processus et conduit à des expressions analytiques pour les paramètres du contrôleur. Ces deux méthodes de conception sont plus proche liées et produisent des contrôleurs identiques si les paramètres de conception sont spécifiés de manière cohérente, pour plusieurs modèles. Toutefois, l'approche IMC a l'avantage de permettre de rejeter l'incertitude modèle/processus et des compromis entre la performance et la robustesse à considérer d'une manière plus systématique.

La structure IMC est présentée dans la figure (Fig. III. 2. A) et le contrôleur à retour classique est présenté à la figure (Fig. III. 2. B).



Les deux blocks sont identiques si :

$$C(s) = \frac{C_{IMC}(s)}{1 - C_{IMC}(s) \times G_m(s)} \dots \dots \dots (III.04)$$

Ainsi, tout contrôleur IMC $C_{IMC}(s)$ est équivalent à un contrôleur $C(s)$ standard à retour, et vice-versa. À partir de schéma block d'IMC et avec l'équation (III.04) on peut écrire:

$$Y(s) = \frac{C_{IMC} \times G}{1 + C_{IMC} \times [G - G_m]} R(s) + \frac{1 - C_{IMC} \times G_m}{1 - C_{IMC} \times [G - G_m]} d(s) \dots \dots \dots (III.05)$$

Pour un modèle parfait $C_{IMC}(s) = G(s)$:

$$Y(s) = C_{IMC}(s) \times G(s) \times R(s) + [1 - C_{IMC}(s) \times G_m(s)] \times d(s) \dots \dots \dots (III. 06)$$

Le contrôleur IMC est conçu dans deux étapes:

Étape 1: Le modèle de processus est factorisé comme:

$$G_m(s) = G_m^+(s) \times G_m^-(s) \dots \dots \dots (III. 07)$$

$G_m^+(s)$ contient tous les éléments non-minimum de phase dans le modèle du processus, qui sont tous des zéros du Demi- Plan Droit (RHP) et des retards. La partie $G_m^-(s)$, contient tous les éléments minimum de phase et inversible. $G_m^+(s)$ doit avoir un gain en régime permanent égal à un.

Étape 2: Le contrôleur est spécifié par:

$$C_{IMC}(s) = \frac{1}{G_m^-(s)} \times f(s) \dots \dots \dots (III. 08)$$

Où $f(s)$ est un filtre passe bas avec un gain en régime permanent égal à un. Il a typiquement la forme [09] :

$$f(s) = \frac{1}{(1 + \tau_c s)^n} \dots \dots \dots (III. 09)$$

Analogiquement avec la méthode de synthèse directe, le τ_c est la constante de temps désirée en boucle fermée. Le paramètre n est un nombre entier positif choisi de sorte que le contrôleur $C(s)$ soit réalisable. Le choix habituel est $n = 1$.

III. 1. 4. Les procédures de conception

Considérons $G_m(s)$ modèle d'un système LIT d'ordre entier.

1. Suivant les procédures de conception des contrôleurs IMC $G_m(s)$ factorisé en

$$G_m(s) = G_m^+(s) \times G_m^-(s) \dots \dots \dots (III. 10)$$

$G_m^-(s)$ est la partie non singulière de $G_m(s)$ et $G_m^+(s)$ est la partie singulière. $G_m^+(s)$ contient tous les termes retards et les zéros du Demi- Plan Droit (RHP) de $G_m(s)$, son gain en régime permanent doit être égal à un. Ainsi, le gain en régime permanent de $G_m(s)$ restera dans $G_m^-(s)$ qui est utilisé pour concevoir le contrôleur IMC.

2. La propriété fractionnaire du contrôleur est introduite par le modèle de référence fractionnaire $f(s)$. Pour obtenir la propriété d'iso-amortissement décrit dans la section (III. 3), $f(s)$ est donnée par:

$$f(s) = \frac{1}{1 + \tau_c s^{\alpha+1}} \quad 0 < \alpha < 1 \dots \dots \dots \text{(III. 11)}$$

La constante de temps, τ_c et nombre non entier α sont choisis pour imposer la marge de phase ϕ_m et la fréquence de coupure ω_c de la boucle fermée.

$$\alpha = \frac{\pi - \phi_m}{\pi/2} - 1 \quad \text{et} \quad \tau_c = \frac{1}{\omega_c^{\alpha+1}} \dots \dots \dots \text{(III. 12)}$$

3. Le contrôleur IMC est calculé par:

$$G_{IMC}(s) = \frac{1}{G_m(s)} \times f(s) \dots \dots \dots \text{(III. 13)}$$

4. Le contrôleur C(s) en retour classique est alors:

$$C(s) = \frac{G_{IMC}(s)}{1 - G_{IMC}(s) \times G_m(s)} \dots \dots \dots \text{(III. 14)}$$

5. Comme nous allons le montrer dans la section suivante le contrôleur C(s) peut être mis sous la forme d'une structure PID d'ordre entier en cascade avec un filtre fractionnaire H(s).

$$C(s) = H(s) \times k_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right) \dots \dots \dots \text{(III. 15)}$$

III. 1. 5. Conception d'un contrôleur à des actions PID avec un filtre fractionnaire à base d'IMC

L'objectif de conception est de commander un système en boucle ouverte d'ordre entier avec des spécifications de la boucle fermée ayant des caractéristiques fractionnaires données par (III.11). L'idée est d'avoir le contrôleur avec une structure des actions PID d'ordre entier comme le système en boucle ouverte est d'ordre entier, en cascade avec un filtre fractionnaire pour répondre à des spécifications fractionnaires en boucle fermée.

La structure générale des contrôleurs PID est donnée par:

$$C(s) = \underbrace{H(s)}_{\text{Filtre fractionnaire}} \times \underbrace{k_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right)}_{\text{PID d'ordre entier}} \dots \dots \dots \text{(III. 16)}$$

k_p est le gain, τ_i est la constante de temps de l'action intégrale, τ_d est la constante de temps de l'action dérivée et $H(s)$ est la partie fractionnaire du contrôleur.

Nous présentons dans ce qui suit comment obtenir la forme de $C(s)$ pour les modèles souvent rencontrés dans la littérature.

Considérons le système sans retard suivant:

$$G_m(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \dots \dots \dots \text{(III. 17)}$$

Supposons que ni $N(s)$ ou $D(s)$ n'ont des racines dans le demi-plan droite du plan complexe. En outre, $G_m(s)$ est supposé strictement propre. Dans ce cas, en utilisant l'équation (III.8), le contrôleur IMC est donnée par:

$$G_{IMC}(s) = \frac{D(s)}{N(s)} \frac{1}{1 + \tau_c s^{\alpha+1}} \dots \dots \dots \text{(III. 18)}$$

et le contrôleur $C(s)$ classique est alors donnée par:

$$C(s) = \frac{D(s)}{N(s) \times \tau_c s^{\alpha+1}} = \frac{1}{s^\alpha} \times \frac{D(s)}{\tau_c s \times N(s)} \dots \dots \dots \text{(III. 19)}$$

Notons que $C(s)$ est composé de deux fonctions de transfert: un intégrateur fractionnaire $1/s^\alpha$ (qui caractérise l'aspect fractionnaire du contrôleur) et la partie d'ordre entier $[D(s)/\tau_c s \times N(s)]$ qui peut être factorisée sous la forme de contrôleur PID d'ordre entier. Dans ce qui suit, quatre exemples sont étudiés. Dans chaque cas, on montre que $C(s)$ peut être mis sous la forme générale donnée par l'équation (III.16).

III. 1. 5. 1. Modèle sans retard

Considérons un processus décrit par un modèle du deuxième ordre suivant:

$$G_m(s) = \frac{K}{Ts^2 + 2\xi Ts + 1} \dots \dots \dots \text{(III. 20)}$$

Le modèle de référence en boucle fermée est celui de l'équation (III.11). Le contrôleur IMC est alors:

$$G_m(s) = \frac{Ts^2 + 2\xi Ts + 1}{K} \times \frac{1}{1 + \tau_c s^{\alpha+1}} \dots \dots \dots \text{(III. 21)}$$

Le contrôleur à retour équivalent est :

$$C(s) = \frac{1}{s^\alpha} \frac{Ts^2 + 2\xi Ts + 1}{K\tau_c s} \dots \dots \dots \text{(III. 22)}$$

Ce qui peut être écrit comme suit:

$$C(s) = \frac{1}{s^\alpha} \frac{2T\xi}{K\tau_c} \left(1 + \frac{1}{2T\xi s} + \frac{1}{2\xi^2 s^2} \right) \dots \dots \dots \text{(III. 23)}$$

C(s) est alors de forme du PID classique d'ordre entier en cascade avec un intégrateur fractionnaire 1/s^α.

III. 1. 5. 2. Modèle non minimum de phase

Considérons un processus décrit par un modèle non minimum de phase sans retard suivant:

$$G_m(s) = \frac{K(1 - Bs)}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)} \quad B > 0 \dots \dots \dots \text{(III. 24)}$$

Suivant l'équation (III.7), G_m(s) est factorisée en:

$$G_m(s) = \frac{K}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)} (1 - Bs) \dots \dots \dots \text{(III. 25)}$$

Le modèle de référence, dans ce cas, est également donné par l'équation (III.9). Ainsi, selon (III.8), le contrôleur IMC est:

$$G_{IMC}(s) = \frac{(1 + T_1s)(1 + T_2s)}{K} \times \frac{1}{1 + \tau_c s^{\alpha+1}} \dots \dots \dots \text{(III. 26)}$$

Le contrôleur équivalent en retour classique est alors donné par:

$$C(s) = \frac{(1 + T_1s)(1 + T_2s)}{K(\tau_c s^{\alpha+1} + Bs)} = \frac{1 + (T_1+T_2)s + (T_1T_2)s^2}{KBs(1 + \frac{\tau_c}{B}s^\alpha)} \dots \dots \dots \text{(III. 27)}$$

Ce qui peut s'écrire comme:

$$C(s) = \frac{1}{1 + \frac{\tau_c}{B}s^\alpha} \frac{(T_1+T_2)}{KB} \left(1 + \frac{1}{(T_1+T_2)s} + \frac{T_1 \cdot T_2}{(T_1+T_2)^2} s \right) \dots \dots \dots \text{(III. 28)}$$

Dans ce cas C(s) également, est un contrôleur PID d'ordre entier en cascade avec un filtre fractionnaire 1/(1 + τ_c/B s^α).

III. 1. 5. 3. Modèle de premier ordre en cascade avec un intégrateur

Considérons un processus décrit par:

$$G_m(s) = \frac{K}{s(1 + Ts)} \dots \dots \dots (III. 29)$$

Selon l'équation (III.8), le contrôleur IMC est donné par:

$$G_{IMC}(s) = \frac{s(1 + Ts)}{K} \times \frac{1}{1 + \tau_c s^{\alpha+1}} \dots \dots \dots (III. 30)$$

Le contrôleur équivalent en retour classique est alors donné par:

$$C(s) = \frac{(1 + Ts)s}{K(1 + \tau_c s^{\alpha+1})} \dots \dots \dots (III. 31)$$

Qui peut s'écrire comme:

$$C(s) = \frac{1}{s^\alpha} \frac{1}{K\tau_c} (1 + Ts) \dots \dots \dots (III. 32)$$

Dans ce cas, le contrôleur C(s) est un PD classique en cascade avec un intégrateur fractionnaire 1/s^α.

III. 1. 5. 4. Modèle de premier ordre avec un retard

Dans ce dernier cas, nous considérons le modèle le plus rencontré dans l'industrie, représenté par la fonction de transfert suivante, où (θ/T) est petit.

$$G_m(s) = \frac{K e^{-\theta s}}{(1 + Ts)} \dots \dots \dots (III. 33)$$

III. 1. 5. 4. 1. En utilisant l'approximation du Padé:

Le terme retard est approximé par l'approximation en premier ordre du Padé:

$$e^{-\theta s} = \frac{1 - \frac{\theta}{2}s}{1 + \frac{\theta}{2}s} \dots \dots \dots (III. 34)$$

En remplaçant l'approximation du temps de retard dans G_m(s) et en utilisant équation (III.8), le contrôleur IMC est:

$$G_m(s) = \frac{(1 + Ts) \left(1 + \frac{\theta}{2}s\right)}{K} \times \frac{1}{1 + \tau_c s^{\alpha+1}} \dots \dots \dots (III. 35)$$

Le contrôleur équivalent en retour classique est alors donné par:

$$C(s) = \frac{(1 + Ts) \left(1 + \frac{\theta}{2}s\right)}{K \left(\tau_c s^{\alpha+1} + \frac{\theta}{2}s\right)} = \frac{1 + \frac{2T + \theta}{2}s + \frac{T\theta}{2}s^2}{\frac{KB}{2}s \left(1 + \frac{2\tau_c}{\theta}s^\alpha\right)} \dots \dots \dots (III.36)$$

Qui peut s'écrire comme:

$$C(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\tau_c}{\theta}s^\alpha} \frac{2T + \theta}{K\theta} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{2T + \theta}{2}\right)s} + \left(\frac{T\theta}{2T + \theta}\right)s\right) \dots \dots \dots (III.37)$$

Encore une fois, C(s) est un contrôleur PID entier en cascade avec un filtre fractionnaire $1/(1 + (\sqrt{i} 2T/\theta)s^\alpha)$.

III. 1. 5. 4. 2. Séries de Taylor d'ordre un du terme $e^{-\theta s}$

Par l'utilisation de l'approximation en séries d'ordre un de Taylor le terme $e^{-\theta s}$ est approximé par:

$$e^{-\theta s} = 1 - \theta s \dots \dots \dots (III.38)$$

Les réponses indicielles d'un système de premier ordre avec retard et son approximation sont similaire pour petites valeurs de (θ/T) . La substitution de l'approximation du retard dans le modèle $G_m(s)$ et en utilisant l'équation (III.8), le contrôleur IMC est:

$$G_{IMC}(s) = \frac{(1 + Ts)}{K(1 + \tau_c s^{\alpha+1})} \dots \dots \dots (III.39)$$

Le contrôleur équivalent en retour classique est alors donné par:

$$C(s) = \frac{(1 + Ts)}{K(\tau_c s^{\alpha+1} + \theta s)} = \frac{(1 + Ts)}{K\theta s \left(1 + \frac{\tau_c}{\theta}s^\alpha\right)} \dots \dots \dots (III.40)$$

Qui peut s'écrire comme:

$$C(s) = \frac{1}{1 + \frac{\tau_c}{\theta}s^\alpha} \frac{T}{K\theta} \left(1 + \frac{1}{Ts}\right) \dots \dots \dots (III.41)$$

C(s) est alors un contrôleur PI d'ordre entier en cascade avec un filtre fractionnaire $1/(1 + (\tau_c/\theta)s^\alpha)$.

Comme nous avons vu, l'une des avantages principaux de la méthode étudiée est qu'elle n'a aucune restriction à la classe des modèles de processus. Les règles de réglage par la méthode d'IMC pour d'autres modèles de processus plus compliqués tels que l'intégration et les processus inverses avec retard sont également listés dans les annexe 1 et 2 [12].

BIBLIOGRAPHIES

-
- [01] A. Oustaloup. La commande CRONE. Hermès. Paris, 1991.
-
- [02] Bode HW. Network analysis and feedback amplifier design. New York: Van Nostrand;1945.
-
- [03] Yeroglu C, Tan N. Classical controller design techniques for fractional order case. ISA Trans 2011;50:1461–72.
-
- [04] Ozbay H, Bonnet C, Fioravanti AR. PID controller design for fractional-order systems with time delays. Syst Control Lett 2012;61:18–23.
-
- [05] Barbosa RS, Machado JAT, Ferreira IM. Tuning of PID controllers based on Bode's ideal transfer function. Nonlinear Dyn 2004 ; 38 : 305–21.
-
- [06] Morari M, Zafiriou E. Robust process control. Engle wood Cliffs: Prentice-Hall ;1991.
-
- [07] Rivera DE, Morari M, Skogestad S. Internal model control 4. PID controller design. Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev. 1986;25:252–65.
-
- [08] Garcia CE, Morari M. Internal model control I. A unifying review and some new results. Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.1982;21:308–21.
-
- [09] Luo Y, Chen YQ, Wang CY, Pi YG. Tuning fractional order proportional integral controllers for fractional orders systems. In: Proceedings of control and decision conference, 2009. CCDC'09. Chinese ; June 17–19,2009.p.307–12.
-
- [10] Geetanjalee A. Zarkar and Subhash S. Sankeshwari. SIMULATION OF DC SERVO MOTOR POSITION CONTROL USING SLIDING MODE TECHNIQUE. 2015.
-
- [11] Rivera E Daniel, Skogestad, S, Internal Model Control-PID Controller Design. Chemical Engineering, American Institute of Technology.
-
- [12] Maâmar B, Rachid M. IMC-PID-fractional-order-filter controllers design for integer order systems. ISA Transactions (2014),
-
- [13]
-
- [14]
-
- [15]
-

APPLICATION ET SIMULATION

III. 2. 1. Introduction

Afin de valider les développements théoriques établis dans les chapitres précédents, on propose de simuler la partie linéaire d'un modèle pour la simplification, en l'occurrence il s'agit d'un système servomécanisme DC simple de commande de position.

Le servomécanisme est l'une des formes les plus importantes et les plus utilisés dans un système de commande d'asservissement qui contrôle en permanence la position d'un système à asservir. Une machine ou un dispositif qui comporte des pièces rotatives contiendra un ou plusieurs systèmes de commande servomécanisme. La fonction du système de commande peut comprendre:

1. Maintien en permanence de la vitesse d'un moteur dans certaines limites même lorsque la charge sur la sortie du moteur pourrait varier. Ceci est appelé la régulation.
2. Régulation de la vitesse d'un moteur et la charge selon un ensemble des valeurs d'un programme extérieure. Ceci est appelé poursuite de point de consigne (ou référence).

III. 2. 2. Modèle du servomécanisme étudié

Le système de commande à simuler du servomécanisme et schématisé dans la figure suivante:

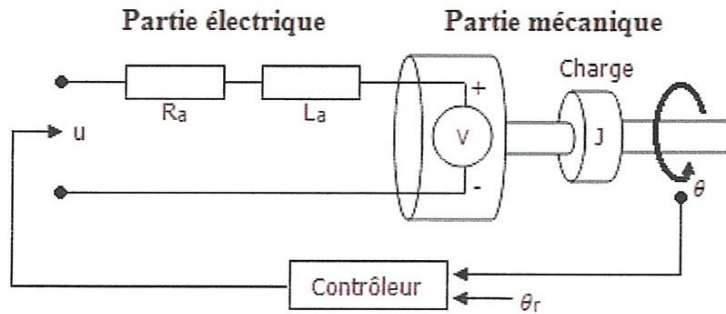


Fig. III. 3. Vu général du servomécanisme à étudier

Par l'application de la deuxième loi de Newton $F = ma$. [10, 11] Pour plus de détails sur les servomécanismes.

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = T(t) \dots \dots \dots (III. 42)$$

θ est la position angulaire de l'arbre du servo, b une constante représente le frottement dans les paliers du moteur et de la charge. La tension d'entrée $u(t)$ est en relation avec le couple $T(t)$ par un gain K . Le modèle de système est réduit comme suivant:

$$\tau\ddot{\theta} = \dot{\theta} + K u(t), \dots \dots \dots (III. 43)$$

Où $\tau = J/b$ et $K = 1/b$. La partie linéaire de modèle de système servomoteur d'asservissement pour cette simulation peut être mise sous la forme de fonction de transfert comme suit :

$$y(s) = \frac{K}{s(\tau s + 6)} u(s), \dots \dots \dots (III. 44)$$

Où $K = 109$, $\tau = 1$, $J = 1/109$ et $b = 1/109$.

Donc la fonction de transfert du système servomécanisme est donnée par:

$$G_m(s) = \frac{109}{s(s + 6)} \dots \dots \dots (III. 45)$$

III. 2. 3. Implémentation et simulation

Maintenant, l'objectif de cette simulation est d'utiliser les principes de mise en implémentation des contrôleurs fractionnaires, suivi par les procédures associées à la conception de la commande à modèle interne étudiés précédemment afin d'assurer le contrôle du processus modélisé ci-dessus.

Il existe plusieurs théories de la conception des contrôles alternatifs qui peuvent être utilisés pour contrôler un servomécanisme. Dans cette simulation, nous allons simulé le processus en utilisant trois méthodes différentes de conception des contrôleurs, un contrôleur IMC classique, un contrôleur d'ordre entier à base d'IMC équivalent à une boucle fermée classique et un contrôleur d'ordre fractionnaire à base d'IMC équivalent à une boucle fermée classique. Ce dernier est un contrôleur d'ordre entier à un filtre d'ordre fractionnaire. La propriété fractionnaire du contrôleur est imposée par le modèle de référence en boucle fermée. Les trois contrôleurs sont conçus à base de la commande à modèle interne IMC.

III. 2. 3. 1. But de la simulation

Le but de cette simulation est d'optimiser un contrôleur en utilisant les trois méthodes mentionnées précédemment, selon les spécifications suivantes:

1. Marge de phase $\phi_m = 70^\circ$,
2. Fréquence de coupure de gain $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$,
3. Robustesse aux variations du gain,
4. Rejet de perturbation.

III. 2. 3. 2. Représentation en schéma block du processus

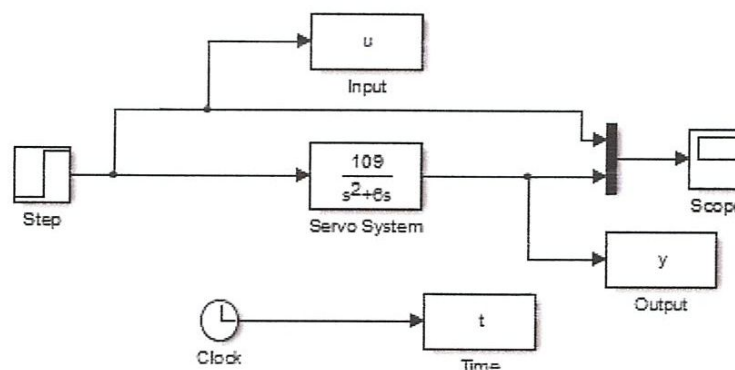


Fig. III. 4. Réponse de la boucle ouvert du servomécanisme

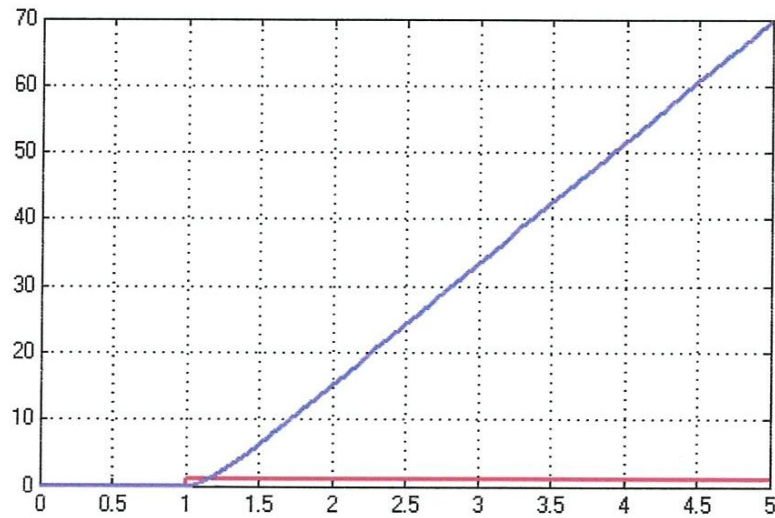


Fig. III. 5. Réponse indicielle en boucle ouvert du servomécanisme

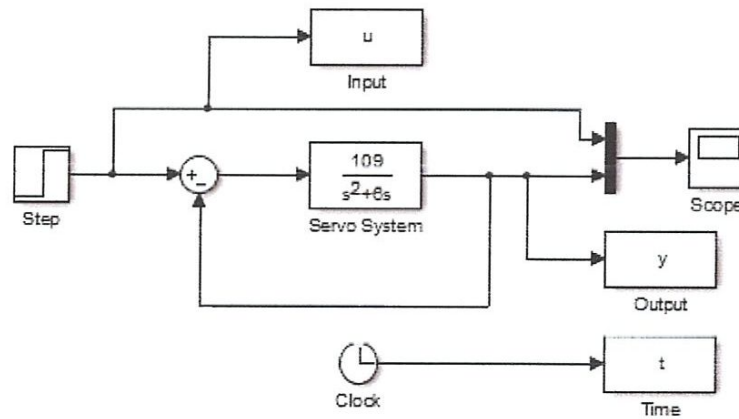


Fig. III. 6. Boucle fermée en retour unitaire du servomécanisme

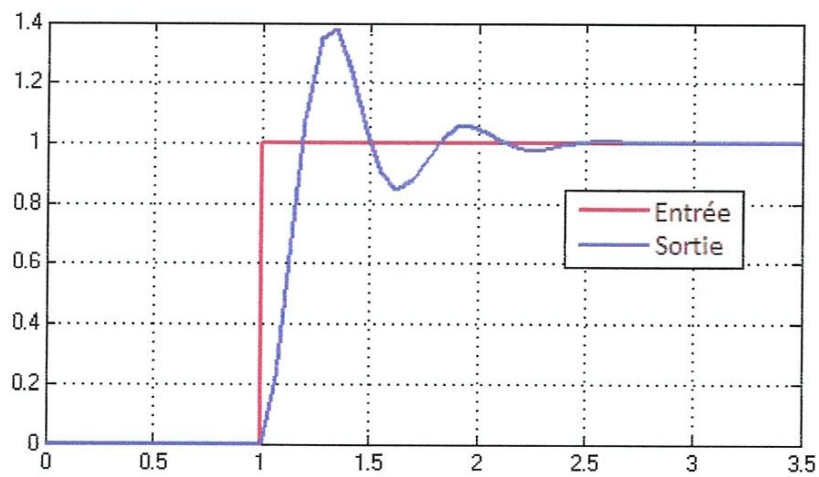


Fig. III. 7. Boucle fermée en retour unitaire du servomécanisme

| | |
|-------------------------------|-------|
| Amplitude du pic | 1.39 |
| Dépassement (%) | 38.9 |
| Temps du pic (s) | 0.307 |
| Temps de montée (s) | 0.125 |
| Valeur finale | 1 |
| Temps en régime permanent (s) | 1.31 |

TAB. III. 1. Paramètres de la boucle fermée en retour unitaire du servomécanisme

III. 2. 4. Conception des trois contrôleurs pour le servomoteur

III. 2. 4. 1. Conception de contrôleur IMC pour le servomoteur

Modèle du servo:

$$G_m(s) = \frac{109}{(s^2 + 6s)}$$

Donc par l'application des procédures d'IMC on peut écrire

$$\hat{G}_m(s) = G_m^+(s) \times G_m^-(s) = 1 \times \frac{109}{(s^2 + 6s)}$$

$$C_{IMC}(s) = Inv[G_m^-(s)] \times f(s) = \frac{(s^2 + 6s)}{109} \times \frac{1}{(\lambda.s + 1)^n}$$

$$n = 2 \rightarrow f(s) = \frac{1}{(\lambda.s + 1)^2}$$

Enfin, le contrôleur IMC est donnée par:

$$C_{IMC}(s) = \frac{(s^2 + 6s)}{(109\lambda^2 s^2 + 218\lambda s + 109)}$$

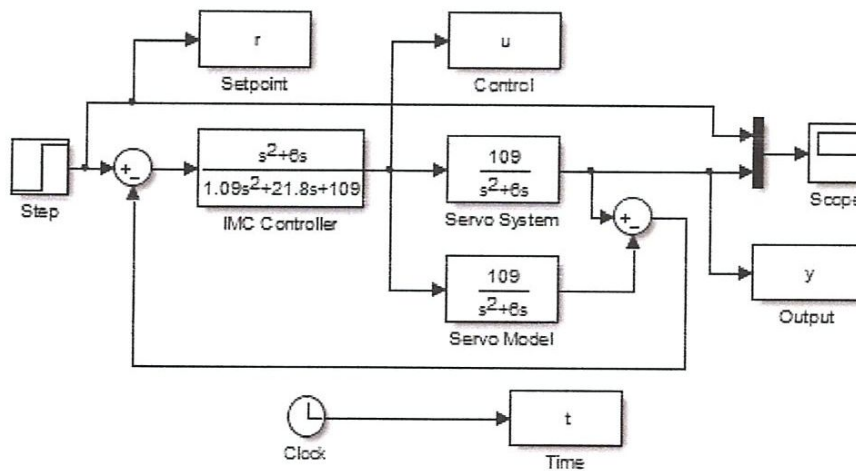


Fig. III. 8. Conception IMC en schéma block du servomécanisme

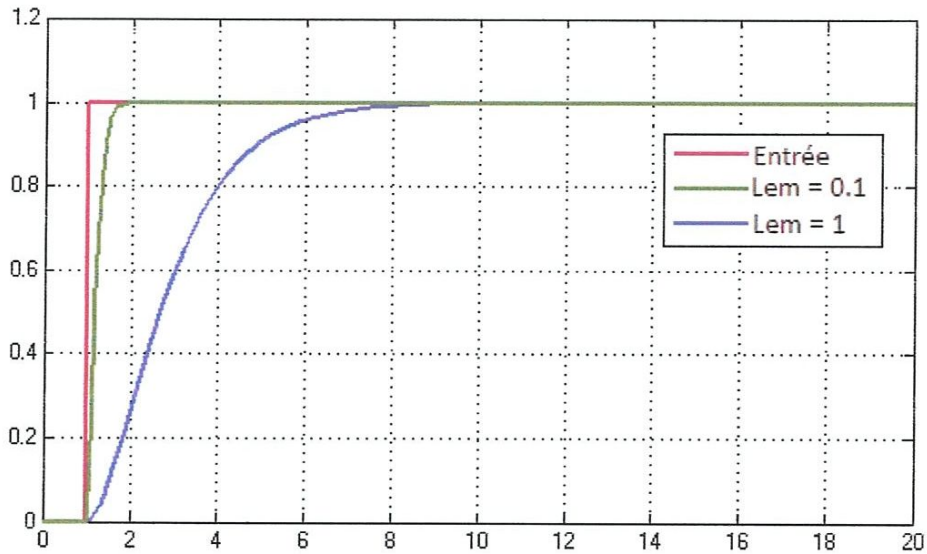


Fig. III. 9. Réponse indicielle du servomécanisme par IMC (paramètre du filtre $\lambda = 1$ et $\lambda = 0.1$)

III. 2. 4. 2. Conception de contrôleur d'ordre entier à base d'IMC équivalent au retour classique

Modèle du servo:

$$G_m(s) = \frac{109}{(s^2 + 6s)} = \frac{109/6}{s(\frac{1}{6}s + 1)} = \frac{k}{s(\tau s + 1)}$$

Donc par l'application des procédures d'IMC on peut écrire

$$G_m(s) = G_m^+(s) \times G_m^-(s) = 1 \times \frac{109}{(s^2 + 6s)}$$

$$C_{IMC}(s) = Inv[G_m^-(s)] \times f(s) = \frac{(s^2 + 6s)}{109} \times \frac{1}{(\lambda \cdot s + 1)^n}$$

$$n = 2 \rightarrow f(s) = \frac{1}{(\lambda \cdot s + 1)^2}$$

Le contrôleur IMC est donnée par:

$$C_{IMC}(s) = \frac{(s^2 + 6s)}{(109\lambda^2 s^2 + 218\lambda s + 109)}$$

Trouver le contrôleur en retour classique par la transformation

$$C(s) = \frac{C_{IMC}(s)}{1 - G_m(s) \times C_{IMC}(s)} = \frac{\frac{(s^2 + 6s)}{(109\lambda^2 s^2 + 218\lambda s + 109)}}{1 - \frac{109}{(s^2 + 6s)} \times \frac{(s^2 + 6s)}{(109\lambda^2 s^2 + 218\lambda s + 109)}} = \frac{s + 6}{218\lambda(\frac{\lambda}{2}s + 1)}$$

Le contrôleur résultant est un PD avec les paramètres ci-dessous.

| Paramètres | | k_p | τ_i | τ_d |
|--------------|------------------|--------|----------|----------|
| $k = 109/6$ | $\lambda = 0.5$ | 0.2569 | - | 0.1429 |
| $\tau = 1/6$ | $\lambda = 0.09$ | 2.3559 | - | 0.0865 |

TAB. III. 2. Paramètres du PD résultant

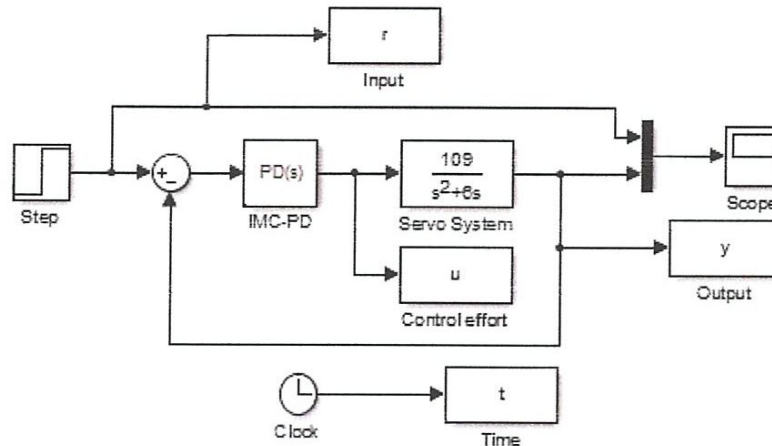


Fig. III. 10. Conception du PD à base d'IMC en schéma block du servomécanisme

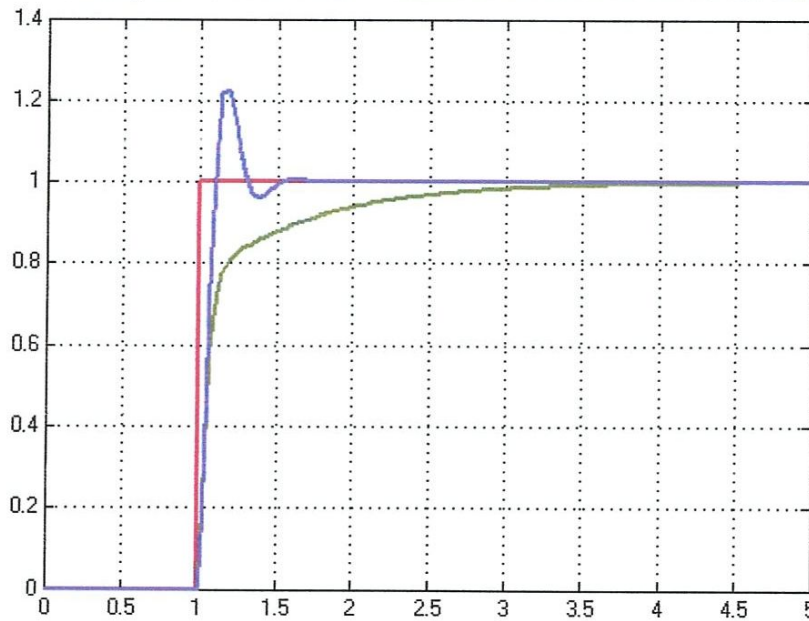


Fig. III. 11. Réponse indicielle du servomécanisme par PD à base d'IMC

III. 2. 4. 3. Conception du contrôleur d'ordre fractionnaire pour le servomoteur

Modèle du servo:

$$G_m(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{109}{s(s+6)} = \frac{109/6}{s(\frac{1}{6}s+1)} = \frac{K}{s(Ts+1)}$$

$$K = 109/6, T = 1/6.$$

Pour répondre aux exigences de cet exemple de simulation, on applique la structure étudiée contrôleur d'ordre fractionnaire (sa propriété fractionnaire est imposée par le modèle de référence en boucle fermée).

Suivant les procédures de conception nous pouvons écrire:

Étape 1 : Trouver la structure IMC:

Donc par l'application des procédures d'IMC on a:

$$G_m(s) = G_m^1(s) \times G_m(s) = 1 \times \frac{109}{(s^2 + 6s)}$$

$$C_{IMC}(s) = Inv[G_m^1(s)] \times f(s) = \frac{(s^2 + 6s)}{109} \times \frac{1}{(\lambda \cdot s + 1)^n}$$

$$n = 1 \rightarrow f(s) = \frac{1}{(\tau_c \cdot s + 1)} \quad \tau_c: \text{constante de temps.}$$

La fonction de transfert est équivalente au modèle de l'équation (III.29).

Donc par l'équation (III.30) le contrôleur IMC est donnée par:

$$C_{IMC}(s) = \frac{s(1 + \frac{1}{6}s)}{\frac{109}{6}(1 + \tau_c s^{\alpha+1})}$$

Étape 2 : Trouver le contrôleur équivalent en retour classique:

Suivant l'équation (III.31) le contrôleur équivalent est: en cascade avec un filtre fractionnaire

$$C(s) = \frac{1}{s^\alpha} \frac{1}{\frac{109}{6} \tau_c} (1 + \frac{1}{6}s)$$

$$C(s) = \frac{1}{s^\alpha} \frac{1}{18.17\tau_c} (1 + 0.17s)$$

Donc $C(s)$ est de la forme d'un contrôleur PD classique d'ordre entier en cascade avec un filtre fractionnaire $1/s^\alpha$.

Avec:

$$\alpha = \frac{\pi - \varphi_m}{\pi/2} - 1 = \frac{180 - 70}{90} - 1 = 0.2222 \text{ et } \tau_c = \frac{1}{\omega_c^{\alpha+1}} = 16.68$$

Donc finalement le contrôleur est:

$$C(s) = \frac{1}{s^{0.2222}} \frac{1}{303.08} (1 + 0.17s)$$

La figure ci-après représente la réponse indicielle du servomécanisme par PD à filtre fractionnaire à base d'IMC avec variation de marge de phase ϕ_m , et de fréquence de coupure de gain ω_c .

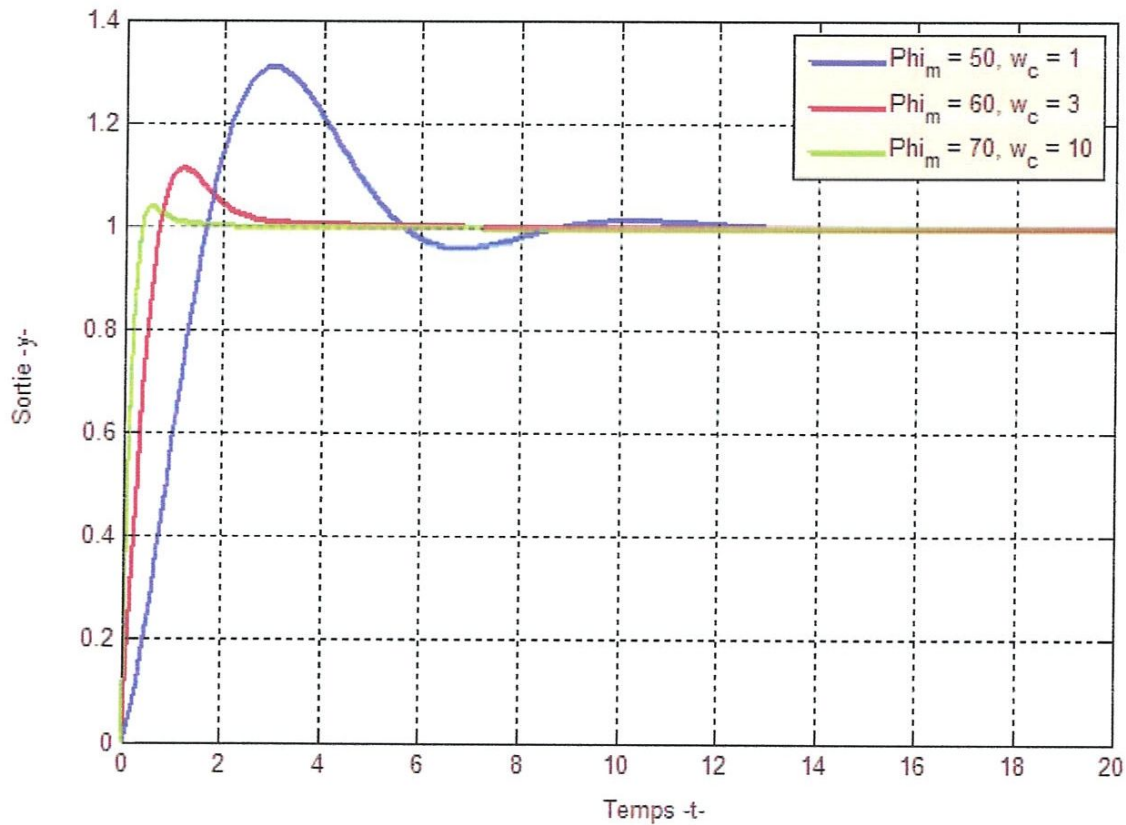


Fig. III. 12. Réponse indicielle du servomécanisme par PD à filtre fractionnaire à base d'IMC

La figure ci-après représente le diagramme de Bode de la boucle ouverte du système.

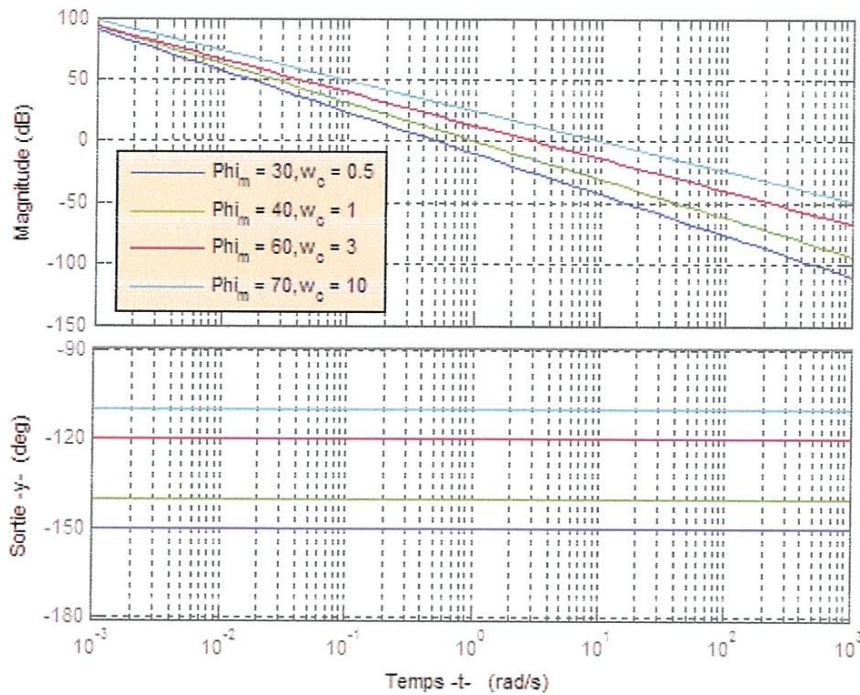


Fig. III. 13. Diagramme de Bode de la boucle ouverte du système

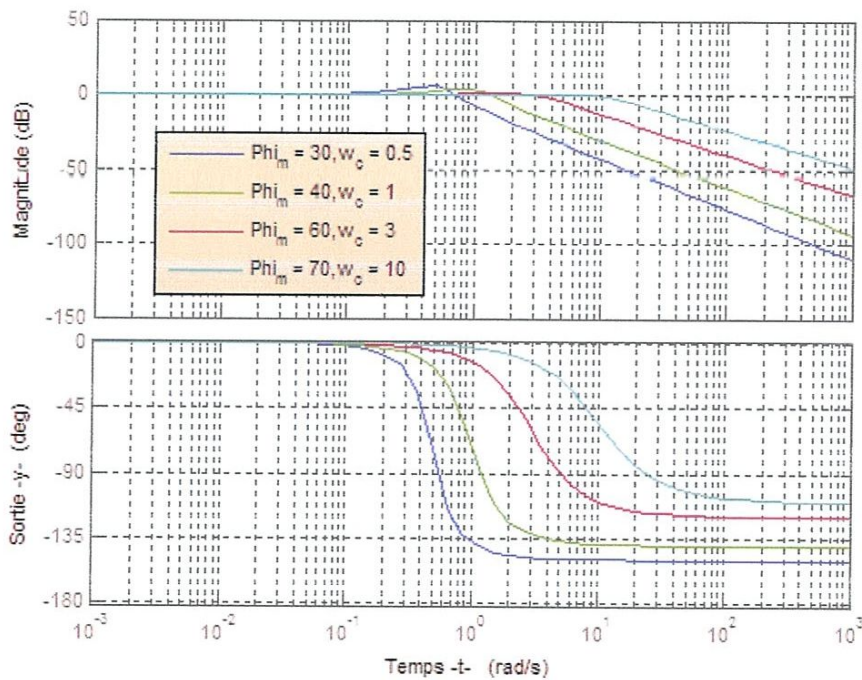


Fig. III. 14. Diagramme de Bode de la boucle fermée du système

La figure ci-après représente la réponse indicielle du servomécanisme par PD à filtre fractionnaire à base d'IMC avec variation de la constante de temps T .

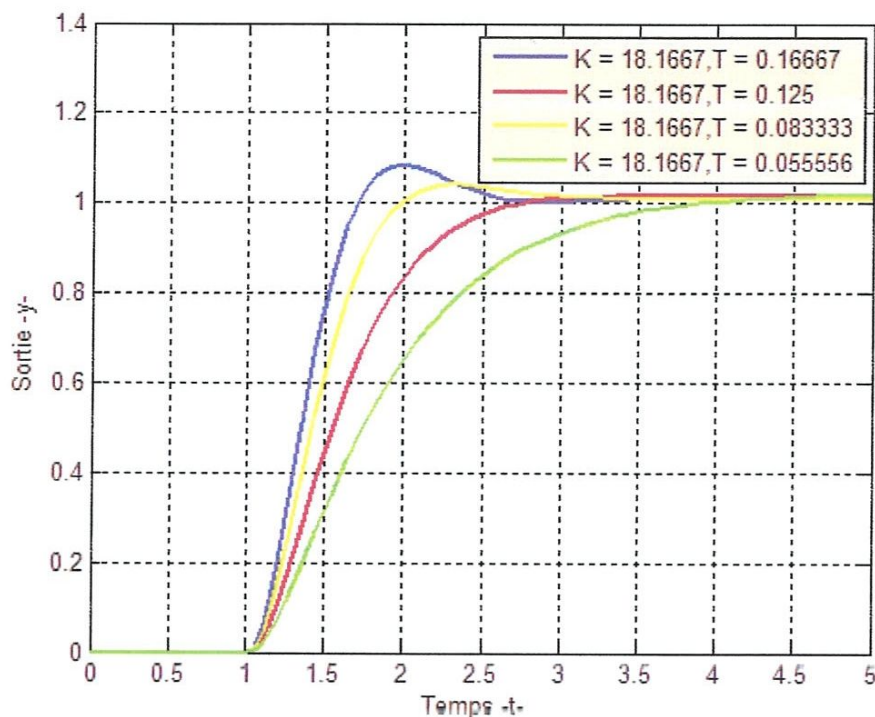


Fig. III. 15. Réponse indicielle pour ($K=109/6$; $T=0.16667$; $T=0.125$; $T=0.083333$; $T=0.055556$)

La figure ci-après représente la réponse indicielle du servomécanisme par PD à filtre fractionnaire à base d'IMC avec variation du gain K .

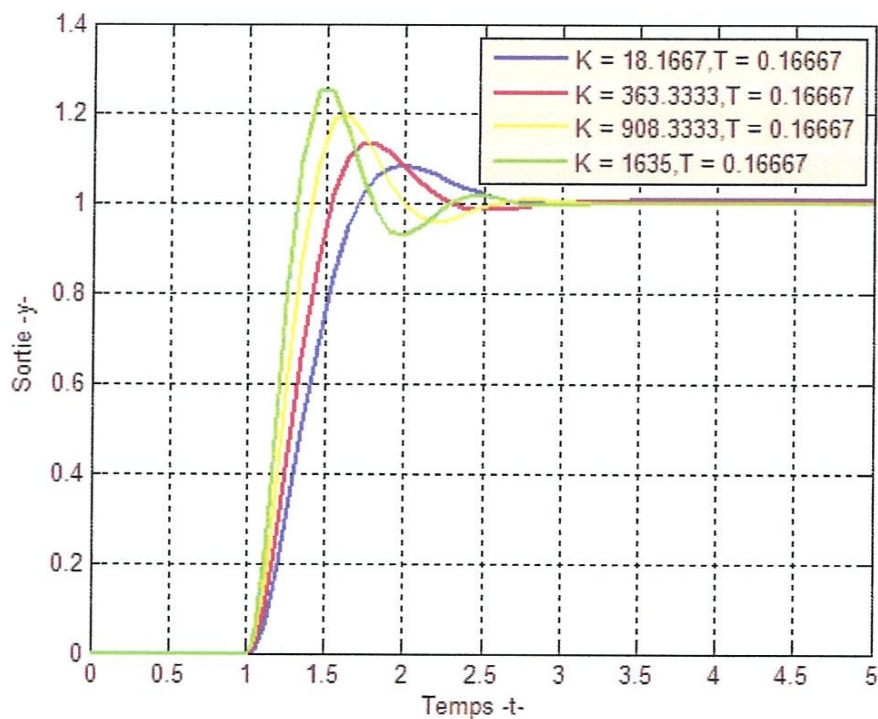


Fig. III. 16. Réponse indicielle pour ($T=1/6$; $K=18.1667$; $K=363.3333$; $K=908.3333$; $K=1635$)

Les deux figures ci-après représentent la réponse indicielle du servomécanisme par PD à filtre fractionnaire à base d'IMC avec incertitude de modèle (Variation de 5% sur la constante de temps T et puis une augmentation de 1.5 fois du gain K respectivement).

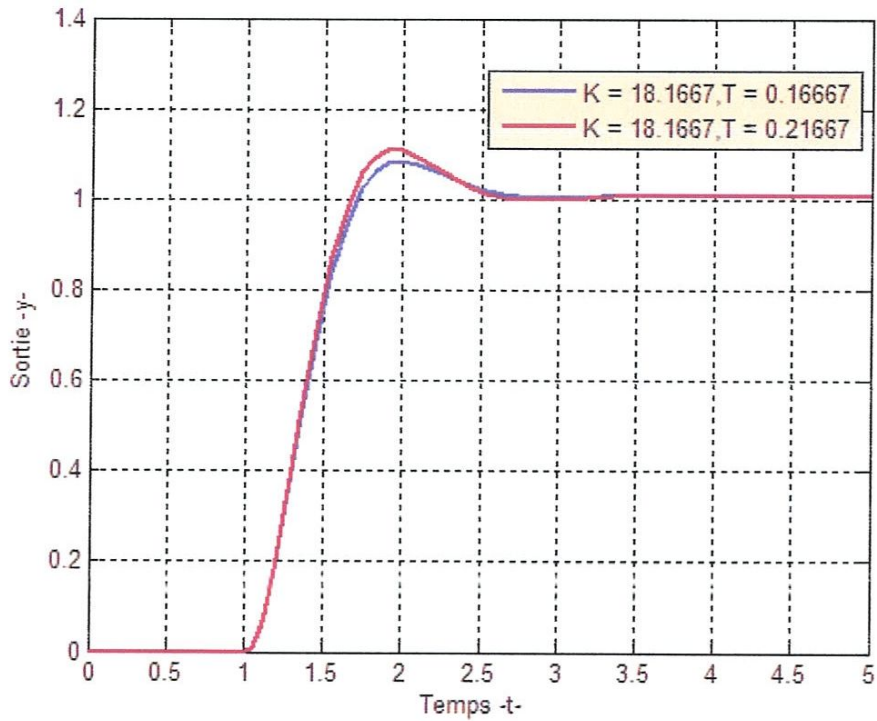


Fig. III. 17. Réponse indicielle avec une variation de %5 de la constante T et $K=18.1667$

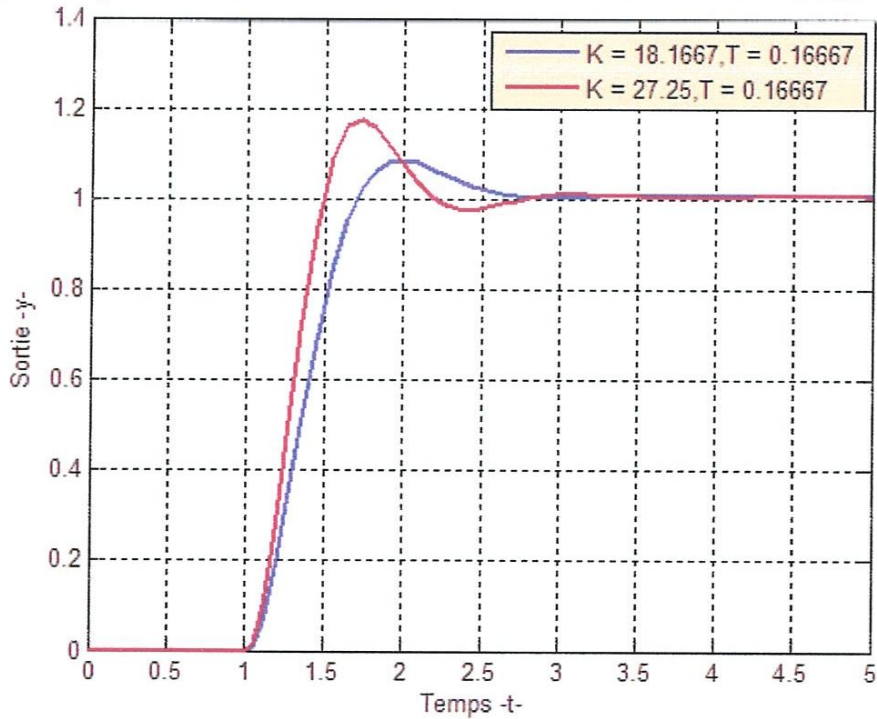


Fig. III. 18. Réponse indicielle avec une augmentation de 1.5 fois du gain K et $T=0.1667$

III. 2. 5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une méthode de conception analytique simple des contrôleurs à filtre fractionnaire à base de la structure IMC pour des processus d'ordre entier. Les simulations ont été menées sur trois méthodes de conception relativement similaires du point de vue de leur nature (à base d'IMC). La première est la commande IMC, la deuxième est commande d'ordre entier à base d'IMC et la troisième est la commande à filtre d'ordre fractionnaire à base d'IMC. Pour les trois méthodes, la synthèse du correcteur est alors facile et repose sur l'inverse du modèle du des systèmes à étudié, c'est le principe de la commande à modèle interne.

La méthode de conception de contrôleur à filtre fractionnaire à base la structure IMC pour des processus d'ordre entier, est facilement être mise en application sur les systèmes de commande moderne. Ce type de contrôleur est plus attrayant que celui d'ordre entier, car ils ont la propriété d'iso amortissement de robustesse aussi bien que plus de degrés de liberté pour répondre à d'autres caractéristiques. La méthode de conception étudiée est également simple à appliquer sur plusieurs modèles généralement produits dans l'industrie.

Le contrôleur résultant est appliqué sur une classe de systèmes linéaires d'ordre entier, ce qui en fait l'un des rares travaux sur la commande d'ordre fractionnaire à établir une base théorique en parallèle des résultats obtenus en application. La propriété fractionnaire n'est pas spécialement imposée par la structure du régulateur, mais par le modèle de référence en boucle fermée. Ainsi, le contrôleur obtenu est nécessairement fractionnaire, mais a une structure très intéressante pour sa mise en implémentation. En effet, le contrôleur peut être décomposée en deux fonctions de transfert: une fonction de transfert qui est en général un régulateur avec des actions PID d'ordre entier classique et un filtre fractionnaire simple.

La simulation a été conduite en réglage des paramètres des contrôleurs à obtenir en réponse indicielle en boucle fermée, la constante de temps montée désirée (dépendant de constante de temps τ_c) et au dépassement désiré (dépendant du nombre non entier α). La méthode étudiée a donnée des résultats améliorés dans la poursuite du point de consigne et le rejet de perturbation.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur l'étude de la conception des contrôleurs fractionnaires à base de la structure de commande à modèle interne (IMC) pour les systèmes d'ordre entier. Le but d'introduire des opérateurs et des actions d'ordre fractionnaire est de fournir des paramètres supplémentaires des algorithmes de réglage qui peuvent améliorer le niveau de performance des systèmes de commande concernant la phase transitoire de la réponse. Le choix de la structure de commande IMC parmi les structures qui existaient dans le domaine de commande vient du fait qu'elle est présentée dans la littérature comme une structure de commande robuste ce qui a permis son utilisation très répandue en milieu industriel. Elle est, en tant que méthode de synthèse directe habituellement utilisé dans le système d'asservissement classique, motivée par les qualités de robustesse vis-à-vis des perturbations (paramétriques ou externes). Le principe de cette méthode repose sur l'inverse du modèle des systèmes à étudié. Le problème d'inversion du modèle est primordial pour appréhender cette structure.

Le calcul fractionnaire et ses applications dans les systèmes de commande moderne, en l'occurrence, il s'agit des contrôleurs d'ordre fractionnaire est déjà devenue une des meilleures du distinct, pour l'analyse, la conception, le réglage et l'implémentation de ses contrôleurs. Les contrôleurs d'ordre entier en cascade avec un filtre fractionnaire présenté dans l'application de ce travail, ont montrés leur potentiel dans l'amélioration des performances des systèmes de contrôle et la poursuite de point de consigne. La propriété fractionnaire de ces contrôleurs n'est pas spécialement imposée par la structure du contrôleur, mais par le modèle de référence en boucle fermée. Ainsi, le contrôleur obtenu est nécessairement fractionnaire, et a une structure très intéressante pour sa mise en implémentation. En effet, le contrôleur résultant peut être décomposée en deux fonctions de transfert: une fonction de transfert qui est en général un contrôleur avec des actions PID d'ordre entier classique et un filtre fractionnaire simple.

Dans le premier chapitre nous avons présenté dans une partie, les différentes définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que : la dérivation fractionnaire, l'intégration fractionnaire, définitions relatives aux opérateurs d'ordre fractionnaire, l'exponentielle de Mittag-Leffler et dans la deuxième partie, les systèmes et commandes d'ordre fractionnaires a été adopté.

Le second chapitre traite les principales propriétés et les procédures de conception de la CMI. Une rapide évolution de la structure IMC a également été établie.

Le dernier chapitre a été consacré à la conception des contrôleurs fractionnaire, notamment les contrôleurs à filtre fractionnaire appliqués aux quatre classe des procédés d'ordre entier les plus rencontrés dans la littérature. La partie pratique de ce chapitre est un contrôleur avec un filtre fractionnaire conçu pour la partie linéaire d'un système de commande d'un servomécanisme. Les résultats de la conception à base de la méthode étudiée sont satisfaisants pour la poursuite du point de consigne et le rejet de perturbations.

Sur le plan des perspectives, il serait souhaitable d'appliquer la méthode étudiée pour des systèmes à grande échelle et des systèmes à grand temps mort.

RÉSUMÉ

Il y a actuellement un intérêt croissant continuellement en la généralisation des théories de commande classiques et en le développement des nouvelles stratégies de commande qui utilisent le calcul fractionnaire. Le problème de conception des contrôleurs d'ordre fractionnaires a été l'intérêt de beaucoup auteurs, avec quelques travaux valables, dans lesquels les contrôleurs d'ordre fractionnaires ont été appliqués à une variété de processus pour augmenter la robustesse et les performances des systèmes de commande. L'objectif principal de cette thèse intitulée "Conception d'un contrôleur d'ordre fractionnaire à base de la commande à modèle interne (IMC)" est de contribuer dans ce cadre. Le choix de l'approche IMC est basé sur ses possibilités d'achever des performances élevées. En plus, sa simplicité dans la conception qui est basée sur l'inversion de modèle de processus.

Les résultats de simulation démontrent que le contrôleur d'ordre fractionnaire conçu à base de la commande à modèle interne (IMC) assure une robustesse améliorée contre les incertitudes de modélisation. Le contrôleur résultant est fractionnaire mais il a une structure très intéressante pour sa mise en implémentation. En effet, le contrôleur peut être décomposé en deux fonctions de transfert : une fonction de transfert qui est généralement un contrôleur PID d'ordre entier et un filtre fractionnaire simple. La propriété fractionnaire n'est pas nécessairement imposée par la structure de contrôleur mais par le modèle de référence en boucle fermée.

Le travail surfe la commande d'un courant dans les moteurs électrique CC (servomécanisme) et obtenir sa fonction de transfert qui est la base de notre conception pour examiner le contrôleur conçu. MATLAB/SIMULINK est utilisé pour simuler le contrôleur et valider ses performances.

Mots clés :

Calcul fractionnaire, commande d'ordre fractionnaire, modèle de référence, filtre fractionnaire, commande à modèle interne IMC.

ABSTRACT

There is currently a continuously increasing interest in generalizing classical control theories and developing novel control strategies that use fractional calculus. The design problem of fractional order controllers has been the interest of many authors, with some valuable works, in which the fractional order controllers have been applied to a variety of processes to enhance the robustness and performance of the control systems. The main objective of this thesis titled as "Design of fractional order controller based on internal model control (IMC)" is to contribute in this framework. The choice of the IMC approach is based on its capabilities of achieving high performance. Beside that its simplicity in the design that is based upon inverting the process model.

The simulation results show that the designed fractional order controller based on internal model (IMC) ensures an increased robustness to modeling uncertainties. The resulting controller is fractional but it has a very interesting structure for its implementation. Indeed, the controller can be decomposed into two transfer functions : an integer transfer function which is generally an integer PID controller and a simple fractional filter. The fractional property is not especially imposed by the controller structure but by the closed loop reference model.

The research browses the control of current in DC electrical motors (servo system) and gets its transfer function to be the base of the design, which examines our designed controller. MATLAB/SIMULINK is used to simulate the procedures and validate its performance.

Key words:

Fractional calculus, fractional order control, reference model, fractional filter, internal model control (IMC).

ملخص

يوجدُ حالياً اهتمامٌ مُتنامي بشكلٍ مُتواصل لتعميم نظريات التحكم الكلاسيكي وتطوير استراتيجيات تحكم حديثة والتي تستعمل الحساب الجزئي. مسألة تصميم أنظمة التحكم الجزئية أصبحت محل اهتمام الكثير من المؤلفين، مع بعض الاعمال القيمة، التي طُبقت فيها أنظمة التحكم الجزئية على مجموعة متنوعة من الانظمة وذلك لتحسين متانة وأداء أنظمة التحكم. فهذه المُذكرة المُعنونة بـ: "تصميم نظام تحكم ذو الدرجة الجزئية الذي يعتمد على قواعد التحكم النموذجي الداخلي (ت ن د)" هدفها الرئيسي هو الإسهام في هذا الإطار. اختيرت منهجية (ت ن د) نظراً لإمكاناتها الكبيرة في تحقيق أداء عالٍ. الى جانب ذلك تصميمها السهل الذي يعتمد على عكس نموذج النظام.

وتبين نتائج المحاكاة أن نظام وحدة التحكم ذو الدرجة الجزئية المصممة على أساس النموذج الداخلي (ت ن د) يضمن زيادة متانة ضد اخطاء النمذجة، و وحدة التحكم الناتجة ذات درجة جزئية ولكن لديها بنية مثيرة جداً للاهتمام لتنفيذها في الواقع، و وحدة التحكم يمكن أن تقسم الى معادلتين وظيفتين: الاولى معادلة نقل وظيفية والذي هو عادة PID ذات درجة صحيحة ومرشح ذو درجة جزئية بسيله. خاصية الجزئية هي ليست مفروضة من قبل بنية التحكم ولكن من خلال النموذج المرجعي بحلقة مغلقة.

يستعرض البحث وحدة التحكم في التيار في المحركات الكهربائية (نظام السارفو) للحصول على معادلة النقل الوظيفي للنظام لتكون قاعدة اساسية للتصميم، الذي نقيم به وحدة التحكم المصممة. يستخدم المتلاب و السميولينك لمحاكاة الإجراءات والتحقق من صحة أدائها.

الكلمات المفتاحية:

الحساب الجزئي، التحكم الجزئي، النموذج المرجعي، المرشح الجزئي، التحكم النموذجي الداخلي (ت ن د).