

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université 8 Mai 1945 – Guelma  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Electrotechnique et Automatique



**Domaine: Sciences et Technologie**  
**Filière: Automatique et informatique industriel**  
**Spécialité: Commande et diagnostic des systèmes industriels**

**Projet de fin d'études**  
**Pour l'obtention du diplôme de Master Académique**

**Conception d'un contrôleur robuste Twin Rotor Mimo Système  
(TRMS)**

Présenté par :

- OUZINI Lakhdar  
- BOUSSAHA Hamza

Sous la direction de :  
Mr. AIDOUH Mohamed

Juin 2017



17/3420



# Dédicace

*Avant tout, je tien à remercies le bon dieu, et l'unique qui  
M'offre le courage  
Et la volonté nécessaire pour affronter les différentes de la vie  
Je dédie ce modeste travail*

*A mes parons (ma mère et mon père).  
A mes frères, A mes sœurs.  
A tous ma famille.  
A ma fiancée  
A mes amis et mes collègues de la promotion 2014-2015  
« AUTOMATIQUE »  
A mes féaux amis (chaque un à son nom)*

*Surtout :*

*Brahmia Haroun  
Bouchlagem Khayredin  
Gueraibia Walid  
Rouagdia Salim  
Boukahili Mousaab  
Mahieddin Toufik*

*B.HAMZA*

*O.LAKHDER*

## **REMERCIEMENT**

*Tout d'abord, nous remercions ALLAH de nous avoir accordé toute la patience, le courage, la volonté et la motivation qui nous ont permis d'achever ce travail. Nous adressons le grand remerciement à notre encadreur Mr .med AIDOUD qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début jusqu'à la fin de ce travail. Je tiens également dédier mes remerciements les plus vifs à aux membres de jury d'avoir accepté d'examiner et d'évaluer mon travail.*

## **Résumé**

Le travail présenté dans ce mémoire concerne l'application de la commande par un contrôleur robuste (PID et H-infini) aux systèmes physiques TRMS (Twin Rotor MIMO System). Dans une première étape nous avons présenté le principe de fonctionnement d'un hélicoptère ainsi que les éléments qui le constituent et une présentation sur le maquet de TRMS. Dans une seconde étape, nous le modélisons les deux sous-systèmes dans le plan vertical et horizontal et les deux moteurs. Enfin Des simulations ont été effectuées aussi bien en stabilisation qu'en poursuite de trajectoire sur deux commande PID et commande H-infini.

**Mots clé :** TRMS, régulateur PID, angle pitch vertical, angle horizontal, H-infini, LQR, LFT, LMI

## **Abstract:**

The work presented in this memory concerns the application of the control by a robust controller (PID and H-infinite) to the Twin Rotor MIMO System (TRMS). In a first phase we presented a brief presentation of the operating principle of a helicopter as well as the elements that constitute it and a presentation on the TRMS model. In a second place, we model the two subsystems in the vertical and horizontal plane and the two motors. At the end Simulations were carried out both in stabilization and trajectory tracking on two PID controls and H-infinite control.

**Keywords:** TRMS, controller PID, LQR, H-infini, pitch angle, yaw angle, LFT, LMI

## SOMMAIRE

---

Introduction générale :.....	1
<b><i>Chapitre I :Présentation du TRMS (Twin Rotor Mimo Système)</i></b> .....	<b>5</b>
I.1 Introduction :.....	6
I.2 Principe de vol d'un hélicoptère.....	6
I.3 Éléments constitutifs de l'hélicoptère .....	7
I.3.1 Rotor principal.....	8
I.3.2 Rotor de queue ou rotor anti-couple .....	9
I.4 Présentation du TRSM .....	10
I.4.1 Description du simulateur .....	11
I.4.2 Propulseurs .....	12
I.4.3 Commande des moteurs .....	13
I.4.4 Les encodeurs optiques .....	13
I.4.5 La base du TRMS.....	14
I.4.6 Boîtier marche/arrêt.....	15
I.4.7 La SCSI BOX.....	15
I.4.8 Carte d'acquisition ADVANTECH PCI 1711 [pci1711].....	16
<b><i>Chapitre II: modélisation et linéarisation du TRMS</i></b> .....	<b>17</b>
II.1 Introduction .....	18
II.2 Dynamique modèle de la platform (Rotor principal, Rotor de queue): .....	19
II.3. Rotor principal :.....	19
II.3.1. le plan vertical :.....	20
II.3.2 Moteur 1 :.....	21
II.4. Rotor de queue (Rotor anti-couple.).....	21
II.4.1 Plan horizontal .....	22
II.4.2 Moteur 2.....	23

II.5. Modèle linéarisé .....	24
II.6. Simulation du modèle.....	27
II.7. Résultats de simulation .....	28
II.8. Conclusion :.....	32
<b>Chapitre III : commande par un contrôleur PID .....</b>	<b>33</b>
III.1 Introduction.....	34
III.2 Les Contrôleurs .....	34
III.3 Types de contrôleurs [9] .....	35
III.3.1 Contrôleurs PID .....	36
III.3.1.1 Principe générale.....	36
III.3.1.2 Réglage d'un PID.....	38
III.3.1.3 La configuration du contrôleur PID MIMO :.....	41
III.3.2 Régulateur quadratique linéaire (LQR) .....	41
III.4. Simulation par PID.....	44
III.4.1.Paramètre de simulation .....	44
III.4.2. Analyse de robustesse :.....	44
III.4.2.1. Variable de pondération.....	44
III.4.2.2. La sensibilité .....	46
III.5. Résultat de simulation.....	48
III.6.CONCLUSION.....	51
<b>Chapitre IV : commande par un contrôleur <math>H_{\infty}</math> .....</b>	<b>52</b>
IV.1 Introduction.....	53
IV.2 Présentation $H_{\infty}$ .....	54
IV.2.1 Stabilité des systèmes pluridimensionnels.....	55
Iv.2.1.1 Stabilité nominale.....	55
Iv.2.1.2 Stabilité interne .....	55
Iv.2.1.3 Stabilité robuste.....	56

iv.2.1.4.1. Théorème du petit gain.....	56
iv.2.1.4.2 Condition de stabilité.....	57
iv.2.1.5. Analyse de robustesse en présences de diverses entrées exogènes .....	57
IV.3. Problème $\mathcal{H}^\infty$ :.....	61
IV.3.1 Problème $\mathcal{H}^\infty$ standard .....	61
IV. 3.2 Problème $\mathcal{H}^\infty$ optimal .....	62
IV. 3.3 Problème $\mathcal{H}^\infty$ sous optimal .....	63
IV. 3.4 Problème de Sensibilité Mixte généralisée .....	63
IV.4 Résolution du problème $\mathcal{H}^\infty$ .....	65
IV.4.1 Résolution fondée sur les équations de <i>Riccati</i> .....	65
IV.4.1.1 Théorème.....	67
IV.4.2 Résolution fondée sur l'approche <i>LMI</i> .....	68
IV.4.2.1 Lemme.....	68
IV.4.2.2 Théorème.....	68
IV.5 Résultat de Simulation.....	69
IV.5.1. Paramètre de simulation :.....	69
IV.6 modèle Simulink :.....	70
IV.7. Conclusion.....	76
<b>V. Conclusion générale ... ;.....</b>	<b>77</b>

## ***Introduction générale***

<i>Figure 1 : machine vis aérienne créée par Léonard de Vinci .....</i>	<b>1</b>
<i>Figure 2 : le pigeon de George Cayley (1843) .....</i>	<b>1</b>
<i>Figure 3 : modèle d'un hélicoptère créé par Sikorsky.....</i>	<b>2</b>

## ***Chapitre I***

<i>I.1 Introduction : .....</i>	<b>6</b>
<i>I.2 Principe de vol d'un hélicoptère [4] .....</i>	<b>6</b>
<i>Figure I.1 : forces agissant sur l'hélicoptère.....</i>	<b>7</b>
<i>Figure I.2 : Les différentes articulations au niveau du rotor.....</i>	<b>8</b>
<i>Figure I.3: Rôle du rotor de queue. ....</i>	<b>9</b>
<i>Figure I.4 : le simulateur d'hélicoptère TRMS (Twin Rotor MIMO System).....</i>	<b>10</b>
<i>Figure I.5 : Description du TRMS.....</i>	<b>12</b>
<i>Figure I.6 : Les propulseurs du TRMS.....</i>	<b>12</b>
<i>Figure I.7 : schéma synoptique du fonctionnement du propulseur .....</i>	<b>13</b>
<i>Figure I.8 : encodeurs optiques .....</i>	<b>14</b>
<i>Figure I.9: La base du TRMS .....</i>	<b>15</b>
<i>Figure I.10: Boîtier marche/arrêt.....</i>	<b>15</b>

## ***Chapitre II***

<i>Figure II.1 TRMS modèle phénoménologique .....</i>	<b>19</b>
<i>Figure II.2 : Rotor Principale.....</i>	<b>20</b>
<i>Figure II.3 Rotor anti-couple .....</i>	<b>22</b>
<i>Figure II.4 : Schéma Simulink du TRMS non-linéaire real-model.....</i>	<b>27</b>
<i>Figure II.5: Les signaux de commande.....</i>	<b>28</b>



<i>Figure II.6: la sortie obtenue de réelle TRMS "ksi".....</i>	<i>29</i>
<i>Figure II.7: la sortie obtenue de model "ksi".....</i>	<i>29</i>
<i>Figure II.8: Comparaison entre les deux sorties "ksi" de réelle et modèle d'installation des TRMS .....</i>	<i>30</i>
<i>Figure II.9: la sortie obtenue de réelle TRMS "phi" .....</i>	<i>30</i>
<i>Figure II.10: la sortie obtenue de model "PHI".....</i>	<i>31</i>
<i>Figure II.11: Comparaison entre les deux sorties "ksi" de réelle et modèle d'installation des TRM.....</i>	<i>31</i>

### **Chapitre III**

<i>Figure III .1 control avec boucle retour d'état.....</i>	<i>35</i>
<i>Figure III.2 architecture parallèle de PID.....</i>	<i>37</i>
<i>Figure III.3 : La réponse d'un procédé stable .....</i>	<i>39</i>
<i>Figure III.4 : Schéma de contrôle PID de TRMS .....</i>	<i>41</i>
<i>Figure III .5 : Schéma de principe du régulateur quadratique linéaire.....</i>	<i>42</i>
<i>Figure III.6 Signal de pondération 1/w1.....</i>	<i>45</i>
<i>Figure III.7. Signal de pondération 1/w3.....</i>	<i>45</i>
<i>Figure III.8. Signal de sensibilité direct avec le pondération 1/w1.....</i>	<i>46</i>
<i>Figure III.9. signal de sensibilité complémentaire avec le pondération 1/w3.....</i>	<i>47</i>
<i>Figure III.10 Schémas Simulink du TRMS avec un contrôleur linéaire (PID).....</i>	<i>48</i>
<i>Figure III.12. : command PID du TRMS model.....</i>	<i>49</i>
<i>Figure III.13 :L'angle dans le plan vertical model TRMS .....</i>	<i>49</i>
<i>Figure III.14 :L'angle dans le plan vertical réel TRMS .....</i>	<i>50</i>
<i>Figure III.15: la sortie obtenue de model "PHI" .....</i>	<i>50</i>
<i>Figure III.16: la sortie obtenue de réel "PHI".....</i>	<i>51</i>

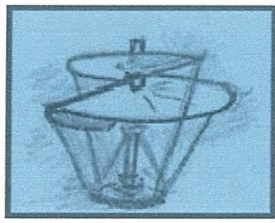
## Chapitre IV

<i>Figure. IV.1.a : Structure d'un système bouclé pour l'analyse de la robustesse de stabilité.</i>	<b>56</b>
<i>Figure.IV.1.b :Structure générale d'étude de la robustesse de stabilité.....</i>	<b>56</b>
<i>Figure.IV.2. Configuration standard d'un système bouclé.....</i>	<b>58</b>
<i>FigureIV.3 : Configuration (P – K) du système bouclé.....</i>	<b>61</b>
<i>Figure IV.4. Schémas Simulink du TRMS avec un contrôleur linéaire (<math>\mathcal{H}\infty</math>) .....</i>	<b>70</b>
<i>FigureIV.5 : command <math>H_{\infty}</math> du TRMS model.....</i>	<b>71</b>
<i>FigureIV.6 : command <math>H_{\infty}</math> du TRMS réel.....</i>	<b>71</b>
<i>Figure IV.7. :L'angle dans le plan vertical model TRMS avec un contrôleur <math>\mathcal{H}\infty</math>.....</i>	<b>72</b>
<i>Figure IV.8. :L'angle dans le plan vertical réel TRMS avec un contrôleur <math>\mathcal{H}\infty</math>.....</i>	<b>73</b>
<i>Figure IV.9 : Comparaison entre les deux sorties "ksi" de réelle et modèle d'installation des TRMS Avec un contrôleur <math>\mathcal{H}\infty</math>.....</i>	<b>74</b>
<i>FigureIV.10. : la sortie obtenue de model "PHI" avec un contrôleur <math>\mathcal{H}\infty</math> .....</i>	<b>75</b>
<i>FigureIV.11. : la sortie obtenue de réel "PHI" avec un contrôleur <math>\mathcal{H}\infty</math> .....</i>	<b>75</b>
<i>Figure IV.12 : Comparaison entre les deux sorties "ksi" de réelle et modèle d'installation des TRMS avec un contrôleur <math>\mathcal{H}\infty</math> .....</i>	<b>76</b>

## Introduction générale

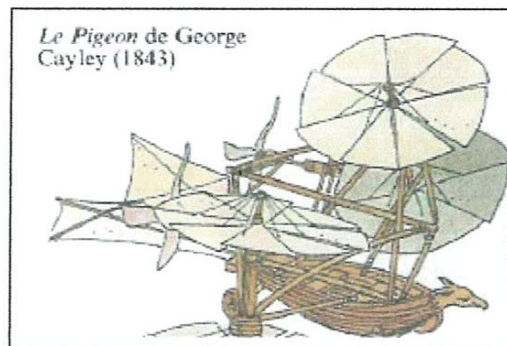
---

Les origines de l'hélicoptère: Dès 1480, Léonard de Vinci avait dessiné une machine, sorte de vis aérienne voir **Figure 1**, dont la voilure tournait autour d'un axe vertical.



**Figure 1 : machine vis aérienne créée par Léonard de Vinci**

Borrelli, en 1680 contrarotatifs, mus par un mécanisme d'horlogerie, et démontre l'existence d'une force de sustentation. Le 26 avril 1784, les Français Launoy et Bienvenu font voler devant l'Académie royale des sciences un petit modèle très simple constitué de deux hélices contrarotatives, mû par un mécanisme de ressort à arc, découverte reprise en 1795 par George Cayley voir **Figure 2**.



**Figure 2 : le pigeon de George Cayley (1843)**

En 1862, le français Ponton d'Amécourt, à qui l'on doit le mot "hélicoptère" et, en 1877, l'italien Forlanini construisirent des appareils, mus par des moteurs à vapeur. Dix ans plus tard le Français Trouve fait décoller un modèle doté d'un moteur électrique, dont l'alimentation est obtenue depuis le sol par de fins fils de cuivre. Ces expériences avaient permis de résoudre et d'affronter de nombreuses difficultés et d'arriver enfin aux appareils pilotés.

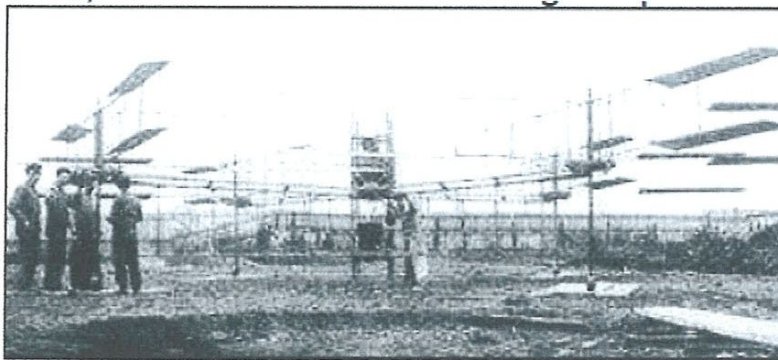
## **Introduction générale**

---

L'histoire du rotor est liée à celle de l'hélicoptère. En 1908, c'est à dire très peu de temps après le premier décollage, dû à Paul Cornu, en 1907, l'ingénieur russe émigré aux Etats-Unis, Igor Sikorsky, s'attaque au problème posé par le mécanisme des pales et du rotor, celui-ci assurant à la fois, la sustentation et la propulsion de l'engin. De nombreuses solutions seront apportées tout au long de l'évolution de l'hélicoptère, dans laquelle s'inscrira l'invention capitale de la variation cyclique de pas, qui permettra de modifier la position des pales à mesure de la rotation et de remédier ainsi à la dissymétrie engendrée par l'avance de l'engin. 18 février 1921 : Premier vol en hélicoptère.

Le français Etienne Oehmichen réussit pour la première fois à faire décoller un appareil à la verticale à 10 mètres de hauteur. Son hélicoptère est équipé d'un moteur de plus de 100 kg développant une puissance de 25 chevaux. Le 4 mai 1924, il est le premier à parcourir un kilomètre en circuit fermé.

En 1935, Sikorsky fait voler une machine parfaitement sécurisée. A Orly, elle se maintient à 20 mètres au-dessus du sol en équilibre parfait et sans aucun organe de pilotage extérieur. En 1939, ses travaux l'amèneront à équiper d'un mono-rotor le VS-300 qui, en 1941, battit le record mondial d'autonomie avec un vol d'une heure et demi.



**Figure 3 : modèle d'un hélicoptère créé par Sikorsky**

16 février 1946 : Premier vol commercial d'un hélicoptère : La US Civil Aviation Administration autorise pour la première fois un hélicoptère à effectuer des opérations commerciales. L'appareil est un Sikorsky S51, quatre places, équipé d'un seul rotor.

L'hélicoptère militaire Durant la Seconde Guerre mondiale, les Allemands s'intéressèrent à l'hélicoptère. Cependant, ces appareils furent très peu utilisés durant le conflit.

Le premier véritable engagement opérationnel d'hélicoptères eut lieu durant la guerre de Corée, essentiellement : évacuations sanitaires.

## Introduction générale

---

Ce fut également le cas durant la guerre d'Indochine. Durant la guerre d'Algérie, il sera massivement utilisé par l'armée française; certains seront armés de canons, de mitrailleuses et même de lance-roquettes (Sikorsky H34) et missiles (Sud-Aviation Alouette II). De même, durant la guerre du Viêt Nam, les États-Unis en feront un emploi systématique au point que l'on surnommait cette guerre « la guerre de l'hélicoptère ».

Désormais, l'hélicoptère ne sert plus seulement au transport : équipé de mitrailleuses, de canons, de roquettes et de missiles, il apporte un appui appréciable aux troupes au sol et s'avère également redoutable dans la lutte anti-char.

De fait, jusqu'au milieu des années 1950, les hélicoptères étaient propulsés par des moteurs à explosion en étoile ou en ligne.

Il faut attendre 1955 et la mise en service de l'Alouette II de Sud-Aviation pour voir apparaître le premier hélicoptère de série propulsé par une turbine. [1]

L'objectif de l'automatique moderne est l'élaboration de lois de commande simples et performantes pour conférer aux systèmes physiques des propriétés qu'il n'avait pas naturellement ou renforcer des propriétés qui existaient déjà. L'automatisation est un besoin qui se généralise dans tous les secteurs de l'industrie moderne. C'est en effet, la solution qui permet de contrôler un système physique avec de très hautes performances et une dépense minimale d'énergie et de matière première.

Ainsi Suites aux différents progrès technologiques que connaît le monde dans tous les domaines, et particulièrement dans le domaine de l'aéronautique, l'automatique a connu un essor considérable. L'élaboration de lois de commande de systèmes a fait l'objet de nombreux travaux de recherche. L'application de certaines de ces méthodes à des avions et aux hélicoptères a montré leur efficacité. Cependant, les systèmes à commander devenant de plus en plus complexes, les lois de commande deviennent elles-mêmes complexes et parfois difficiles à mettre en œuvre. Pour cela, des prototypes (ou simulateurs) ont été conçus dans le but de tester de nouvelles lois de commandes, qui ne peuvent être implémentées directement sur les systèmes réels. Le simulateur de vol d'hélicoptère *TRMS* (Twin Rotor Mimo System) est l'un de ces prototypes. Ce simulateur est un système multi variables à deux entrées et deux sorties, caractérisé par une forte non linéarité, un couplage important et une dynamique instable en boucle ouverte.

D'un autre côté, l'obtention d'un modèle précis du procédé devient nécessaire. Les méthodes de modélisation traditionnelles s'avèrent souvent incapables de représenter le comportement

global d'un système. L'automaticien est alors confronté à un problème de choix pour la construction d'une loi de commande. [2]

Le premier chapitre a fait l'objet d'une brève présentation du principe de fonctionnement d'un hélicoptère ainsi que les éléments qui le constituent et une présentation sur le maquet de TRMS. Cette partie nous a permis aussi de tracer un chemin précis pour le reste du mémoire. Par la suite, dans le chapitre 2, un modèle mathématique non-linéaire de la dynamique du mouvement vertical et horizontal de la maquette qui représente un modèle réduit d'un hélicoptère "Twin Rotor Mimo Système (TRMS)" a été développé. Ce modèle a été utilisé pour la conception des contrôleurs linéaires. Le chapitre 3 la commande par un contrôleur PID est conçu pour contrôler les mouvements horizontaux et verticaux du système séparément. Dans chapitre 4, nous avons conçu efficacement de contrôleurs  $H_{\infty}$  pour un TRMS. Est on terminera par une conclusion générale.

Les résultats de simulation présentés dans ce mémoire sont la preuve que les contrôleurs conçus dans MATLAB sont suffisamment robustes pour pouvoir gérer le système avec plus d'efficacité lorsque certaines perturbations sont également présentes. En comparaison avec PID, les deux régulateurs fournissent des résultats stabilisants et s'assurent que le système reste stable. Plusieurs graphiques sont présentés dans ce mémoire qui soutient la réalisation de cet objectif. Bien que le système soit initialement instable et non linéaire, mais après la linéarisation, il peut être rendu stable en utilisant des techniques de stabilisation interne du système, par les procédures des concepteurs de contrôleur.

# Chapitre 1 : Présentation du TRMS (Twin Rotor Mimo Système)

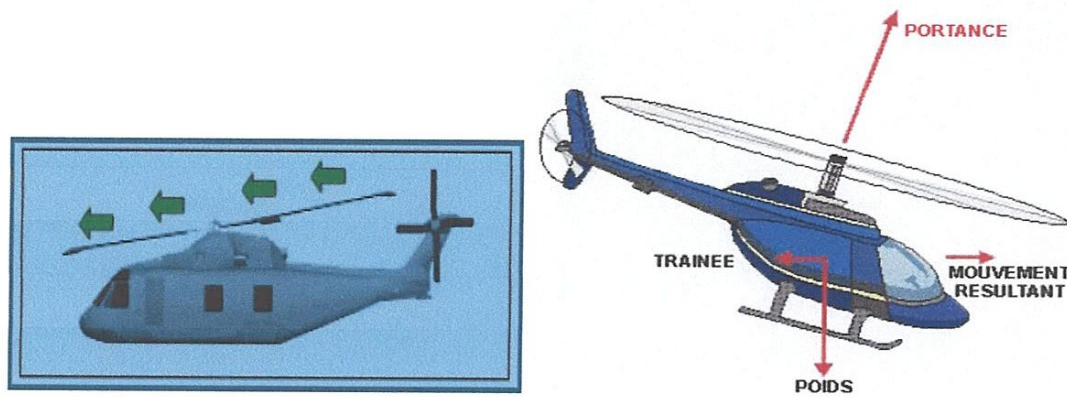
## I.1 Introduction :

Ces derniers temps le développement de plusieurs approches pour contrôler le vol de véhicule aérien sans pilote et hélicoptère. La modélisation de la dynamique du véhicule de l'air est une tâche difficile en raison de la complexité des interactions non linéaires entre les différentes variables et aussi il y a des membres qui ne sont pas accessibles à la mesure. Le rotor double entrée sortie multi système (TRMS) est un dispositif expérimental qui ressemble avec le modèle d'hélicoptère. Les TRMS se composent de deux rotors à chaque extrémité de la poutre horizontale connue sous le rotor principal et le rotor de queue qui est entraîné par un moteur à courant continu et il est équilibré par un faisceau battante .Les TRMS peuvent tourner dans les deux directions horizontales et verticales. Le rotor principal génère une force de portance due à ce les TRMS se déplace vers le haut autour de l'axe de tangage. Bien que, en raison de la TRMS du rotor de queue se déplace autour de l'axe de lacet. Les TRMS mais ressemble à l'hélicoptère mais il y a quelques différences importantes entre l'hélicoptère et les TRMS. En hélicoptère, en changeant l'angle d'attaque le contrôle a été fait, alors que dans les TRMS qu'il a été fait par la modification de la vitesse des rotors. Plusieurs techniques ont été mises en œuvre pour le contrôle et modélisation objet de TRMS, [3].

## I.2 Principe de vol d'un hélicoptère [4]

Essayons de simplifier le principe de vol d'un hélicoptère en nous référant à l'avion. Dans un avion, la traction est assurée par les hélices qui font prendre de la vitesse à l'avion. Quant à la portance, ce sont les ailes qui, par leurs formes aérodynamiques, créent une force proportionnelle (au carré généralement) de la vitesse de traction provoquant, ainsi, l'envol de l'avion, dès que sa vitesse est suffisamment importante. Pour un hélicoptère, c'est le rotor qui joue à la fois le rôle de l'aile et de l'hélice. Il assure, ainsi, traction et portance. Ainsi, Pour changer de direction l'hélicoptère doit changer l'angle d'attaque de son rotor pour créer une portance dans la direction voulue.





**Figure I.1 : forces agissant sur l'hélicoptère.**

Le rotor est entraîné en rotation par un groupe motopropulseur, constitué d'un moteur (à pistons ou turbine à gaz), d'un embrayage et d'un réducteur aussi appelé BTP (boîtier de transmission principal). Cependant, comme pour l'hélice, le rotor exerce sur l'air un couple dû à son mouvement. L'air en retour (principe d'action action-réaction), exerce un autre couple d'intensité égale mais de sens opposé. Si vous essayez d'introduire une vis encastrée dans un mur extrêmement dur avec une visseuse puissante, vous tourneriez avec la visseuse. C'est le même phénomène qui est observé avec le rotor principal. Pour contrer cet effet de couple et permettre un vol stable, on dispose à l'arrière des Hélicoptères un "rotor de queue". Son rôle consiste à contrer le couple du rotor principal. C'est le système le plus couramment utilisé actuellement mais il existe d'autres systèmes qui jouent le même rôle tel que : jet d'air, fenestron, deux rotors principaux (ce qui annule l'anti-couple), mais aussi deux rotors d'anti-couple. Le rotor anti-couple consomme environ 10 % de la puissance, son interaction sonore avec le rotor principal le rend bruyant, dangereux (extrêmement coupant), sensible au vent de travers, il est également coûteux et fragile, toutes ces raisons motivent les constructeurs à l'éviter ou à l'optimiser, comme le montre la figure I.1.

### **I.3 Éléments constitutifs de l'hélicoptère**

Afin de mieux comprendre le fonctionnement de l'hélicoptère, un bref rappel sur des éléments constituant l'hélicoptère s'impose. En général, un hélicoptère mono-rotor se compose essentiellement de :

## I.3.1 Rotor principal

Il représente l'organe essentiel de l'hélicoptère, il est le siège de toutes les forces aérodynamiques, il assure la sustentation, et tous les déplacements directionnels de l'hélicoptère en inclinant le disque rotor dans le sens voulu. Un rotor peut être constitué par deux pales ou plus. Pour des raisons de stabilité et des contraintes mécaniques, la pale est construite de telle façon à pouvoir se déplacer sur les trois axes, voir la figure I.2.

- **Articulation de battement** qui permet à la pale de monter ou descendre verticalement sous l'action des forces de portance et centrifuges. Cette articulation est utilisée en raison de la dissymétrie de la poussée (la force engendrée par la pale avançant est supérieure à celle de la pale reculant et cette différence est due à la différence de la vitesse relative de l'air par rapport aux pales) et pour annuler en même temps le moment de flexion vertical au niveau de l'emplanture de la pale (la jonction entre la pale et le mate).
- **Articulation de traînée** qui permet à la pale de se déplacer horizontalement sous l'effet des forces de traînée. Cette articulation est réalisée afin d'annuler le moment horizontal cyclique au niveau de l'emplanture qui peut fatiguer puis briser le matériel.
- **Articulation du pas** est utilisée pour varier la portance en variant l'angle de pas. Cette articulation est utilisée pour le contrôle de l'appareil (variation du pas cyclique et de la portance).

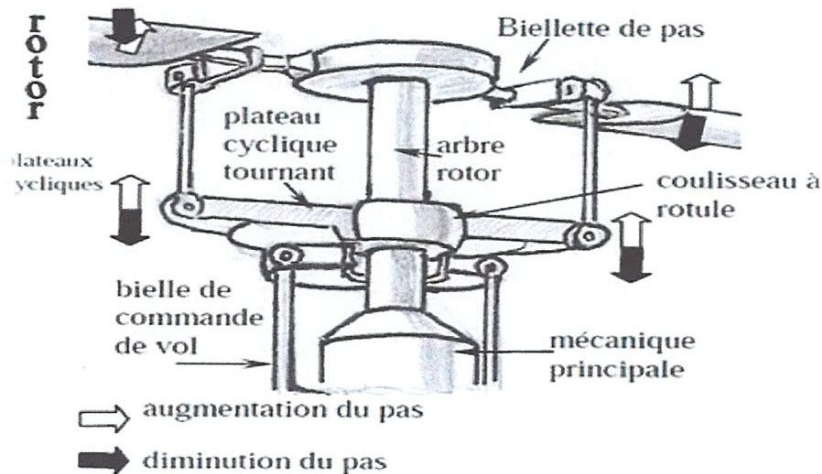


Figure I.2 : Les différentes articulations au niveau du rotor.

## I. 3.2 Rotor de queue ou rotor anti-couple

## Chapitre I

Dans un hélicoptère mono-rotor, le fuselage est soumis à des couples d'entraînement dus à la rotation du rotor principal. Afin de maîtriser ce couple, un rotor est installé au niveau de la queue d'hélicoptère. Ce dernier tournant dans le sens contraire du rotor principal, il permet donc à la fois d'annuler le couple de réaction du rotor principal et de contrôler l'appareil sur son axe de lacet.

Cependant il existe d'autres solutions pour annuler le couple d'entraînement comme les hélicoptères qui possèdent deux rotors (sur le même axe ou axes différents tournant en sens inverse l'un de l'autre) ou bien ceux qui utilisent les gaz d'échappements sous pression pour contrôler le mouvement de lacet, la figure I.3 montre le rôle du rotor de queue.

L'hélicoptère est constitué d'autres organes importants qui sont toujours le siège d'études et de perfectionnement comme le fuselage, moteur et boîte de transmission. Pour notre exposé seulement les deux rotors sont à retenir.

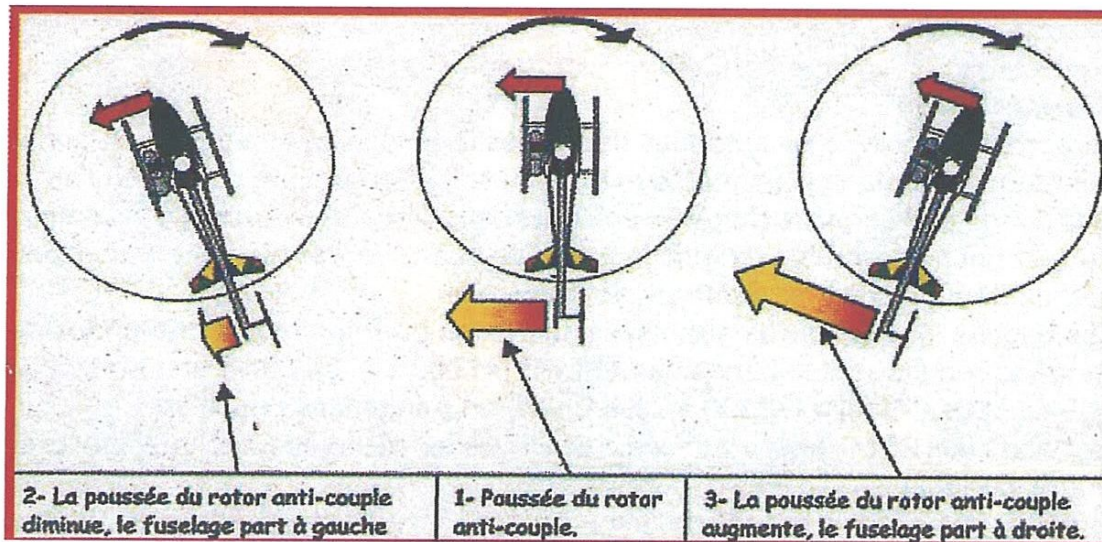


Figure I.3: Rôle du rotor de queue.

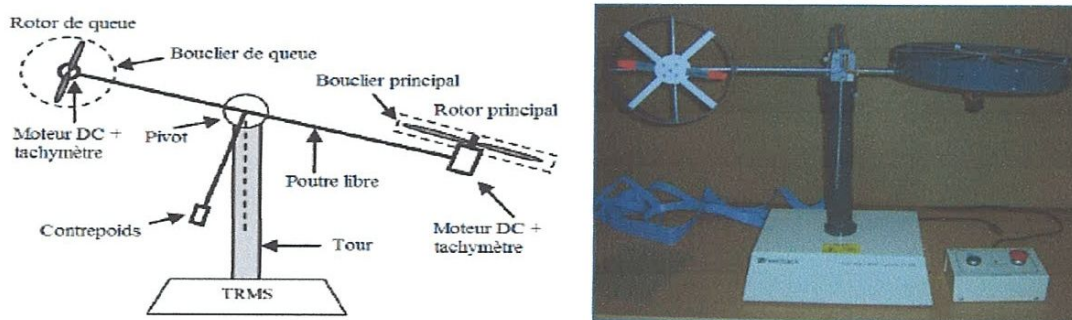
### I.4 Présentation du TRSM

# Chapitre I

Un simulateur est un dispositif technique permettant de reproduire de façon virtuelle une situation. Il présente donc sous des conditions contrôlables et observables l'évolution du modèle du phénomène : s'il existe plusieurs modèles on peut aussi parler de système de façon plus générale.

Un simulateur est donc l'outil de mise en œuvre de la simulation du système avec tous les avantages et inconvénients que cela implique. En particulier un simulateur sera utilisé quand le système réel est inobservable ou difficilement observable pour toutes sortes de raisons (dimension, sécurité, coût, inexistence...).

La maquette étudiée au nom du TRMS se référant à Twin Rotor MIMO System, comme le montre la figure I.4. Il s'agit d'un système non linéaire à deux entrées modélisant un hélicoptère. Le concept est fourni par la société Feedback spécialisée dans la conception d'équipements d'ingénierie. A l'origine, la maquette est contrôlée par un logiciel fonctionnant sous Matlab. L'acquisition des signaux et l'envoi des commandes sont faits via les cartes d'acquisition de la compagnie Advantech. A chaque extrémité d'une tige pivotant par rapport à la base se trouvent deux hélices entraînées par deux moteurs à courant continu. L'hélice de queue assure un déplacement horizontal alors que l'hélice principale permet un déplacement vertical. Un contre poids permet d'ajuster une position d'équilibre désirée. Deux encodeurs optiques HEDS-95440 montés au niveau du pivot indiquent les positions horizontales et verticales de la tige. Deux tachymètres installés sur les moteurs (un sur chaque moteur) indiquent la vitesse angulaire des moteurs. Le contrôle du système se fait par la commande en tension des deux moteurs.



**Figure I.4 : le simulateur d'hélicoptère TRMS (Twin Rotor MIMO System)**

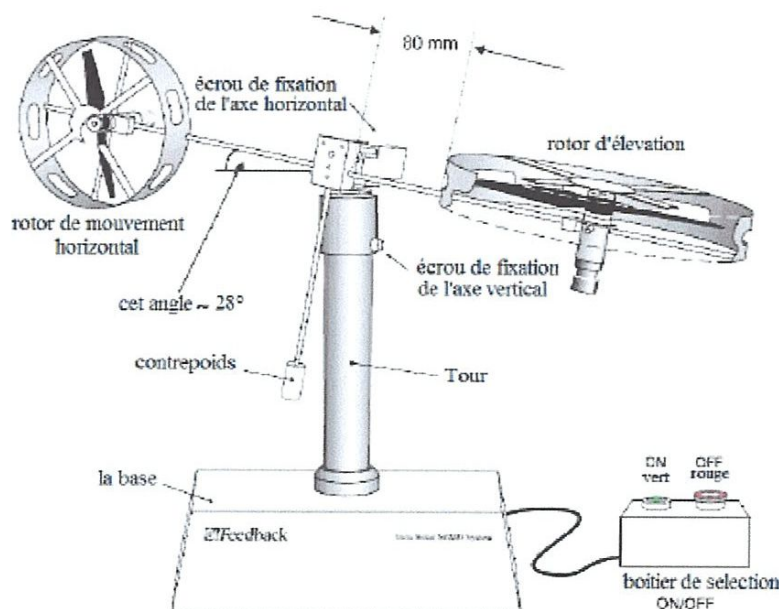
Il est important de noter les limitations physiques du système. La position verticale  $v$  est limitée entre  $-70$  et  $+60$  et elle prend compte du fait que les déplacements verticaux sont positifs dans le sens contraire de rotation de la montre (positive en haut et négative en bas). La

position horizontale  $h$  est limitée entre  $-135$  et  $+200$  (les déplacements horizontaux sont positif dans le sens horaire).

## I.4.1 Description du simulateur

Le système est multi-variable à deux entrées et à deux sorties (MIMO), les deux sorties étant l'angle d'élévation  $v$  l'angle d'azimut  $h$  les deux entrées étant les tensions appliquées aux deux moteurs à courant continu. Le système est non linéaire, instable en boucle ouverte et présente un couplage important. Le TRMS est formé d'après la figure I.5 par:

- Une poutre pouvant pivoter sur sa base de manière à ce qu'elle puisse tourner librement dans les plans vertical et horizontal.
- Deux propulseurs (principal et anti-couple) fixés aux deux extrémités de la poutre. Ils sont formés d'une hélice, d'un moteur à courant continu et d'un bouclier de sécurité.
- Un contrepoids fixé sur une tige collée au niveau du pivot de la poutre, son rôle est de diminuer les vibrations (oscillations) de cette dernière.
- Une tour pour maintenir la poutre.
- Une base comprenant des circuits électriques pour l'adaptation, la synchronisation et le filtrage des signaux entrants et sortants.
- Un boîtier de marche/arrêt des moteurs. L'articulation sphérique permet à la poutre de pivoter simultanément dans le plan horizontal et vertical. C'est un système à deux degrés de liberté, mais on peut restreindre le mouvement à un degré de liberté à l'aide de deux vis.



## Figure I.5 : Description du TRMS

### I.4.2 Propulseurs

D'après la figure I.6, le TRMS possède deux propulseurs, un principal qui agit dans le plan vertical, et l'autre secondaire qui agit dans le plan horizontal. Chaque propulseur est composé d'une hélice. Ces dernières sont entraînées par des moteurs à courant continu « marque MAXON », couplés avec des tachymètres. La tension de commande varie entre  $\pm 10$ , le signe de la tension indique le sens de rotation.

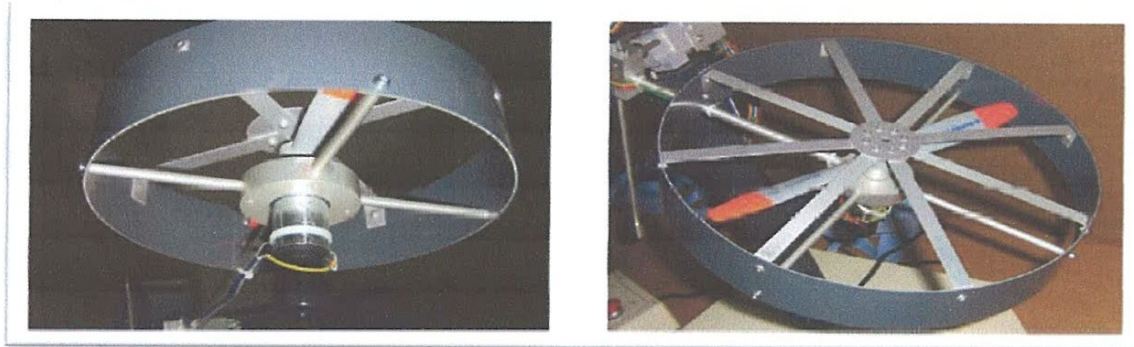
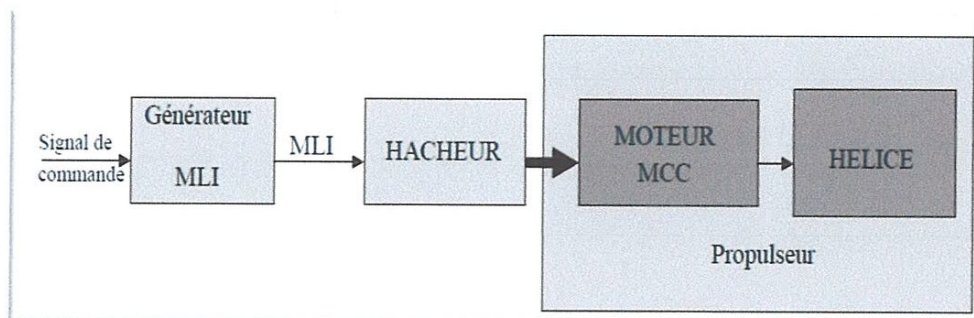


Figure I.6 : Les propulseurs du TRMS

### I.4.3 Commande des moteurs

Les moteurs électriques à courant continu offrent l'avantage de présenter des vitesses de rotation proportionnelles à la tension qui leur est appliquée. Le mécanisme utilisé est un hacheur, qui est un convertisseur statique alimenté par une source de tension continue produisant aux bornes du moteur une tension de valeur moyenne réglable. Ce hacheur est commandé par des trains d'impulsions (MLI) qui sont générés à partir du signal de commande provenant du PC à travers la carte d'acquisition voir la Figure I.7.

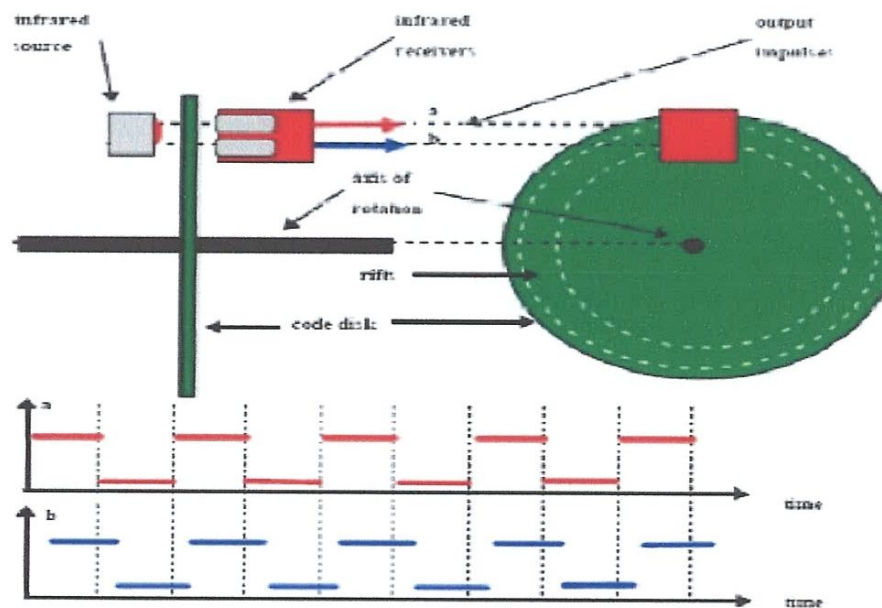


**Figure I.7 : schéma synoptique du fonctionnement du propulseur**

## I.4.4 Les encodeurs optiques

Ces capteurs servant à la mesure des angles d'azimut et d'élévation se situent à l'intérieur du pivot sphérique de la poutre.

Les faisceaux lumineux émis par les deux photodiodes (A et B) passent à travers deux anneaux de fentes sur le disque. Les fentes sont décalées, de sorte que les tensions des récepteurs (A et B) soient des ondes rectangulaires en quadrature de phase. Le dispositif ainsi réalisé permet de déterminer le sens de rotation (Figure I.8).



**Figure I.8 : encodeurs optiques**

## I.4.5 La base du TRMS

À l'arrière de la base se trouvent les différentes connectiques comme le montre la figure I.9.

- ❖ Connecteur ON/Off : fiche DIN pour connecter la boîte de l'intercepteur ON/OFF des moteurs.
- ❖ Sélecteur 110/220 V.
- ❖ Fiche d'alimentation 110/220 V.
- ❖ Fiche d'alimentation 110/220 V.
- ❖ Connecteur CN1 : il s'agit d'une nappe de 40 pistes. Les signaux sont ceux des deux capteurs de position, ce sont des signaux digitaux sur 16 bits.

- ❖ Connecteur CN2 : il se branche avec PL3, avec une nappe de 20 pistes. Les signaux sont les tensions de commandes des deux moteurs.
- ❖ Connecteur CN3 : il se branche avec PL2, avec une nappe de 20 pistes. Les signaux sont ceux des tachymètres.

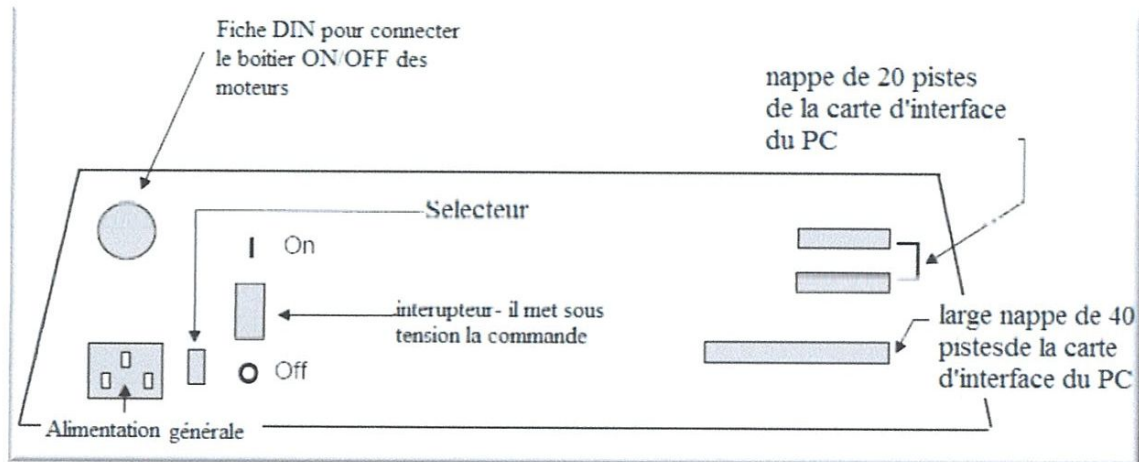


Figure I.9: La base du TRMS

## I.4.6 Boîtier marche/arrêt

C'est un petit boîtier avec deux boutons poussoirs, l'un vert pour fermer le circuit d'amplification des moteurs, et l'autre rouge pour couper l'alimentation. Son rôle principal consiste à protéger les moteurs en cas de mauvaise manœuvre. Il est connecté à l'arrière de la base du TRMS (Figure I.10).

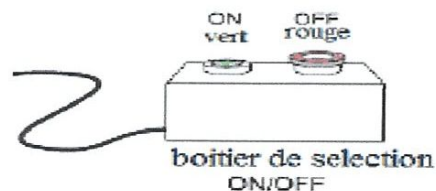


Figure I.10: Boîtier marche/arrêt

## I.4.7 La SCSI BOX



## Chapitre I

La SCSI BOX (figure I.9.b) a comme rôle d'adapter les signaux entre la carte d'acquisition et les différents connecteurs de la base du TRMS et de séparer ces différents signaux en fonction de leurs types. La boîte dispose de quatre connecteurs voir Figure I.11 :

- un connecteur 68 pins pour connecter le câble global 68 pin SCSI de la carte d'acquisition.
- un grand connecteur PL1 pour les entrées digitales des capteurs de positions (deux encodeurs optiques).
- un petit connecteur PL2 pour les sorties analogiques (deux tensions de commande des moteurs).
- un autre petit connecteur PL3 pour les entrées analogiques (retour tachymétrique des deux moteurs).

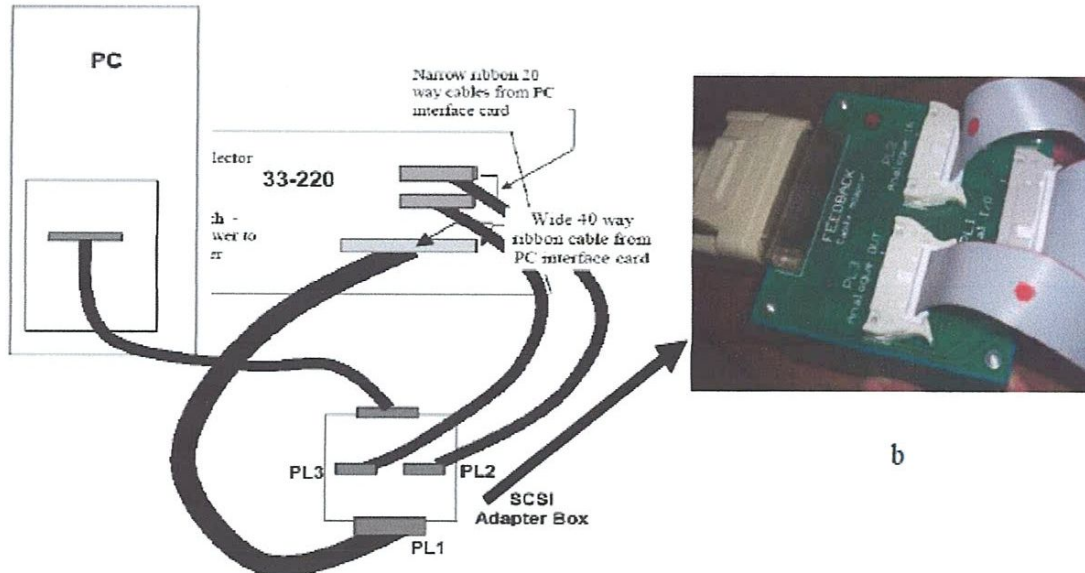


Figure I.11 : Branchement des différents connecteurs

### I.4.8 Carte d'acquisition ADVANTECH PCI 1711 [pci1711]

C'est une carte d'acquisition universelle qui s'installe sur le port PCI du PC de commande et dispose de connecteurs extérieurs pour des entrées/sorties analogiques et digitales. Ces principales caractéristiques sont :

- La fonction Plug & Play.
- 16 entrées analogiques configurables 16 simples (single-ended) ou source flottante.
- Convertisseurs A/D industriels normalisés à approximations successives.

- 12 bits utilisés pour la conversion des entrées analogiques.
- La fréquence maximale d'échantillonnage est de 100KHz.
- Gamme des entrées analogiques programmables est contrôlable par software.
- Chaque canal dispose de sa gamme individuelle stockée dans la RAM de la carte.
- 2 sorties analogiques (convertisseurs D/A).
- 16 canaux d'entrées digitales.
- 16 canaux de sorties digitales.
- Un compteur / timer programmable.
- Scan automatique des gains /canaux.
- Son principal rôle dans notre application est de permettre la commande digitale d'un système continu à travers un PC, en convertissant les signaux analogiques en numériques et vice-versa. Dans notre cas, on utilise :
  - Deux sorties analogiques (convertisseur D/A) pour délivrer les tensions de commande de références ;
  - Les entrées digitales des deux encodeurs optiques pour mesurer l'angle d'élévation et d'azimut de la poutre.
  - Deux entrées analogiques (convertisseur A/D) pour récupérer le retour tachymétrique des deux moteurs.

### I.5. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les principales composantes d'hélicoptère et son Principe de fonctionnement. Ensuite nous avons fait une brève description du simulateur TRMS d'un hélicoptère. Notre système est non-linéaire et instable, Dans ce cas le chapitre suivant a conduit à une modélisation et linéarisation du simulateur d'hélicoptère TRMS

## Chapitre II : Modélisation et linéarisation de TRMS

### II.1 Introduction

L'analyse du comportement dynamique d'un système passe nécessairement par la recherche de l'ensemble des relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie de celui-ci. Cet ensemble constitue un modèle mathématique exprimant la dynamique du système sous forme d'équations différentielles ordinaires, à dérivées partielles, ou d'équations aux différences. La construction d'un modèle mathématique peut s'effectuer par application des lois usuelles de la physique, ce modèle est alors dit « modèle de connaissance ». Cependant, en automatique, il arrive que, pour un manque d'informations disponibles sur le système, on se contente de reproduire le comportement entrée/sortie du système à partir de données expérimentales en considérant ce dernier comme une boîte noire. On parle alors d'identification.

On désire, toutefois, que le modèle puisse prévoir au mieux le comportement du système aux diverses excitations (commandes, perturbations ...). Ainsi, plus il est détaillé plus il est fidèle au système. Néanmoins, cela engendre une complication de l'étude et de la synthèse d'éventuelles lois de commande. Un compromis doit alors être fait en passant par des hypothèses simplificatrices afin de pouvoir répondre aux contraintes pratiques.

Dans ce chapitre, nous commencerons par une modélisation du simulateur d'un hélicoptère TRMS Présenté dans le chapitre précédent, on terminera par quelques simulations. [4]

### II.2 Dynamique modèle de la Platform (Rotor principal, Rotor de queue):

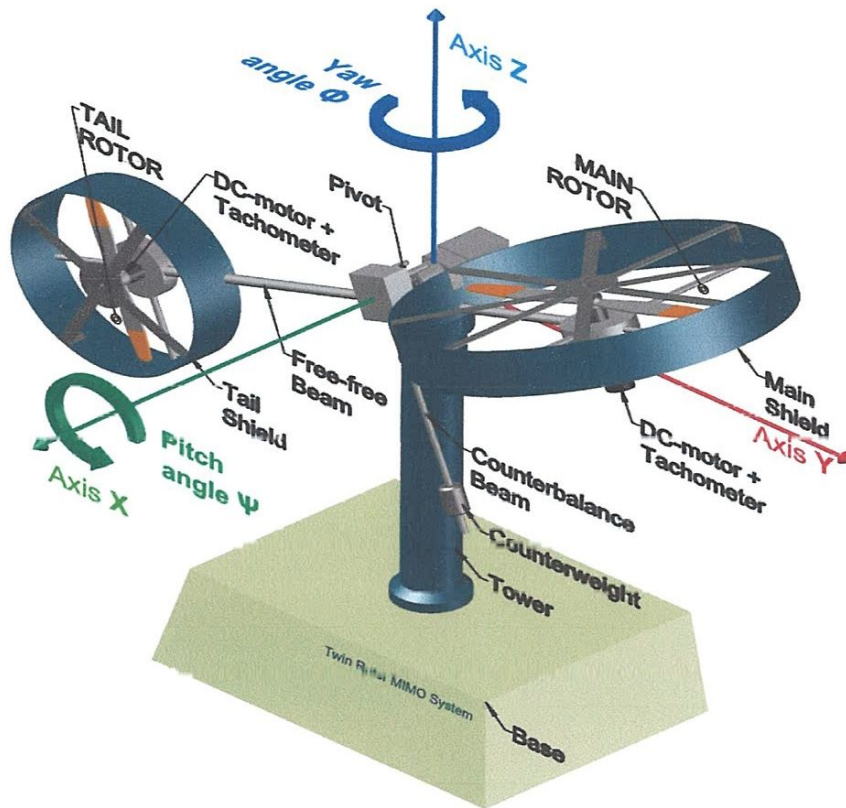


Figure II.1 TRMS modèle phénoménologique

Le modèle mathématique dérivé de modèle phénoménologique de la **Figure II.1** est non linéaire dans la nature qui signifie au moins un des membres (ou la position actuelle du rotor) est un argument de fonction non linéaire. Afin de concevoir le contrôleur pour contrôler le vol des TRMS, le modèle mathématique doit être linéarisés.

### II.3. Rotor principal :

Les pales du rotor principal voir **Figure II.2** sont généralement entraînées par le moteur au moyen d'une boîte de transmission, appelée par son acronyme BTP (boîte de transmission principale). Cependant on a aussi essayé d'utiliser la force de réaction des gaz d'échappement en extrémité des pales.

Elles ont un profil asymétrique ou symétrique, et agissent en rotation suivant le même principe que les ailes d'un avion. Le rotor tournant toujours à vitesse angulaire constante, c'est la variation de l'angle d'incidence des pales (angle formé entre la corde de la pale et le vent

relatif) qui provoque une modification du comportement du rotor. Cette action sur le « pas cyclique » est utilisée pour contrôler l'assiette de l'aéronef. Pour cabrer par exemple, il faut que le rotor induise un moment à cabrer. On modifie donc l'incidence des pales de sorte que la portance de celles-ci soit maximale au passage à l'avant de l'appareil, et minimale à l'arrière de l'appareil. L'incidence des pales varie donc de manière sinusoïdale selon leur position sur un tour du rotor. Cette variation d'incidence est donc utilisée pour les variations en tangage et en roulis. Elle est contrôlée par le pilote à l'aide du manche cyclique (l'équivalent du manche à balai sur un avion). L'autre manière de contrôler l'incidence des pales est réalisée au moyen du levier de commande du pas général (aussi appelé « pas collectif »), contrôlé par la main gauche du pilote. La variation d'incidence est dans ce cas identique pour toutes les pales quelle que soit leur position (avançant, reculant...) et permet de contrôler la portance générale générée par le rotor (pour prendre de l'altitude ou descendre). [5]



**Figure II.2 : Rotor Principale**

Selon la définition de rotor principal en a deux model dynamique (mathématique):

### II.3.1. le plan vertical :

le modèle mathématique non linéaire dans le **plan vertical**  $\psi$  (the pitch angle) est donné comme :

$$I_1 \ddot{\psi} = a_1 \tau_1^2 \text{sign}(\tau_1) + b_1 \tau_1 - M_g \sin \psi - B_{1\psi} \dot{\psi} - B_{2\psi} \text{sign}(\dot{\psi}) - K_{gy} (a_1 \tau_1^2 \text{sign}(\tau_1) + b_1 \tau_1) \dot{\psi} \cos(\psi) \quad (\text{I.1})$$

$a_1 \tau_1^2 \text{sign}(\tau_1) + b_1 \tau_1$	Caractéristique statique non linéaire
$M_g \sin \psi$	L'élan de la gravité
$B_{1\psi} \dot{\psi} - B_{2\psi} \text{sign}(\dot{\psi})$	La force de frottement dynamique
$K_{gy}(a_1 \tau_1^2 \text{sign}(\tau_1) + b_1 \tau_1) \dot{\phi} \cos(\psi)$	Élan gyroscopique

### II.3.2 Moteur 1 :

Le comportement dynamique du " **Moteur 1** " est décrite par une fonction de transfert du premier ordre :

$$\tau_1 = \frac{k_1}{T_{11}s + T_{10}} u_1 \quad (I.2)$$

### II.4. Rotor de queue (Rotor anti-couple.)

Le mouvement du rotor principal génère un couple de réaction qui a tendance à faire tourner la cellule autour de son axe, et en sens inverse (3<sup>e</sup> loi de Newton). Pour contrer cet effet indésirable, on place (pour les hélicoptères à un seul rotor principal), à l'extrémité de la poutre de queue un rotor secondaire plus petit et tournant dans un plan sensiblement vertical appelé « rotor anti couple » (ou RAC) voir **Figure II.3**. La présence de ce RAC est inutile sur un hélicoptère à principe contrarotatif, c'est-à-dire constitué de deux rotors principaux l'un au-dessus de l'autre et tournant en sens opposés, annulant ainsi l'effet de couple. Le couple de réaction variant en fonction de l'incidence des pales du rotor principal (la résistance au vent est d'autant plus grande que l'angle que forme celui-ci avec la corde des pales augmente). La force à appliquer doit elle aussi pouvoir être réglée par l'intermédiaire du rotor anti couple qui est commandé par deux pédales (le « palonnier ») situées aux pieds du pilote. Selon le sens dans lequel le pilote agit sur le palonnier (enfoncement de la pédale gauche ou de la pédale droite) il augmente l'incidence des pales du RAC, ce qui va davantage contrer le couple du rotor principal (« tirer » la queue), ou il diminue cette incidence et qui aura pour effet de laisser « filer » celle-ci.

Le mouvement de giration en vol stationnaire est commandé à l'aide du palonnier. Selon que le rotor principal tourne dans le sens horaire comme sur les hélicoptères de conception

française, soviétique et russe; ou en sens anti-horaire comme c'est le cas des hélicoptères de conception américaine, britannique, italienne ou, le rotor anti-couple sera situé d'un côté ou de l'autre de la poutre de queue ou bien son souffle sera dirigé dans un sens ou dans l'autre, s'il est encastré dans un fenestron. [6]



**Figure II.3 Rotor anti-couple**

Selon la définition de Rotor de queue (Rotor anti-couple.) en a deux model dynamique :

### II.4.1 Plan horizontal

L'équation mathématique dans le plan horizontal  $\varphi$  définit l'angle de lacet (yaw angle) est donnée comme :

$$I_2 \ddot{\varphi} = a_2 \tau_2^2 \text{sign}(\tau_2) + b_2 \tau_2 - B_{1\varphi} \dot{\varphi} - B_{2\varphi} \text{sign}(\dot{\varphi}) - M_R \quad (\text{I.3})$$

Ou

$$M_R = \frac{k_c(T_0 s + 1)}{(T_p s + 1)} \tau_1 \quad (\text{I.4})$$

$$a_2 \tau_2^2 \text{sign}(\tau_2) + b_2 \tau_2$$

Caractéristique statique non linéaire

$$B_{1\varphi} \dot{\varphi} + B_{2\varphi} \text{sign}(\dot{\varphi})$$

La force de frottement dynamique

$M_R$  :

La croix est l'élan de réaction



### II.4.2 Moteur 2

Le comportement dynamique du "moteur 2" est décrite de façon similaire à la dynamique du "moteur 1" que :

$$\tau_2 = \frac{k_2}{T_{21}s + T_{20}} u_2 \quad (I.5)$$

Parametre	Valeur
I <sub>1</sub> -Moment d'inertie du rotor vertical	6.8*10 <sup>-2</sup> kg*m <sup>2</sup>
I <sub>2</sub> - Moment d'inertie du rotor horizontal	2*10 <sup>-2</sup> kg*m <sup>2</sup>
a <sub>1</sub> -Paramètre caractiristique statique	0.0135
b <sub>1</sub> -Paramètre caractiristique statique	0.0924
a <sub>2</sub> -Paramètre caractiristique statique	0.02
b <sub>2</sub> - Paramètre caractiristique statique	0.09
M <sub>g</sub> - moment de gravity	0.32 N*m
B <sub>1ψ</sub> - Paramètre de fonction de momentde frottement	6*10 <sup>-3</sup> N*m*s/rad
B <sub>2ψ</sub> - Paramètre de fonction de moment de frottement	1*10 <sup>-3</sup> N*m*s <sup>2</sup> /rad
B <sub>1φ</sub> -Paramètre de fonction de moment de frottement	1*10 <sup>-1</sup> N*m*s/rad
B <sub>2φ</sub> -Paramètre de fonction de moment de frottement	1*10 <sup>-2</sup> N*m*s <sup>2</sup> /rad
k <sub>gy</sub> -paramètre de moment gyroscopique	0.05 s/rad
K <sub>1</sub> - gain de moteur 1	1.1
K <sub>2</sub> - gain de moteur 1	0.8
T <sub>11</sub> - Moteur 1 denominateur parametre	1.1
T <sub>10</sub> - Moteur 1 denominateur parametre	1
T <sub>21</sub> - Moteur 1 denominateur parametre	1
T <sub>20</sub> - Moteur 1 denominateur parametre	1
T <sub>p</sub> - Paramètre de moment de réaction croisée	2
T <sub>0</sub> - Paramètre de moment de réaction croisée	3.5
k <sub>c</sub> -gain de moment de réaction croisée	-0.2

**Tableau II.1 : Paramètre nominal du système**

## II.5. Modèle linéarisé

Le modèle mathématique donnée par les équations (1) jusqu'à (5) ne sont pas linéaires et afin de concevoir un contrôleur robuste, le modèle devrait être linéarisés. La première étape de la technique de linéarisation est de trouver le point d'équilibre de la façon suivante :

$$\ddot{\psi} = \frac{(a_1 \tau_1^2 \text{sign}(\tau_1) + b_1 \tau_1 - M_g \sin \psi - B_{1\psi} \dot{\psi} - B_{2\psi} \text{sign}(\dot{\psi}) - K_{gy} (a_1 \tau_1^2 \text{sign}(\tau_1) + b_1 \tau_1) \dot{\psi} \cos(\psi))}{I_1} \quad (\text{I.6})$$

$$\dot{\tau}_1 = -\frac{T_{10}}{T_{11}} \tau_1 + \frac{k_1}{T_{11}} u_1 \quad (\text{I.7})$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{a_2 \tau_2^2 \text{sign}(\tau_2) + b_2 \tau_2 - B_{1\varphi} \dot{\varphi} - B_{2\varphi} \text{sign}(\dot{\varphi}) - M_R}{I_2} \quad (\text{I.8})$$

$$\dot{M}_R = \frac{1}{T_p} \left( k_c \quad k_c \cdot \frac{T_0 \cdot T_{10}}{T_{11}} \right) \tau_1 + k_c \cdot \frac{T_0 \cdot k_1}{T_p T_{11}} u_1 - \frac{M_R}{T_p} \quad (\text{I.9})$$

$$\dot{\tau}_2 = -\frac{T_{20}}{T_{21}} \tau_2 + \frac{k_1}{T_{21}} u_2 \quad (\text{I.10})$$

Supposons maintenant :

$$\psi = X_1$$

$$\varphi = X_2$$

$$\tau_1 = X_3$$

$$\tau_2 = X_4$$

$$M_R = X_5$$

$$\dot{\psi} = X_6$$

$$\dot{\varphi} = X_7$$

Les équations (6) à (10) peuvent être représentées avec l'espace d'état variable :

$$\dot{X}_1 = X_6 \quad (\text{I.11})$$

$$\dot{X}_2 = X_7 \quad (\text{I.12})$$

$$\dot{X}_3 = -\frac{T_{10}}{T_{11}} X_3 + \frac{k_1}{T_{11}} u_1 \quad (\text{I.13})$$

$$\dot{X}_4 = -\frac{T_{20}}{T_{21}} X_4 + \frac{k_2}{T_{21}} u_2 \quad (\text{I.14})$$

$$\dot{X}_5 = \frac{1}{T_p} \left( k_c - k_c \frac{T_0 \cdot T_{10}}{T_{11}} \right) X_3 + k_c \frac{T_0 \cdot k_1}{T_p T_{11}} u_1 - \frac{X_5}{T_p} \quad (\text{I.15})$$

$$\dot{X}_6 = \frac{a_1 X_3^2 \text{sign}(X_3) + b_1 X_3 - M_g \sin X_1 - B_{1\psi} X_6 - B_{2\psi} \text{sign}(X_6) - K_{gy} (a_1 X_3^2 \text{sign}(X_3) + b_1 X_3) X_7 \cos(X_1)}{I_1} \quad (\text{I.16})$$

$$\dot{X}_7 = \frac{a_2 X_4^2 \text{sign}(X_4) + b_2 X_4 - B_{1\varphi} X_7 - B_{2\varphi} \text{sign}(X_7) - X_5}{I_2} \quad (\text{I.17})$$

Maintenant, on applique les séries de Taylor pour trouver le point d'équilibre. Pour ce faire, tous dérivés égalent à zéro, dans le cas où les entrées :  $u_1 = 0$  et  $u_2 = 0$ . Ainsi, le point d'équilibre sera :

$$X_{10} = 0 \text{ ou } \pi, X_{20} = 0, X_{30} = 0, X_{40} = 0, X_{50} = 0, X_{60} = 0, X_{70} = 0$$

Les équations non linéaires (I.11) à (I.17) peuvent être représentées dans l'espace d'état donnée comme suit :

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$y = CX + Du$$

Où A, B, C et D peut être trouvée en appliquant la méthode jacobienne. Ainsi, A, B, C et D sont données comme suit:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \\ \dot{X}_5 \\ \dot{X}_6 \\ \dot{X}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{T_{10}}{T_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{T_{20}}{T_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_p} \left( k_c - k_c \frac{T_0 \cdot T_{10}}{T_{11}} \right) & 0 & -\frac{1}{T_p} & 0 & 0 \\ \frac{-M_g}{I_1} & 0 & \frac{b_1}{I_1} & 0 & 0 & \frac{-B_{1\psi}}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b_2}{I_2} & \frac{-1}{I_2} & \frac{-B_{1\varphi}}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{k_1}{T_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{T_{21}} \\ k_c \frac{T_0 \cdot k_1}{T_p T_{11}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{T_{10}}{T_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{T_{20}}{T_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_p} \left( k_c - k_c \frac{T_0 \cdot T_{10}}{T_{11}} \right) & 0 & \frac{1}{T_p} & 0 & 0 \\ \frac{-M_g}{I_1} & 0 & \frac{b_1}{I_1} & 0 & 0 & \frac{-B_1 \psi}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b_2}{I_2} & \frac{-1}{I_2} & \frac{-B_1 \varphi}{I_2} & 0 \end{bmatrix}$$

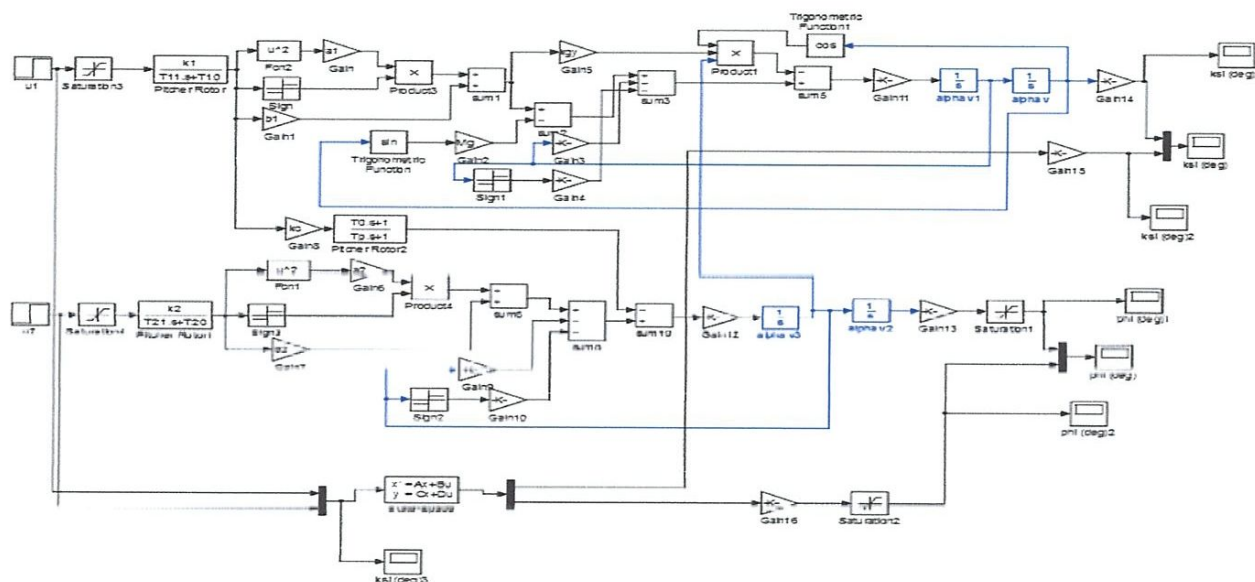
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{k_1}{T_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{T_{21}} \\ k_c \frac{T_0 \cdot k_1}{T_p T_{11}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## II.6. Simulation du modèle :

Il est clair que le modèle est instable en boucle ouverte, alors il est difficile sinon impossible d'identifier le modèle en boucle ouverte. Cependant nous avons réalisé différentes simulations en boucle ouverte avec Simulink voir **Figure II.4**.



**Figure II.4 : Schéma Simulink du TRMS non-linéaire real-model.**

## II.7. Résultats de simulation

Dans ce travail, deux entrées de signal command  $U_1 = 0.8$  et  $U_2 = 0.5$  sont appliquées pour suivre le chemin de TRMS comme montré dans Fig.II.5. La sortie de TRMS va suivre ce signal de référence correspondante. La valeur de signal de référence  $U_1$  et  $U_2$  peut également être modifiée, en fonction de l'exigence, c'est à dire qu'il peut être soit sinusoïdal ou il peut être step ou d'une rampe.

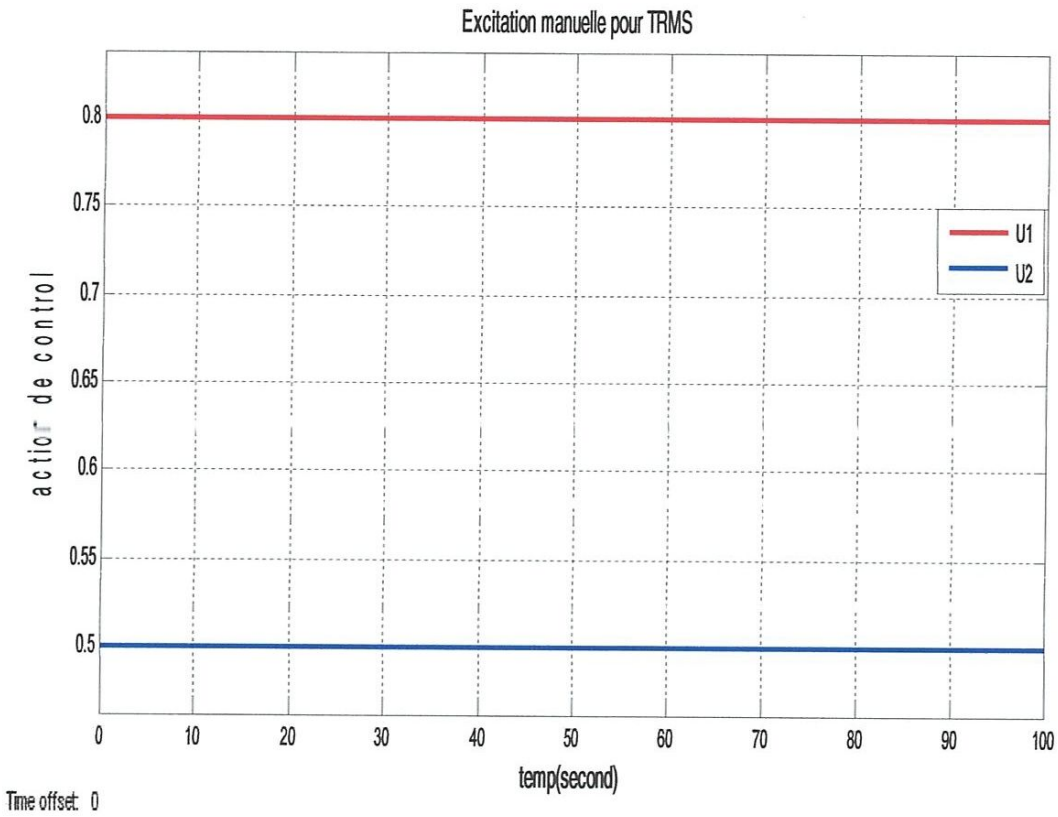


Figure II.5: Les signaux de commande

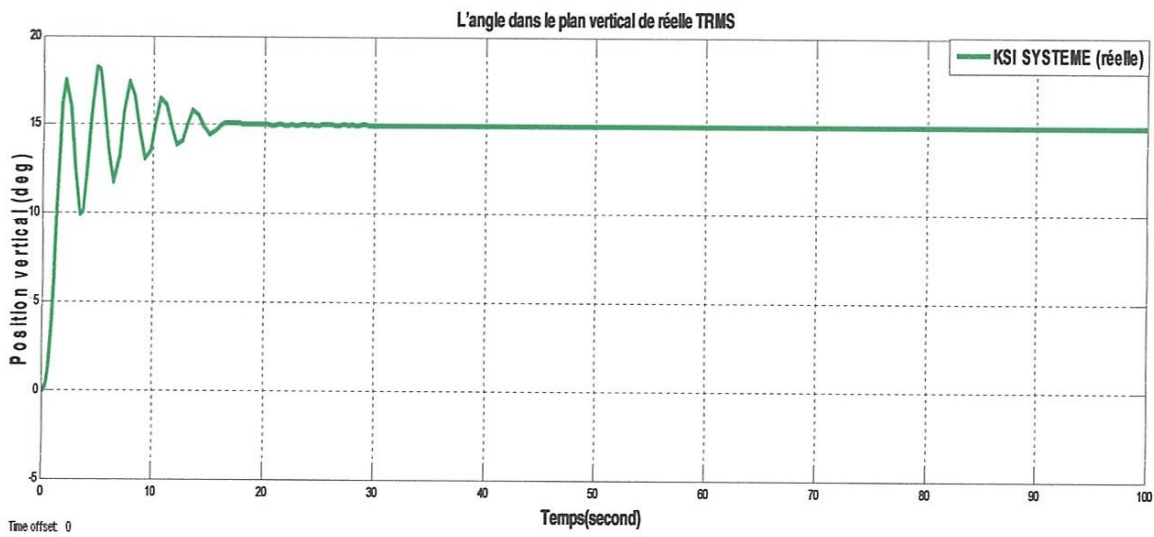
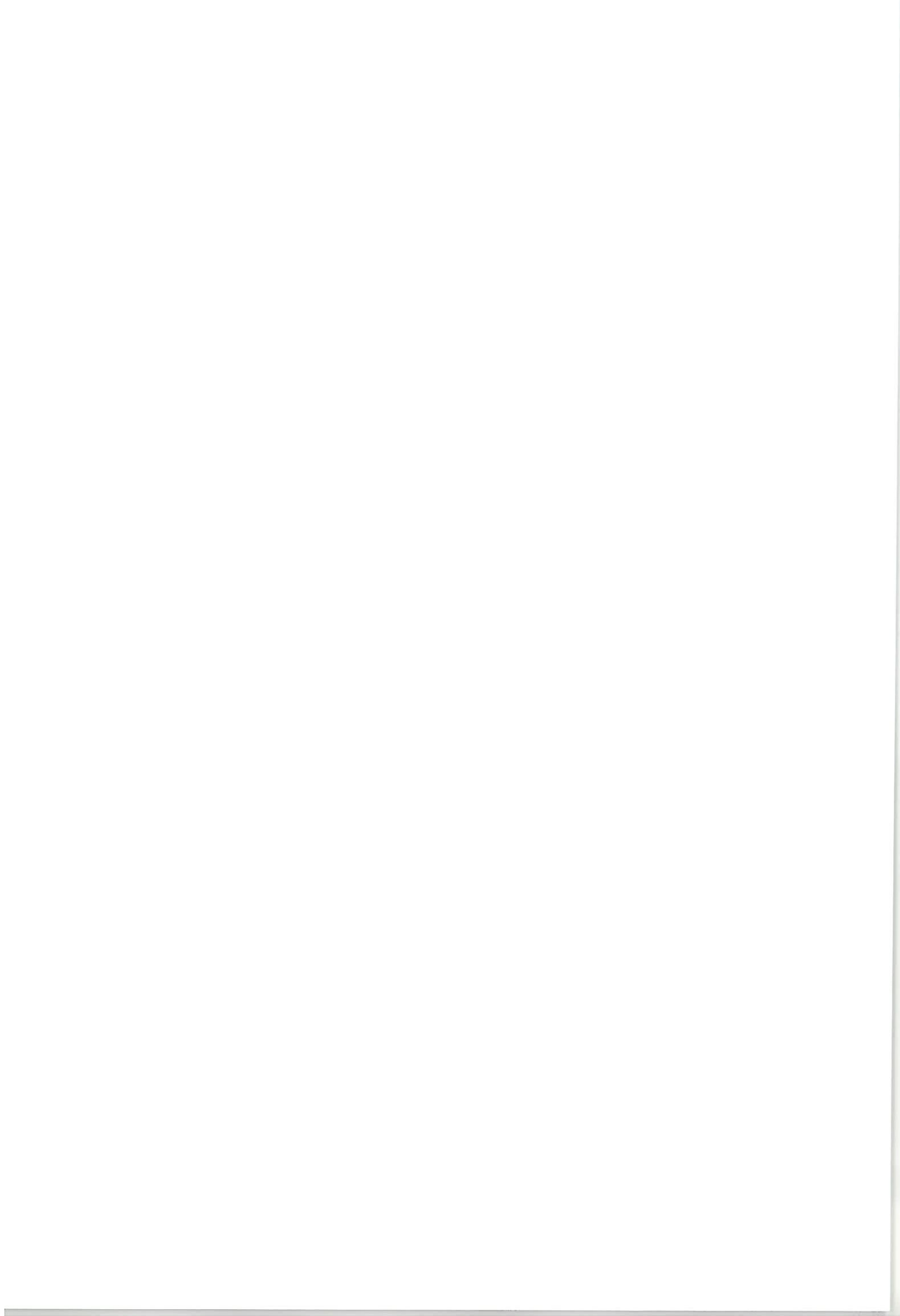
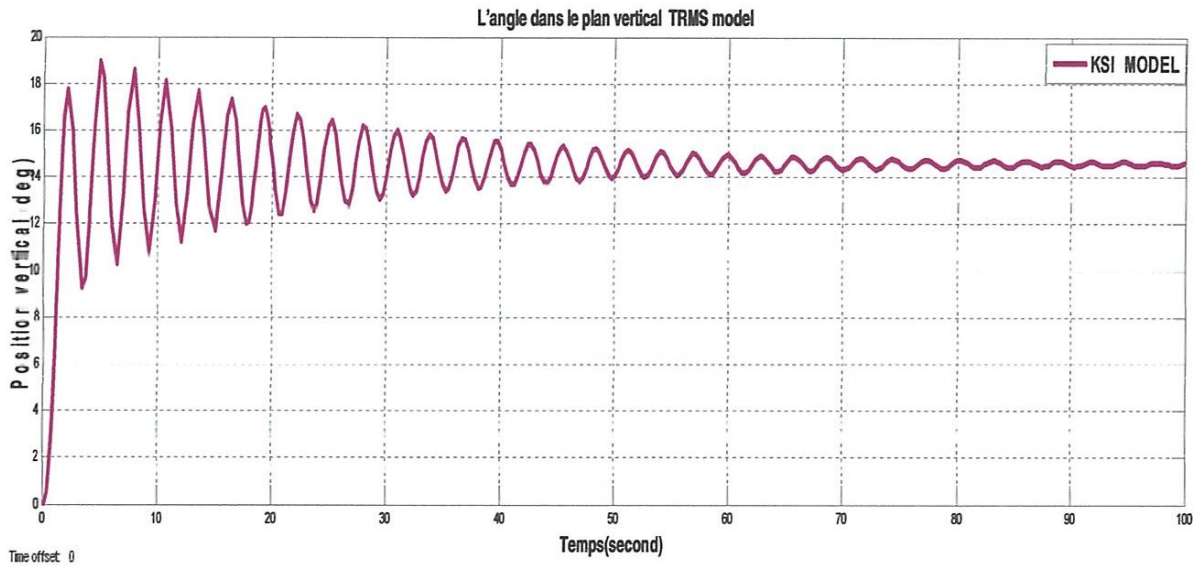


Figure II.6: la sortie obtenue de réelle TRMS "ksi"



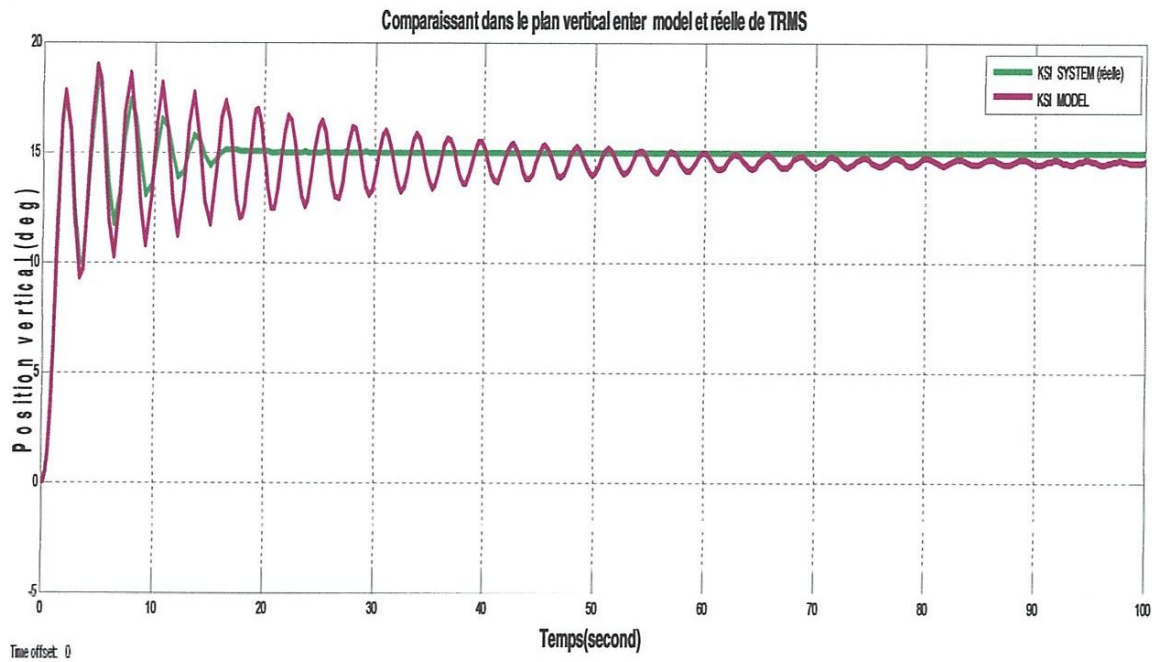
D'après la **figure II.6** on remarque que la réponse temporelle de l'angle vertical (ksi :pitch) du TRMS en boucle ouverte pour une excitation U1 et U2 donné précédemment, il est clair que cette réponse dans l'intervalle [0 15s] est oscillée avec un dépassement  $D=18$  et un temps de réponse =15s, le système prendre une valeur constante égale a 15 degré .



**Figure II.7: la sortie obtenue de model "ksi"**

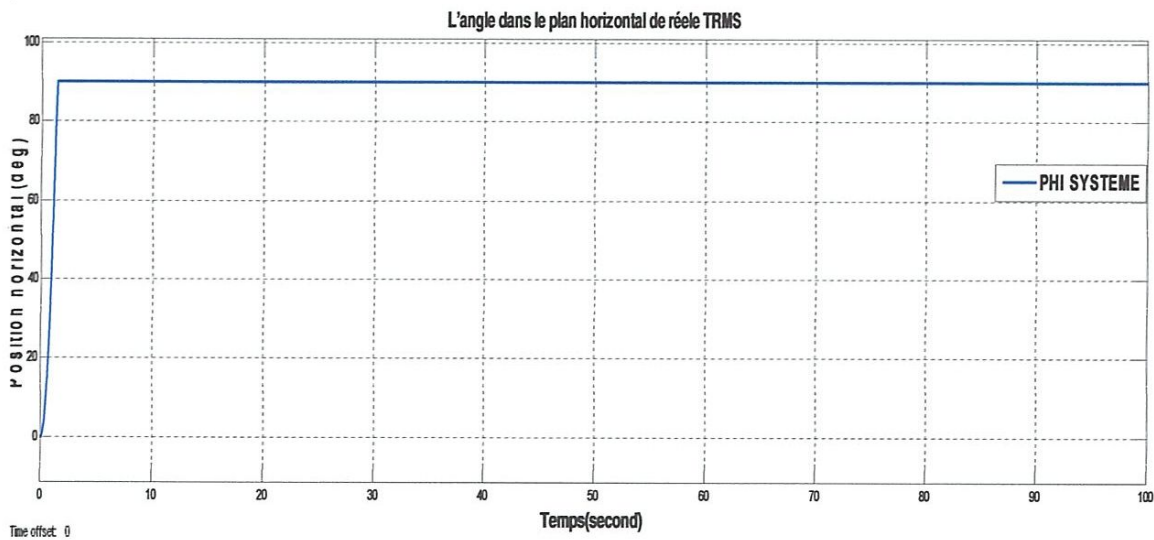
D'après la **figure II.7** on remarque que : le system est oscillé tout le temps avec un dépassement  $D=19$





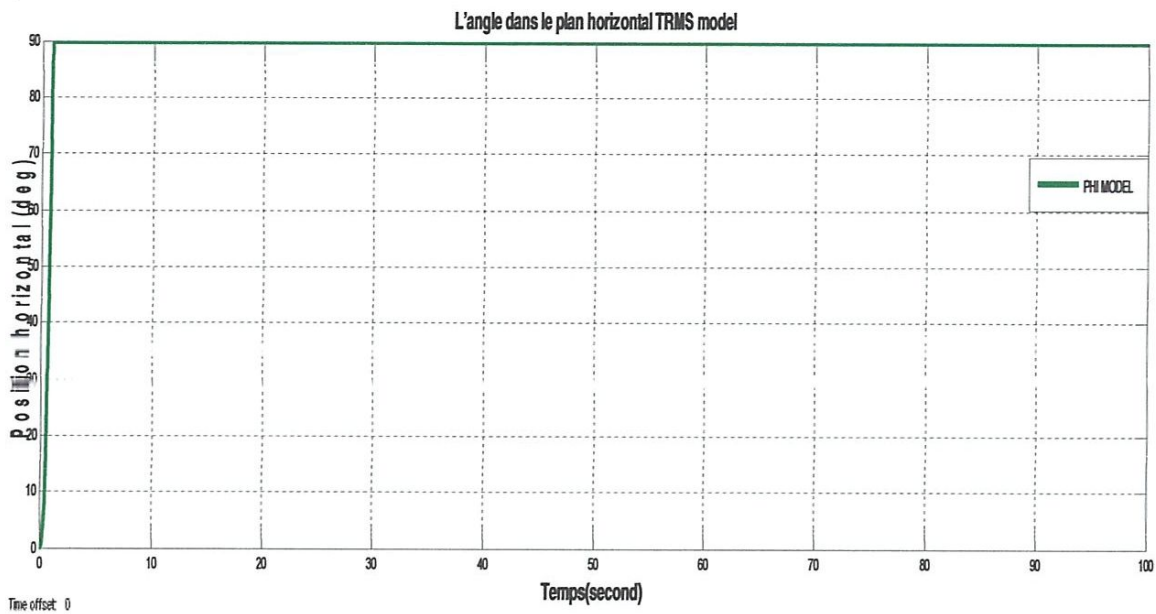
**Figure II.8: Comparaison entre les deux sorties "ksi" de réelle et modèle d'installation des TRMS**

La comparaison dans la **figure II.8** : Les deux systèmes (réels et modèle) dans le plan vertical presque donné même résultat



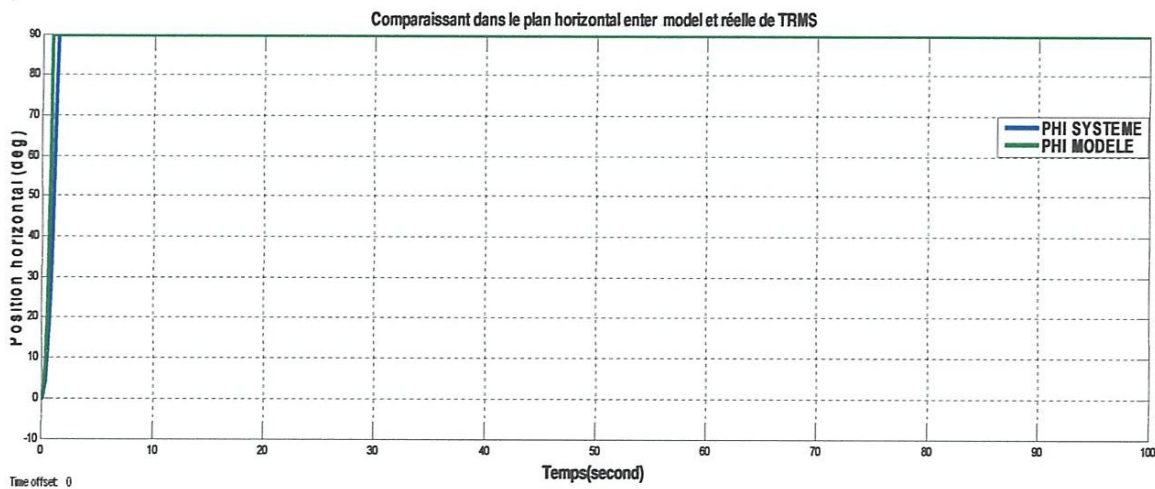
**Figure II.9: la sortie obtenue de réelle TRMS "phi"**

la figure II.9 donné une réponse temporelle de l'angle horizontal (phi :yaw), du TRMS est saturer a un point fixe 90 degré.



**Figure II.10: la sortie obtenue de model "PHI"**

D'après La Figure II.10 Le système est saturer a un point fixe =90 deg



**Figure II.11: Comparaison entre les deux sorties "ksi" de réelle et modèle d'installation des TRMS**

la comparaison dans la **figure II.11** : indiqué que Les deux systèmes (réels et model) dans le plan horizontal donné même résultat saturation en point fixe

### **II.8. Conclusion :**

Dans ce chapitre en a étudié l'identification et modélisation du TRMS, on a commencé par la linéarisation du modèle non-linéaire du TRMS, puis en fait quelque simulation en boucle ouverte par l'excitation du TRMS par U1 et U2 dans les deux modèles (linéaire et non-linéaire), on a trouvé que les réponses du système reste instable dans les deux cas. Pour rendre le système a commandé stable il faut trouver des techniques pour la stabilisation de TRMS, est cela l'objet du chapitre suivant.

## Chapitre III : commande par un contrôleur PID

## III.1 Introduction

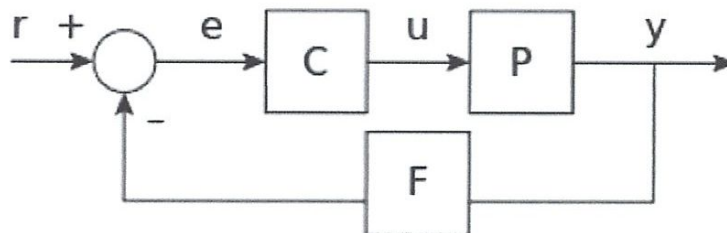
Twin rotor multi input multi output system (TRMS) est considéré comme un simulateur d'un hélicoptère. Le but d'étudier le modèle des TRMS et la conception du contrôleur pour le contrôle de vol d'hélicoptère. Plusieurs modèles ont été proposés pour les TRMS, Le contrôleur PID et le contrôleur de retour d'état optimal basé sur une technique de régulateur quadratique linéaire (LQR) a été conçu pour un système multi-sorti multi-entrées à double rotor. Le contrôleur PID est une méthode bien connue pour les processus de contrôle industriel en raison de sa structure simple. Il contient trois paramètres proportionnels  $K_p$ , intégral  $K_i$ , dérivé  $K_d$ . Pour obtenir un ensemble optimal de paramètres, il est généralement difficile de faire une bonne expérience.

Notre système (TRMS) est non linéaire instable sera stabilisé par (LQR) autour d'un point de fonctionnement donné. Après cette stabilisation par LQR on peut appliquer des contrôleurs est parmi elle le contrôleur PID [7].

## III.2 Les Contrôleurs

Le contrôleur est un dispositif, sous la forme de circuits analogiques ou de circuits numériques qui surveille et modifie le paramètre du système pour obtenir la sortie souhaitée. Les contrôleurs sont essentiellement utilisés si le système ne répond pas aux spécifications de performance souhaitées, à savoir la stabilité et la précision.

Un simple contrôle de retour d'état avec contrôleur est illustré à la **figure III.1**.



**Figure III .1 control avec boucle retour d'état**

Comme le montre la **figure III.1**, le signal d'erreur 'e' est généré, ce qui est une différence entre le signal de référence 'r' et le signal de sortie 'y'. Le signal d'erreur décide de la grandeur par laquelle le signal de sortie s'écarte de la valeur de référence. Selon la valeur de signal

d'erreur, le paramètre du contrôleur 'C' sera changé et l'entrée de contrôle 'u' est appliquée au système, ce qui donnera une sortie satisfaisante.

Pour un système MIMO, elle nécessite plusieurs contrôleurs. Si le système est système SISO avec une seule entrée et une sortie unique, il ne nécessite qu'un seul contrôleur à des fins de contrôle. Selon la configuration du système physique (ou non physique), le réglage de la variable d'entrée du système (en supposant qu'il s'agisse de MIMO) affectera le paramètre de fonctionnement, autrement appelé variable de sortie contrôlée. La notion de contrôleurs peut être étendue à des systèmes plus complexes. Les systèmes naturels et les systèmes fabriqués par l'homme nécessitent tous deux un contrôleur pour un bon fonctionnement, [8].

### III.3 Types de contrôleurs [9]

Il existe différents types de contrôleurs qui peuvent être utilisés pour améliorer les spécifications de performance du système. Fondamentalement, tous les contrôleurs peuvent être classés en deux catégories, retour d'état (feedback) et contrôleur avancé (feed-forward). Cependant, le contrôle de feedback entraîne habituellement des périodes intermédiaires où la variable contrôlée n'est pas à la consigne souhaitée. Le contrôle de feed-forward peut éviter la lenteur du contrôle de feedback. Les perturbations sont mesurées et comptabilisées avant d'avoir le temps d'affecter le système.

Les contrôleurs peuvent être largement classés comme :

- a. Contrôleur proportionnel
- b. Proportionnel - contrôleur intégral
- c. Proportionnel - contrôleur dérivé
- d. Proportionnel - contrôleur dérivé intégral
- e. Contrôleur de positionnement de pôles
- f. Contrôleur optimal

Les quatre premiers contrôleurs sont les contrôleurs de feedback et le sixième est un contrôleur de retour d'état complet.

Le contrôleur de positionnement de pôles est un contrôleur de feedback qui est utilisé pour placer les pôles en boucle fermée à l'emplacement désiré dans le plan  $s$ . Mais le positionnement des pôles ne peut être utilisé que pour le système SISO.

Pour le système MIMO, le problème de la surabondance des paramètres de conception est confronté. Pour de tels systèmes, nous ne savons pas comment déterminer tous les paramètres de conception, car seul un nombre limité d'entre eux pouvaient être trouvés dans les emplacements des pôles en boucle fermée. Le contrôle optimal fournit la technique par laquelle tous les paramètres de conception peuvent être trouvés mêmes pour un système multi-entrée et multi-sortie. De plus, dans la technique de mise en poteau, certaines procédures d'essai et d'erreur avec les emplacements des poteaux étaient requises car nous ne savons pas avant quel emplacement de pôle donnera une performance satisfaisante.

Un contrôle optimal nous permet de formuler directement l'objectif de performance d'un système de contrôle et d'obtenir une réponse souhaitée. Un contrôle optimal minimise le temps et le coût requis pour la conception du système.

### III.3.1 Contrôleurs PID

Appelé aussi **correcteur PID** (proportionnel, intégrateur, dérivateur ou proportionnel, intégral, dérivé) est un système de contrôle, permettant d'effectuer un asservissement en boucle fermée d'un système industriel ou « procédé ». C'est le régulateur le plus utilisé dans l'industrie, et il permet de régler un grand nombre de grandeurs physiques.

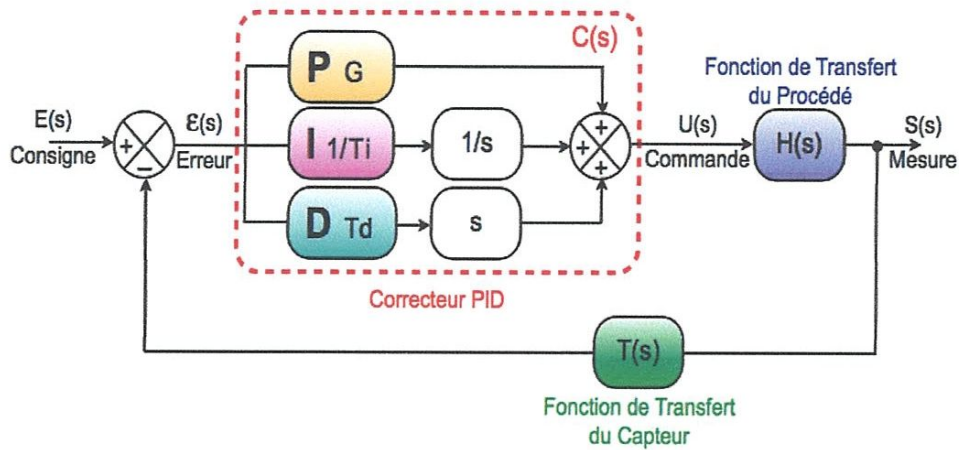
#### III.3.1.1 Principe générale

Un correcteur est un algorithme de calcul qui délivre un signal de commande à partir de la différence entre la consigne et la mesure.

Le correcteur PID agit de trois manières :

- action **proportionnelle** : l'erreur est multipliée par un gain  $G$ .
- action **intégrale** : l'erreur est intégrée et divisée par un gain  $T_i$ .
- action **dérivée** : l'erreur est dérivée et multipliée par un gain  $T_d$ .

Il existe plusieurs architectures possibles pour combiner les trois effets (série, parallèle ou mixte), on présente ici une architecture parallèle :



**Figure III.2 architecture parallèle de PID**

Sur le schéma ci-dessus (**Figure III.2**), la fonction de transfert exprimée dans le domaine de Laplace (où P désigne la variable de Laplace, de dimension  $[T^{-1}]$ , dans la suite de l'article cette notation anglo-saxonne est remplacée par P) du régulateur PID parallèle est la somme des trois actions :

$$C(p) = G + \frac{1}{T_i} \cdot \frac{1}{p} + T_d \cdot p \quad (\text{III.1})$$

En régulation des procédés, on préfère implanter la fonction de transfert du PID sous la forme mixte :

$$C(p) = G \left( 1 + \frac{1}{\tau_{i,p}} \cdot + \tau_{d,p} \cdot p \right) \quad (\text{III.2})$$

où  $\tau_i$  et  $\tau_d$  sont des constantes de temps (différentes de  $T_i$  et  $T_d$  dans la formulation précédente) et  $G$  est le gain de la partie proportionnelle.

Les différents paramètres à trouver sont  $G$ ,  $\tau_d$  et  $\tau_i$  pour réguler la grandeur physique du procédé ayant pour fonction de transfert  $H(s)$ . Il existe de nombreuses méthodes pour trouver ces paramètres. Cette recherche de paramètre est communément appelée synthèse.

La fonction de transfert du contrôleur PID présenté est idéale. En fait, elle est irréalisable car le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur. Dans la réalité, on filtre toujours l'action dérivée comme suit :

$$\tau_d \rightarrow \frac{\tau_d \cdot P}{1 + \frac{\tau_d}{N} \cdot P} \quad \text{Avec } N > 1 \text{ On obtient alors une nouvelle fonction de transfert réalisable}$$



pour notre régulateur. Le choix de  $N$  résulte d'un compromis : pour  $N$  très grand, l'action dérivée n'est pratiquement plus filtrée, ce qui se traduit par une grande sensibilité du signal de commande par rapport au bruit de mesure. Si l'on prend  $N$  trop petit, l'effet de l'action dérivée devient quasiment inexistante. Une étude théorique permet de préciser que  $3 < N < 10$ .

### III.3.1.2 Réglage d'un PID

Le réglage d'un PID consiste à déterminer les coefficients  $G$ ,  $\tau_d$  et  $\tau_i$  afin d'obtenir une réponse adéquate du procédé et de la régulation.

Les objectifs sont d'être robustes, rapide et précis. Il faut pour cela :

- dans le cas d'un fonctionnement en mode de régulation (consigne fixe) choisir des réglages permettant à la grandeur réglée de retourner dans un temps raisonnable à sa valeur de consigne.
- dans le cas de fonctionnement de la boucle en mode d'asservissement (consigne variable), choisir des réglages permettant de limiter le ou les éventuels dépassements (overshoot) de la grandeur réglée.
- la robustesse est sans doute le paramètre le plus important et délicat. On dit qu'un système est robuste si la régulation fonctionne toujours même si le modèle change un peu. Par exemple, les fonctions de transfert de certains procédés peuvent varier en fonction de la température ambiante ou de l'hygrométrie ambiante relativement à la loi de Pascal. Un régulateur doit être capable d'assurer sa tâche même avec ces changements afin de s'adapter à des usages non prévus/testés (dérive de production, vieillissement mécanique, environnements extrêmes...).
- la rapidité du régulateur dépend du temps de montée et du temps d'établissement du régime stationnaire.
- le critère de précision est basé sur l'erreur statique (ou de statisme).

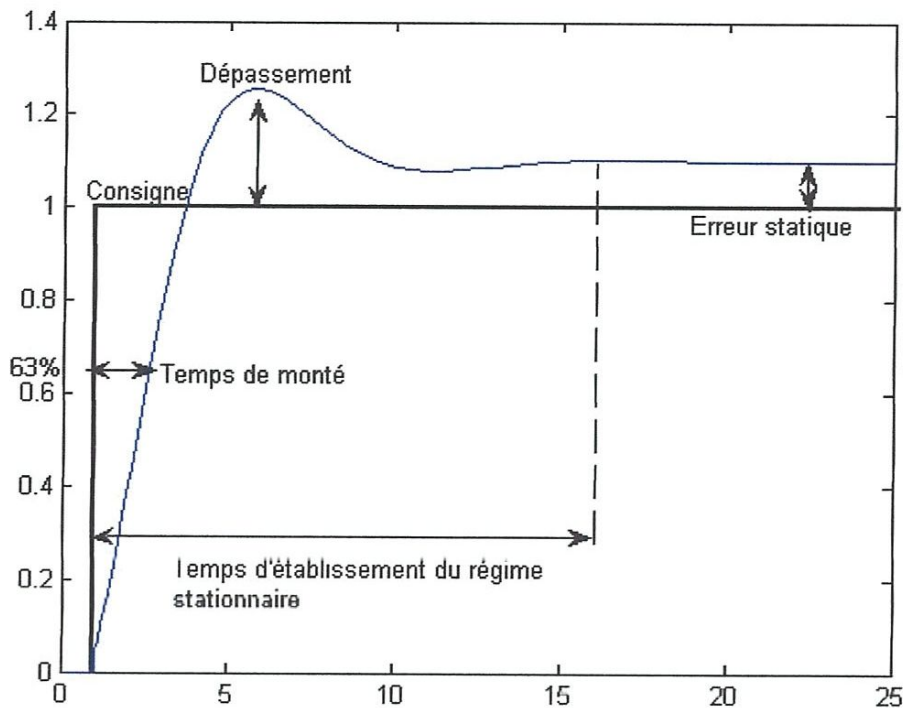


Figure III.3 : La réponse d'un procédé stable

Dans le cas des systèmes simples, les paramètres du PID influencent la réponse du système (Figure III.3) de la manière suivante :

- **G** : lorsque **G** augmente, le temps de montée (rise time) est plus court mais il y a un dépassement plus important. Le temps d'établissement varie peu et l'erreur statique se trouve améliorée.
- **$\tau_i$**  : lorsque  $\frac{1}{\tau_i}$  augmente, le temps de montée est plus court mais il y a un dépassement plus important. Le temps d'établissement au régime stationnaire s'allonge mais dans ce cas on assure une erreur statique nulle. Donc plus ce paramètre est élevé, plus la réponse du système est ralentie.
- **$\tau_d$**  : lorsque  **$\tau_d$**  augmente, le temps de montée change peu mais le dépassement diminue. Le temps d'établissement au régime stationnaire est meilleur. Pas d'influences sur l'erreur statique. Si ce paramètre est trop élevé dans un premier temps il stabilise le système en le ralentissant trop mais dans un deuxième temps le régulateur anticipe trop et un système à temps mort élevé devient rapidement instable.

	Précision	stabilité	rapidité
P	↗	↘	↗
I	↗	↘	↘
D	↘	↗	↗

**Tableau III.1 : récapitulatif de l'influence d'un PID série sur le système qu'il corrige si l'on augmente séparément l'action proportionnelle (P), intégrale(I) ou dérivée (D)**

Pour ces trois paramètres, le réglage au-delà d'un seuil trop élevé a pour effet d'engendrer une oscillation du système de plus en plus importante menant à l'instabilité.

L'analyse du système avec un PID est très simple mais sa conception peut être délicate, voire difficile, car il n'existe pas de méthode unique pour résoudre ce problème. Il faut trouver des compromis, le régulateur idéal n'existe pas. En général, on se fixe un cahier des charges à respecter sur la robustesse, le dépassement et le temps d'établissement du régime stationnaire.

Les méthodes de réglage les plus utilisées en théorie sont les méthodes de Ziegler-Nichols (en boucle ouverte et boucle fermée), la méthode de P. Naslin (polynômes normaux à amortissement réglable), la méthode du lieu de Nyquist inverse (utilise le diagramme de Nyquist). Le diagramme de Black permet d'en constater très visuellement les effets.

Dans la pratique, les professionnels utilisent soit l'identification par modèle de Broïda pour les systèmes stables ou le modèle intégrateur retardé pour les systèmes instables soit la méthode par approches successives, qui répond à une procédure rigoureuse : on règle d'abord l'action P seule pour avoir un dépassement de 10 à 15 % puis l'action dérivée de façon à « raboter » au mieux le dépassement précédent, enfin on ajuste si nécessaire l'action intégrale en se fixant un dépassement final compris entre 5 et 10 %.

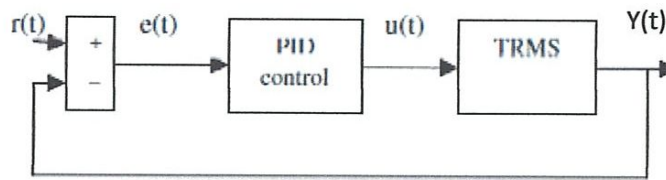
Il existe aussi une méthode qui, en supposant connue la fonction de transfert  $H(p)$  du système, permet de déterminer un régulateur PID robuste dans le sens où la marge de phase et la pulsation au gain unité (donc la marge de retard) sont fixées à l'avance (lorsqu'une solution existe).

Dans certains cas, les performances d'un PID peuvent devenir insuffisantes, en raison par exemple de la présence d'un retard trop important ou d'un procédé à phase non minimale,

posant des problèmes de stabilité. On fait alors appel à d'autres algorithmes de réglage (notamment : régulateur PIR ou à modèle interne ou à retour d'état).

### III.3.1.3 La configuration du contrôleur PID MIMO :

La configuration de base des contrôleurs PID du système MIMO est illustrée à la **Figure III.4**. Où  $r(t)$  est le vecteur du point de consigne du contrôleur,  $e(t)$  est le signal d'erreur vecteur,  $u(t)$  est le vecteur de sortie du contrôleur, et  $y(t)$  est le vecteur de sortie du processus respectivement. [7]



**Figure III.4 : Schéma de contrôle PID de TRMS**

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (\text{III.3})$$

Où

$K_p$  : Gain proportionnel

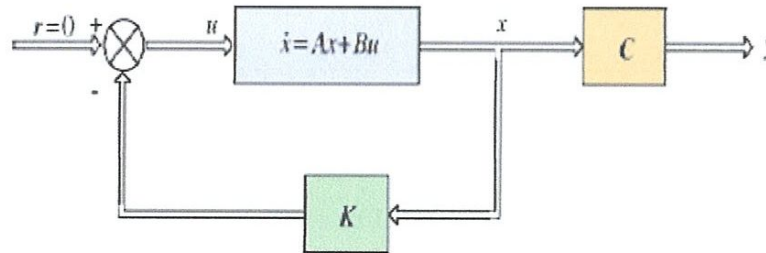
$K_i$  : Gain intégral

$K_d$  : Gain dérivé

### III.3.2 Régulateur quadratique linéaire (LQR)

Le principe du contrôle optimal est essentiellement axé sur l'exploitation d'un système dynamique à un coût minimal. Le système dont la dynamique est donnée par l'ensemble des équations différentielles linéaires et le coût par fonction quadratique appelé problème quadratique linéaire (LQ). Le réglage d'un contrôleur qui régit une machine ou un processus est fondamentalement trouvé par un algorithme mathématique qui minimise la fonction de coût, consistant en des facteurs de pesée. Les algorithmes mathématiques sont fondamentalement une fonction objective qui doit être minimisée dans le processus de conception.

La fonction d'objectif de coût pour un contrôle optimal doit être intégrée dans le temps de la somme de l'énergie de contrôle et de l'énergie transitoire exprimée en fonction du temps. Si l'énergie transitoire du système peut être définie comme l'énergie totale du système lorsqu'elle subit une réponse transitoire, le système de contrôle devrait avoir une énergie transitoire qui se désintègre à zéro rapidement. Le dépassement maximal est défini par la valeur maximale de l'énergie transitoire et le temps pris par la réponse transitoire à la désintégration à zéro représente le temps de décantation. Ainsi, la valeur acceptable du temps de décantation et du dépassement maximal peut être spécifiée en incluant de l'énergie transitoire en fonction objective. De même, l'énergie de contrôle devrait également être incluse dans la fonction objective pour minimiser l'énergie de contrôle du système. **La figure III.4** montre le schéma de principe de modèle d'état avec le régulateur quadratique linéaire (LQR)



**Figure III .5 : Schéma de principe du régulateur quadratique linéaire**

Considérons une modèle linéaire donnée par les équations d'état suivantes :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{III.4})$$

Le variable dans l'équation (III.5) est prise parce que le problème de contrôle optimal est formulé pour le système qui varie dans le temps. Le vecteur d'entrée de contrôle pour le régulateur de feedback d'état complet de la installation est donné par

$$u(t) = -K(t)x(t) \quad (\text{III.5})$$

L'entrée de commande donnée par l'équation (III.5) est linéaire, parce que la plante est également linéaire. L'énergie de commande est donné par  $u^T(t)R(t)u(t)$ , où  $R(t)$  est un carré et la matrice symétrique dite matrice de coût de commande. L'expression de l'énergie de commande est sous forme quadratique, car la fonction  $u^T(t)R(t)u(t)$  contient fonction quadratique de  $u(t)$ . L'énergie transitoire peut être exprimée comme  $u^T(t)Q(t)x(t)$ , où  $Q(t)$

## Chapitre III

---

est la matrice carrée et symétrique appelée matrice de pesage état. Ainsi fonction objective peut être représentée comme :

$$J(t, t_f) = \int_t^{t_f} ((x^T(\tau)Q(\tau) + u^T(\tau)R(\tau)u(\tau))d\tau \quad (\text{III.6})$$

Où  $t$  et  $t_f$  sont respectivement les valeurs de durée initiale et finale, où le processus de contrôle commence à  $\tau = t$  et se termine à  $t_f$ . L'objectif principal d'un problème de contrôle optimal est de trouver matrice  $K(t)$  telle que la fonction objective  $J(t, t_f)$  donnée dans l'équation (III.6) soit minimisée. Le processus de minimisation se fait de telle sorte que la solution de l'équation d'état de modèle (III.4) soit donnée par le vecteur d'état  $x(t)$ . L'objectif principal de la conception est d'apporter  $x(t)$  à zéro dans le temps  $t = t_f$ .

L'équation d'état en boucle fermée est donnée en remplaçant l'équation (III.6) par l'équation (III.4), qui est donnée comme :

$$\dot{x}(t) = (A - BK(t))x(t) \quad (\text{III.7})$$

Dans ce système, la matrice  $Q(t)$  définie positive et la matrice semi  $R(t)$  définie positive sont indépendantes du temps et sont choisies au hasard. Tout en concevant la valeur LQR de  $Q$  et  $R$  sont variés jusqu'à ce que la sortie du système se désintègre à zéro à l'état d'équilibre.

Pour le présent document, la matrice  $Q$  et  $R$  est donné comme :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Et

$$R = \begin{bmatrix} 0.0395 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans la matrice  $Q$ , l'élément  $q_5=0.001$  représente le coefficient de couplage croisé qui doit être Minimisé, donc son poids est considéré comme minimum.

En appliquant la technique LQR sur le système en utilisant  $Q$  et  $R$  donnés ci-dessus, nous calculons le gain  $K$  de contrôle optimal du système.

Le gain de contrôle optimal calculé est donné comme :

$$K = \begin{bmatrix} 22.7462 & 1.5716 & -7.2280 & 3.9397 & -52.6533 & 0.1295 & 3.6697 \\ 2.5257 & 0.0494 & -1.0458 & 0.6041 & -3.3438 & -0.6577 & 0.1323 \end{bmatrix}$$

Maintenant, en utilisant la valeur du gain de contrôle optimal  $K$  dans l'équation (III.5), on calcule l'entrée de contrôle optimale 'u'. Avec l'entrée de contrôle 'u', la sortie de TRMS est régulée et la réponse diminue à zéro à l'état d'équilibre. Ici, le gain optimal  $K$  est obtenu en choisissant de manière aléatoire la matrice  $Q$  et  $R$ . Cela implique de maintenir un compromis entre minimiser l'effort de contrôle et améliorer la réponse transitoire. Pour remédier à cela, une technique d'optimisation est utilisée pour optimiser la valeur de  $Q$  et  $R$ . Ainsi, dans ce travail, l'algorithme d'optimisation, c'est-à-dire l'algorithme BFO est utilisé pour optimiser les matrices de pondération d'état et de contrôle. [9]

### III.4. Simulation avec le contrôleur PID

#### III.4.1. Paramètre de simulation

La matrice de transfert de système donné par :

$$G_N(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.359}{s^3 + 0.9973 s^2 + 4.786 s + 4.278} & 0 \\ \frac{17.5 s^3 - 0.25 s^2 + 79.4 s + 23.53}{s^6 + 1.497 s^5 + 5.285 s^4 + 6.671 s^3 + 2.139 s^2} & \frac{3.6}{s^3 + s^2} \end{bmatrix} \quad (III.8)$$

La consigne  $w = [28.66, 17.19]^T$

La matrice de contrôleur PID :

$$K_{PID} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & \frac{s+1}{s} \\ \frac{s+1}{s} & \frac{s+1}{s} \end{bmatrix} \quad (III.9)$$

#### III.4.2. Analyse de robustesse :

##### III.4.2.1. Variable de pondération

On a deux variable de pondération  $w_1$  et  $w_3$  :

$$W_1 = \frac{s + 2.066}{3.119s + 0.001327} \quad (\text{III.10})$$

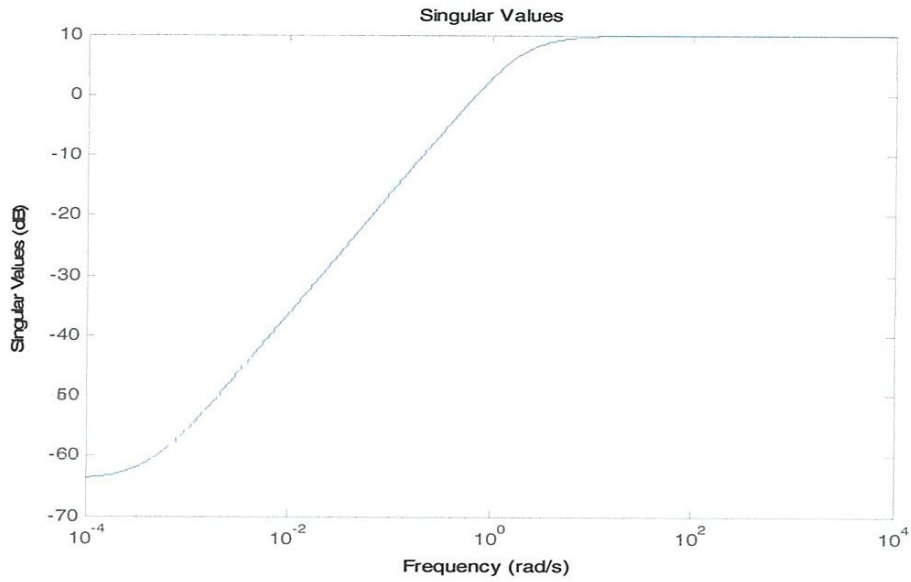


Figure III.6 Signal de pondération w1

$$W_3 = \frac{s + 0.1763}{2.069e-05s + 0.234} \quad (\text{III.11})$$

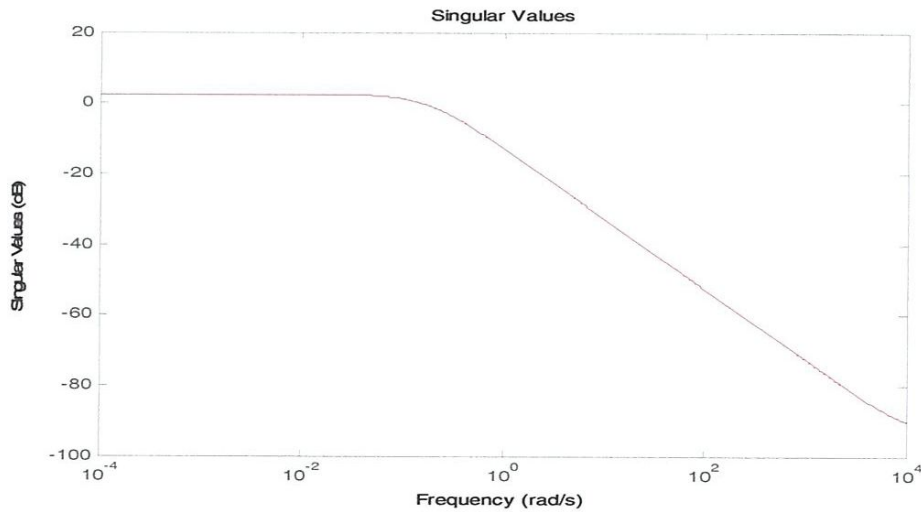


Figure III.7. Signal de pondération w3



## III.4.2.2. La sensibilité

Les deux sensibilités  $S_d$  (sensibilité direct) et  $S_c$  (sensibilité complémentaire) donnés dans les deux figures suivantes :

### a) Sensibilité direct

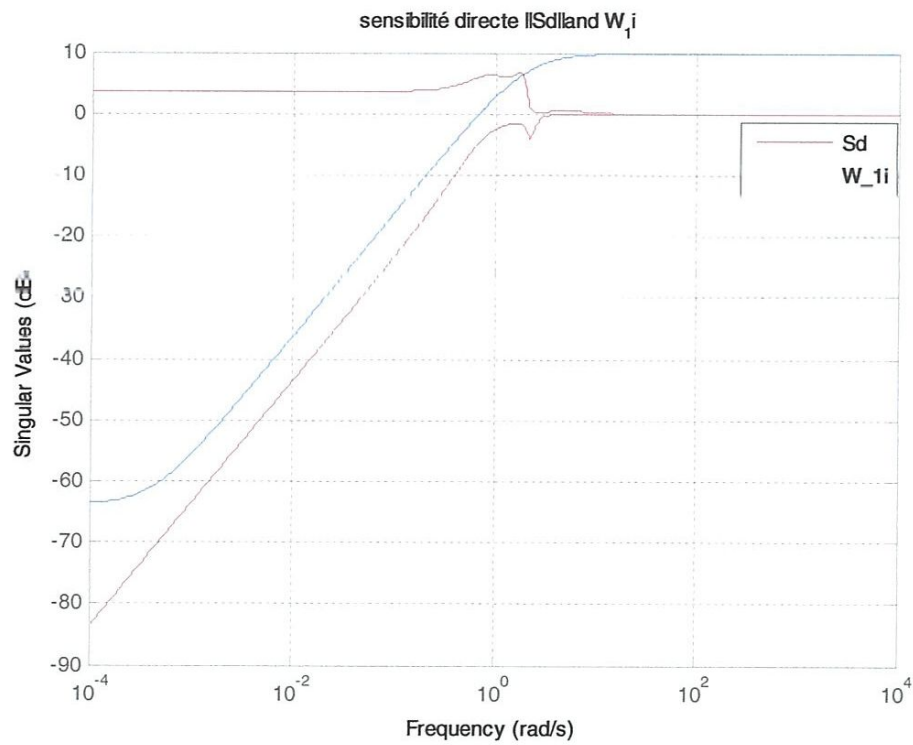
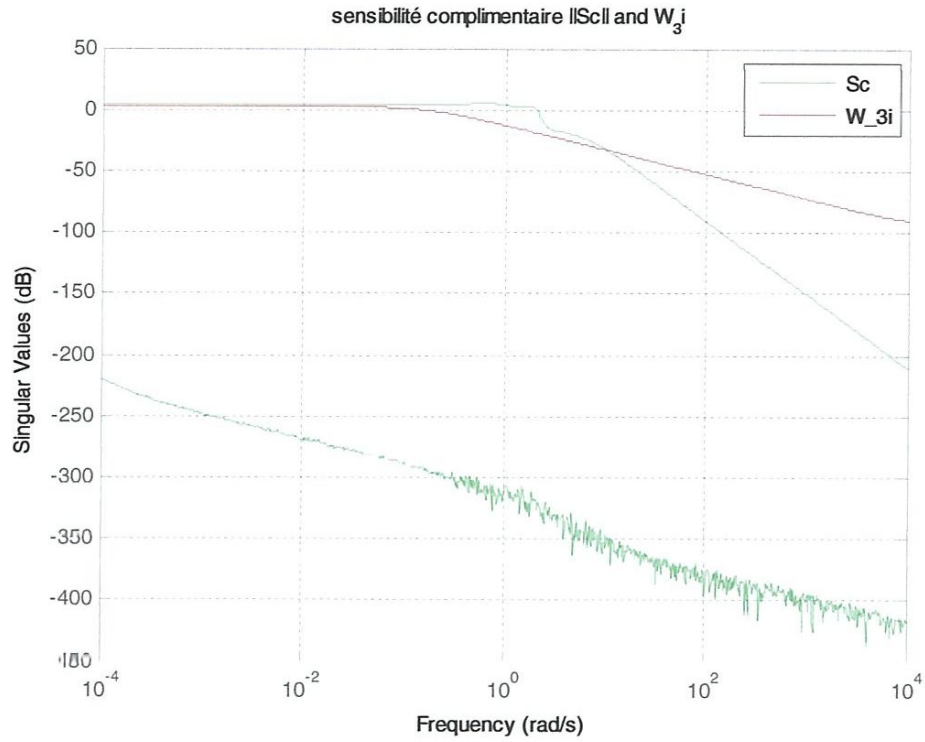


Figure III.8. Signal de sensibilité direct avec le pondération  $w_1$



**Figure III.9. Signal de sensibilité complémentaire avec la pondération w<sub>3</sub>**

**Remarque :**

Le système est robuste si :

$$\| S_d \| \leq \| 1/w_1 \|$$

$$\| S_c \| \leq \| 1/w_3 \|$$

## III.5. Résultat de simulation

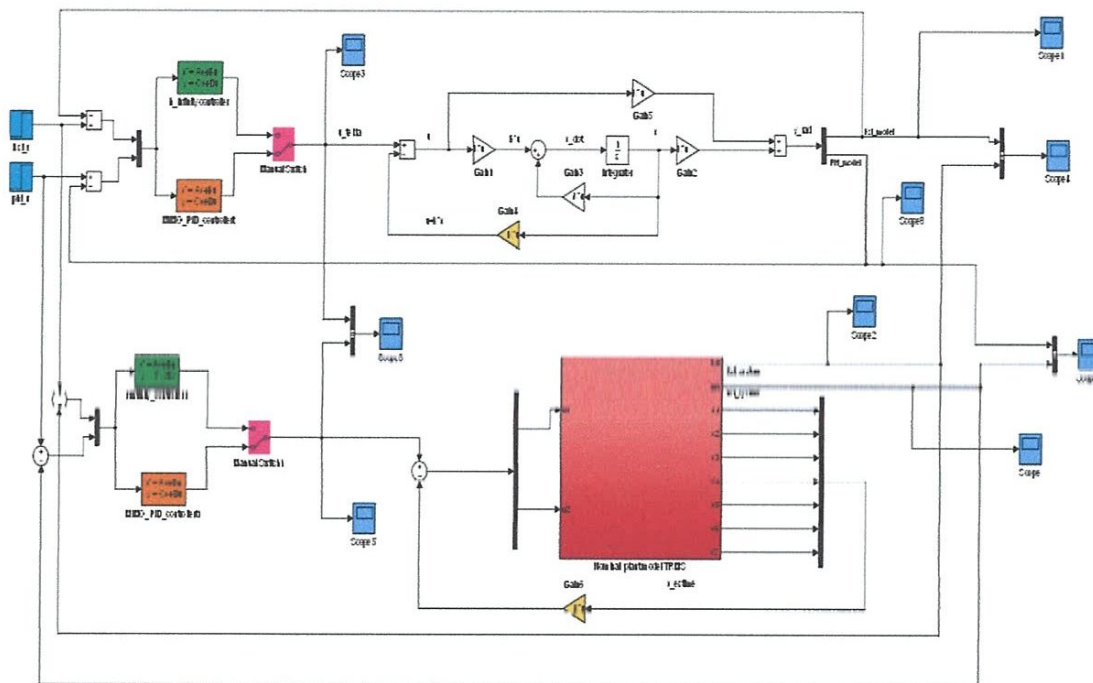


Figure III.10 Schémas Simulink du TRMS avec un contrôleur linéaire (PID)

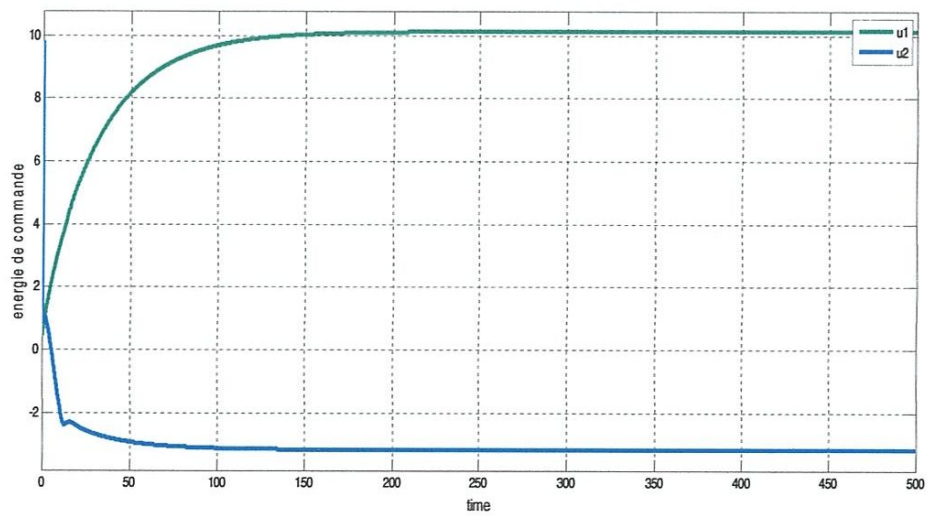


Figure III.11 : command PID du TRMS réel

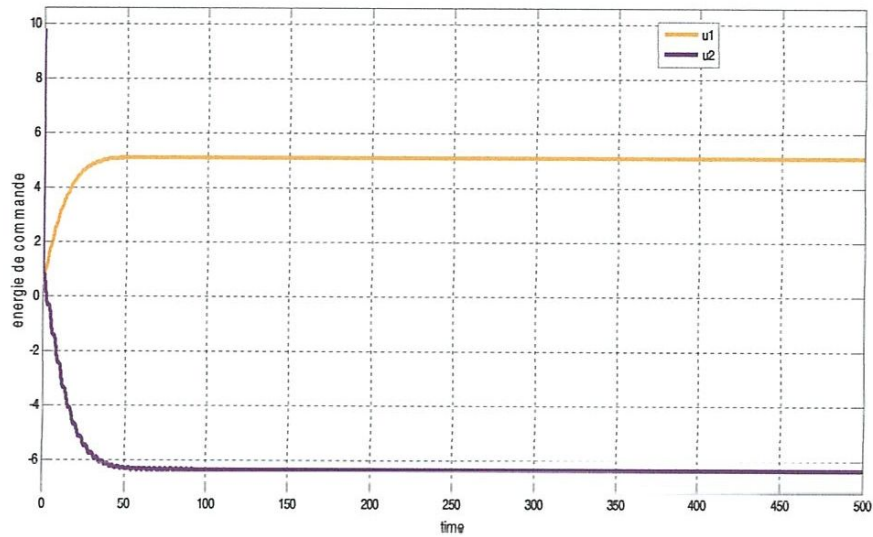


Figure III.12. : command PID du TRMS model

Dans les deux **figure III (11,12)** u1 et u2 représenté l'énergie de command du TRMS (model et réel). u1 :pitch (vertical), u2 : yaw (horizontal)

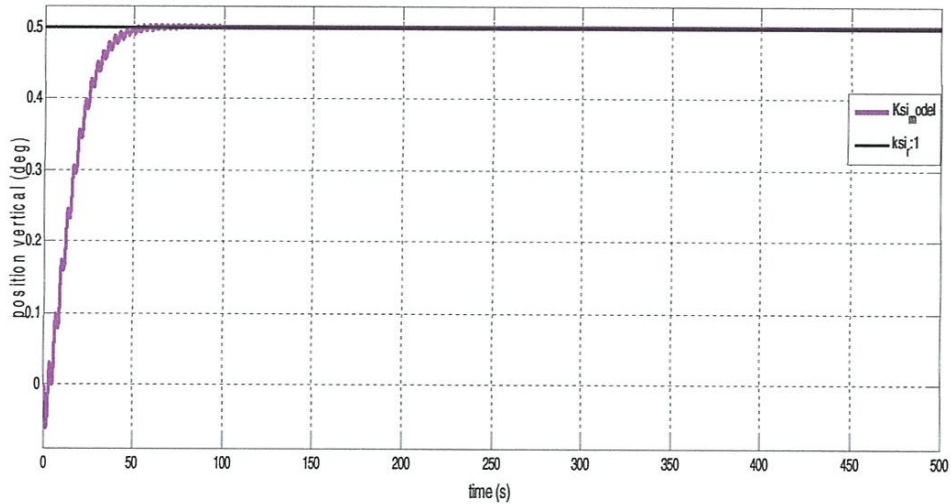
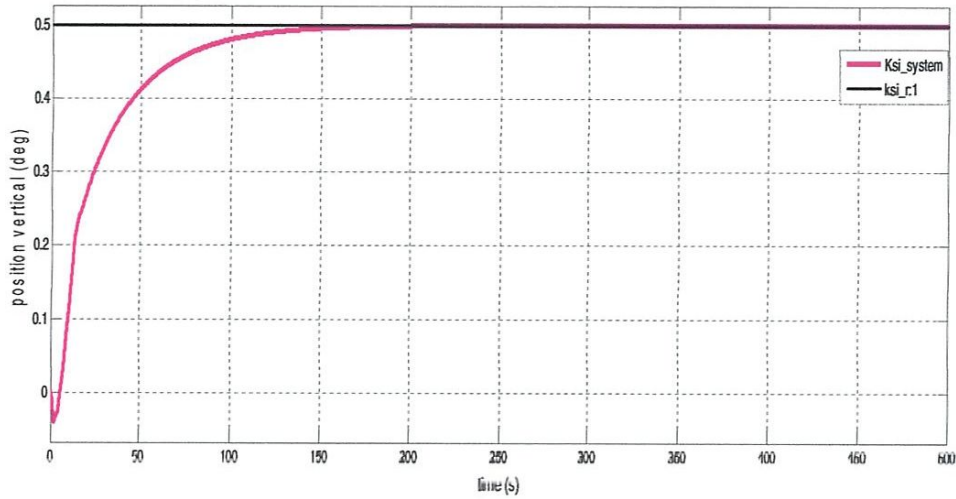


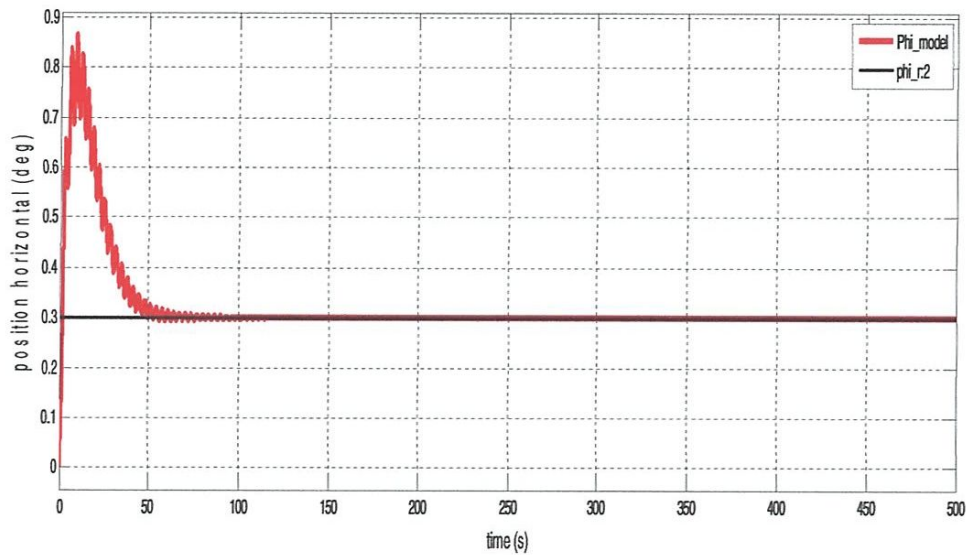
Figure III.13 :L'angle dans le plan vertical model TRMS

D'après la **figure III.13** on remarque que la réponse temporelle dans le plan vertical model TRMS suit la consigne 0.5 avec un temps de réponse  $tr1 = 50$  s



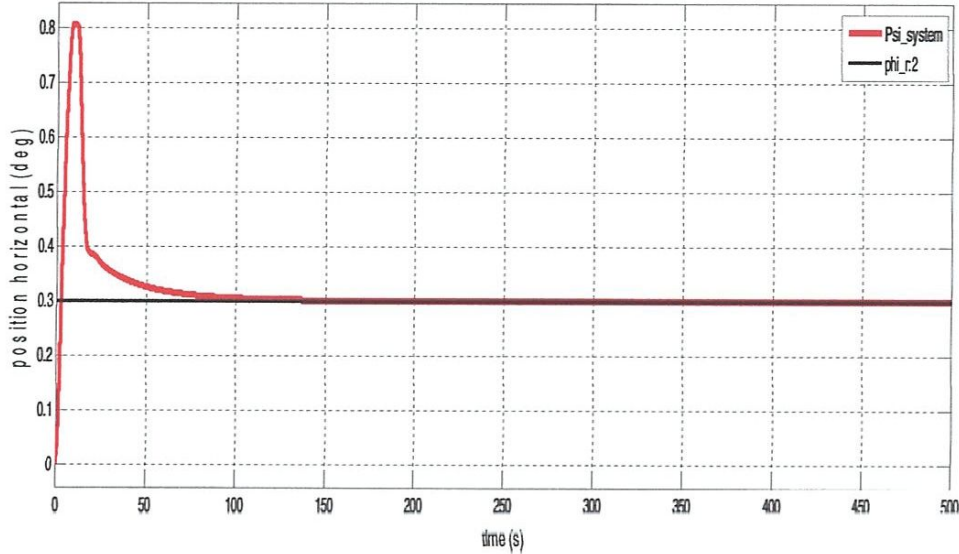
**Figure III.14 .L'angle dans le plan vertical réel TRMS**

D'après la **figure III.14** on remarque que la réponse temporelle dans le plan vertical réel TRMS suit la consigne 0.5 avec un temps de réponse  $tr_2 = 150$  s



**Figure III.15: la sortie obtenue de model "PHI"**

D'après la **figure III.15** on remarque que la réponse temporelle dans le plan horizontal (phi model) suit la consigne 0.3 après un dépassement  $D_1 = 0.85$  et  $tr_3 = 75$  s



**Figure III.16: la sortie obtenue de réel "PHI"**

D'après la **figure III.16** on remarque que la réponse temporelle dans le plan horizontal (phi système ou réel) suit la consigne 0.3 après un dépassement  $D2 = 0.8$  et  $t_r = 80s$

- Comparaison entre les deux sorties "ksi" de réel et modèle des TRMS :

D'après la **figure III.13** et **III.14** : les deux sorties ksi donnent le même résultat (suivent la consigne) la différence est le temps de réponse  $t_{r1} = 50 s$ ,  $t_{r2} = 150 s$

- Comparaison entre les deux sorties "phi" de réel et modèle des TRMS :

Les deux sorties "phi" donnent le même résultat  $D1 \approx D2$  et un petit décalage sur le temps de réponse

### III.6. CONCLUSION

Le PID avec une structure simple, plus facile à comprendre que la plupart des autres contrôleurs. Les résultats montrent que le contrôleur PID donne de meilleures performances en termes de réponse transitoire et d'état stationnaire.

# Chapitre IV: commande par un contrôleur $H_\infty$

## IV.1 Introduction

La commande robuste d'ordre entier *CROE* des systèmes multi variables est une technique de commande qui vise à garantir les performances et la stabilité des processus industriels en présence des perturbations et des incertitudes de modélisation qui affectent le modèle de synthèse. En effet, ce dernier est une représentation qui approxime au mieux, avec des hypothèses simplificatrices, le système réel.

Dans la plupart des applications industrielles, il existe un écart entre le comportement observé du système réel et son modèle de synthèse. En revanche, la *CROE* vise à déterminer une loi de commande garantissant des critères imposés par des cahiers de charge où le modèle utilisé doit modéliser le fonctionnement nominal du système à commander. Par conséquent, le contrôleur robuste obtenu doit assurer une Stabilité Robuste *SR* du système bouclé ainsi que des Performances Nominales *PN* de celui-ci. Ceci non seulement pour le régime de fonctionnement nominal mais aussi pour tous les régimes possibles de perturbations. Dans le domaine de la *CROE*, plusieurs méthodes efficaces ont été proposées pour assurer les deux robustesses précédentes en présence des incertitudes de modélisations, des bruits de mesures et finalement en présence des dynamiques négligées en hautes fréquences. Parmi les méthodes de synthèse les plus efficaces, la méthode  $H_\infty$  est celle la plus utilisée pour assurer des meilleures marges de *SR* et de *PN*. C'est une méthode d'optimisation qui prend en compte une formulation mathématique des contraintes par rapport au comportement attendu en boucle fermée.

Un des avantages considérables de la commande  $H_\infty$  est sa capacité à introduire des concepts liés aussi bien à la commande classique que la commande robuste. Le mot « optimal » est fréquemment utilisé dans son sens strictement mathématique, car la commande synthétisée est celle qui minimise l'effet des entrées/sorties exogènes du système, ce qui peut être vu comme "non optimal" par les opérateurs (l'optimisation étant relative à l'objectif recherché). De plus, le mot « infini » dans le symbole  $H_\infty$  signifie que ce type de commande est conçu pour imposer des restrictions de type min-max au sens de la théorie de la décision (minimiser la perte maximale possible) dans le domaine fréquentiel. Finalement, La norme  $H_\infty$  d'un système dynamique est l'amplification maximale que le système peut exercer sur l'énergie du signal d'entrée. Dans le cas d'un système Multi- Input, Multi-Output *MIMO*, ceci équivaut à la valeur singulière maximale du système, ce qui est, dans le cas mono variable *SISO* (*Single Input Single Output*), se traduit par la valeur maximale de



l'amplitude de sa réponse fréquentielle.

Dans ce chapitre, une introduction aux techniques basées sur la théorie de la *CROE* des systèmes multi variables linéaires sera détaillée, où un intérêt particulier est donné à la méthode de synthèse  $H_\infty$ . A cet effet, nous allons présenter les outils mathématiques et les principales définitions utilisées dans cette stratégie de commande comme la définition de la norme  $H_\infty$  et ses propriétés, la quantification et l'évaluation des incertitudes de modélisation qui affectent le modèles de synthèse, les tracés des lieux des valeurs singulières maximales des deux sensibilités directe et complémentaire dans le plan fréquentiel. Ces derniers permettant la vérification des deux conditions de robustesse sur la stabilité robuste ainsi que sur les performances nominales du système bouclé. Ces deux conditions seront formulées sous forme d'un problème de sensibilité mixte qui sera résolu par deux versions de la méthode  $H_\infty$ .

La première version est basée sur la résolution récursive de deux équations de *Riccati*. Quant à la seconde, elle est celle basée sur la formulation des spécifications sous forme des inégalités matricielles ou en anglais *Linear Matrix Inequalities LMI*. Ainsi que cette chapitre présente une conception de contrôle  $H_\infty$  pour un Système (TRMS). Les simulations sont réalisées dans MAT-LAB / SIMULINK. Les paramètres du modèle sont également fournis à la fin.

### IV.2 Présentation $H_\infty$

La synthèse  $H_\infty$  est une méthode qui sert à la conception de commandes optimales. Il s'agit essentiellement d'une méthode d'optimisation, qui prend en compte une définition mathématique des contraintes en ce qui concerne le comportement attendu en boucle fermée. La commande H-infini a pour principal avantage la capacité d'inclure dans un même effort de synthétisation les concepts liés à la commande classique et à la commande robuste.

Le mot « optimal » est utilisé dans son sens strictement mathématique car la commande synthétisée est celle qui minimisera l'effet des entrées/sorties du système, ce qui peut être vu comme "non optimal" par les opérateurs (l'optimisation étant relative à l'objectif recherché).

Le « infini » dans H-infini signifie que ce type de commande est conçu pour imposer des restrictions de type minimax au sens de la théorie de la décision (minimiser la perte maximale possible) dans le domaine fréquentiel. La norme H-infini d'un système dynamique est

l'amplification maximale que le système peut exercer sur l'énergie du signal d'entrée. Dans le cas d'un système MIMO, ceci équivaut à la valeur singulière maximale du système, ce qui, dans le cas SISO, se traduit par la valeur maximale de l'amplitude de sa réponse fréquentielle.

### a) Quelques Applications sur ( $\mathcal{H}_\infty$ ) :

La synthèse de commande ( $\mathcal{H}_\infty$ ) est depuis le début des années 2000 utilisée dans le cadre du contrôle de structures flexibles des systèmes spatiaux comme les satellites ou les lanceurs. Ces systèmes possèdent des modes de flexions proches de la bande passante du contrôleur et dont les caractéristiques sont incertaines (fréquence, gain, amortissement). La méthode ( $\mathcal{H}_\infty$ ) permet de garantir théoriquement une certaine robustesse de la stabilité du système (via la marge de module) tout en assurant les performances de réjection de perturbation.

Sur Ariane 5, le pilotage basé à ( $\mathcal{H}_\infty$ ) ainsi permis de garantir la stabilité du lanceur tout en optimisant la commande de braquage de la tuyère, faisant économiser plusieurs centaines de kilo sur le liquide hydraulique de commande

## IV.2.1 Stabilité des systèmes pluridimensionnels

### IV.2.1.1 Stabilité nominale

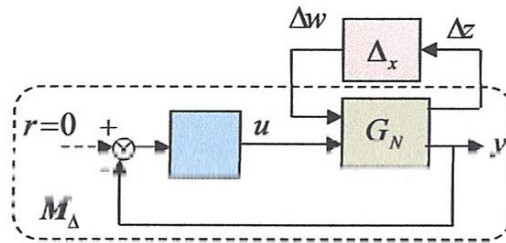
La stabilité nominale d'un système pluridimensionnel est assurée si tous les pôles du transfert en boucle fermée se situent dans le demi-plan complexe gauche. Il faut noter ici que lors de la conception du contrôleur, la simplification de pôles/zéros instables entre le système nominale et le contrôleur peut faire apparaître une instabilité, cette simplification peut disparaître lors de l'implémentation du contrôleur sur le système physique réel.

### IV.2.1.2 Stabilité interne

Un système est en stabilité interne si en lui appliquant des signaux d'entrée bornés, on obtient des signaux de sorties bornés. Nous verrons dans la suite de ce travail que ce type de stabilité dépend de la stabilité de quatre matrices de sensibilité dont les transferts seront détaillés.

## IV.2.1.3 Stabilité robuste

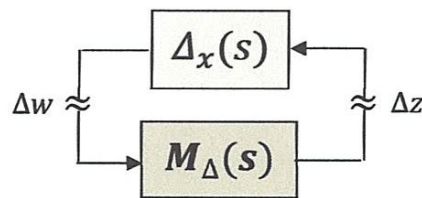
Ce type de stabilité doit être examiné dans le cas d'un système bouclé soumis à des incertitudes de modélisation. A cet effet, la **figure. IV.1.a** schématise la structure du système bouclé pour l'analyse d'une telle stabilité.



**Figure. IV.1.a :** Structure d'un système bouclé pour l'analyse de la robustesse de stabilité

Avec  $G_N(s)$  est le modèle nominal,  $K(s)$  est le contrôleur,  $\Delta_x(s)$  est le transfert modélisant l'une d'incertitude non structurée citées précédemment et, finalement,  $r$  est le vecteur des entrées de références supposées nulles.

Pour l'analyse de la robustesse de stabilité, la structure donnée par la **figure.IV.1.a** peut être reconfigurée sous la forme générale  $(M_\Delta - \Delta_x)$  ci-dessous:



**figure.IV.1.b :** Structure générale d'étude de la robustesse de stabilité

A partir de la **figure.IV.1.b**, il est intéressant d'étudier la robustesse de stabilité d'un tel système bouclé soumis à des incertitudes de modélisation non structurées. Pour cela, on fait appel au théorème du faible gain (*Small gain théoreme*).

### IV.2.1.4.1. Théorème du petit gain

Considérons  $\Delta_x$  une perturbation stable satisfaisant la condition :

$$\|\Delta_x\|_\infty \leq 1, \quad (IV.1)$$

### a. Théorème 1

Le système donné par la figure **Fig.1.5.b** est stable en présence des incertitudes  $\Delta_x(s)$ , si :

$$\|M_\Delta(s) \cdot \Delta_x(s)\|_\infty \leq 1 \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}^{*+} : \bar{\sigma}[M_\Delta(j\omega) \cdot \Delta_x(j\omega)] < 1 \quad (IV.2)$$

Une autre condition de stabilité robuste également suffisante mais plus conservatrice est la suivante :

### b. Théorème 2

Le système bouclé, cité ci-dessus, est robustement stable si la condition suivante est vérifiée :

$$\|M_\Delta(s)\|_\infty \cdot \|\Delta_x(s)\|_\infty \leq 1 \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}^{*+} \quad (IV.3)$$

#### IV.2.1.4.2 Condition de stabilité

L'application du théorème 2 sur le système bouclé donné par la **Fig.1.5.a**, en présence des incertitudes détaillées, donne les conditions de robustesse de stabilité suivantes :

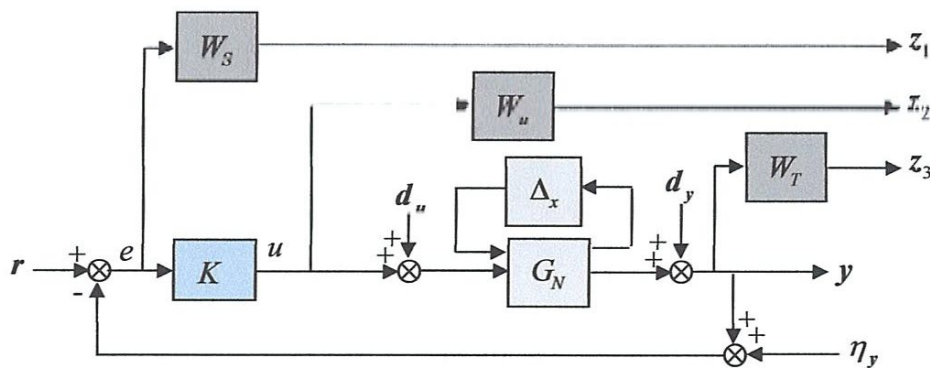
- Incertitude additive directe  $\|K \cdot [I_{p \times p} + G_N \cdot K]^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\|\Delta_a(s)\|_\infty}$ .
- Incertitude additive inverse  $\|G_N \cdot [I_{q \times q} + K \cdot G_N]^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\|\Delta_{a_i}(s)\|_\infty}$ .
- Incertitude multiplicative directe en sortie  $\|G_N \cdot K \cdot [I_{p \times p} + G_N \cdot K]^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\|\Delta_s(s)\|_\infty}$ .
- Incertitude multiplicative inverse en sortie  $\|[I_{p \times p} + G_N \cdot K]^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\|\Delta_{s_i}(s)\|_\infty}$ .
- Incertitude multiplicative directe en entrée  $\|K \cdot G_N \cdot [I_{q \times q} + K \cdot G_N]^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\|\Delta_e(s)\|_\infty}$ .
- Incertitude multiplicative inverse en entrée  $\|[I_{q \times q} + K \cdot G_N]^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\|\Delta_{e_i}(s)\|_\infty}$ .

#### IV.2.1.5. Analyse de robustesse en présences de diverses entrées exogènes

L'analyse de robustesse fondée sur la stabilité robuste, les performances nominales et les performances robustes, présente le sujet de nombreuses méthodes de synthèse des contrôleurs robustes et stables. Ces derniers stabilisent de manière robuste non seulement le système

nominal, mais aussi le système en présence d'entrées exogènes telles que: les incertitudes de modélisations, les bruits de mesures, les perturbations...etc.

A cet effet, des conditions de robustesse sont introduites afin de satisfaire les spécifications fréquentielles imposées par un cahier de charges. Pour la formulation du problème de la synthèse d'un contrôleur robuste, on considère la configuration standard donnée par la figure **Figure.IV.2:**



*Figure.IV.2. Configuration standard d'un système bouclé*

Les notations suivantes seront utilisées dans la suite, avec :

- $d_u$ : représente le vecteur des perturbations à l'entrée du système.
- $d_y$ : représente le vecteur des perturbations à la sortie du système.
- $e$ : représente le vecteur des erreurs de poursuite entre les sorties mesurées et les références.
- $\eta_y$ : représente le vecteur des bruits de mesures
- $z_1, z_2$  et  $z_3$ : représentent, respectivement, les signaux modérés (filtrés) des erreurs de poursuite, des commandes et les sorties mesurées.

A partir de la configuration standard ci-dessus, on peut obtenir facilement les équations suivantes :

$$\begin{cases} e = (I_{p \times p} + G_N \cdot K)^{-1} \cdot (r - d_y - n_y) - G_N \cdot (I_{q \times q} + K \cdot G_N)^{-1} \cdot d_u \\ u = K \cdot (I_{p \times p} + G_N \cdot K)^{-1} \cdot (r - d_y - n_y) - K(s) \cdot G_N(s) \cdot (I_{q \times q} + K \cdot G_N)^{-1} \cdot d_u \\ y = G_N \cdot K \cdot (I_{p \times p} + G_N \cdot K)^{-1} \cdot (r - n_y) + (I_{p \times p} + G_N \cdot K)^{-1} \cdot d_y + G_N \cdot (I_{q \times q} + K \cdot G_N)^{-1} \cdot d_u \end{cases}$$

(IV.4)

Où les sorties exogènes sont données par :

$$\begin{cases} z_1 = W_S \cdot e \\ z_2 = W_u \cdot u \\ z_3 = W_T \cdot y \end{cases} \text{(IV.5)}$$

On peut ainsi définir les quatre sensibilités suivantes :

**a. Sensibilité directe en sortie  $S_y(s)$**

Elle représente le transfert entre les sorties mesurées du système bouclé et les différents signaux d'entrées tels que, les erreurs de poursuite, perturbations de sortie et les signaux de commande, on obtient :

$$S_y(s) = [I_{p \times p} + G_N(s) \cdot K(s)]^{-1} \quad \text{(IV.6)}$$

**b. Sensibilité directe en entrée  $S_u(s)$**

Elle représente le transfert entre les sorties mesurées du système bouclé et les perturbations à l'entrée. Elle est donnée par :

$$S_u(s) = [I_{q \times q} + K(s) \cdot G_N(s)]^{-1} \quad \text{(IV.7)}$$

**c. Sensibilité complémentaire en sortie  $T_y(s)$**

Elle représente l'influence des bruits de mesure sur les sorties du système bouclé, ainsi que l'effet des perturbations à l'entrée sur les commandes. Elle est donnée par :

$$T_y(s) = G_N(s) \cdot K(s) \cdot [I_{p \times p} + G_N(s) \cdot K(s)]^{-1} \quad \text{(IV.8)}$$

**d. Sensibilité complémentaire en entrée  $T_u(s)$**

Ce transfert relie les entrées de perturbation à l'entrée du système bouclé à celle des entrées de commande, il est donné par :

$$T_u(s) = K(s).G_N(s).[I_{q \times q} + K(s).G_N(s)]^{-1} \quad (\text{IV.9})$$

Ces sensibilités sont liées entre-elles par les relations décrites par les équations (IV.10):

$$\begin{cases} G_N(s).K(s).[I_{p \times p} + G_N(s).K(s)]^{-1} = [I_{p \times p} + G_N(s).K(s)]^{-1}.G_N(s).K(s) \\ K(s).G_N(s).[I_{q \times q} + K(s).G_N(s)]^{-1} = [I_{q \times q} + K(s).G_N(s)]^{-1}.K(s).G_N(s) , \\ K(s).S_y(s) = S_u(s).K(s) \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

Tenant compte des deux relations :

$$\begin{cases} S_y + T_y = I_{p \times p} \\ S_u + T_u = I_{q \times q} \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

Et en se basant sur les définitions ci-dessus, les équations données par (IV.4) seront réécrites selon les équations (IV.12) :

$$\begin{cases} e = S_y.(r - d_y - n_y) - G_N.S_u.d_u \\ u = K.S_y.(r - d_y - n_y) - T_u.d_u \\ y = T_y.(r - n_y) + S_y.d_y + G_N.S_u.d_u \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

Les spécifications qui doivent être assurées par le contrôleur robuste sont les suivantes :

**Spécification 1 :** Une bonne dynamique de poursuite des signaux de référence implique que  $\sigma_{max}[S_y(\omega)]$  doit être faible.

**Spécification 2 :** Une bonne atténuation de l'effet des bruits de mesure implique que  $\sigma_{max}[T_y(\omega)]$  doit être faible.

**Spécification 3 :** Une bonne rejection des perturbations en entrée du modèle implique que  $\sigma_{max}[G_N(\omega).S_y(\omega)]$  doit être minimisée.

**Spécification 4 :** Une bonne minimisation des énergies de commande implique que  $\sigma_{max}[T_u(\omega)]$  ou  $\sigma_{max}[K(\omega).S_y(\omega)]$  doivent être faibles.

**Spécification 5 :** Un compromis de robustesse entre les objectifs contradictoires *PN* et *SR* doit être assuré avec une marge élevée.

A partir des équations données par (IV.12) et utilisant la norme  $\mathcal{H}_\infty$  , les indicateurs des performances des sensibilités précédentes sont définis par les équations (IV.13) :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_S = \|S_y\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} (\sigma_{max}[S_y(\omega)]) \\ M_R = \|K \cdot S_y\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} (\sigma_{max}[K(\omega) \cdot S_y(\omega)]) \\ M_T = \|T_y\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} (\sigma_{max}[T_y(\omega)]) \\ \tilde{M}_S = \|S_u\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} (\sigma_{max}[S_u(\omega)]) \\ \tilde{M}_R = \|G_N \cdot S_u\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} (\sigma_{max}[G_N(\omega) \cdot S_u(\omega)]) \\ \tilde{M}_T = \|T_u\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} (\sigma_{max}[T_u(\omega)]) \end{array} \right. \quad (IV.13)$$

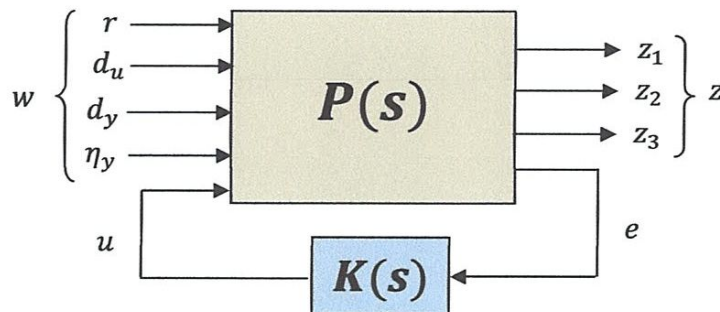
Où  $M_S$ ,  $M_R$ ,  $M_T$ ,  $\tilde{M}_S$ ,  $\tilde{M}_R$  et  $\tilde{M}_T$  correspondent, respectivement, aux pics maximaux des valeurs singulières des transferts  $S_y(s)$ ,  $K(s) \cdot S_y(s)$ ,  $T_y(s)$ ,  $S_u(s)$ ,  $G_N(s) \cdot S_u(s)$  et  $T_u(s)$ .

De plus, si les valeurs de  $M_*$  et de  $\tilde{M}_*$  sont élevées, les marges de robustesse des performances et de stabilité du système bouclé devient être faibles face aux incertitudes de modélisation qui affectent le système.

### IV.3.Problème $\mathcal{H}_\infty$ :

#### IV.3.1Problème $\mathcal{H}_\infty$ standard

Considérant le système représenté par la forme standard suivante:



FigureIV.3 : Configuration (P – K)du système bouclé

La satisfaction des spécifications précédentes peut être effectuée via la minimisation de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'un critère de performance formulé par *LFT* (transformations linéaires fractionnaires) inférieure sur le système d'interconnexion représenté par **Figure IV.3**



Le système  $P$  possède deux entrées:

- $w$  : représente les entrées extérieures, notamment le vecteur de consigne de commande, les perturbations et les bruits,
- $u$  : représente le vecteur de commande ;

Et deux sorties :

- $z$  : les sorties à optimiser pour avoir un bon comportement de la commande
- $e$ : les mesures disponibles utilisées par le contrôleur pour calculer la commande.

Toutes ces données sont d'une façon générale des vecteurs et  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{K}$  sont des matrices.

La représentation interne du système bouclé peut être mise sous la forme de l'équation (IV.14) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B_1 \cdot w(t) + B_2 \cdot u(t) \\ z(t) = C_1 \cdot x(t) + D_{11} \cdot w(t) + D_{12} \cdot u(t) , \\ y(t) = C_2 \cdot x(t) + D_{21} \cdot w(t) + D_{22} \cdot u(t) \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

La matrice de transfert du système augmenté  $P(s)$  est alors partitionnée selon l'équation (IV.15):

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{IV.15})$$

et la loi de commande est donnée par :  $u = K(s) \cdot e$

La synthèse du contrôleur robuste se ramène finalement à la résolution de l'un des deux problèmes à savoir : problème  $\mathcal{H}_\infty$  optimal ou problème  $\mathcal{H}_\infty$  sous-optimal.

### IV.3.2 Problème $\mathcal{H}_\infty$ optimal

La synthèse de la commande consiste à minimiser le critère de performance décrit par l'équation (IV.16):

$$\min_{K(s)} \left\{ \sup_{\substack{\|z\|_2 \\ \|w\|_2}} \right\} = \min_{K(s)} \{ \|LFT(P, K)\|_\infty \} \quad (\text{IV.16})$$

La minimisation de  $\|LFT(P, K)\|_\infty$  sur l'ensemble des contrôleurs  $K(s)$  stabilisant d'une manière interne le système bouclé, peut fournir un gain optimal d'atténuation noté  $\gamma_{opt}$  pour lequel toutes les spécifications, imposées par le cahier de charges, sont satisfaisantes.

### IV.3.3 Problème $\mathcal{H}_\infty$ sous optimal

Dans ce cas, le problème de la commande est remplacé par la recherche de la solution de l'inégalité représentée par l'équation (IV.17) :

$$\|LFT_\ell(P, K)\|_\infty < \gamma, \quad (\text{IV.17})$$

Où  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  est le gain d'atténuation fixé a priori par l'utilisateur

### IV.3.4 Problème de Sensibilité Mixte généralisée

Dans tout ce qui suit, le vecteur de perturbations  $d_u$  agissant sur les entrées du système est supposé nul. Le raisonnement adopté durant la synthèse du contrôleur robuste est celui basé sur les formes de  $\sigma_{max}[S_y(j\omega)]$ ,  $\sigma_{max}[K(j\omega).S_y(j\omega)]$  et  $\sigma_{max}[T_y(j\omega)]$  qui sont bornées comme suit :

$$\begin{cases} \sigma_{max}[S_y(j\omega)] \leq \ell_s(\omega) \\ \sigma_{max}[K(j\omega).S_y(j\omega)] \leq \ell_u(\omega) \\ \sigma_{max}[T_y(j\omega)] \leq \ell_T(\omega) \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

Où  $\ell_s$ ,  $\ell_u$  et  $\ell_T$  sont des fonctions scalaires spécifiant l'allure (gabarit) désiré. De plus, si l'on définit  $W_S = \ell_s^{-1}$ ,  $W_u = \ell_u^{-1}$  et  $W_T = \ell_T^{-1}$ , les équations données par (IV.18) deviennent:

$$\|W_S.S_y\|_\infty < 1 \quad (\text{IV.19})$$

$$\|W_u.K.S_y\|_\infty < 1 \quad (\text{IV.20})$$

$$\|W_T.T_y\|_\infty < 1 \quad (\text{IV.21})$$

Les transferts  $W_S$ ,  $W_u$  et  $W_T$  sont des pondérations choisies a priori par l'utilisateur afin de limiter, respectivement, les valeurs singulières maximales des transferts  $S_y$ ,  $K.S_y$  et  $T_y$ . Notons ici que la condition sur les performances nominales du système bouclé est assurée par la satisfaction de l'inégalité (IV.20), sachant que la matrice de pondération  $W_S$  est souvent choisie diagonale :

$$W_S(s) = \begin{pmatrix} W_{S_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_{S_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_{S_{p \times p}} \end{pmatrix}, \text{ avec : } W_{S_{ii}}(s) = \frac{s/M_{S_{ii}} + \omega_{B_{ii}} \varepsilon_{S_{ii}}}{s + \omega_{B_{ii}}} \quad (\text{IV.22})$$

Où  $M_{S_{ii}}$ ,  $\omega_{B_{ii}}$  et  $\varepsilon_{S_{ii}}$  sont des paramètres sélectionnés à l'avance par l'utilisateur pour formuler la  $i^{\text{ème}}$  fonction de pondération  $W_{S_{ii}}(s)$  dont son inverse limite la  $i^{\text{ème}}$  fonction de sensibilité direct  $S_{y_{ii}}(s)$  dans la plage fréquentielle  $[\omega_{\min} \quad \omega_{\max}]$ .

De plus, la satisfaction de l'inégalité (IV.21) permet de limiter les amplitudes des signaux de commande, sachant que la matrice de pondération  $W_u$  est souvent choisie diagonale :

$$W_u(s) = \begin{pmatrix} W_{u_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_{u_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_{u_{q \times q}} \end{pmatrix}, \text{ avec : } W_{u_{ii}}(s) = \frac{\varepsilon_{BC_{ii}} \omega_{BC_{ii}} / M_{u_{ii}}}{\varepsilon_{BC_{ii}} s + \omega_{BC_{ii}}} \quad (\text{IV.23})$$

Où  $M_{u_{ii}}$ ,  $\omega_{BC_{ii}}$  et  $\varepsilon_{BC_{ii}}$  sont des paramètres choisis a priori afin de borner la sensibilité  $KS_y$  dans la plage de fréquence  $[\omega_{\min} \quad \omega_{\max}]$ .

Finalement, la condition sur la stabilité robuste se traduit par la satisfaction de l'inégalité (IV.22), sachant que la matrice de pondération  $W_T$  est souvent choisie aussi diagonale :

$$W_T(s) = \begin{pmatrix} W_{T_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_{T_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_{T_{p \times p}} \end{pmatrix}, \text{ avec : } W_{T_{ii}}(s) = \frac{\varepsilon_{T_{ii}} s + \omega_{BT_{ii}}}{\omega_{BT_{ii}} / M_{T_{ii}}} \quad (\text{IV.24})$$

Où  $M_{T_{ii}}$ ,  $\omega_{BT_{ii}}$  et  $\varepsilon_{T_{ii}}$  sont des paramètres sélectionnés a priori par l'utilisateur. L'inverse de la  $i^{\text{ème}}$  fonction de pondération  $W_{T_{ii}}(s)$  doit être choisi pour borner la  $i^{\text{ème}}$  fonction de sensibilité complémentaire en sortie directe  $T_{y_{ii}}(s)$  dans la plage fréquentielle  $[\omega_{\min} \quad \omega_{\max}]$ .

Notons ici que la détermination directe du contrôleur robuste  $K(s)$  satisfaisant les inégalités (IV.20), (IV.21) et (IV.22) représente un problème d'optimisation ouvert. Cependant, ces dernières peuvent être substituées sous forme d'un problème de  $\mathcal{H}_\infty$  sous-optimal dit problème « sensibilité mixte généralisée ». Ce dernier est donné comme suit:

$$\left\| \begin{array}{c} W_S(s).S_y(s) \\ W_R(s).K(s).S_y(s) \\ W_T(s).T_y(s) \end{array} \right\|_{\infty} < 1 \quad (\text{IV.25})$$

Sachant que :

$$\max \left( \|W_S S_y\|_{\infty}, \|W_R K S_y\|_{\infty}, \|W_T T_y\|_{\infty} \right) \leq \left\| \begin{array}{c} W_S S_y \\ W_R K S_y \\ W_T T_y \end{array} \right\|_{\infty} \leq \sqrt{2} \max \left( \|W_S S_y\|_{\infty}, \|W_R K S_y\|_{\infty}, \|W_T T_y\|_{\infty} \right) \quad (\text{IV.26})$$

Ou bien sous forme d'un problème  $\mathcal{H}_{\infty}$  optimal qui est formulé comme suit :

$$\min_{K(s)} \{ \|\mathcal{F}_{\ell}(P, K)\|_{\infty} \} = \min_{K(s)} \left\{ \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} \left( \bar{\sigma} \left[ \begin{array}{c} W_S(j\omega).S_y(j\omega) \\ W_R(j\omega).K(j\omega).S_y(j\omega) \\ W_T(j\omega).T_y(j\omega) \end{array} \right] \right) \right\} \quad (\text{IV.27})$$

La matrice de transfert du système augmenté peut être formulée en fonction du système nominal et des fonctions de pondérations, comme suit:

$$P(s) = \left( \begin{array}{c|c} W_S(s) & -W_S(s).G_N(s) \\ \mathbf{0} & W_R(s) \\ \mathbf{0} & W_T(s).G_N(s) \\ I & -G_N(s) \end{array} \right) \quad (\text{IV.28})$$

## IV.4 Résolution du problème $\mathcal{H}_{\infty}$

### IV.4.1 Résolution fondée sur les équations de *Riccati*

Considérons la représentation d'état généralisée (IV.14). Nous supposons dans cette représentation que la matrice  $D_{22}$  est nulle, c'est à dire qu'il n'existe pas une transmission directe du vecteur des entrées vers celui des sorties ce qui est le cas dans les plupart des applications industrielles. La solution du problème standard est basée sur la solution algébrique de l'équation de *Riccati*. L'équation de *Riccati* étant donnée par :

$$X_{\infty}.E + E^T.X_{\infty} - X_{\infty}.W.X_{\infty} + Q = 0 \quad (\text{IV.29})$$

Avec  $W = W^T$  et  $Q = Q^T$ .

La solution stabilisante  $X_\infty$ , si elle existe, sera une matrice symétrique telle que la matrice  $(E - W \cdot X_\infty)$  soit stable, i.e., ses valeurs propres ont une partie réelle strictement négative.

Une telle solution sera notée :

$$X_\infty = Ric \begin{bmatrix} E & -W \\ -Q & -E^T \end{bmatrix} \quad (IV.30)$$

Soit :

$$R_n = D_{1*}^T D_{1*} - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{R}_n = D_{*1} D_{*1}^T D_{1*} - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{p_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (IV.31)$$

$$\text{Où } D_{1*} = [D_{11} \quad D_{12}] \text{ et } D_{*1} = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix}.$$

Dans la mesure où  $R_n$  et  $\tilde{R}_n$  sont des matrices non singulières. Nous définissons les deux matrices dites *Hamiltoniennes*  $H$  et  $J$  selon les équations (IV.18) et (IV.19):

$$H = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_1^T \cdot C_1 & -A^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ -C_1^T \cdot D_{1*} \end{bmatrix} R_n^{-1} [D_{1*}^T \cdot C_1 \quad B^T] \quad (IV.32)$$

$$J = \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T \\ -B_1 \cdot D_{*1}^T \end{bmatrix} \cdot \tilde{R}_n^{-1} \cdot [D_{*1} \cdot B_1^T \quad C] \quad (IV.33)$$

En prenant  $X_\infty = Ric(H)$  et  $Y_\infty = Ric(J)$ , nous pouvons définir les deux matrices  $F$  et  $L$  comme suit :

$$F = -R_n^{-1} \cdot (D_{1*}^T \cdot C_1 + B^T \cdot X_\infty) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (IV.34)$$

$$L = -(B_1 \cdot D_{*1}^T + Y_\infty \cdot C^T) \cdot \tilde{R}_n^{-1} = [L_1 \quad L_2] = [L_{11} \quad L_{12} \quad L_2] \quad (IV.35)$$

Où  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_{11}$  et  $F_{12}$  sont formées respectivement de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $(m_1 - p_2)$  et  $p_2$  lignes et  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_{11}$  et  $L_{12}$  sont formées respectivement de  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $(p_1 - m_2)$  et  $m_2$  colonnes.

La solution du problème  $\mathcal{H}_\infty$  existe si les hypothèses suivantes sont satisfaites:

- **Hypothèses 1 :**  $(A, B_2)$  est stabilisable et  $(C_2, A)$  est détectable ;
- **Hypothèses 2 :**  $D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{m_2} \end{pmatrix}$ ,  $D_{21} = [0 \quad I_{p_2}]$  sont, respectivement, de rang  $m_2$  et  $p_2$  ;
- **Hypothèses 3 :**  $\forall \omega \in \mathbb{R}^{*+}$ ,  $\text{rang} \begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} = n + m_2$ , donc de rang complet

et en plus  $P_{12}$  n'a pas de zéros sur l'axe des imaginaires ;

• **Hypothèses 4 :**  $\forall \omega \in \mathbb{R}^{*+}$ ,  $\text{rang} \begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix} = n + p_2$  donc de rang complet et en plus  $P_{21}$  n'a pas de zéros sur l'axe des imaginaires.

En mettant  $D_{11} = \begin{pmatrix} D_{1111} & D_{1112} \\ D_{1121} & D_{1122} \end{pmatrix}$  avec  $D_{1122}$  est de dimension  $m_2 \times p_2$ , la solution sera donnée par le théorème 1.1

### IV.4.1.1 Théorème

Supposons qu'un système  $P(s)$  vérifie les hypothèses 1 à 4 décrites plus haut.

1. Il existe un correcteur  $K(s)$  stabilisant le système tel que  $\|\mathcal{F}_\ell(P, K)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si :

- $\gamma > \max(\bar{\sigma}[D_{1111} \cdot D_{1112}], \bar{\sigma}[D_{1112} \cdot D_{1121}])$
- Il existe des solutions  $X_\infty > 0$  et  $Y_\infty > 0$  vérifiant les deux équations de *Riccati* relatives aux matrices *Hamiltonienne*  $H$  et  $J$ , et tel que la condition  $\rho(X_\infty \cdot Y_\infty) < \gamma^2$ , avec,  $\rho(\cdot)$  désigne le rayon spectral.

2. Les correcteurs stabilisant le système, et vérifiant  $\|\mathcal{F}_\ell(P, K)\|_\infty < \gamma$ , sont donnés par :

$$K(s) = \mathcal{F}_\ell(J, \phi) \quad (\text{IV.36})$$

Où  $\|\phi(s)\|_\infty < \gamma$  et  $J(s)$  est donné par la réalisation suivante

$$J = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.37})$$

$$\text{Avec } \hat{D}_{11} = -D_{1121} \cdot D_{1111}^T \cdot (\gamma^2 \cdot I_{m_1 - p_2} - D_{1111} D_{1111}^T)^{-1} D_{1112} - D_{1122}.$$

Sachant que  $\hat{D}_{12} \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$  et  $\hat{D}_{21} \in \mathbb{R}^{p_2 \times p_2}$  sont deux matrices arbitraires vérifiant :

$$\hat{D}_{12} \cdot \hat{D}_{12}^T = I_{m_2} - D_{1121} \cdot (\gamma^2 \cdot I_{m_1 - p_2} - D_{1111}^T \cdot D_{1111})^{-1} \cdot D_{1121}^T \cdot D_{1121}$$

$$\hat{D}_{21}^T \cdot \hat{D}_{21} = I_{p_2} - D_{1121}^T \cdot (\gamma^2 \cdot I_{p_2 - m_2} - D_{1111} \cdot D_{1111}^T)^{-1} \cdot D_{1112}$$

- $\hat{B}_2 = Z_\infty \cdot (B_2 + L_{12}) \cdot \hat{D}_{12}$  et  $\hat{B}_1 = -Z_\infty \cdot L_2 + Z_\infty \cdot (B_2 + L_{12}) \cdot \hat{D}_{11}$
- $\hat{C}_2 = -\hat{D}_{21} \cdot (C_2 + F_{12})$  et  $\hat{C}_1 = F_2 - \hat{D}_{11} \cdot (C_2 + F_{12})$

- $Z_\infty = (I_n - \gamma^2 \cdot Y_\infty \cdot X_\infty)^{-1}$
- $\hat{A} = A + B \cdot F - \hat{B}_1 \cdot (C_2 + F_{12})$

Le correcteur calculé pour  $\phi(s) = 0$  est appelé le correcteur central

$$K(s) = \begin{bmatrix} \hat{A} & : & \hat{B} \\ \dots & : & \dots \\ \hat{C} & : & \hat{D}_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.37})$$

### IV.4.2 Résolution fondée sur l'approche LMI

En dehors de l'approche fondée sur les équations algébriques de *Riccati* et des techniques utilisant des représentations d'état, il existe une approche plus récente pour la résolution du problème  $\mathcal{H}_\infty$ . En effet, cette approche utilise une formulation du problème en termes d'inégalités matricielles linéaires (LMI) pour les matrices  $X_\infty$  et  $Y_\infty$  introduites précédemment.

Dans le cadre  $\mathcal{H}_\infty$ , les techniques LMI utilisent le lemme fondamental suivant :

#### IV.4.2.1 Lemme

Soit un système ayant la réalisation en espace d'état donnée par le système d'équations (IV.14), les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\|\mathcal{F}_\ell(P, K)\|_\infty < \gamma$  et la matrice d'état  $A$  est stable;
- Il existe une matrice symétrique  $X_\infty$  définie positive  $X_\infty > 0$  qui représente la solution de l'inégalité matricielle linéaire suivante :

$$\begin{pmatrix} A^T \cdot X_\infty - X_\infty \cdot A & X_\infty \cdot B & C^T \\ B^T \cdot X_\infty & -\gamma \cdot I & C^T \\ C & D & -\gamma \cdot I \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{IV.38})$$

Ce résultat est connu sous la forme du Lemme de *Kalman-Popov-Yacubovich*. Il est facile de voir que l'ensemble des solutions de l'équation (IV.38) constitue un ensemble convexe dont on peut extraire une solution par des techniques d'optimisation très performantes.

La démonstration pour le problème de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  consiste à appliquer le lemme précédent au système bouclé puis à manipuler la condition obtenue jusqu'à obtenir des conditions plus

simples. On peut raisonnablement espérer obtenir des *LMI* puisqu'elles constituent une autre caractérisation de la norme  $\mathcal{H}_\infty$ . Ces manipulations donnent le théorème 1.2 :

### IV.4.2.2 Théorème 1.2

Il existe un contrôleur  $K(s)$  qui représente la solution du problème  $\mathcal{H}_\infty$  sous-optimal si et seulement si il existe des matrices symétriques  $X_\infty$  et  $Y_\infty$  solution du problème *LMI* ci-après :

$$\begin{pmatrix} N_x & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} [X_\infty \cdot A + A^T \cdot X_\infty & X_\infty \cdot B_1 \\ B_1^T \cdot X_\infty & -\gamma \cdot I] & \begin{bmatrix} C_1^T \\ D_{11}^T \end{bmatrix} \\ [C_1 & D_{11}] & [-\gamma \cdot I] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_x & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{IV.39})$$

$$\begin{pmatrix} N_y & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} [Y_\infty \cdot A^T + A \cdot Y_\infty & Y_\infty \cdot C_1^T] & \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{11} \end{bmatrix} \\ C_1 Y_\infty & -\gamma \cdot I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_y & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{IV.40})$$

$$\begin{pmatrix} X_\infty & I \\ I & Y_\infty \end{pmatrix} > 0$$

## IV.5 Résultat de Simulation

### IV.5.1. Paramètre de simulation :

$$k_{\text{hinf}} = \begin{bmatrix} K_{h11} & K_{h12} \\ K_{h21} & K_{h22} \end{bmatrix}$$

$$K_{h11} = \frac{0.0007767 s^{11} + 5.38e04 s^{10} + 6.609e08 s^9 + 6.114e11 s^8 + 2.042e14 s^7 + 2.746e16 s^6 + 1.164e18 s^5 - 2.628e18 s^4 + 1.145e19 s^3 + 2.931e19 s^2 + 7.758e18 s + 3.296e15}{s^{11} + 1954 s^{10} + 1.622e06 s^9 + 7.436e08 s^8 + 2.049e11 s^7 + 3.454e13 s^6 + 3.456e15 s^5 + 1.867e17 s^4 + 4.188e18 s^3 + 2.051e18 s^2 + 1.744e15 s + 3.708e11} \quad (\text{IV.41})$$



$$K_{h12} = \frac{8.582e-08 s^{11} - 2964 s^{10} - 3.503e07 s^9 - 1.757e10 s^8 - 1.605e12 s^7 + 2.359e14 s^6 + 3.368e16 s^5 + 1.592e18 s^4 + 6.956e18 s^3 + 5.714e18 s^2 + 1.316e18 s + 5.59e14}{s^{11} + 1954 s^{10} + 1.622e06 s^9 + 7.436e08 s^8 + 2.049e11 s^7 + 3.454e13 s^6 + 3.456e15 s^5 + 1.867e17 s^4 + 4.188e18 s^3 + 2.051e18 s^2 + 1.744e15 s + 3.708e11} \quad (\text{IV.42})$$

$$K_{h21} = \frac{-0.003778 s^{11} - 2.599e05 s^{10} - 3.194e09 s^9 - 2.971e12 s^8 - 1.001e15 s^7 - 1.37e17 s^6 - 6.165e18 s^5 - 9.11e18 s^4 - 2.903e19 s^3 - 4.351e19 s^2 - 1.063e19 s - 4.515e15}{s^{11} + 1954 s^{10} + 1.622e06 s^9 + 7.436e08 s^8 + 2.049e11 s^7 + 3.454e13 s^6 + 3.456e15 s^5 + 1.867e17 s^4 + 4.188e18 s^3 + 2.051e18 s^2 + 1.744e15 s + 3.708e11} \quad (\text{IV.43})$$

$$K_{h22} = \frac{0.0002934 s^{11} + 3.452e04 s^{10} + 4.177e08 s^9 + 3.196e11 s^8 + 8.904e13 s^7 + 1.07e16 s^6 + 4.842e17 s^5 + 9.197e17 s^4 + 5.424e17 s^3 + 1.77e17 s^2 + 3.796e16 s + 1.612e13}{s^{11} + 1954 s^{10} + 1.622e06 s^9 + 7.436e08 s^8 + 2.049e11 s^7 + 3.454e13 s^6 + 3.456e15 s^5 + 1.867e17 s^4 + 4.188e18 s^3 + 2.051e18 s^2 + 1.744e15 s + 3.708e11} \quad (\text{IV.44})$$

IV.6 modèle Simulink :

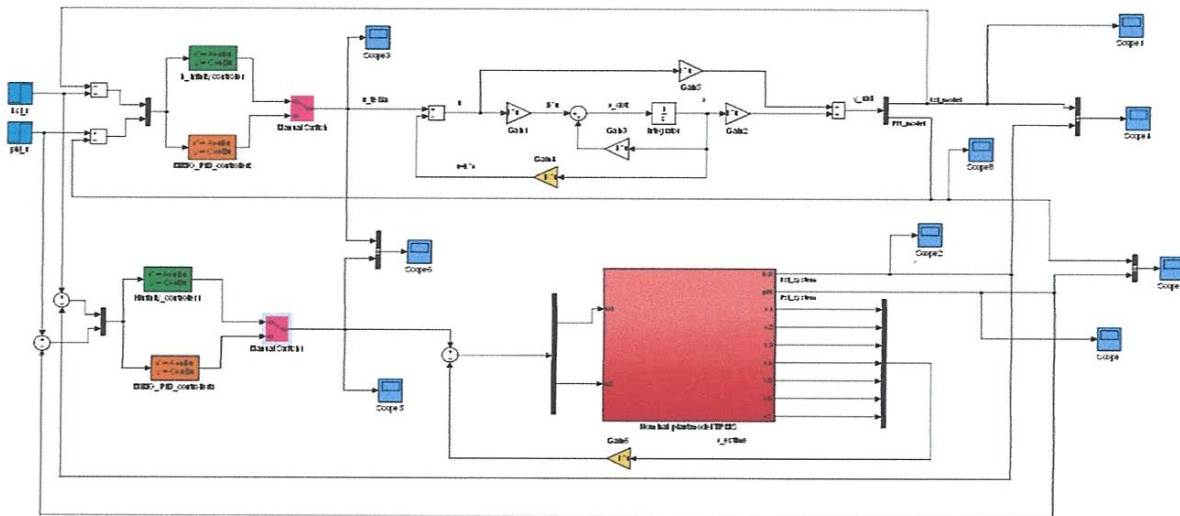


Figure IV.4. Schémas Simulink du TRMS avec un contrôleur linéaire ( $\mathcal{H}_\infty$ )

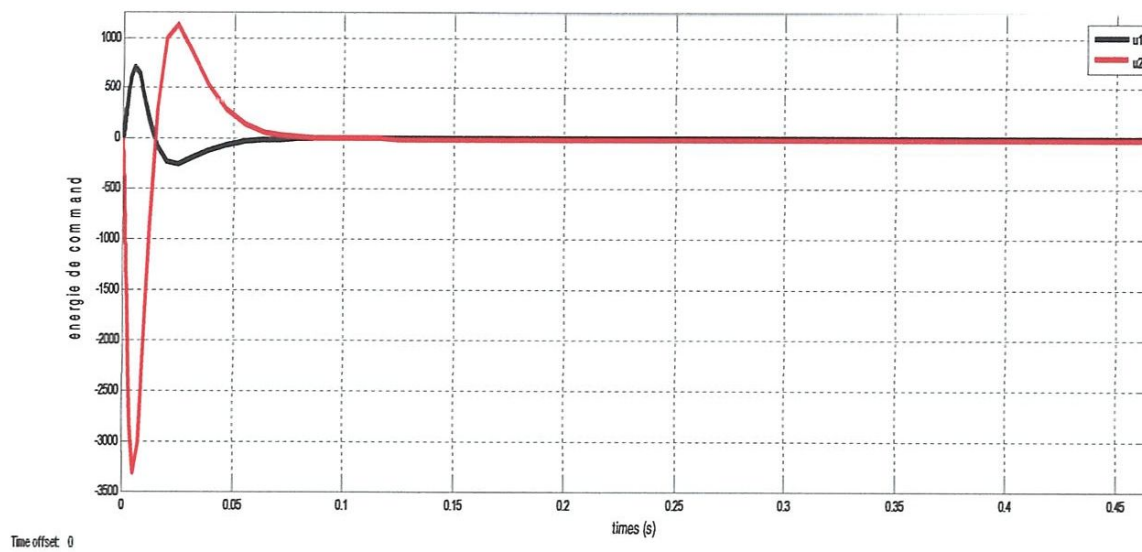
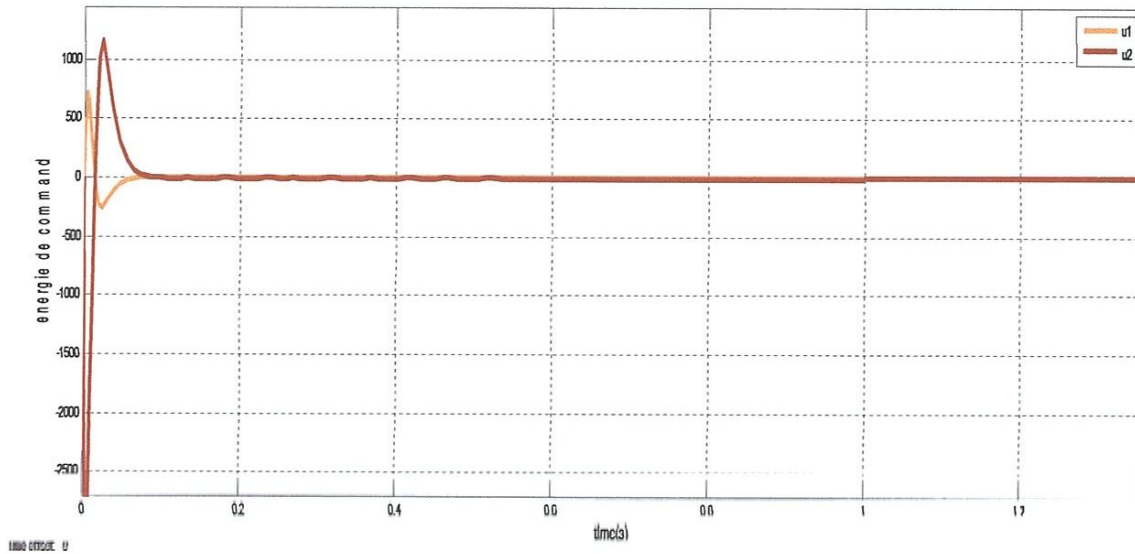
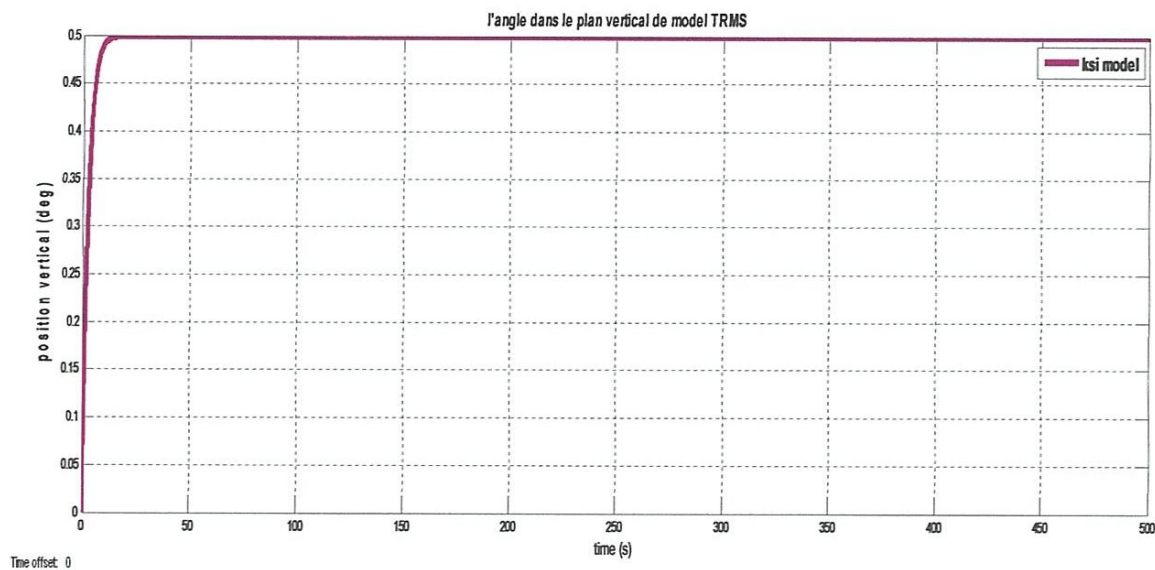


Figure IV.5 : command  $H_\infty$  du TRMS model



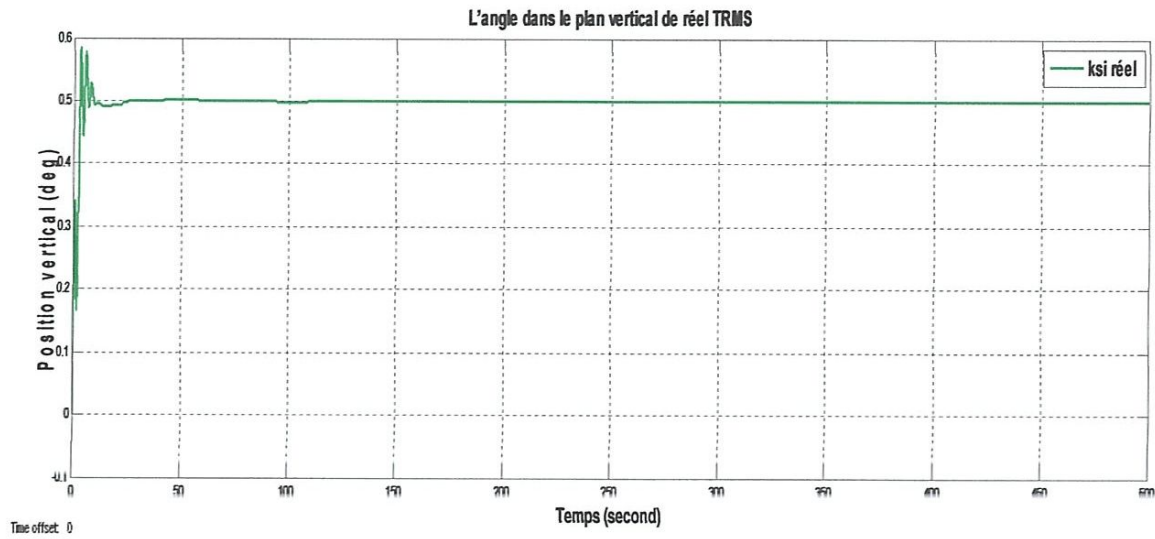
**Figure IV.6 : command  $H_{\infty}$  du TRMS réel**

Dans les deux **figure IV(5,6)**  $u_1$  et  $u_2$  représenté l'énergie de command du TRMS (model et réel).  $u_1$ : pitch (vertical),  $u_2$  : yaw (horizontal)



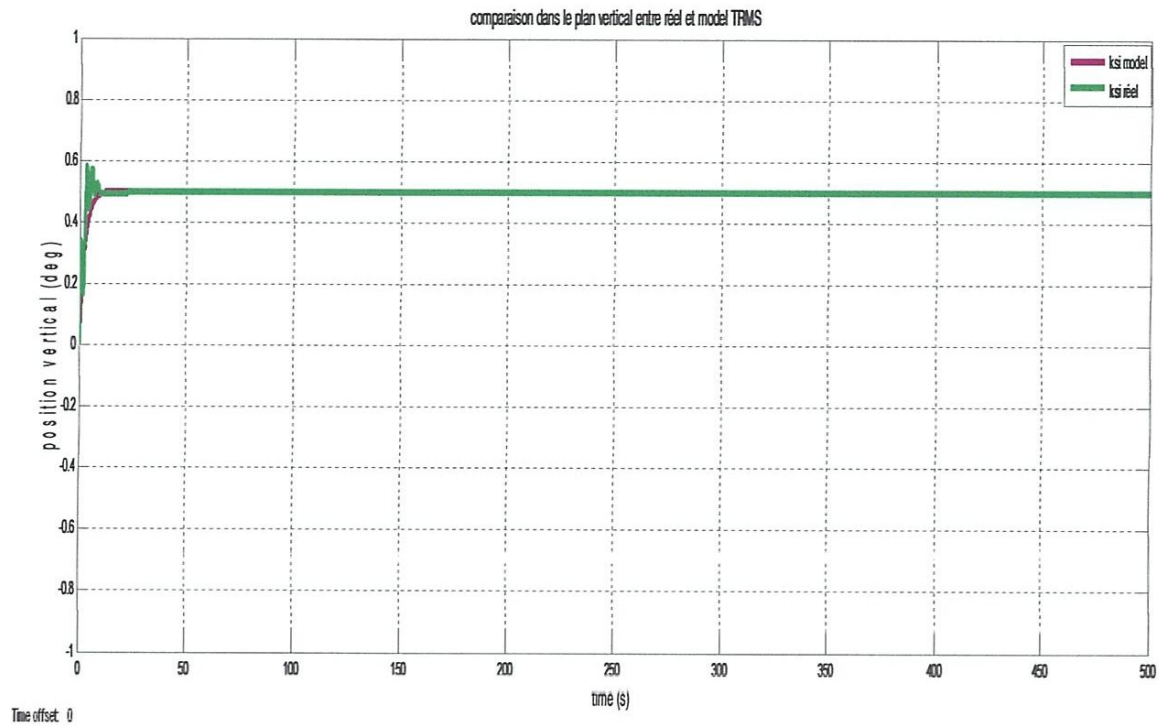
**Figure IV.7. : L'angle dans le plan vertical model TRMS avec un contrôleur  $H_{\infty}$**

D'après **la figure IV.7** on remarque que la réponse temporelle dans le plan vertical model TRMS suit la consigne 0.5 avec un temps de réponse  $tr_1 = 20$  s



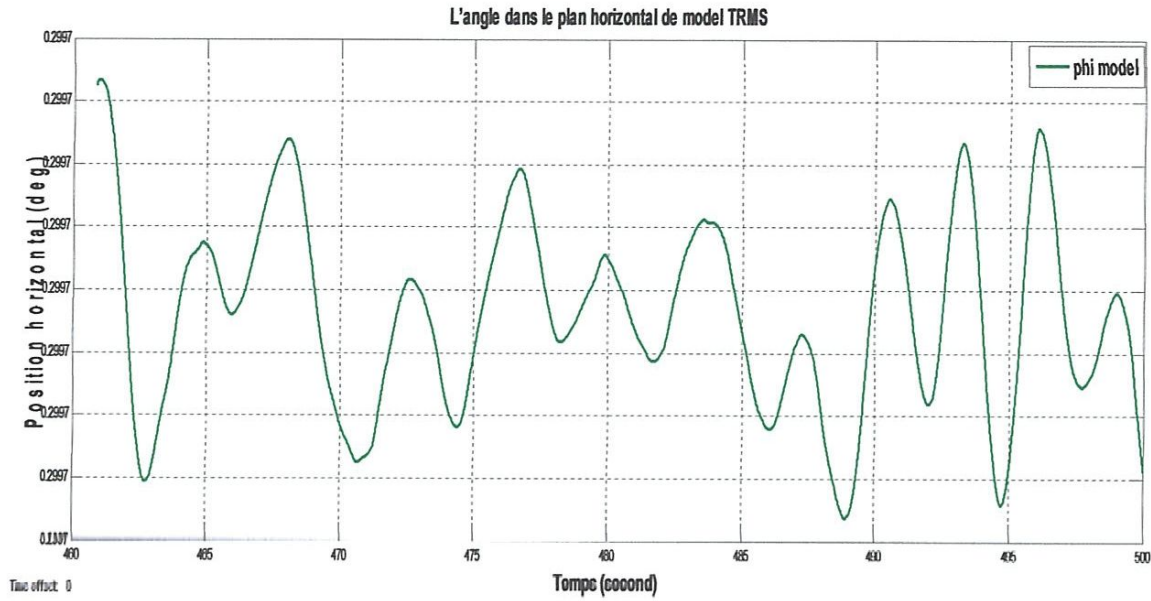
**Figure IV.8. :** L'angle dans le plan vertical réel TRMS avec un contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$

Dans la **figure IV.8** la réponse temporelle dans le plan vertical réel TRMS suit la consigne 0.5 avec un temps de réponse  $tr_2= 25$  s et un dépassement  $D_2=0.59$



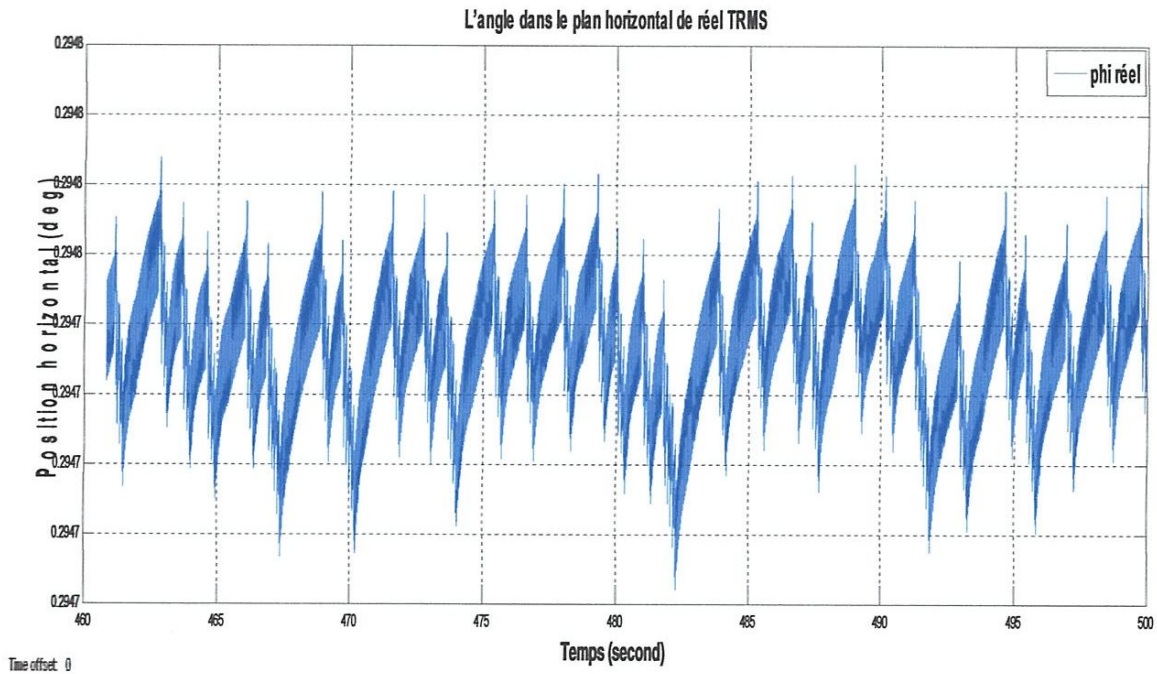
**Figure IV.9 :** Comparaison entre les deux sorties "ksi" de réelle et modèle d'installation des TRMS Avec un contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$

D'après la **figure IV.8** et **IV.9** les deux sortie ksi donné le même résultat (suive la consigne=0.5) la déférence si le temps de réponse  $tr1= 20$  s,  $tr2= 25$



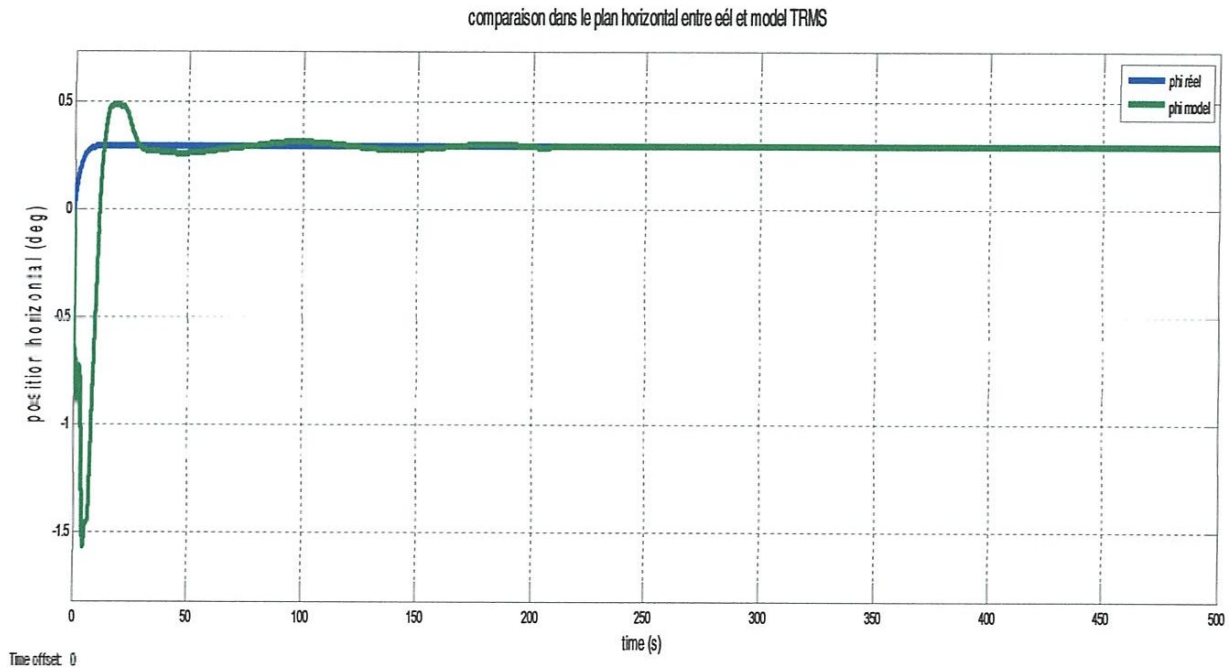
**FigureIV.10.** : la sortie obtenue de model "PHI" avec un contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$

La **figure IV.10** donné une réponse temporelle de l'angle horizontal (phi : yaw) du model TRMS, elle prendre une valeur constant dans le temp  $\approx 0.3$



**FigureIV.11.** : la sortie obtenue de réel "PHI" avec un contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$

La **figure IV.11** donné une réponse temporelle de l'angle horizontal (phi : yaw) du réel TRMS, avec une valeur constant  $\approx 0.3$



**Figure IV.12:** Comparaison entre les deux sorties "ksi" de réelle et modèle d'installation des TRMS avec un contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$

L'angle horizontal (phi : yaw) du réel et model TRMS donné le même résultat (suive la consigne = 0.3)

### IV.7. Conclusion

Les résultats de simulation dans ce chapitre montrent que la méthode  $\mathcal{H}_\infty$  est une méthode efficace pour commander le système complexe d'un côté et d'un autre côté elle est très puissante pour l'élimination des erreurs de modélisation et des perturbations externes ainsi que l'atténuation des bruits de mesure. Cette méthode nous a permis d'assurer un bon compromis de robustesse / stabilité ainsi que de très bonnes performances.

## Conclusion générale

---

L'objectif général de ce mémoire est la conception d'un contrôleur robuste Pour la commande d'un simulateur de vol d'hélicoptère (TRMS). Nous avons commencé par aborder en détail la description et présentation des TRMS. Ensuite en a fait une modélisation du simulateur afin de comprendre la complexité dynamique du système et Nous avons vu qu'il est constitué de deux rotors principal et secondaire chargés à l'élévation et l'orientation du TRMS. Après avoir présenté la théorie contrôleur PID et retour d'état optimal LQR. L'efficacité de ce type de commande est conditionnée par une conception optimale et donne des meilleures performances en termes de réponse transitoire et d'état stationnaire. Ainsi-que la commande par un contrôleur H-infini est conçue pour contrôler les mouvements horizontaux et verticaux du système séparément, elle est efficace pour commander le système complexe d'un côté et d'un autre côté elle est très puissante pour l'élimination des erreurs de modélisation et des perturbations externe ainsi la atténuation des bruits de mesure. Cette méthode nous a permis d'assurer un bon compromis de robustesse / stabilité ainsi que de très bonnes performances.



# *Bibliographie*

[1] [http://perso.numericable.fr/assoamsa/documents/ressources\\_pedago/helico](http://perso.numericable.fr/assoamsa/documents/ressources_pedago/helico)

[2] fersous chikh bey ahmed /mémoire master académique/ faculté des nouvelles technologies de l'information et des communications département d'électronique et des télécommunications/ commande floue d'un twin rotor

[3] trms 33-9495 user manual, feedback instruments lab ,east uk (1988)

[4] benfatma yassine et manaa mohamed salah/mémoire de fin d'etudes en vue de l'obtention du diplôme master /département de génie électrique filière : automatique/commande d'un simulateur d'hélicoptère (trms) par une approche hybride (neuro-floue)

[5] [https://fr.wikipedia.org/wiki/rotor\\_principal](https://fr.wikipedia.org/wiki/rotor_principal)

[6] <https://fr.wikipedia.org/wiki/h%C3%A9licopt%C3%A8re>

[7] sumit kumar pandey et vijaya laxmi/optimal control of twin rotor mimo System using lqr technique/<http://www.springer.com/978-81-322-2204-0>

[8] henri burlès, *systèmes linéaires - de la modélisation à la commande*, hermes science publishing, 2006, 510 p

[9] ankesh kumar agrawal/department of electrical engineering national institute of technology rourkela-769008, india june, 2013/optimal controller design for twin rotor mimo system

**[10]** MAHGOUN MOHAMED SEDDIK/ *Application de la commande  $h_\infty$  aux systèmes linéaires perturbés*/ Présenté au département d'électrotechnique faculté de technologie pour obtenir le diplôme de magister en électrotechnique option : automatique