République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : Equations aux dérivées partielles et Analyse numérique

Par : Boudjehem Bochra

THEME

Méthode des caractéristiques dans les équations de continuité de l'eau dans l'air

Dirigé par : Dr. Belhireche Hanane

Devant le jury

PRESIDENT	Mme. L. ZENKOUFI	MCB	Univ-Guelma
RAPORTEUR	Melle . H. BELHIRECHE	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Melle. N. LARIBI	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2018

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

REMERCIEMENT

JE remercie tout d'abord ALLAH et out puissant qui nous a fourni l'aide et lacon fiance pour réaliser ce modeste travail.

Je remercie nos très chers parents spouleurs soutien set leurs patiences. Je remercie à la dame : H.Belhireche pour son aide, ses conseils set ses remarques qui m'ont permis de présenter mon travaillants la meilleure forme.

Je remercie également tous les enseignants de département de mathématique qui ont contribués à ma formation durant mon cursus universitaire.

Je remercie les membres de jury qui nous font l'honneur de présider et d'examiner ce modeste travail.

En fin je remercie tous ceux qui ont contribués de résoudre loin à l'élaboration de ce modeste travail.

BOUDJEHEM BOCHRA .

DEDICACE

Tout d'abord je tiens à remercier le bon DIEU qui m'a donné le courage et la patience pour arriver à ces ta de fin d'études.

Je dédiée modeste travail à :

A ma tendre mère HAKIMA et mon cher père HACEN

A ma sœur: AMIRA

Et mon frère : MOHAMMED AMINE

Sons oublié : RAHIM

A mes amis : ROUEYA, ROMAISSA, NOUR EL HOUDA, ASMA, AHMED

À tous mes amis d'enfance et du Long Parcours Scolaire et Universitaire

Tous ceux qui m'aiment et que j'aime

Résumé

Dans la présente mémoire, onconsidère le système d'équations décrivant la conservation de la masse de l'eau dans l'air dans la température supérieure à celle de la fusion (c.à.d. dans le cas où on a condensation –évaporation).

Il s'agit d'un système de trois équations accouplées de type transport : équations pour la densité de l'air secρ, la densité de la vapeur d'eau π, et la densité de l'eau liquide σ. Ici la densité σ est considérée comme fonction, non seulement de x, t mais aussi de la masse m d'une gouttelette.

On démontre que ce système admet une seule solution locale.

Méthode des caractéristiques pour les équations de continuité de l'eau dans l'air

Boudjahem Bochra
Mémoire de master en mathématiques
Université de Guelma

13 juin 2018

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Equations de continuité de l'eau dans l'air **4**

2.1 Description de la formation et l'évaporation des gouttelettes . 4

2.2 Système d'équations 6

3 Résolution des equations linéairisées **10**

3.1 Equation linéaire de l'air sec 11

3.2 Equation linéairisée de la vapeur d'eau 15

3.3 Equation linéairisée de l'eau liquide 18

4 Système d'équations non linéaires **35**

Chapitre 1

Introduction

Soucieux de futur de notre planète, le monde s'intèresse aux problèmes du climat et désire en connaitre le mécanisme et les conséquences. Pour répondre à des nombreuses questions qui se posent, la modélisation mathématique des phénomènes atmosphérique et météorologique est aujourd'hui plus nécessaire que jamais. Toutefois à cause de la complexité des phénomènes jusqu'à maintenant la majorité des scientifiques se contentait des modéles partiels ou simplifiés.

Comme on le connait bien, l'atmosphère contient H_2O en trois états : gazeux, liquide et solide à la température normal de notre environnement. L'eau en état liquide dans l'atmosphère se trouve sous la forme des gouttelettes ; quand celles-ci sont petites, elles sont suspendues dans l'air, ce qui forme des nuages ; quand elles sont relativement grandes, elles descendent avec de différentes vitesses, ce que nous appelons comménement la pluie.

La transition de phase de l'eau dans l'atmosphère, en faisant naitre des nuages et on provoquant de la pluie, joue le role trés important dans l'études des phénomènes métiorologiques. L'étude mathématiques d'un système d'équations qui décrit d'une manière suffisamment complète les phénomènes atmosphérique impliquant la transition de phase de l'eau est donc fort souhaitable. Il y au plusieurs tentative de modélisation mathématiques de ces phénomènes. Mais jusqu'a présent la complixité des phénomènes nous a empéché d'établir un système d'équations assez complet et de l'analyser pour obtenir des caractéristiques fondamentales.

Dans [6], sur la base de la description physique des phénomènes, a été proposé un système d'équations qui modélise le movement de l'air y compris la condensation et l'évaporation de l'eau et le mouvement des gouttelettes et il a été démontré que ce système d'équations est bien posé de sorte qu'il admet au moins une seule solution local.

Dans notre travail, on va étudier le cas de la transition gaz- liquide en considère seulement la composante verticale. Il s'agit des trois équations de conservation de la masse de l'air sec, de la vapeur d'eau et de l'eau liquide contenu dans les gouttelettes d'eau, et on étudie l'éxistance et l'unicité de la solution locale.

Chapitre 2

Equations de continuité de l'eau dans l'air

Avant de rapppeler le systéme d'équation qui décrit les équations de continuité de l'eau dans l'air, nous devons décrire les processus de la formation et de l'évaporation des gouttelettes (voir [2]).

2.1 Description de la formation et l'évaporation des gouttelettes

Pour d'écrire la formation et l'évaporation des gouttelettes, rappelons d'abord que la condensation aura lieu quand la densité de la vapeur d'eau notée $\pi(x,t)$ dans l'air dépasse la densité de la vapeur saturée notée $\bar{\pi}_{vs} = \bar{\pi}_{vs}(T)$, qui est fonction de la température T, et que l'évaporation de l'eau des gouttelettes aura lieu quand $\pi(x,t) < \bar{\pi}_{vs}(T)$. Introduisons une fonction $S_l(m)$ qui représente la surface des gouttelettes de masse m, ou nous considérons m comme la somme de la masse de H_2O et de celle des noyaux (dits aérosols) à l'exception des gouttelettes d'eau de diamètre trop petit. Nous supposons que

$$S_l(m) \in C^1([0, \infty[)$$

$S_l(m) = 0$ pour $0 \leq m \leq \frac{\bar{m}_a}{2}$, $S_l(m) = 3^{2/3}(4\pi)^{1/3}m^{2/3}$ pour $m \geq \bar{m}_A$ avec $0 < \bar{m}_a < \bar{m}_A < \infty$ ($\bar{m}_a$ et $\bar{m}_A$ représentent les bornes inférieure et supérieure de la masse des aérosols susceptibles de à formation de gouttelettes). Avec $S_l(m)$ ainsi définie et avec $\pi(x,t)$ et$\bar{\pi}_{vs}(T)$, nous introduisons la quantité de condensation sur les gouttelettes de masse m (par unité de masse)

$$h_{gl}(m) = h_{gl}(T, \pi, m) = K_1 \frac{S_l(m)}{m}(\pi - \bar{\pi}_{vs}(T)),$$

ou K_1 est le coeficient positif de la vitesse de condensation ou d'évaporation. On introduit également la quantité totale de condensation sur toutes les gouttelettes.

$$H_{gl}(T, \pi, \sigma) = K_1(\pi - \bar{\pi}_{vs}(T)) \int_0^\infty \frac{S_l(m)}{m}\sigma(m)dm,$$

ou $\sigma(m)$ désigne la densité de H_2O en l'état liquide contenue dans des gouttelettes de masse m. On a evidemment

$$h_{gl}(m) = \frac{m^{-1}S_l(m)}{\int_0^\infty m'^{-1}S_l(m')\sigma(m')dm'} H_{gl}(T, \pi, \sigma).$$

En autre, on introduit la probabilité avec laquelle une gouttelette de masse m apparaît avec le début de condensation et celle avec laquelle une gouttelette de masse m disparaît suite à l'achèvement de lévaporation. On définit la probabilité de la formation des nouvelles gouttelettes de masse m donnée par

$$g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\sigma)]^+[\pi - \pi_{vs}(T)]^+,$$

ou N^* est le nombre total des gouttelettes qui peuvent être formées dans l'unité de volume, tandis que $\tilde{N}(\sigma)$ représente le nombre dans l'unité de volume des aérosols qui se trouvent déjà dans des gouttelettes et est donné par

$$\tilde{N}(\sigma) = \int_0^\infty \frac{\sigma(m)}{m} dm + C_l \int_0^\infty \sigma(m) dm.$$

De manière analogue on définit la probabilité de disparition des gouttelettes.

$$g_1(m)[\pi - \bar{\pi}_s(T)]^-.$$

Comme au moment du début de la condensation ou de l'achèvement de l'évaporation la masse de la gouttelette m est celle du noyau (aérosol) qui ne s'annule pas, on suppose que

$$g_0(.), g_1(.) \in C_1([0, \infty[),$$

$$suppg_0(.) \in [\bar{m}_a, \bar{m}_A], \quad suppg_1(.) \in [0, \bar{m}_A].$$

Pour les aspects physiques sur lesquels cette modélisation est basée Voir([5,?])

2.2 Système d'équations

Les quantités physiques que nous devons considérer sont : la densité de l'air sec ϱ, la densité de la vapeur d'eau π et la densité de l'eau liquide σ, la vitesse de l'air sec v, la vitesse des goutteletes $u(m)$ et la température T. Les équations de la conservation de la masse de l'eau dans l'air en une dimension spatiale ($x = x_3 \in \Omega =]0, 1[$) sont donnée par le système suivant :

$$\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho v) = 0 \tag{2.1}$$

$$\partial_t \pi(t, x) + \partial_x(\pi v(t, x)) = -H_{gl}(T, \pi, \sigma) \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\partial_t\sigma(m)+\partial_x(\sigma(m)u(m))+\partial_m(mh_{gl}(T,\pi,m)\sigma(m)) &= h_{gl}(T,\pi,m)\sigma(m) \quad (2.3)\\ &+\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m-m')\sigma(m')dm'+\\ &-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'\\ &+g_0(m)[N^*-\tilde{N}(\sigma)]^+[\pi-\pi_{vs}(T)]^+ - g_1(m)[\pi-\pi_{vs}(T)]^-\sigma(m)\end{aligned}$$

D'autre part, de point de vue technique, le terme $h_{gl}(m)$ dans l'équation de la conservation de la masse pour l'eau liquide cause des diffécultés, qu'il est défficile à surmonter au mions dans l'immédiat. Pour cela nous introduisons une ultérieure approximation. Plus précisément on va considérer une approximation de π, c'est-à-dire, nous voulons que π soit une fonction régulière, parmi les possibilités on utilise la moyenne locale. Nous allons utiliser une fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions

$$\begin{cases} 1)\ \theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \\ 2)\ \theta(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ 3)\ \theta(x) = \theta(|x|) \\ 4)\ \int_{\mathbb{R}} \theta(x)dx = 1 \end{cases}$$

et la convolution

$$(\pi * \theta)(x) = \int_{A_1}^{B_1} \pi(y)\theta(x-y)dy.$$

La moyenne locale de π sera donnée par

$$\tilde{\pi}_\theta(x) = \frac{\int_{A_1}^{B_1} \pi(y)\theta(x-y)dy}{\int_{A_1}^{B_1} \theta(x-y)dy}.$$

Plus précisément, nous utilisons la fonction $\theta(x) = \exp(-(\frac{x}{\epsilon})^2)$. On remarque que

$$\frac{d}{dx}\pi_\theta(x) = \frac{2}{\epsilon^2}\frac{\int_{A_1}^{B_1}(x-y)\pi(y)\exp(-\frac{x-y}{\epsilon})^2dy}{\int_{A_1}^{B_1}\exp(-\frac{x-y}{\epsilon})^2dy}+$$

$$+\frac{2}{\epsilon^2}\frac{\int_{A_1}^{B_1}(x-y)\exp(-\frac{x-y}{\epsilon})^2dy\int_{A_1}^{B_1}\pi(y)\exp(-\frac{x-y}{\epsilon})^2dy}{(\int_{A_1}^{B_1}\exp(-\frac{x-y}{\epsilon})^2dy)^2},$$

ce qui donne

$$\|\frac{d}{dx}\tilde{\pi}_\theta\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C\|\pi\|_{H^1(\Omega)}.$$

En utilisant cette approximation dans les équations (2.2)-(2.3) on obtient :

$$\partial_t\pi+\partial_x(\pi v)=-H_{gl}(T,\tilde{\pi}_\theta,\sigma), \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\partial_t\sigma(m)+\partial_x(\sigma(m)u(m))+\partial_m(mh_{gl}\sigma(m))-h_{gl}(T,\tilde{\pi}_\theta,m)\sigma(m)+\\ +\frac{m}{2}\int_0^m\beta(m-m',m')\sigma(m-m')\sigma(m')dm'+\\ -m\int_0^\infty\beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'+\\ +g_0(m)[N^*-\tilde{N}(\sigma)]^+[\tilde{\pi}_\theta-\pi_{vs}]^+-g_1(m)[\tilde{\pi}_\theta-\pi_{vs}(T)]^-\sigma(m).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Le système est envisagé dans un espace de dimension un $\Omega=]0,1[$ qui représente l'axe verticale de l'atmosphère et on s'intéresse à démontrer que ce système est bien posé de sorte qu'il admet au moins une solution locale (solution locale en temps).

La solution inconnue à chercher est (ϱ,π,σ) et on suppose donc que v et T sont des fonctions connues tels que :

$$v\in L^2(0,t_1,H^2(\Omega))\bigcap L^\infty(0,t_1,H_0^1(\Omega)) \tag{2.6}$$

$$T\in L^2(0,t_1,H^2(\Omega))\bigcap L^\infty(0,t_1,H_0^1(\Omega))$$

Et on suppose que

$$v=0\ pour\ \ x=0\ \ et\ \ x=1 \tag{2.7}$$

En ce qui concerne la fonction $\beta(m', m'')$ qui figure dans (2.3), nous supposons qu'elle est une fonction suffisamment régulière et qu'il existe une constante $\bar{M}_1 (\bar{M}_1 < \infty)$ telle que

$$\beta(m', m'') = 0 \; si \; m' + m'' \geq \bar{M}_1.$$

Cette condition est motivée non seulemenet pour des raisons technique, mais aussi par le phénomène d'éclatement des grosses gouttelettes par la friction avec l'air.Pour la simplicité de la notation, on pose

$$D_2 =]0, \bar{M}[\times \Omega,$$

ou $\bar{M}$ est une constante suffisamment grande de sorte que, comme on la précise $\sigma(m, x, t) = 0$ pour $m \geq \bar{M}$ $\forall t \in [0, t_1]$. D'autre part, pour la fonction $u(m)$ de la vitesse des gouttelettes nous donnons l'éxpression

$$u(m) = v(t, x) - \frac{1}{\alpha(m)} \frac{d\Phi}{dx}$$

ou $\alpha(m)$ est la coefficient de frottement entre les gouttelettes de masse m et l'air et Φ est la potentiel vérifie

$$\frac{d\Phi}{dx} \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad et \quad \frac{d\Phi}{dx}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Pour les conditions initiales on a :

$$\varrho(0, .) = \varrho_0(.) \in H^1(\Omega), \quad \inf_{x\in\Omega} \varrho_0(x) > 0, \tag{2.8}$$

$$\pi(0, .) = \pi_0(.) \in H^1(\Omega), \quad \pi_0 \geq 0, \tag{2.9}$$

$$\sigma(0, ., .) = \sigma_0(., .) \subset H^1(D_2), \quad \sigma_0 \geq 0. \tag{2.10}$$

Chapitre 3

Résolution des equations linéairisées

Le système que nous voulons résoudre est non linéaire alors l'idée générale que nous adoptons est celle d'examiner d'abord les équations linéairisées et puis de chercher un point fixe d'un opérateur défini par la solution des équations linéairisées.

Soit

$$\pi \in C(0, t_1; H^1(\Omega)) \text{ avec } \pi(t,x) \geq 0$$

$$\bar{\sigma} \in C(0, t_1; H^1(D_2)),$$

on considère le système linéairisé de (2.1), (2.4) et (2.5) on obtient

$$\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho v) = 0, \tag{3.1}$$

$$\partial_t \pi(t,x) + \partial_x(\pi v(t,x)) = -H_{gl}(T, \bar{\pi}_\theta, \bar{\sigma}), \tag{3.2}$$

$$\partial_t \sigma(m) + \partial_x(\sigma(m)u(m)) + \partial_m(mh_{gl}(T, \bar{\pi}_\theta, m)\sigma(m)) = h_{gl}(T, \bar{\pi}_\theta, m)\bar{\sigma}(m) \tag{3.3}$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\bar{\sigma}(m-m')\bar{\sigma}(m')dm'+$$
$$-m\int_0^\infty \beta(m,m')\bar{\sigma}(m)\bar{\sigma}(m')dm'$$
$$+g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma})]^+[\bar{\pi}_\theta - \pi_{vs}(T)]^+ - g_1(m)[\bar{\pi}_\theta - \pi_{vs}(T)]^-\sigma(m)$$

3.1 Equation linéaire de l'air sec

On remarque qu'avec v donnée l'équation (3.1) est linéaire. On a le lemme suivant :

Lemme 3.1.1 *L'équation* (3.1) *avec la condition initial* (2.8) *admet une solution ϱ et une seule dans la classe $\varrho \in C(0,t_1;C(\Omega))$ et on a*

$$0 < \alpha(t) \leq \varrho(t,x) \leq \beta(t) < \infty \tag{3.4}$$

ou

$$\alpha(t) = \alpha_0 \exp(-\int_0^t \|\partial_x v(t',\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}d\acute{t}),$$

avec

$$\alpha_0 = \inf_{x\in\Omega}(\varrho_0(x))$$

et

$$\beta(t) = \beta_0 \exp(\int_0^t \|\partial_x v(t',\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}d\acute{t}),$$

avec

$$\beta_0 = \sup_{x\in(\Omega)}(\varrho_0(x)).$$

Démonstration

L'équation (3.1) s'écrit sous la forme :

$$\partial_t\varrho + v\partial_x\varrho = -\varrho\partial_x v \tag{3.5}$$

La méthode fondamentale de l'étude des équations du type (3.5) est celle des caractéristiques . On définit les courbes caractéristiques par :

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t, x(t)), \quad x(0) = x^0 \tag{3.6}$$

alors, de (3.5) on obtient

$$\frac{d\varrho(t, x(t))}{dt} = -\varrho\partial_x v \tag{3.7}$$

La fonction v vérifier la condition de lipschitz pour la variable x et donc d'aprés le théorème de l'existence et l'unicité de la solution locale de l'équation différenteille ordinaire , il existe une solution $x(t)$ de (3.6) dans $[0, T_1]$. De la condition (2.7), l'application qui a $x^0 \in \Omega$ associe $x(t)$ est une bijection de Ω sur Ω , nous désignons cette application bijective par $x_t(x^0) = x(t)$.

Ainsi, en résolvant le problème de Cauchy

$$\frac{d\tilde{\varrho}_0(t, x^0)}{dt} = -\tilde{\varrho}(t, x^0)\partial_x v|_{x=y_t(x^0)}$$

on obtient la solution :

$$\tilde{\varrho}(t, x^0) = \tilde{\varrho}(x^0)\exp(-\int_0^t \partial_x v(\grave{t}, x(\grave{t}))d\grave{t})$$

On pose $\varrho(t, x(t)) = \tilde{\varrho}(t, x^0)$ alors la solution de l'équation (3.7) est :

$$\varrho(t, x) = \varrho(t, x_t(x^0)) = \varrho_0(x^0)\exp(-\int_0^t \partial_x v(\grave{t}, x(\grave{t}))d\grave{t})$$

Pour démontrer (3.4) on a

$$-\|\partial_x v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq -\partial_x v(t, x) \leq \|\partial_x v\|_{L^\infty(\Omega)}$$

donc

$$\varrho_0(x^0)\exp(-\int_0^t \|\partial_x(v)\|_{L^\infty(\Omega)}d\grave{t}) \leq \varrho_0(x^0)\exp(-\int_0^t \partial_x v(t, x)d\grave{t}) \leq$$

$$\leq \varrho_0(x^0)\exp(\int_0^t \|\partial_x v\|_{L^\infty(\Omega)} d\grave{t})$$

par conséquent

$$\inf_{x\in\Omega} \rho_0(x)\exp(-\int_0^t \|\partial_x(v)\|_{L^\infty(\Omega)} d\grave{t}) \leq \varrho(t,x(t)) \leq$$

$$\leq \sup \varrho_0(x)\exp(\int_0^t \|\partial_x(v)\|_{L^\infty(\Omega)} d\grave{t})$$

d'où

$$0 < \alpha(t) \leq \varrho(t,x(t)) \leq \beta(t) < \infty$$

Le lemme est démontré.

L'équation (2.1) avec la condition initiale (2.8) nous permet d'obtenir une estimation utile de ϱ.

Proposition 3.1.1 *La solution ϱ de l'equation* (2.4) *avec la condition initiale* (2.8) *vérifie la relation*

$$\|\varrho(t,.)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|\varrho_0\|^2_{H^1(\Omega)} \exp(Ct^{1/2}\|v\|_{L^2(0,t,H^2(\Omega))}).$$

Démonstration En multipliant l'equation (2.4) par ϱ et en faisant l'intégrale sur Ω , on a

$$\int_\Omega \varrho\partial_t\varrho dx = -\int_\Omega \varrho\partial_x\varrho v dx - \int_\Omega \varrho^2\partial_x v dx.$$

Grâce à la condition $v = 0$ sur $\partial\Omega$, on a

$$\int_\Omega \partial_t\varrho^2 dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \varrho^2\partial_x v dx$$

d'ou

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |\varrho|^2 dx < \frac{1}{2}\|\partial_x v\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |\varrho|^2 dx$$

on en déduit que

$$\frac{d}{dt}\|\varrho\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|\partial_x v\|_{L^\infty(\Omega)}\|\varrho\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Grâce à l'inégalité de Sobolev $\|\partial_x v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|v\|_{H^2(\Omega)}$, on a

$$\frac{d}{dt}\|\varrho\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|v\|_{H^2(\Omega)}\|\varrho\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{3.8}$$

Maintenant, on applique l'opérateur ∂_x à l'équation (2.4) et multiplie par $\partial_x\varrho$ l'équation obtenue. Si on l'intègre sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega \partial_x\varrho\partial_x(\partial_t\varrho)dx = -\int_\Omega \partial_x\varrho\partial_x[\partial_x\varrho v + \varrho\partial_x v]dx$$

Or, on a

$$\int_\Omega \partial_x\varrho(\partial_x\partial_t\varrho)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega(\partial_x\varrho)^2dx.$$

D'autre part grâce à la condition $v = 0$ sur $\partial\Omega$, on a

$$\int_\Omega \partial_x\varrho[\partial_x(\partial_x\varrho v) + \partial_x(\varrho\partial_x v)]dx = \int_\Omega \partial_x\varrho[\partial_x^2\varrho v + 2\partial_x\varrho\partial_x v + \varrho\partial_x^2 v]dx.$$

Comme

$$\int_\Omega \partial_x\varrho\partial_x^2\varrho v dx = -\int_\Omega \partial_x\varrho(\partial_x^2\varrho)v dx - \int_\Omega(\partial_x\varrho)^2\partial_x v dx,$$

d'ou

$$\int_\Omega \partial_x\varrho\partial_x^2\varrho v dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega(\partial_x\varrho)^2\partial_x v dx.$$

On a

$$\int_\Omega \partial_x\varrho[\partial_x(\partial_x\varrho v) + \partial_x(\varrho\partial_x v)]dx = \frac{3}{2}\int_\Omega(\partial_x\varrho)^2\partial_x v dx + \int_\Omega \varrho\partial_x\varrho\partial_x^2 v dx,$$

donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x \varrho\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{3}{2}C\|v\|_{H^2(\Omega)}\|\varrho\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_\Omega |\varrho||\partial_x \varrho||\partial_x^2 v|dx.$$

De plus, on a

$$\int_\Omega |\varrho||\partial_x \varrho||\partial_x^2 v|dx \leq C\|\varrho\|^2_{H^1(\Omega)}\|v\|^2_{H^2(\Omega)}.$$

Alors

$$\frac{d}{dt}\|\partial_x \varrho\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|\varrho\|^2_{H^1(\Omega)}\|v\|^2_{H^2(\Omega)} \tag{3.9}$$

En adjoigant les inégalités (3.8) et (3.9) on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\varrho\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\|\varrho\|^2_{H^1(\Omega)}\|v\|^2_{H^2(\Omega)}$$

En rappelant l'hypothése que $\varrho_0 \in H^1(\Omega)$, on en déduit que

$$\|\varrho(t,.)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|\varrho_0\|^2_{H^1(\Omega)} \exp(C\int_0^t \|v\|_{H^2(\Omega)}d\grave{t}).$$

D'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwartz,on a

$$\int_0^t \|v(t',.)\|_{H^2(\Omega)}d\grave{t} \leq t^{1/2}\|v\|_{L^2(0,t,H^2(\Omega))}.$$

Ce qui nous permet de déduire

$$\|\varrho(t,.)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|\varrho_0\|^2_{H^1(\Omega)} \exp(Ct^{1/2}\|v\|_{L^2(0,t,H^2(\Omega))}).$$

La proposition est démontrée.

3.2 Equation linéairisée de la vapeur d'eau

Maintenant on va examiner l'équation linéairisée de la vapeur d'eau. Analoguement à l'éqution (2.4) l'équation (2.5) peut étre résolue, en utilisant la méthode des caractéristiques. Nous allons illustrer l'application de cette méthode dans le lemme suivant

Lemme 3.2.1 *L'équation* (2.5) *avec la condition initiale* (2.9) *admet une solution* π *et une seule dans la classe* $\pi \in C(0, t_1, C(\Omega))$

Démonstration De l'équation (3.2) on a :

$$\partial_t \pi + v\partial_x \pi = -\pi\partial_x v - H_{gl}(T, \bar{\pi}_\theta, \bar{v})$$

on définit les caractéristiques par le problème de cauchy (3.6) on alors l'écriture suivante :

$$\frac{d}{dt}\pi(t, x(t)) = -\pi\partial_x v - H_{gl}$$

sur chaque trajectoire. En procédant de manière analogue à la démonstration du lemme 3.1.1 , on montre l'existence et l'unicité de la solution et on a :

$$\pi(t,x) = \pi_0(x^0)\exp(-\int_0^t \partial_x v(\grave{t}, x(\grave{t})d\grave{t})) - \int_0^t H_{gl}(T, \bar{\pi}_\theta, \bar{\sigma})\exp(\int_{\grave{t}}^t \partial_x v(t'', x(t''))dt'')d\grave{t}. \tag{3.10}$$

L'équation (2.5) avec la condition initial de (2.9) nous permet d'obtenir une estimation utile de π

Proposition 3.2.1 *La solution* π *de l'equation* (2.5) *vérifie la relation*

$$\|\pi(.,t)\|^2_{H^1} \le \|\pi_0\|^2_{H^1}\exp(\int_0^t (C\|v\|_{H^2(I)}+1)d\grave{t}) + \int_0^t \|H_{gl}\|^2_{H^1(I)}\exp(\int_{\grave{t}}^t (C\|v\|_{H^2(I)}+1)dt'')d\grave{t}.$$

Démonstration En multipliant l'equation (3.2) par π et en faisant l'intégrale sur Ω , on a

$$\int_\Omega \pi\partial_t\pi dx + \int_\Omega \pi\partial_x(\pi v)dx = -\int_\Omega \pi H_{gl}dx$$

$\Longleftrightarrow$

$$\int_\Omega \pi\partial_t\pi dx = -\int_\Omega \pi\partial_x(\pi v)dx - \int_\Omega \pi H_{gl}dx$$

alors
$$\int_\Omega \partial_t \pi^2 dx = -1/2 \int_\Omega \pi^2 \partial_x v dx - \int_\Omega \pi H_{gl} dx.$$
On applique l'inégalité de Cauchy-schwartz,on a
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\pi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|\partial_x \bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\pi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\pi\|_{L^2(\Omega)}\|H_{gl}\|_{L^2(\Omega)},$$
grâce à l'inégalité de sobolev $\|\partial_x v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|\bar{v}\|_{H^2(\Omega)}$, on a
$$\frac{d}{dt}\|\pi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|\bar{v}\|_{H^2(\Omega)}\|\pi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\pi\|_{L^2(\Omega)}2\|H_{gl}\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.11}$$

Maintenat on applique l'opérateur ∂_x à l'équation (3.2) et multiplie par $\partial_x\pi$ l'équation obtenue. Si on l'intègre sur Ω, on obtient
$$\int_\Omega \partial_x\pi\partial_x(\partial_t\pi)dx = -\int_\Omega \partial_x\pi\partial_x[\partial_x\pi v + \pi\partial_x v + H_{gl}]dx.$$
Or, on a
$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_x\pi\partial_x(\partial_t\pi)dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega(\partial_x\pi)^2dx\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x\pi\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$
et aussi grâce à la condition $v = 0$ sur $\partial\Omega$, on a
$$\int_\Omega \partial_x\pi\partial_x[\partial_x\pi v + \pi\partial_x v]dx + \int_\Omega \partial_x\pi\partial_x H_{gl}dx =$$
$$= \int_\Omega \partial_x\pi[\partial_x^2\pi v + 2\partial_x\pi\partial_x v + \pi\partial_x^2 v]dx + \int_\Omega \partial_x\pi\partial_x H_{gl}dx.$$
Comme
$$\int_\Omega \partial_x\pi\partial_x^2\pi v dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega(\partial_x\pi)^2\partial v dx.$$
Donc on a
$$\int_\Omega \partial_x\pi\partial_x[\partial_x\pi v + \pi\partial_x v]dx = \frac{3}{2}\int_\Omega(\partial_x\pi)^2\partial v dx + \int_\Omega \pi\partial_x\pi\partial_x^2 v dx,$$

on déduit que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x\pi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{3}{2}\int_\Omega(\partial_x\pi)^2|\partial_x v|dx + \int_\Omega |\pi||\partial_x\pi||\partial_x^2 v|dx + \int_\Omega \partial_x|\pi||\partial_x H_{gl}|dx.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x\pi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{3}{2}\|\partial_x v\|_{L^\infty(\Omega)}\|\partial_x\pi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\pi\|_{L^\infty(\Omega)}\|\partial_x\pi\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_x^2 v\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_x\pi\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_x H_{gl}\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'aprés l'injection de Sobolev $\|\partial_x v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|v\|_{H^2(\Omega)}$, on a

$$\frac{d}{dt}\|\partial_x\pi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|v\|_{H^2(\Omega)}\|\pi\|^2_{H^1(\Omega)} + 2\|\partial_x\pi\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_x H_{gl}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.12}$$

En adjoignant les inégalités (3.11) et (3.12), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\pi\|^2_{H^1(\Omega)} &\leq C\|v\|_{H^2(\Omega)}\|\pi\|^2_{H^1(\Omega)} + 2\|\pi\|_{H^1(\Omega)}\|H_{gl}\|_{H^1(\Omega)}.\\ &\leq C\|v\|_{H^2(\Omega)}\|\pi\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\pi\|^2_{H^1(\Omega)}\|Hgl\|^2_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Donc on a

$$\frac{d}{dt}\|\pi\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (C\|v\|_{H^2(\Omega)} + 1)\|\pi\|^2_{H^1(\Omega)} + \|H_{gl}\|^2_{H^1(\Omega)} \tag{3.13}$$

ce qui nous donne

$$\|\pi(t,.)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|\pi_0\|^2_{H^1(\Omega)}\exp(\int_{\grave{t}}^t (C\|v\|_{H^2(\Omega)}+1)d\grave{t}) + \int_0^t \|H_{gl}\|^2_{H^1(\Omega)}\exp(\int_{\grave{t}}^t (C\|v\|_{H^2(\Omega)}+1)dt'')d\grave{t}. \tag{3.14}$$

La proposition est démontrée.

3.3 Equation linéairisée de l'eau liquide

Passons maintenat à la résolution de l'équation (3.1). On a le lemme suivant :

Lemme 3.3.1 *L'équation* (3.1) *avec la condition initiale* (2.10) *admet une solution* σ *et une seule dans la classe* $\sigma \in C(0, t_1; C(D_2))$.

Démenstration Résolvons l'équation (3.1) le long des caractéristiques $(m(t), x(t))_{t\in[0,t_1]}$ définies comme solution du problème de Cauchy suivant :

$$\frac{dm(t)}{t} = m(t)h_{gl}(T, \bar{\pi}_\theta, m, t, x(t)), \frac{dx(t)}{t} = u(m(t), t, x(t)) \tag{3.15}$$

$$m(0) = m_0 \in [0, \bar{M}], x(0) = x_0 \in \Omega.$$

On pose $\bar{u}_2 = (mh_{gl}, u)$. Alors l'équation (3.1) peut être écrite dans la forme

$$\begin{gathered}\partial_t\sigma(m) + \nabla_{(m,x)}(\sigma(m)\bar{u}_2(m)) = h_{gl}\bar{\sigma}(m)\\ +\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m', m')\bar{\sigma}(m-m')\bar{\sigma}(m)dm' +\\ -m\int_0^\infty \beta(m, m')\bar{\sigma}(m)\bar{\sigma}(m')dm'\\ +g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma})][\bar{\pi}_\theta - \bar{\pi}_{vs}(T)]^+ - g_1(m)[\bar{\pi}_\theta - \bar{\pi}_{vs}(T)]^-\bar{\sigma}(m).\end{gathered}$$

En utilisant la méthode des caractéristiques, on obtient

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\sigma(m) = -\sigma(m)\nabla_{(m,x)}\bar{u}_2(m) + h_{gl}\sigma(m) +\\ +\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m', m')\bar{\sigma}(m-m')\bar{\sigma}(m')dm' +\\ -m\int_0^{\bar{M}} \beta(m, m')\bar{\sigma}(m)\bar{\sigma}(m')dm'\\ +g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma})][\bar{\pi}_\theta - \bar{\pi}_{vs}(T)]^+ - \bar{\sigma}(m)g_1(m)[\bar{\pi}_\theta - \bar{\pi}_{vs}(T)]^-.\end{gathered}$$

En procedant de manière analogue à la démonstration du lemme , on montre l'éxistence et l'unicité de la solution. On a donc la solution σ ayant l'expression

$$\sigma(m(t), x(t), t) = \sigma_0(m^0, x^0)\exp(-\int_0^t \nabla_{(m,x)}.\bar{u}_2(t', y_{t'}(m^0, x^0)dt')$$

$$+\int_0^t (h_{gl}(m)\bar{\sigma}(m)+\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m^{'},m^{'})\bar{\sigma}(m^{'})\bar{\sigma}(m-m^{'})dm^{'}+$$

$$-m\int_0^{\bar{M}}\beta(m,m^{'})\bar{\sigma}(m^{'})\bar{\sigma}(m)dm^{'}+g_0(m)[N^*-\tilde{N}(\bar{\sigma})][\bar{\pi}_\theta-\bar{\pi}_s(T)]^+ +$$

$$-g_1(m)\bar{\sigma}(m)[\bar{\pi}_\theta-\bar{\pi}_s(T)]^-)\exp(-\int_{t^{'}}^t \nabla_{(m,x)}.\bar{u}_2(t^{''},y_{t^{''}}(m^0,x^0)dt^{''}))dt^{'}.$$

Le lemme est démontré.

Proposition 3.3.1 *La solution σ de l'équation* (3.1) *avec la condition initiale* (2.10) *vérifie la relation*

$$\|\sigma(t,.,.)\|^2_{H^1(D_2)}\leq\|\sigma_0\|^2_{H^1(D_2)}\exp(\int_0^t C[\|v\|_{H^2(\Omega)}+\|barpi\|_{H^1(\Omega)}+\|T\|_{H^2(\Omega)}+$$

$$+1]dt^{'})+\int_0^t C[(\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)}+\|T\|_{H^2(\Omega)})(\|\bar{\sigma}\|^2_{H^1(D_2)}+2\|\bar{\sigma}\|_{H^1(D_2)}+1)+$$

$$+\|\bar{\sigma}\|^4_{H^1(D_2)}]\exp(\int_{t^{'}}^t C[\|v\|_{H^2(\Omega)}+\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)}+\|T\|_{H^2(\Omega)}+1]dt^{''})dt^{'}.$$

Démonstration

En multipliant l'équation (3.1) par $\sigma(m)$ et en faisant l'intégrale sur $]0,\bar{M}[\times\Omega$, on a

$$\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma(m)\partial_t\sigma(m)dxdm+\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma(m)\partial_x(\sigma(m)\bar{u}(m))dxdm+$$

$$+\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma(m)\partial_m(mh_{gl}(m)\sigma(m))dxdm=\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma(m)h_{gl}(m)\bar{\sigma}(m)dxdm$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m)\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm+$$

$$-m\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega\int_0^{\bar{M}}\beta(m,m')\sigma(m)\bar{\sigma}(m)\bar{\sigma}(m')dm'dxdm+$$

$$+\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma(m)g_0(m)[N^*-\tilde{N}(\bar{\sigma})]^+[\bar{\pi}_\theta-\bar{\pi}_{vs}(T)]^+dxdm+$$

$$-\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma(m)\bar{\sigma}(m)g_1(m)[\bar{\pi}_\theta-\bar{\pi}_{vs}(T)]^- dxdm,$$

où

$$\frac{1}{2}\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_t\sigma(m)^2 dxdm=\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \bar{u}(m)\sigma(m)\partial_x(\sigma(m))dxdm+$$

$$+\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega mh_{gl}(m)\sigma(m)\partial_m\sigma(m)dxdm+\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma(m)\bar{\sigma}(m)h_{gl}dxdm+$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m)\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm+$$

$$-m\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m)\bar{\sigma}(m)\bar{\sigma}(m')dm'dxdm+$$

$$+\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma(m)g_0(m)[N^*-\tilde{N}(\bar{\sigma})]^+[\bar{\pi}_\theta-\bar{\pi}_{vs}(T)]^+dxdm+$$

$$-\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma(m)\bar{\sigma}(m)g_1(m)[\bar{\pi}_\theta-\bar{\pi}_{vs}(T)]^- dxdm.$$

On déduit que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma(m)^2 dxdm=\frac{1}{2}\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \bar{u}(m)\partial_x(\sigma(m)^2)dxdm+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega mh_{gl}(m)\partial_m\sigma(m)^2 dxdm+\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma(m)\bar{\sigma}(m)h_{gl}dxdm+$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m)\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm+$$

$$-m\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega\int_0^{\bar{M}} \beta(m,m')\sigma(m)\bar{\sigma}(m)\bar{\sigma}(m')dm'dxdm+$$

$$+\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma(m)g_0(m)[N^*-\tilde{N}(\bar{\sigma})]^+[\bar{\pi}_\theta-\bar{\pi}_{vs}(T)]^+dxdm+$$

$$-\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma(m)\bar{\sigma}(m)g_1(m)[\pi_\theta-\bar{\pi}_{vs}(T)]^- dxdm.$$

En vertu des conditions $\bar{u} = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\sigma(m) = 0$ pour $m \geq \bar{M}$, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma(m)^2 dxdm = -\frac{1}{2}\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma(m)^2\partial_x\bar{u}(m)dxdm +$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_m(mh_{gl}(m)\sigma(m)^2)dxdm + \int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma(m)\bar{\sigma}(m)h_{gl}dxdm +$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m)\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm +$$

$$-m\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega\int_0^{\bar{M}} \beta(m,m')\sigma(m)\bar{\sigma}(m)\bar{\sigma}(m')dm'dxdm +$$

$$+\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma(m)g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma})]^+[\bar{\pi}_\theta - \bar{\pi}_{vs}(T)]^+dxdm +$$

$$-\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma(m)\bar{\sigma}(m)g_1(m)[\bar{\pi}_\theta - \bar{\pi}_{vs}(T)]^- dxdm.$$

On remarque que

$$\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m)\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm \leq$$

$$\leq C_\beta\int_0^M\int_\Omega \sigma(m)\int_0^m \sigma(m')\sigma(m-m')dm'dxdm$$

$$\leq C_\beta\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma(m)\int_0^{\bar{M}} \bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm$$

$$\leq C_\beta\int_0^{\bar{M}}[\int_\Omega \sigma(m)^2dx]^{1/2}[\int_\Omega(\int_0^{\bar{M}} |\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')|dm')^2dx]^{1/2}dm$$

$$\leq C_\beta\int_0^{\bar{M}}[\int_\Omega \sigma(m)^2dx]^{1/2}[\int_\Omega \bar{M}(\int_0^{\bar{M}} (\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m'))^2dm')dx]^{1/2}dm$$

$$\leq C_\beta\sqrt{\bar{M}}\int_0^{\bar{M}}[\int_\Omega |\sigma(m)|^2dx]^{1/2}[\int_\Omega\int_0^{\bar{M}} (\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m'))^2dm'dx]^{1/2}dm$$

$$\leq C_\beta\sqrt{\bar{M}}[\int_0^{\bar{M}}[\int_\Omega |\sigma(m)|^2dx]dm]^{1/2}[\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega\int_0^{M} (\bar{\sigma}^2(m')\bar{\sigma}^2(m-m'))dm'dxdm]^{1/2}$$

$$\leq C_\beta \sqrt{\bar{M}}[\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega |\sigma(m)|^2 dxdm]^{1/2}[\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega (\bar{\sigma}^2 * \bar{\sigma}^2)(x,m)dxdm]^{1/2}$$

$$\leq C_\beta \sqrt{\bar{M}}[\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega |\sigma(m)|^2 dxdm]^{1/2}[\int_\Omega \|\bar{\sigma}^2(x,.)\|_{L^1(0,\bar{M})}\|\bar{\sigma}^2(x,.)\|_{L^1(0,\bar{M})}dx]^{1/2}$$

$$\leq C_\beta \bar{M}(\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega |\sigma(m)|^2 dxdm)^{1/2}\|\bar{\sigma}\|^2_{L^4(D_2)}$$

$$\leq C_\beta \bar{M}\|\sigma\|_{L^2(D_2)}\|\bar{\sigma}\|^2_{L^4(D_2)}.$$

D'autre part, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega \int_0^{\bar{M}} |\beta(m,m')\sigma(m)\bar{\sigma}(m)\bar{\sigma}(m')|dm'dxdm \leq$$

$$\leq C_\beta \int_\Omega [\int_0^{\bar{M}} \sigma(m)\bar{\sigma}(m)dm \int_0^{\bar{M}} \bar{\sigma}(m')(m')dm']dx$$

$$\leq C_\beta \sqrt{\bar{M}}[\int_\Omega \int_0^{\bar{M}} \sigma^2(m)dmdx]^{1/2}[\int_\Omega (\int_0^{\bar{M}} \sigma^2(m)dm)^2 dx]^{1/2}$$

$$\leq C_\beta \sqrt{\bar{M}}\|\sigma\|_{L^2(D_2)}[\int_\Omega \bar{M} \int_0^{\bar{M}} \sigma^4(m)dmdx]^{1/2}$$

$$\leq C_\beta \bar{M}\|\sigma\|_{L^2(D_2)}\|\sigma\|^2_{L^4(D_2)}.$$

Compte tenu de la relation $\partial_x \bar{u} = \partial_x \bar{v}$, et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz,on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sigma\|^2_{L^2(D_2)} \leq \frac{1}{2}\|\partial_x \bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\sigma\|^2_{L^2(D_2)} + \frac{1}{2}\|\partial_m(mh_{gl})\|_{L^\infty(D_2)}\|\sigma\|^2_{L^2(D_2)}+$$

$$+\|h_{gl}\|_{L^\infty(D_2)}\|\sigma\|_{L^2(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^2(D_2)} + \frac{1}{2}\bar{M}C_\beta\|\sigma\|_{L^2(D_2)}\|\bar{\sigma}\|^2_{L^4(D_2)}+$$

$$+\bar{M}C_\beta\|\sigma\|_{L^2(D_2)}\|\bar{\sigma}\|^2_{L^4(D_2)} + C(\|\bar{\pi}_\theta\|_{L^2(\Omega)} + C'\|T\|_{L^2(\Omega)})\|\sigma\|_{L^2(D_2)}+$$

$$+C(\|\bar{\pi}_\theta\|_{H^1(\Omega)} + C''\|T\|_{H^2(\Omega)})\|\sigma\|_{L^2(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^2(D_2)}.$$

D'aprés la définition de h_{gl} et $\bar{\pi}_\theta$, on déduit que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sigma\|^2_{L^2(D_2)} \leq \frac{1}{2}\|\partial_x\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\sigma\|^2_{L^2(D_2)}++C(\|\bar{\pi}\|_{L^\infty(\Omega)}+\|T\|_{L^\infty(\Omega)})\|\sigma\|^2_{L^2(D_2)}+$$

$$+C(\|\bar{\pi}\|_{L^\infty(\Omega)}+\|T\|_{L^\infty(\Omega)})\|\sigma\|_{L^2(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^2(D_2)}+C\|\sigma\|_{L^2(D_2)}\|\bar{\sigma}\|^2_{L^4(D_2)}+$$

$$+C(\|\bar{\pi}\|_{L^2(\Omega)}+\|T\|_{L^2(\Omega)})\|\sigma\|_{L^2(D_2)}+C(\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)}+\|T\|_{H^2(\Omega)})\|\sigma\|_{L^2(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^2(D_2)}.$$

Maintenant en applique l'opérateur ∂_x à l'équation (3.1) et en multiplie l'équation obtenue par $\partial_x\sigma$, on fait l'intégrale sur $]0,\bar{M}[\times\Omega$, de sorte qu'on obtient

$$\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_x\sigma(m)\partial_x(\partial_t\sigma(m))dxdm+\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_x\sigma(m)\partial_x^2(\sigma(m)u(m))dxdm+$$

$$+\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_x\sigma(m)\partial_x\partial_m(mh_{gl}(m)\sigma(m))dxdm=\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_x\sigma(m)\partial_x(h_{gl}(m)\bar{\sigma}(m))dxdm+$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega\int_0^m \beta(m-m',m')\partial_x\sigma(m)\partial_x[\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')]dm'dxdm+$$

$$-m\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega\int_0^{\bar{M}} \beta(m,m')\partial_x\sigma(m)\partial_x[\bar{\sigma}(m)\bar{\sigma}(m')]dm'dxdm+$$

$$+\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega g_0(m)\partial_x\sigma(m)\partial_x([N^*-\tilde{N}(\bar{\sigma})]^+[\bar{\pi}_\theta-\bar{\pi}_{vs}(T)]^+)dxdm+$$

$$-\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega g_1(m)\partial_x\sigma(m)\partial_x(\bar{\sigma}(m)[\bar{\pi}_\theta-\bar{\pi}_{vs}(T)]^-)dxdm.$$

Grâce à la condition $\bar{u}=0$ sur $\partial\Omega$, on a

$$\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_x\sigma\partial_x^2(\sigma\bar{u})dxdm=\frac{3}{2}\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega(\partial_x\sigma)^2\partial_x\bar{u}dxdm+\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \sigma\partial_x\sigma\partial_x^2\bar{u}dxdm$$

et on a

$$\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_x\sigma\partial_x\partial_m(mh_{gl}(m)\sigma)dxdm=$$

$$= \int_0^{\bar{M}} \int_\Omega \partial_x\sigma[\partial_m(mh_{gl}(m))\sigma + \partial_m(mh_{gl}(m))\partial_x\sigma + \partial_x(mh_{gl}(m))\partial_m\sigma + \partial_x\partial_m\sigma(mh_{gl}(m))]dxdm,$$

et

$$\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega \partial_x\sigma\partial_x(h_{gl}(m)\bar{\sigma})dxdm =$$

$$= \int_0^{\bar{M}} \int_\Omega \bar{\sigma}\partial_x\sigma\partial_x h_{gl}(m)dxdm + \int_0^{\bar{M}} \int_\Omega h_{gl}(m)\partial_x\sigma\partial_x\bar{\sigma}dxdm.$$

Donc on a

$$\frac{1}{2}\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega \partial_t(\partial_x\sigma)^2 dxdm = -\frac{3}{2}\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega (\partial_x\sigma)^2\partial_x\bar{u}dxdm - \int_0^{\bar{M}} \int_\Omega \sigma\partial_x\sigma\partial_x^2\bar{u}dxdm +$$
$$-\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega \sigma\partial_x\sigma\partial_x\partial_m(mh_{gl}(m))dxdm - \int_0^{\bar{M}} \int_\Omega (\partial_x\sigma)^2\partial_m(mh_{gl}(m))dxdm +$$
$$-\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega \partial_x\sigma\partial_m\sigma\partial_x(mh_{gl}(m))dxdm - \int_0^{\bar{M}} \int_\Omega \partial_x\sigma\partial_x\partial_m\sigma(mh_{gl}(m))dxdm +$$
$$+\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega \bar{\sigma}\partial_x\sigma\partial_x h_{gl}(m)dxdm + \int_0^{\bar{M}} \int_\Omega h_{gl}(m)\partial_x\sigma\partial_x\bar{\sigma}dxdm +$$
$$+\frac{m}{2}\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega \int_0^m \beta(m-m',m')\partial_x\sigma(m)\partial_x\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm +$$
$$+\frac{m}{2}\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega \int_0^m \beta(m-m',m')\partial_x\sigma(m)\bar{\sigma}(m')\partial_x\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm +$$
$$-m\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega \int_0^{\bar{M}} \beta(m,m')\partial_x\sigma(m)\partial_x\bar{\sigma}(m)\bar{\sigma}(m')dm'dxdm +$$
$$-m\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega \int_0^{\bar{M}} \beta(m,m')\partial_x\sigma(m)\bar{\sigma}(m)\partial_x\bar{\sigma}(m')dm'dxdm +$$
$$+\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma})]^+\partial_x\sigma(m)\partial_x([\bar{\pi}_\theta - \bar{\pi}_{vs}(T)]^+)dxdm +$$
$$+\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega g_0(m)\partial_x\sigma(m)[\bar{\pi}_\theta - \bar{\pi}_{vs}(T)]^+\partial_x([N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma})]^+)dxdm +$$
$$-\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega g_1(m)\partial_x\sigma(m)\partial_x\bar{\sigma}(m)[\bar{\pi}_\theta - \bar{\pi}_{vs}(T)]^- dxdm +$$

$$- \int_0^{\bar{M}} \int_\Omega g_1(m)\partial_x\sigma(m)\partial_x([\bar{\pi}_\theta - \bar{\pi}_{vs}(T)]^-)\bar{\sigma}(m)dxdm. \qquad (3.16)$$

Pour obtenir une estimation de σ dans $C([0,t_1];H^1(D_2))$, il sera important d'avoir une estimation de $\sigma\partial_x\sigma\partial_x^2 u$ et $\sigma\partial_x\sigma\partial_x\partial_m(mh_{gl})$.

Pour cet effet, on rappelle d'abord le lemme suivant

Lemme 3.3.2 *(On suppose que $\sigma \geq 0$). On pose*

$$\sigma_1(t) = \sup_{0<m<\bar{M}} \frac{1}{B_1 - A_1}\int_{A_1}^{B_1} \sigma(m,x,t)dx. \qquad (3.17)$$

Alors il existe une constante C telle que l'on ait

$$\sigma_1(t) \leq C\|\sigma(.,.,t)\|_{H^1(D_2)}. \qquad (3.18)$$

Démonstration De la définition (3.17) on déduit que

$$\sigma_1(t) = \sigma_0(t) + \sup_{0<m<\bar{M}} |\int_{m_0(t)}^{m} \partial_{m'}\frac{1}{B_1 - A_1}\int_{A_1}^{B_1} \sigma(m',x,t)dxdm'| \qquad (3.19)$$

où

$$\sigma_0(t) = \frac{1}{|D_2|}\int_0^{\bar{M}}\int_{A_1}^{B_1} \sigma(m,x,t)dxdm, |D_2| = \bar{M}(B_1 - A_1),$$

tandis que $m_0(t)$ est un point de l'intervalle $[0,\bar{M}]$ tel que

$$\frac{1}{B_1 - A_1}\int_{A_1}^{B_1} \sigma(m_0(t),x,t)dx = \sigma_0(t).$$

Comme $|D_2| < \infty$, on voit aisément qu'il y a une constante C_1 telle que

$$\sigma_0(t) \leq C_1\|\sigma(.,.,t)\|_{H^1(D_2)}. \qquad (3.20)$$

D'autre part, on a $\sup_{0<m<\bar{M}} |\int_{m_0(t)}^{m} \partial_{m'}\frac{1}{B_1-A_1}\int_{A_1}^{B_1} \sigma(m',x,t)dxdm'| \leq \frac{1}{B_1-A_1}\int_{D_2} |\partial_m\sigma(m)|dxdm$

$$\leq \frac{\sqrt{|D_2|}}{B_1 - A_1}(\int_{D_2} |\partial_m\sigma|^2 dxdm)^{1/2}$$

$$\leq \frac{\sqrt{|D_2|}}{B_1 - A_1}\|\partial_m\sigma(.,.,t)\|_{H^1(D_2)}.$$

Le lemme est démontré.

Lemme 3.3.3 *Soient* $\sigma \in C([0,t_1]; H^1_{(D_2)})$, $\sigma \geq 0$, $v \in L^2(0,t_1; H^2(\Omega))$, $u = v - \frac{1}{\alpha_l(m)}\frac{d\Phi}{dx}$ *(*$\alpha_l(m) > 0$ *est une fonction régulière de* m *). Alors on a*

$$\int_0^{\bar{M}} \int_{A_1}^{B_1} \sigma \partial_x \sigma \partial_x^2 u dx dm \leq C' \|\sigma(.,.,t)\|^2_{H^1(D_2)} \|v(.,t)\|_{H^2(\Omega)} \tag{3.21}$$

avec une constante C'

Démonstration Comme $\partial_x u = \partial_x v$ et donc $\partial_x^2 u = \partial_x^2 v$, on a

$$|\int_0^{\bar{M}} \int_{A_1}^{B_1} \sigma \partial_x \sigma \partial_x^2 u dx dm| = |\int_0^{\bar{M}} \int_{A_1}^{B_1} \sigma \partial_x \sigma \partial_x^2 v dx dm|$$

$$\leq \int_0^{\bar{M}} \|\sigma(m,.,t)\|_{L^\infty(A_1,B_1)} \int_{A_1}^{B_1} |\partial_x \sigma||\partial_x^2 v| dx dm.$$

Si on désigne par $x_0(m,t)$ un point de l'intervalle $[A_1, B_1]$ tel que

$$\frac{1}{B_1 - A_1} \int_{A_1}^{B_1} \sigma(m,x,t) dx = \sigma(m, x_0(m,t), t),$$

on a

$$\|\sigma(m,.,t)\|_{L^\infty(A_1,B_1)} = \frac{1}{B_1 - A_1} \int_{A_1}^{B_1} \sigma(m,x,t) dx + \sup_{A_1 < x < B_1} |\int_{x_0(m,t)}^{x} \partial_{x'} \sigma(m,x',t) dx'|$$

en vertu du lemme (3.3.2), on a

$$\frac{1}{B_1 - A_1} \int_{A_1}^{B_1} \sigma(m,x,t) dx \leq \sigma_1(t) \leq C \|\sigma(.,.,t)\|_{H^1(D_2)}.$$

D'autre part, il est clair que l'on a

$$\sup_{A_1 < x < B_1} |\int_{x_0(m,t)}^{x} \partial_{x'} \sigma(m,x',t) dx'| \leq \int_{A_1}^{B_1} |\partial_x \sigma(m,x,t)| dx.$$

En autre on a

$$\int_{A_1}^{D_1} |\partial_x \sigma||\partial_x^2 v| dx \leq (\int_{A_1}^{D_1} |\partial_x \sigma|^2 dx)^{1/2} (\int_{A_1}^{D_1} |\partial_x^2 v|^2 dx)^{1/2}$$

$$= \|\partial_x^2 v\|_{L^2(A_1,B_1)}(\int_{A_1}^{B_1} |\partial_x \sigma|^2 dx)^{1/2}.$$

En substituant ces dérnières relations on obtient

$$|\int_0^{\bar{M}} \int_{A_1}^{B_1} \sigma \partial_x \sigma \partial_x^2 u dx dm| \leq \int_0^{\bar{M}} (C\|\sigma(.,.,t)\|_{H^1(D_2)} + \int_{A_1}^{B_1} |\partial_x \sigma(m,x,t)| dx) \times$$

$$\times \|\partial_x^2 v\|_{L^2(A_1,B_1)}(\int_{A_1}^{B_1} |\partial_x \sigma|^2 dx)^{1/2} dm.$$

Compte tenu des relations

$$\int_{A_1}^{B_1} |\partial_x \sigma| dx \leq (B_1 - A_1)^{1/2}(\int_{A_1}^{B_1} |\partial_x \sigma|^2 dx)^{1/2},$$

$$\int_0^{\bar{M}} (\int_{A_1}^{B_1} |\partial_x \sigma|^2 dx)^{1/2} dm \leq \sqrt{\bar{M}} \|\partial_x \sigma\|_{L^2(D_2)}$$

et du fait que $\|\partial_x^2 v\|_{L^2(A_1,B_1)}$ ne dépend pas de m, on déduit que

$$|\int_0^{\bar{M}} \int_{A_1}^{B_1} \sigma \partial_x \sigma \partial_x^2 u dx dm| \leq \|\partial_x^2 v\|_{L^2(A_1,B_1)}(C\sqrt{\bar{M}}\|\sigma(.,.,t)\|_{H^1(D_2)}\|\partial_x \sigma\|_{L^2(D_2)} +$$

$$+(B_1 - A_1)^{1/2}\|\partial_x \sigma\|^2_{L^2(D_2)}).$$

Le lemme est démontré.

Lemme 3.3.4 *Soient* $\sigma \in C([0,t_1]; H^1_{(D_2)}), \sigma \geq 0$ *et* $h_{gl}(m) = K_1 \frac{S_l(m)}{m}(\bar{\pi}_\theta - \bar{\pi}_s)$ *avec une fonction réguliére* $S_l(m)$ *de* m. *alors on a*

$$\int_0^{\bar{M}} \int_{A_1}^{B_1} \sigma \partial_x \sigma \partial_x \partial_m (m h_{gl})(m) dx dm \leq C' \|\partial_m S_l(m)\|_{L^\infty(0,\bar{M})} \times$$

$$\times (\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)})\|\sigma(.,.,t)\|^2_{H^1(D_2)}$$

avec une constante C'.

Lemme 3.3.5 *Il existe une constante* C *telle que*

$$\sup_{A_1<x<B_1} \int_0^{\bar{M}} \sigma^2(m,x) dm \leq C\|\sigma\|^2_{H^1(D_2)}.$$

Lemme 3.3.6 *Il existe une constante C telle que*

$$I_1 = |\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega \int_0^m \beta(m-m',m')\partial_x\sigma(m)\partial_x\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm|$$

$$\leq C\|\sigma\|_{H^1(D_2)}\|\bar{\sigma}\|^2_{H^1(D_2)},$$

$$I_2 = |\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega \int_0^m \beta(m-m',m')\partial_x\sigma(m)\bar{\sigma}(m')\partial_x\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm|$$

$$\leq C\|\sigma\|_{H^1(D_2)}\|\bar{\sigma}\|^2_{H^1(D_2)},$$

$$I_3 = |\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega \int_0^{\bar{M}} \beta(m,m')\partial_x\sigma(m)\partial_x\bar{\sigma}(m)\bar{\sigma}(m')dm'dxdm|$$

$$\leq C\|\sigma\|_{H^1(D_2)}\|\bar{\sigma}\|^2_{H^1(D_2)},$$

$$I_4 = |\int_0^{\bar{M}} \int_\Omega \int_0^{\bar{M}} \beta(m,m')\partial_x\sigma(m)\bar{\sigma}(m)\partial_x\bar{\sigma}(m')dm'dxdm|$$

$$\leq C\|\sigma\|_{H^1(D_2)}\|\bar{\sigma}\|^2_{H^1(D_2)}.$$

Nous rappelons encore que

$$|\int_0^{\bar{M}} \int_{A_1}^{B_1} \partial_x\sigma\partial_m\sigma\partial_x(mh_{gl})dxdm| \leq$$

$$\leq CK_1\|S_l(m)\|_{L^\infty(0,\bar{M})}(\|\bar{\pi}\|_{H^1(D_2)} + \|T\|_{H^2(D_2)})\|\partial_x\sigma\|_{L^2(D_2)}\|\partial_m\sigma\|_{L^2(D_2)}.$$

Retournons maintenant à l'équation (3.1) En utilisont l'inégalité de Cauchy-Schwartz, les lemmes 3.3.3, 3.3.4, et 3.3.6 on a

$$\frac{1}{2}\|\partial_x\sigma\|^2_{L^2(D_2)} \leq C\|\sigma\|^2_{H^1(D_2)}\|\bar{v}\|_{H^2(\Omega)} + C(\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)})\|\sigma\|^2_{H^1(D_2)}+$$

$$+C(\|\bar{\pi}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|T\|_{L^\infty(\Omega)})\|\partial_x\sigma\|^2_{L^2(D_2)} + C(\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)})\times$$

$$\times\|\partial_x\sigma\|_{L^2(D_2)}\|\partial_m\sigma\ |_{L^2(D_2)} + C(\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)})\|\partial_x\sigma\|_{L^2(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^2(D_2)}+$$

$$+C(\|\bar{\pi}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|T\|_{L^\infty(\Omega)})\|\partial_x\bar{\sigma}\|_{L^2(D_2)}\|\partial_x\sigma\|_{L^2(D_2)}+$$

$$+C\|\partial_x\sigma\|_{L^2(D_2)}\|\bar{\sigma}\|^2_{H^1(D_2)} + C\|\partial_x\sigma\|_{L^2(D_2)}(\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)})+$$

$$+C\|\partial_x\sigma\|_{L^2(D_2)}\|\partial_x\bar{\sigma}\|_{L^2(D_2)}(\|\bar{\pi}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|T\|_{L^\infty(\Omega)})+$$

$$+C\|\partial_x\sigma\|_{L^2(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{L^2(D_2)}(\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)}).$$

Maintenant en appliquant l'opérateur ∂_m à l'équation (3.3) et multipliant l'équation obtenue par $\partial_m\sigma$ puis en faisant l'intégrale sur $]0, \bar{M}[\times\Omega$, on a

$$\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_m\sigma(m)\partial_m(\partial_t\sigma(m))dxdm + \int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_m\sigma(m)\partial_m\partial_x(\sigma(m)\bar{u}(m))dxdm+$$

$$+\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_m\sigma(m)\partial_m^2(mh_{gl}(m)\sigma(m))dxdm = \int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_m\sigma(m)\partial_m(h_{gl}(m)\bar{\sigma}(m))dxdm+$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_m\sigma(m)\partial_m[\int_0^m \beta(m-m',m')\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm']dxdm+$$

$$-m\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega\int_0^{\bar{M}} \partial_m\sigma(m)\partial_m[\beta(m,m')\bar{\sigma}(m)\bar{\sigma}(m')]dm'dxdm+$$

$$+\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_m\sigma(m)\partial_m(g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma})]^+)[\bar{\pi}_\theta - \bar{\pi}_{vs}(T)]^+dxdm+$$

$$-\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_m\sigma(m)\partial_m(g_1(m)\bar{\sigma}(m))[\bar{\pi}_\theta - \bar{\pi}_{vs}(T)]^-dxdm.$$

Or, compte tenu de la relation

$$\partial_m[\int_0^m \beta(m-m',m')\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm']$$

$$= \int_0^m [\partial_m\beta(m-m',m')\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')+\beta(m-m',m')\bar{\sigma}(m')\partial_m\bar{\sigma}(m-m')]dm',$$

De plus, à l'aide des relations

$$\partial_m u = \partial_m(v - \frac{1}{\alpha_l(m)}\Phi)$$

$$= -\partial_m(\frac{1}{\alpha_l(m)})\Phi,$$

et

$$\partial_m\partial_x u = \partial_m\partial_x v = 0$$

on transforme l'équation dans la forme

$$\frac{1}{2}\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_t(\partial_m\sigma(m))^2 + \frac{1}{2}\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega(\partial_m\sigma(m))\partial_x\bar{u}(m)dxdm$$

$$-\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_m\sigma(m)\partial_m\sigma(m)\partial_m(\frac{1}{\alpha_l(m)})\Phi dxdm+$$

$$+\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_m\sigma(m)[\partial_m^2(mh_{gl}(m))\sigma(m)+2\partial_m(mh_{gl}(m))\partial_m\sigma(m)+$$

$$+mh_{gl}(m)\partial_m^2\sigma(m)dxdm = \int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_m\sigma(m)[\partial_m(h_{gl}(m))\bar{\sigma}(m)+h_{gl}(m)\partial_m\bar{\sigma}(m)]dxdm+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega\int_0^m \partial_m\beta(m-m',m')\partial_m\sigma(m)\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm'dxdm+$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega\int_0^m \beta(m-m',m')\partial_m\sigma(m)\bar{\sigma}(m')\partial_m\bar{\sigma}(m-m')]dm'dxdm$$

$$-\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega\int_0^{\bar{M}} \partial_m\sigma(m)[\partial_m\beta(m,m')\bar{\sigma}(m)\bar{\sigma}(m')+\beta(m,m')\partial_m\bar{\sigma}(m)\bar{\sigma}(m')]dm'dxdm+$$

$$+\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega [N^*-\tilde{N}(\bar{\sigma})]^+\partial_m\sigma(m)\partial_m(g_0(m))[\bar{\pi}_\theta-\bar{\pi}_{vs}(T)]^+dxdm+$$

$$+\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_m([N^*-\tilde{N}(\bar{\sigma})]^+)\partial_m\sigma(m)g_0(m)[\bar{\pi}_\theta-\bar{\pi}_{vs}(T)]^+dxdm+$$

$$-\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_m\sigma(m)\partial_m g_1(m)\bar{\sigma}(m)[\bar{\pi}_\theta-\bar{\pi}_{vs}(T)]^-dxdm+$$

$$-\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega \partial_m\sigma(m)g_1(m)\partial_m\bar{\sigma}(m)[\bar{\pi}_\theta-\bar{\pi}_{vs}(T)]^-dxdm.$$

Pour tirer de cette égalité une inégalité pour $\|\partial_m\sigma\|_{L^2(D_\perp)}$, on rappelle l'éstimation des termes contenant la fonction β.

Lemme 3.3.7 *Il existe une constante C telle que*

$$|\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega\int_0^m \beta(m-m',m')\partial_m\sigma(m)\bar{\sigma}(m')\partial_m\bar{\sigma}(m-m')]dm'dxdm|$$

$$\leq C\|\sigma\|_{H^1(D_2)}\|\bar{\sigma}\|^2_{H^1(D_2)},$$

$$|\int_0^{\bar{M}}\int_\Omega\int_0^{\bar{M}} \beta(m,m')\partial_m\sigma(m)\partial_m\bar{\sigma}(m)\bar{\sigma}(m')dm'dxdm|$$

$$\leq C\|\sigma\|_{H^1(D_2)}\|\bar{\sigma}\|^2_{H^1(D_2)}.$$

Démonstration On démontre ces inégalités de manière analogue au lemme 3.3.6.

L'éstimation des autres termes est analogue à ce que nous avons déja traité en haut. Donc en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\partial_x\sigma\|^2_{L^2(D_2)}+\|\partial_m\sigma\|^2_{L^2(D_2)})\leq C\|v\|_{H^2(\Omega)}\|\sigma\|^2_{H^1(D_2)}+$$

$$+[C(\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)}+\|T\|_{H^2(\Omega)})+C]\|\sigma\|^2_{H^1(D_2)}+$$

$$+C(\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)}+\|T\|_{H^2(\Omega)})[\|\partial_x\sigma\|^2_{L^2(D_2)}+\|\partial_m\sigma\|^2_{L^2(D_2)}]+$$

$$+C\|\bar{\sigma}\|_{H^1(D_2)}(\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)}+\|T\|_{H^2(\Omega)})[\|\partial_x\sigma\|_{L^2(D_2)}+\|\partial_m\sigma\|_{L^2(D_2)}]+$$

$$+C\|\bar{\sigma}\|_{H^1(D_2)^2}(\|\partial_x\sigma\|_{L^2(D_2)}+\|\partial_m\sigma\|_{L^2(D_2)})+$$

$$+C(\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)}+\|T\|_{H^2(\Omega)})(\|\partial_x\sigma\|_{L^2(D_2)}+\|\partial_m\sigma\|_{L^2(D_2)})+$$

$$+C(\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)}+\|T\|_{H^2(\Omega)})[\|\partial_x\sigma\|_{L^2(D_2)}+\|\partial_m\sigma\|_{L^2(D_2)}]\|\bar{\sigma}\|_{H^1(D_2)},$$

ou, en utilisant le gradient $\nabla_{(m,x)}$ dans l'éspace D_2,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_{(m,x)}\sigma\|^2_{L^2(D_2)} \leq C\|v\|_{H^2(\Omega)}\|\sigma\|^2_{H^1(D_2)}+$$
$$+C[(\|\overline{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)}) + 1]\|\sigma\|^2_{H^1(D_2)}+$$
$$+C(\|\overline{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)})\|\nabla_{(m,x)}\sigma\|^2_{L^2(D_2)}+$$
$$+C(\|\overline{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)})\|\bar{\sigma}\|_{H^1(D_2)}\|\nabla_{(m,x)}\sigma\|_{L^2(D_2)}+$$
$$+C\|\bar{\sigma}\|^2_{H^1(D_2)}\|\nabla_{(m,x)}\sigma\|_{L^2(D_2)}+$$
$$+C(\|\overline{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)})\|\nabla_{(m,x)}\sigma\|_{L^2(D_2)}+$$
$$+C(\|\overline{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)})\|\nabla_{(m,x)}\sigma\|_{L^2(D_2)}\|\bar{\sigma}\|_{H^1(D_2)}.$$

Pour arriver à l'éstimation de σ, on adjoint la dernière inégalité, de sorte qu'on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\sigma\|^2_{L^2(D_2)} + \|\nabla_{(m,x)}\sigma\|^2_{L^2(D_2)}) \leq \|v\|_{H^2(\Omega)}\|\sigma\|^2_{H^1(\Omega)}+$$
$$+C[(\|\overline{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)}) + 1]\|\sigma\|^2_{H^1(D_2)}+$$
$$C\|\bar{\sigma}\|_{H^1(D_2)}(\|\overline{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)})(\|\sigma\|_{L^2(D_2)}\|\nabla_{(m,x)}\sigma\|_{L^2(D_2)})+$$
$$C\|\bar{\sigma}\|^2_{H^1(D_2)}(\|\sigma\|_{L^2(D_2)} + \|\nabla_{(m,x)}\sigma\|_{L^2(D_2)})+$$
$$+C(\|\overline{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)})(\|\sigma\|_{L^2(D_2)} + \|\nabla_{(m,x)}\sigma\|_{L^2(D_2)})+$$
$$+C(\|\overline{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)})(\|\sigma\|^2_{L^2(D_2)} + \|\nabla_{(m,x)}\sigma\|^2_{L^2(D_2)}).$$

Donc nous avons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sigma\|^2_{H^1(D_2)} \leq C(\|v\|_{H^2(\Omega)} + \|\overline{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)} + 1)\|\sigma\|^2_{H^1(D_2)}$$
$$+C\|\bar{\sigma}\|_{H^1(D_2)}(\|\overline{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)})\|\sigma\|_{H^1(D_2)} + C\|\bar{\sigma}\|^2_{H^1(D_2)}\|\sigma\|_{H^1(D_2)}+$$

$$+C(\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)})\|\sigma\|_{H^1(D_2)} + C(\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)})\|\sigma\|^2_{H^1(D_2)}.$$

on en déduit que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sigma\|^2_{H^1(D_2)} \leq C(\|v\|_{H^2(\Omega)} + \|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)} + 1)\|\sigma\|^2_{H^1(D_2)} +$$

$$+C\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)})[\|\sigma\|^2_{H^1(D_2)} + (\|\bar{\sigma}\|_{H^1(D_2)} + 1)^2] +$$

$$+C(\|\bar{\sigma}\|^4_{H^1(D_2)} + \|\sigma\|^2_{H^1(D_2)}),$$

ou

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sigma\|^2_{H^1(D_2)} \leq C(\|v\|_{H^2(\Omega)} + \|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)} + 1)\|\sigma\|^2_{H^1(D_2)} +$$

$$+C(\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)})(\|\bar{\sigma}\|^2_{H^1(D_2)} + 2\|\bar{\sigma}\|_{H^1(D_2)} + 1) + C\|\bar{\sigma}\|^4_{H^1(D_2)},$$

ce qui donne

$$\|\sigma(t,.,.)\|^2_{H^1(D_2)} \leq \|\sigma_0\|^2_{H^1(D_2)} \times$$

$$\exp(\int_0^t C[\|v\|_{H^2(\Omega)} + \|\bar{\pi}\|_{H^2(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)} + 1]dt') +$$

$$+\int_0^t C[(\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)})(\|\bar{\sigma}\|^2_{H^1(D_2)} + 2\|\bar{\sigma}\|_{H^1(D_2)} + 1) + \|\bar{\sigma}\|^4_{H^1(D_2)}] \times$$

$$\exp(\int_{t'}^t C[\|v\|_{H^2(\Omega)} + \|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^2(\Omega)} + 1]dt'')dt'.$$

La proposition est démontrée.

Chapitre 4

Système d'équations non linéaires

Retournons maintenant au système d'équations non linéaires (2.2), (2.3).

Pour démontrer l'éxistence et l'unicité de la solution locale, on a le lemme suivant :

Lemme 4.0.8 *Soit $R_0 > 0$. On suppose que*

$$\|v\|_{L^2(0,t;H^2(\Omega))} + \|u\|_{L^2(0,t;H^2(D_2))} + \|T\|_{L^2(0,t;H^2(\Omega))} \leq R_0.$$

Alors, il existe un $t_2 \in]0, t_1]$, tel que quelques soient $\bar{\pi} \in C([0, t_2], H^1(\Omega))$ et $\bar{\sigma} \in C([0, t_2], H^1(D_2))$ avec

$$\|\bar{\pi}\|_{C([0,t_2],H^1(\Omega))} \leq 2\|\pi_0\|_{H^1(\Omega)}.$$

$$\|\bar{\sigma}\|_{C([0,t_2],H^1(D_2))} \leq 2\|\sigma_0\|_{H^1(D_2)},$$

la solution (π, σ) du système d'équation linéairisée avec les conditions initiales satisfasse aux inégalités :

$$\|\pi\|_{C([0,t_2],H^1(\Omega))} \leq 2\|\pi_0\|_{H^1(\Omega)},$$

$$\|\sigma\|_{C([0,t_2],H^1(D_2))} \leq 2\|\sigma_0\|_{H^1(D_2)},$$

Démonstration

D'aprés l'inégalité (3.14), on

$$\|\pi(t,.)\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\pi_0\|_{H^1(\Omega)} f(t) + g(t)$$

ou

$$f(t) = \exp(\int_0^t (C\|v\|_{H^2(\Omega)} + 1)d\grave{t})$$

et

$$g(t) = \int_0^t \|H_{gl}\|_{H^1(\Omega)} \exp(\int_{\grave{t}}^t (C\|v\|_{H^2(\Omega)} + 1)dt^{''})d\grave{t}.$$

Comme

$$\int_0^t \|v\|_{H^2(\Omega)}dt' \leq t^{1/2}\|v\|_{L^2(0,t;H^2(\Omega))},$$

$$\int_0^t \|H_{gl}\|_{H^1(\Omega)}dt' \leq t^{1/2}\|H_{gl}\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega))}.$$

on a

$$\lim_{t\to 0} f(t) = 1,$$

et

$$\lim_{t\to 0} g(t) = 0.$$

Donc il est évident qu'il existe un $t_{2,1} \in]0, t_1]$,tel que

$$\|\pi\|_{C([0,t_{2,1}].H^1(\Omega))} \leq 2\|\pi_0\|_{H^1(\Omega)}.$$

De méme pour σ, on a

$$\|\sigma(t,.,.)\|_{H^1(D_2)} \leq \|\sigma_0\|\|_{H^1(D_2)} f^{'}(t) + g^{'}(t), \tag{4.1}$$

ou

$$f^{'}(t) = \exp(\int_0^t C[\|v\|_{H^2}(\Omega) + \|\pi\|_{H^1}(\Omega) + \|T\|_{H^2}(\Omega) + 1]dt^{'})$$

et

$$g'(t) = \int_0^t C[(\|\bar{\pi}\|_{H^1}(\Omega)+\|T\|_{H^2}(\Omega))(\|\bar{\sigma}\|^2_{H^1(D_2)}+2\|\bar{\sigma}\|_{H^1(D_2)}+1)+\|\bar{\sigma}\|^4_{H^1(D_2)}]\times$$

$$\times \exp(\int_{t'}^t C[\|\bar{v}\|_{H^2}(\Omega) + \|\bar{\pi}\|_{H^1}(\Omega) + \|\bar{T}\|_{H^2}(\Omega) + 1]dt'')dt'.$$

Donc de manière analogue, on a

$$\lim_{t\to 0} f'(t) = 1$$

et

$$\lim_{t\to 0} g'(t) = 0$$

Donc il est évident qu'il existe un $t_{2,2} \in]0, t_1]$, tel que

$$\|\sigma\|_{C([0,t_{2,2}],H^1(D_2))} \leq 2\|\sigma_0\|_{H^1(D_2)}.$$

Si on pose $t_2 = min(t_{2,1}, t_{2,2})$, alors on a

$$\|\pi\|_{C([0,t_2],H^1(\Omega))} \leq 2\|\pi_0\|_{H^1(\Omega)},$$

$$\|\sigma\|_{C([0,t_2],H^1(D_2))} \leq 2\|\sigma_0\|_{H^1(D_2)}.$$

Le lemme est démontré.

Lemme 4.0.9 *Il existe un* $t_3 \in]0, t_2]$ *tel que, le système d'équation* (2.2)*et* (2.3) *avec les conditions initiales* (2.9) *et* (2.10) *admette une solution* (π, σ) *et une seule dans la classe*

$$\pi \in C([0, t_3], H^1(\Omega)),$$

$$\sigma \in C([0, t_3], H^1(D_2)).$$

Démonstration Pour $0 < t < t_2$, posons

$$B_{[t]} = \left\{ \begin{array}{c} (\pi, \sigma) \in C([0,t], H^1(\Omega)) \times C([0,t], H^1(D_2))/(\pi, \sigma) satisfait \\ \|\pi\|_{C([0,t_2],H^1(\Omega))} \leq 2\|\pi_0\|_{H^1(\Omega)} \\ \|\sigma\|_{C([0,t_2],H^1(D_2))} \leq 2\|\sigma_0\|_{H^1(D_2)}. \end{array} \right\}.$$

Soit G l'application qui à, $(\bar{\pi}, \bar{\sigma}) \in C([0,t], H^1(\Omega)) \times C([0,t], H^1(D_2))$, associe la solution (π, σ) des équations $(2.5) - (3.1)$, avec $\bar{\pi}$ et $\bar{\sigma}$ indiqués ci-dessus. En vertu du lemme 4.0.8 on a

$$G(B_{[t]}) \subset B_{[t]}, \forall t \in]0, t_2]$$

Donc pour démontrer ce lemme il suffit de démontrer qu'il existe un $t_3 \in]0, t_2]$, tel que l'opératur G restrient à $B_{[t_3]}$ soit une contraction. Soient $(\pi_i \bar{\sigma}_i) \in B_{[t_2]}$ et $(\pi_i, \sigma_i) = G((\bar{\pi}_i \bar{\sigma}_i)) \quad i = 1, 2$

Alors les différences $\pi_1 - \pi_2$ *et* $\sigma_1 - \sigma_2$ satisfont aux équations :

$$\partial_t(\pi_1 - \pi_2) + \partial_x[(\pi_1 - \pi_2)\bar{v}] = -H_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,1}, \bar{\sigma}_1) + H_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,2}, \bar{\sigma}_2) \qquad (4.2)$$

$$\begin{aligned} &\partial_t(\sigma_1 - \sigma_2) + \partial_x[(\sigma_1 - \sigma_2)\bar{u}(m)] + \partial_m[m h_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,1}, m)(\sigma_1 - \sigma_2)] = \\ &= -\partial_m[m(h_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,1}, m)\sigma_1 - h_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,2}, m))\sigma_2] + \\ &+ (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)[h_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,1}, m) - m \int_0^\infty \beta(m, m')\bar{\sigma}_1(m')dm'] + \\ &+ \bar{\sigma}_2[h_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,1}, m) - h_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,2}, m) - m \int_0^\infty \beta(m, m')\bar{\sigma}_1(m')dm' + \\ &+ m \int_0^\infty \beta(m, m')\bar{\sigma}_2(m')dm'] + \frac{m}{2} \int_0^m \beta(m - m', m')\bar{\sigma}_1(m')\bar{\sigma}_1(m - m')dm' + \\ &- \frac{m}{2} \int_0^m \beta(m - m', m')\bar{\sigma}_2(m')\bar{\sigma}_2(m - m')dm' + \\ &+ g_0(m)([N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma}_1)]^+[\bar{\pi}_{\theta,1} - \bar{\pi}_{vs}(T)]^+ - [N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma}_2)]^+[\bar{\pi}_{\theta,2} - \bar{\pi}_{vs}(T)]^+) - \\ &- g_1(m)(\bar{\sigma}_1(m)[\bar{\pi}_{\theta,1} - \bar{\pi}_{vs}(T)]^- - \bar{\sigma}_2(m)[\bar{\pi}_{\theta,2} - \bar{\pi}_{vs}(T)]^-). \qquad (4.3) \end{aligned}$$

En multipliant l'équation (4.2) par $(\pi_1 - \pi_2)$, et en faisant l'intégrale sur Ω, on a

$$\int_\Omega (\pi_1 - \pi_2)\partial_t(\pi_1 - \pi_2)dx + \int_\Omega (\pi_1 - \pi_2)\partial_x[(\pi_1 - \pi_2)\bar{v}]dx =$$

$$= - \int_\Omega (\pi_1 - \pi_2)[H_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,1}, \bar{\sigma}_1) - H_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,2}, \bar{\sigma}_2)]dx,$$

ou

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\pi_1 - \pi_2)^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (\pi_1 - \pi_2)^2 \partial_x v dx =$$

$$= - \int_\Omega (\pi_1 - \pi_2)[H_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,1}, \bar{\sigma}_1) - H_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,2}, \bar{\sigma}_2)]dx.$$

On a donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\pi_1 - \pi_2\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|\partial_x v\|_{L^\infty(\Omega)}\|\pi_1 - \pi_2\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+\|\pi_1 - \pi_2\|_{L^2(\Omega)}\|H_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,1}, \bar{\sigma}_1) - H_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,2}, \bar{\sigma}_2)\|_{L^2(D_2)}.$$

En rappelant que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\pi_1 - \pi_2\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|v\|_{H^2(\Omega)}\|\pi_1 - \pi_2\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+\|\pi_1 - \pi_2\|^2_{L^2(\Omega)} + \|H_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,1}, \bar{\sigma}_1) - H_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,2}, \bar{\sigma}_2)\|^2_{L^2(D_2)}.$$

D'aprés la définition de H_{gl}, on a

$$H_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,1}, \bar{\sigma}_1) - H_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,2}, \bar{\sigma}_2) = K_1[\bar{\pi}_{\theta,1} - \bar{\pi}_{\theta,2}]\int_0^\infty \frac{S_l(m)}{m}\bar{\sigma}_1(m)dm +$$

$$+K_1[\bar{\pi}_{\theta,} - \bar{\pi}_{vs}(T)]\int_0^\infty \frac{S_l(m)}{m}(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)dm.$$

Donc on a

$$\|H_{gl}(T, \pi_{\theta,1}, \bar{\sigma}_1) - H_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,2}, \bar{\sigma}_2)\|_{L^2(D_2)} \leq C''\|\bar{\sigma}_1\|_{H^1(D_2)}\|\pi_{\theta,1} - \bar{\pi}_{\theta,2}\|_{L^2(D_2)} +$$

$$+C\|\bar{\pi}_{\theta,2}-\bar{\pi}_{vs}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2\|_{L^2(D_2)}.$$

Grâce à la définition de $\bar{\pi}_{\theta,i}$, et au fait que $(\bar{\pi}_i,\bar{\sigma}_i)\in B_{[t_2]}$ et $(\pi_i,\sigma_i)\in B_{[t_2]}$, et $i=1,2$, on obtient

$$\|H_{gl}(T,\bar{\pi}_{\theta,1},\bar{\sigma}_1)-H_{gl}(T,\bar{\pi}_{\theta,2},\bar{\sigma}_2)\|_{L^2(D_2)}\leq C'(\|\bar{\pi}_1-\bar{\pi}_2\|_{L^2(\Omega)}+\|\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2\|_{L^2(D_2)})$$

donc on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\pi_1-\pi_2\|^2_{L^2(\Omega)}\leq C\|\pi_1-\pi_2\|^2_{L^2(\Omega)}+C'(\|\bar{\pi}_1-\bar{\pi}_2\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2\|^2_{L^2(D_2)})$$

on applique le lemme de comparaison, on obtient

$$\begin{aligned}\|\pi_1-\pi_2\|^2_{L^2(\Omega)}&\leq\int_0^t C'(\|\bar{\pi}_1-\bar{\pi}_2\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2\|^2_{L^2(D_2)})\exp(\int_{t'}^t Cdt")dl'\\&\leq\max_{0<t'<t}(\|\bar{\pi}_1-\bar{\pi}_2\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2\|^2_{L^2(D_2)})\int_0^t C'\exp(\int_{t'}^t Cdt")dt'\\&\leq C'(\|\bar{\pi}_1-\bar{\pi}_2\|^2_{C([0,t];L^2(\Omega))}+\|\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2\|^2_{C([0,t];L^2(D_2))})\int_0^t\exp(Ct)dt'\end{aligned}$$

On sait que

$$\int_0^t\exp(Ct)dt'=t\exp(Ct)$$

donc on obtient

$$\|\pi_1-\pi_2\|^2_{L^2(D_2)}\leq C't\exp(Ct)(\|\bar{\pi}_1-\bar{\pi}_2\|^2_{C([0,t];L^2(\Omega))}+\|\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2\|^2_{C([0,t];L^2(D_2))}).\tag{4.4}$$

Maintenant en multipliant l'équation (4.3) par $(\sigma_1-\sigma_2)$, et en faisant l'intégrale sur D_2, on a :

$$\int_{D_2}(\sigma_1-\sigma_2)\partial_t(\sigma_1-\sigma_2)dxdm+\int_{D_2}(\sigma_1-\sigma_2\partial_x[(\sigma_1-\sigma_2)\bar{u}(m)]dxdm+$$

$$\int_{D_2}(\sigma_1-\sigma_2)\partial_m[mh_{gl}(T,\bar{\pi}_{\theta,1},m)(\sigma_1-\sigma_2)]dxdm=$$

$$= -\int_{D_2} (\sigma_1 - \sigma_2)\partial_m[m(h_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,1}, m) - h_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,2}, m))\sigma_2]dxdm+$$

$$+\int_{D_2} (\sigma_1 - \sigma_2)(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)[h_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,1}, m) - m\int_0^\infty \beta(m, m')\bar{\sigma}_1(m')dm']dxdm+$$

$$+\int_{D_2} (\sigma_1-\sigma_2)\bar{\sigma}_2[h_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta.1}, m)-h_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,2}, m)-m\int_0^\infty \beta(m, m')\bar{\sigma}_1(m')dm'+$$

$$+m\int_0^\infty \beta(m, m')\bar{\sigma}_2(m')dm']dxdm+$$

$$+\frac{m}{2}\int_{D_2}\int_0^m \beta(m-m', m')(\sigma_1-\sigma_2)\bar{\sigma}_1(m')\bar{\sigma}_1(m-m')dm'dxdm+$$

$$-\frac{m}{2}\int_{D_2}\int_0^m \beta(m-m', m')(\sigma_1-\sigma_2)\bar{\sigma}_2(m')\bar{\sigma}_2(m-m')dm'dxdm+$$

$$+\int_{D_2} g_0(m)(\sigma_1-\sigma_2)([N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma}_1)]^+[\bar{\pi}_{\theta,1} - \bar{\pi}_{vs}(T)]^+ +$$

$$-[N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma}_2)]^+[\bar{\pi}_{\theta,2} - \bar{\pi}_{vs}(T)]^+)dxdm+$$

$$-\int_{D_2} g_1(m)(\sigma_1-\sigma_2)(\bar{\sigma}_1(m)[\bar{\pi}_{\theta,1} - \bar{\pi}_{vs}(T)]^- - \bar{\sigma}_2(m)[\bar{\pi}_{\theta,2} - \bar{\pi}_{vs}(T)]^-)dxdm.$$

Remarquons que

$$\|\partial_m[mh_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,1}, .)]\|_{L^\infty(D_2)} \leq C(\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)} + \|T\|_{H^1(\Omega)}),$$

$$\|\partial_m[m(h_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,1}, .) - h_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,2}, .))]\|_{L^2(D_2)} \leq C\|\bar{\pi}_{\theta,1} - \bar{\pi}_{\theta,2}\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C'\|\bar{\pi}_1 - \bar{\pi}_2\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\|m(h_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,1}, .) - h_{gl}(T, \bar{\pi}_{\theta,2}, .))]\|_{L^\infty(D_2)} \leq C\|\bar{\pi}_{\theta,1} - \bar{\pi}_{\theta,2}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

$$\leq C'\|\bar{\pi}_1 - \bar{\pi}_2\|_{L^\infty(\Omega)},$$

$$\|h_{gl}(T,\bar{\pi}_{\theta,1},.)-m\int_0^{\infty}\beta(m,m')\bar{\sigma}_1(m')dm'\|_{L^\infty(D_2)}\leq C(\|\bar{\pi}_1\|_{H^1(\Omega)}+\|\bar{\sigma}_1\|_{H^1(D_2)}),$$

$$\|h_{gl}(T,\bar{\pi}_{\theta,1},.)-h_{gl}(T,\bar{\pi}_{\theta,2},.)-m\int_0^{\infty}\beta(m,m')\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2(m')dm'\|_{L^2(D_2)}\leq$$
$$\leq\|h_{gl}(T,\bar{\pi}_{\theta,1},.)-h_{gl}(T,\bar{\pi}_{\theta,2},.)\|_{L^2(D_2)}+C_\beta\|(\sigma_1-\sigma_2)\|_{L^2(D_2)}$$
$$\leq C(\|\bar{\pi}_1-\bar{\pi}_2\|_{L^2(\Omega)}+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^2(\Omega)}),$$

$$\|\int_0^{m}\beta(m-m',m')(\bar{\sigma}_1(m')\bar{\sigma}_1(m-m')-\bar{\sigma}_2(m')\bar{\sigma}_2(m-m'))dm'\|_{L^2(D_2)}\leq$$
$$\leq C\|\int_0^{\bar{M}}|\bar{\sigma}_1(m')\bar{\sigma}_1(m-m')-\bar{\sigma}_2(m')\bar{\sigma}_2(m-m')|dm'\|_{L^2(D_2)}$$
$$=C\|\int_0^{\bar{M}}|(\bar{\sigma}_1(m')-\bar{\sigma}_2(m'))\bar{\sigma}_1(m-m')+$$

$$(\bar{\sigma}_1(m-m')-\bar{\sigma}_2(m-m'))\bar{\sigma}_2(m')|dm'\|_{L^2(D_2)}$$
$$\leq C(\|\bar{\sigma}_1\|_{L^1(D_2)}+\|\bar{\sigma}_2\|_{L^1(D_2)})\|\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2\|_{L^2(D_2)}$$
$$\leq C(\|\bar{\sigma}_1\|_{H^1(D_2)}+\|\bar{\sigma}_2\|_{H^1(D_2)})\|\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2\|_{L^2(D_2)},$$
$$\|[N^*-\tilde{N}(\bar{\sigma}_1)]^+[\bar{\pi}_{\theta,1}-\bar{\pi}_{vs}(T)]^+-[N^*-\tilde{N}(\bar{\sigma}_2)]^+[\bar{\pi}_{\theta,2}-\bar{\pi}_{vs}(T)]^+\|_{L^2(D_2)}\leq$$
$$\leq C(\|\bar{\pi}_1-\bar{\pi}_2\|_{L^2(\Omega)}+\|\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2\|_{L^2(D_2)})$$

$$\|\bar{\sigma}_1[\bar{\pi}_{\theta,1}-\bar{\pi}_{vs}(T)]^--\bar{\sigma}_2[\bar{\pi}_{\theta,2}-\bar{\pi}_{vs}(T)]^-\|_{L^2(D_2)}\leq$$
$$\leq C(\|\bar{\pi}_1-\bar{\pi}_2\|_{L^2(\Omega)}+\|\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2\|_{L^2(D_2)}).$$

Des ces relations on déduit que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sigma_1-\sigma_2\|^2_{L^2(D_2)} \leq \frac{1}{2}\|\partial_x v\|_{L^\infty(\Omega)}\|\sigma_1-\sigma_2\|^2_{L^2(D_2)}+$$

$$+C(\|\bar{\pi}\|_{H^1(\Omega)}+\|T\|_{H^1(\Omega)})\|\sigma_1-\sigma_2\|^2_{L^2(D_2)}+$$

$$+C'\|\sigma_2\|_{H^1(D_2)}\|\bar{\pi}_1-\bar{\pi}_2\|_{L^2(\Omega)}\|\sigma_1-\sigma_2\|^2_{L^2(D_2)}+$$

$$+C'\|\partial_m\sigma_2\|_{L^2(D_2)}\|\bar{\pi}_1-\bar{\pi}_2\|_{L^2(\Omega)}\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^2(D_2)}+$$

$$+(\|\bar{\pi}_1\|_{H^1(\Omega)}+\|\bar{\sigma}_1\|_{H^1(D_2)})\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^2(D_2)}\|\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2\|_{L^2(D_2)}+$$

$$C\|\sigma_2\|_{H^1(D_2)}\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^2(D_2)}(\|\bar{\pi}_1-\bar{\pi}_2\|_{L^2(\Omega)})+$$

$$C(\|\bar{\sigma}_1\|_{H^1(D_2)}+\|\bar{\sigma}_1\|_{H^1(D_2)})\|\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2\|_{L^2(D_2)}\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^2(D_2)}+$$

$$+2C(\|\bar{\pi}_1-\bar{\pi}_2\|_{L^2(\Omega)}+\|\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2\|_{L^2(D_2)})\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^2(D_2)}.$$

Grâce à la définition de $\bar{\pi}_{\theta,i}$ et au fait que $(\bar{\pi}_i,\bar{\sigma}_i)\in B_{[t_2]}$ et $(\pi_i,\sigma_i)\in B_{[t_2]}$, $i=1,2$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\sigma_1-\sigma_2\|^2_{L^2(D_2)} \leq C\|\sigma_1-\sigma_2\|^2_{L^2(D_2)}+C\|\bar{\pi}_1-\bar{\pi}_2\|_{L^2(\Omega)}\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^2(D_2)}+$$

$$+C\|\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2\|_{L^2(D_2)})\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^2(D_2)}+$$

$$C[\|\bar{\pi}_1-\bar{\pi}_2\|_{L^2(\Omega)}+\|\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2\|_{L^2(D_2)}]\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^2(D_2)},$$

ou

$$\frac{d}{dt}\|\sigma_1-\sigma_2\|^2_{L^2(D_2)} \leq C\|\sigma_1-\sigma_2\|^2_{L^2(D_2)}+C[\|\bar{\pi}_1-\bar{\pi}_2\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2\|^2_{L^2(D_2)}].$$

Donc on a

$$\|\sigma_1-\sigma_2\|^2_{L^2(D_2)} \leq C'tc^{Ct}(\|\bar{\pi}_1-\bar{\pi}_2\|^2_{C([0,t],L^2(D_2))}+\|\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2\|^2_{C([0,t],L^2(D_2))}). \quad (4.5)$$

avec deux constantes positives C et C'. D'aprés (4.4)-(4.5), si on choisit $t_3 \in]0, t_2]$ de telle sorte que

$$C'te^{Ct} < 1$$

l'opérateur G restreint à $B_{[t_3]}$ sera une contraction dans l'espace $C([0, t_3], L^2(\Omega)) \times C([0, t_3], L^2(D_2))$. Le lemme est démontré.

Bibliographie

[1] Haim Brezis :Analyse fonctionelle (Théorie et application), Masson 1987.

[2] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. Sci. Techn. Univ.Constantine - A, vol. **31** (2011), pp. 9-17

[3] Fujita Yashima.H : Modélisation de la physique des fluides, cours de l'université de Guelma, 2010-2011

[4] KANTOROVITCH, L., AKILOV, G. : *Analyse fonctionelle*, Tome 2 (*traduit de russe.*). Mir, Moscou.

[5] Maikhilov, V. P. : *Equations aux derivees partielles* (traduit du russe). Mir, 1980.

[6] S. Selvaduray, H. Fujita Yashima : Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido. *Accad. Sci. Torino, Memorie Cl. Sci. Fis.*, Serie V, Vol. **35** (2011), pp. 37-69.