République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP et Analyse numérique**

Par :Benhayaoum hanane

Intitulé

Etude de l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites par la théorie du point fixe

Dirigé par :Dr. Zenkoufi Lilia

Devant le jury

PRESIDENT	Dr: N.E Azzouza	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr: Zenkoufi Lilia	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr: Debbouche Ammar	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu a Allah

Tout puissant qui a illuminé mon chemin de la lueur

Du savoir et de la science et pour la volonté, La santé

Et la patience qu'il ma prodiguées durant toutes ces

Années d'études.

Je tiens aussi a exprimer ma reconnaissance et ma

Profonde gratitude a Madame

ZENKOUFI LILIA,dr a l'université 8 mai 1945

De Geulma,pour avoir assuré l'encadrement de ce

travail.

Son aide, Sa Grande disponibilité ont joué un Rôle

essentiel dans l'aboutissement de ce travail.

Enfin, mes remerciements vont aussi à mes parents

Pour leur patience, leurs Encouragements continus et

leur soutien

Inconditionnel, et a tous ceux qui m'ont aidé de prés

Ou de loin à accomplir ce travail je leur dis merci.

Dédicace

Je tiens à remercier en premier Allah qui m'a donné, vie et santé pour le parachèvement de ce modeste ouvrage.

C'est avec profonde gratitude et sincères mots, que je dédier ce fameux travail de fin d'étude

Aux deux êtres les plus chers au monde, qui ont souffert nuit et jour pour nous couvrir de leur chaleur d'amour, mes parents.

Je dédie ce mémoire spécialement à mon défunt père qui m'a toujours encouragé et m'avais toujours soutenu.

A ma source de bonheur, la perle de mes yeux ma mère.

Que dieu vous garde en bonne santé.

A ma belle sœur et a mes chers frères

Et leurs enfants mariam,yasser

A toutes ma famille et ma belle-famille.

A tous mes chers amis surtout :refaida,hana,rahma,hadjer,manel

A mon Encadreur Mme Zenkoufi lilia

A toutes la promo 2017-2018

Table des matières

Résumé

L'objectif de ce travail est d'établir l'existence et l'unicité de la solution non triviale d'un problème aux limites, en utilisant la théorie du point fixe.

Le mémoire se compose d'une introduction et trois chapitre, dans le premier on a rappelé quelques notion de base de l'analyse fonctionnelles et des résultats connus qu'on va utiliser dans la suite de notre travail, dans le deuxième chapitre on va étudier quelques théorémes de point fixe tels que : le théoreme de Banach, Brouwer, Schauder, Schaeffer et de Krasnoselskii et quelques-unes de leurs applications, dans le troisiéme chapitre on va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limite engendré par une équation différentielle du troisième ordre où les conditions aux limites sont imposées en m-points, en utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach.

Les résultats obtenus sont illustrés par des exemples, on termine ce mémoire par la bibliographie.

Abstract

The aim of this work is to establish the existence and uniqueness of the non-trivial solution of a boundary value problem, using fixed point theory.

The work consists of an introduction and three chapters, in the first we will recall some basic notions of functional analysis and known results that will be used in the rest of our work, in the second we will study some fixed point theorems, such as : Banach's theorem, Brower, Schauder, Schaeffer and Krasnoselskii and some of their applications, in the third chapter we will study the existence and uniqueness of the solution of a boundary value problem generated by a third-order differential equation where the boundary conditions are imposed in m-points, using the non-linear Leray-schauder alternative and the Banach contraction principle.

The results obtained are illustrated by examples; we finish this paper by the bibliography.

Introduction

En analyse, un théorème de point fixe est un résultat qui affirme, qu'une fonction f possède au moins un point fixe, avec quelques conditions sur f. Un point fixe d'une fonction f qui est définie dans un espace métrique X vers lui même, est un élément $x \in X$ qui vérifie $f(x) = x$.

Ces théorèmes présentent un outil très utile en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude de l'existence de solution et de nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partire des théorèmes de banach et schauder, en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe.

Dans ce mémoire, on va étudier quelques théorèmes du point fixe de Banach, Brouwer, Schauder et Krasnoselskii et quelques-unes de leurs applications.

Ces résultats théoriques nous permettent de résoudre certains problèmes comme par exemple, trouver les zéros d'un polynôme, ou prouver que certaines équations différentielles admettent des solutions.

Le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922 dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique. Ce théorème donne un comportement régulier du point fixe par rapport aux paramètres, de plus il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée.

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

En 1955, et pour la première fois, Krasnoselskii a élaboré son théorème du point fixe qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractante et l'autre compacte admet un point fixe. Ce théorème est très efficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires, il apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité.

De cette théorie découlent plusieurs applications qui constituent un domaine très actif de la recherche.

Ce travail est réparti en trois chapitres :

Le premier chapitre se compose notamment des rappels de quelques résultats théoriques, et notions de base de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisées dans les chapitres qui suivent.

Dans le deuxième chapitre on va présenter quelques résultats de la théorie du point fixe, où on va étudier les théorèmes de : banach, brower, schauder et enfin le théorème de schaeffer et de krasnoselskii.

Dans le troisième chapitre, on va appliquer l'alternative non linéaire de leray-schauder et le principe de contraction de banach pour discuter des résultats d'existence et d'unicité de la solution d'un problème aux limites engendré par une équation différentielle du troisième ordre où les conditions aux limites sont imposées en m-points.

Chapitre 1

Rappels de quelques notions d'analyse fonctionnelles

Résumé

Dans ce chapitre on va rappeler des définitions de quelques notions de base de l'analyse fonctionnelle et des résultats connus qu'on va utiliser dans la suite de notre travail.

1.1 Introduction

Les espaces de base de l'analyse fonctionnelle sont les espaces vectoriels normés complets sur le corps des nombres réels ou des nombres complexes. De tels espaces sont appelés les espaces de banach. Les espaces de Hilbert constituent un cas particulier important, ou la norme est issue d'un produit scalaire.

1.1.1 Quelques rappels

Soit V un e.v normé

Définition 1.1 *(ouvert).*

Un ensemble $O \subset V$ est ouvert dans V si $\forall x \in O$, $\exists\ \epsilon$ tel que $B(x,\epsilon) \subset O$ avec $B(x,\epsilon) = \{y \in V;\ ||x - y||_V < \epsilon\}$ boule ouverte de centre x et de rayon ϵ.

Définition 1.2 *(fermé).*

Un ensemble $F \subset V$ est fermé dans V si $V \backslash F$ est ouvert dans V.

Définition 1.3 *(convergence).*

Soit u_n une suite de V. On dit que u_n converge vers $l \in V$ si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$; $\|u_n - l\|_V \leq \epsilon$

Définition 1.4 *(convexe).*

on dit qu'une partie A de V est convexe si pour tout $x,y \in A$, on a pour tour $t \in [0,\ 1]$, $tx + (1-t)y \in A$.

ce qui signifie que le segment joignant x et y est entièrement contenu dans A.

Définition 1.5 *Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de V. On dit que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une* ***suite de Cauchy*** *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists N \geq 0,\ \forall n \geq N,\ \forall p \geq 0,\quad \|u_{n+p} - u_n\|_V \leq \varepsilon.$$

Définition 1.6 *(espace métrique complet)*

On dit que l'espace métrique $(V; d)$ est complet si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de V converge dans V.

Proposition 1.1 *Tout espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ normé de dimension finie est complet.*

Définition 1.7 *Une norme est une application définie sur V (ev) réel à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, notée $\|.\|_V$, et satisfaisant les trois propriétés suivantes :*

(i) $\|v\|_V = 0 \Longleftrightarrow v = 0,$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V, \|\lambda v\|_V = |\lambda| \, \|v\|_V.$

(iii) Inégalité triangulaire: $\forall v, w \in V, \|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V.$

Définition 1.8 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé (e.v.n) sur un sous-corps $\mathbb{k}$ (en général $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.), complet pour la distance issue de sa norme.*

Définition 1.9 *Un ensemble $A \subset V$ est compact si de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de A.*

Définition 1.10 *Tout ensemble borné et de dimension finie d'un espace normé est relativement compact.*

Proposition 1.2 *1) Si V est compact et si A est une partie fermée de V alors, A est compacte.*

2) Si A est une partie compacte de V alors, A est fermée et bornée.

Proposition 1.3 *Si V est de dimension finie alors, A est compact si et seulement si A est fermé et borné.*

Définition 1.11 *Soit V un espace topologique séparé.*

Un sous-ensemble F de V est relativement compact si son adhérence $\overline{F}$ est compacte.

Le sous-ensemble F est dit précompact si son complété est compact.

Evidemment, lorsque V est lui-même complet les deux notions sont équivalentes.

Définition 1.12 *Soit $I \subset \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ On dit que l'intervalle I est* **stable** *par la fonction f lorsque $f(I) \subset I$.*

Définition 1.13 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. On dit que x est un point fixe de f lorsque $f(x) = x$.*

En d'autres termes, les points fixes de f sont les solutions, lorsqu'elles existent de l'équation $f(x) = x$

Définition 1.14 *Soit $\|.\|_{V,1}$, et $\|.\|_{V,2}$ deux normes sur V. On dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe c_1 et c_2 strictement positives telles que*

$$\forall v \in V, c_1 \|\cdot\|_{V,2} \leq \|\cdot\|_{V,1} \leq c_2 \|\cdot\|_{V,2}.$$

Si $\|\cdot\|_{V,1}$, et $\|\cdot\|_{V,2}$ sont deux normes équivalentes sur V, on a l'équivalence :

$$u_n \text{converge vers } l \text{ suivant} \|.\|_{V,1} <=> u_n \text{converge vers } l \text{ suivant} \|.\|_{V,2}.$$

Proposition 1.4 *Si V est de dimension finie, alors toutes les normes sont équivalentes.*

Définition 1.15 *Soient $(V, \| .\|)$ et $(V', \| .\|')$ deux espaces normé, $f : V \to V'$ une application f est continue en $x_0 \in V$ si seulement si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in V : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon,$$

$$\text{c-à-d} : \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Elle est continue sur E si elle est continue en tout point de E.

Définition 1.16 *On dit que f est uniformément continue sur E si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in V : \| x - y \| < \delta \Longrightarrow \| f(x) - f(x_0) \| < \epsilon$$

Proposition 1.5 *Soit V un e v normé.*

La norme sur V est une ***application continue****, autrement dit : la fonction $\varphi : v \in V \longmapsto \|.\|_V \in \mathbb{R}$ est continue.*

En effet, on a $\|\varphi(v) - \varphi(w)\| \leq \|v - w\|_V$ et φ est lipschitzienne donc continue.

Théorème 1.1 *soient E et F deux espaces vectoriels normés et L une application linéaire de E dans F.Les trois conditions sont équivlents :*

-l'application L est lipschitzienne,

-l'application L est continue,

-il existe un ouvert U de E tel que L soit bornée sur U. c-à-d , $\sup_{x\in U} \|L(x)\|_F < \infty$.

1.1.2 Applications continues d'un espace compact

Rappelons que toute fonction numérique continue sur un intervalle fermé borné atteint ses bornes inférieure et supérieure. Cette propriété implique que $f([a, b]) = [m, M]$ lorsque $f : [a. b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Définition 1.17 ***(Continuité en un point).***

Soient I un intervalle, f une fonction définie sur I et $a \in I$.

On dit que f est continue en a lorsque f admet une limite en a égale à $f(a)$.

Définition 1.18 ***(Continuité sur un intervalle).***

Soient I un intervalle, f une fonction définie sur I.

On dit que f est continue sur I lorsque f admet une limite en tout point de I.

Théorème 1.2 ***(Théorème des valeurs intermédiaires).***

Soient I un intervalle, a et b inclu dans I avec $a < b$, f une application continue sur l'intervalle I, et λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Alors : il existe (au moins) un réel c dans $[a, b]$ tel que : $f(c) = \lambda$.

(Autrement dit : l'équation $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans $[a, b]$)

1.2 Théorème d'Arzéla-Ascoli

On va rappeler le théorème d'Ascoli qui concerne les compacts, qui constitue un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle [1, 6]

Définition 1.19 *une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions continues sur un interval $I = [a, b]$ est **uniformément bornée** s'il existe un nombre M tel que*

$$|f_n(x)| \leq M$$

Définition 1.20 *(**Equicontinuité**).*

Soit $\mathcal{F}$ une famille d'applications $X \longrightarrow Y$ où X est un espace topologique et Y un espace métrique. On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue si, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $x \in X$ il existe un voisinage V_x de x dans X tel que

$$d(f(x), f(y)) < \epsilon \text{ pour tout } f \in F \text{ et tout } y \in V_x$$

Si X est aussi métrique, $\mathcal{F}$ est dite uniformément équicontinue si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous x, y vérifiant

$$d(x, y) < \alpha$$

et tout $f \in \mathcal{F}$, on ait

$$d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

1.2.1 Enoncé

Théorème 1.3 *Soient (X, d_X) et $(Y. d_Y)$ deux espaces métriques et supposons que X compact. Alors, une partie $\mathcal{F}$ incluse dans $C(X, Y)$ est relativement compacte (i.e. d'adhé-*

rence compact) pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si on a les deux conditions suivantes :

- *La famille $\mathcal{F}$ est équicontinue en tout point de X.*
- *Pour tout $x \in X$ l'ensemble des $f(x)$ pour $f \in \mathcal{F}$ est relativement compact ;*

i.e, $\mathcal{F}(x) := \{f(x), \quad f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact pour tout $x \in X$.

1.2.2 Autres énoncés

Théorème 1.4 *(Y compact)*

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques compacts. Alors, une partie $\mathcal{F}$ incluse dans $C(X,Y)$ est relativement compacte ssi $\mathcal{F}$ est équicontinue en tout point de X.

Théorème 1.5 *(Y evn de dimension finie)*

Soient (X, d_X) un espace métrique compact et $(Y, \|\|)$ un evn de dimension finie. Alors, une partie $\mathcal{F}$ incluse dans $C(X,Y)$ est relativement compacte ssi

- *La famille $\mathcal{F}$ est équicontinue en tout point de X.*
- *$\mathcal{F}(x) := \{f(x), \quad f \in \mathcal{F}\}$ est borné pour tout $x \in X$.*

Théorème 1.6 *(X convexe et Y evn de dimension finie)*

Soient (X, d_X) espace métrique compact et convexe et $(Y, \|\|)$ un evn de dimension finie. Alors, une partie $\mathcal{F}$ incluse dans $C(X,Y)$ est relativement compacte ssi

- *La famille $\mathcal{F}$ est équicontinue en tout point de X.*
- *Il existe $x \in X$ tel que $\mathcal{F}(x) := \{f(x), \quad f \in \mathcal{F}\}$ est borné.*

Chapitre 2

Résultats de la théorie du point fixe

Résumé

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats de la théorie du point fixe. On va étudier le théorème du point fixe de Banach, de Brouwer et Schauder et enfin,le théorème du point fixe de Krasnoselskii et de Schaeffer.

2.1 Théorèmes du point fixe

Définition 2.1 *Soient* (E, d_E) *et* (F, d_F) *des espaces métriques,* $f : E \to F$ *une application et* k *un réel positif.*
On dit que f *est* ***lipschitzienne*** *si :*

$$\forall : (x, y) \in E^2, \ d_F(f(x), f(y)) \leq k \ d_E(x, y).$$

Définition 2.2 *Une application* ***contractante*** *est une application lipschitzienne avec* $0 \leq k < 1$.

2.1.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz.

α

Définition 2.3 *Soit* d *un entier,* $u_0 \in \mathbb{R}^d$ *et* f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}^d$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$. *On appelle* ***problème de Cauchy*** *le problème suivant :*

$$\begin{array}{rcl} \text{trouver} \quad u & : & [0, \infty[\to \mathbb{R}^d, \text{ de classe } C^1, \\ \text{tq} \quad \dfrac{du}{dt} & = & f(u(t)) \text{ sur } t > 0 \text{ et } u(0) = u_0. \end{array} \qquad (P)$$

Théorème 2.1 *(Cauchy-Lipschitz).*

On considère le problème (P) avec f *lipschitzienne. Alors le problème de Cauchy admet une unique solution* $u \in C^1([0, \infty[, \mathbb{R}^d)$.

Théorème 2.2 ***(Théorème de point fixe).***

Soit f *une fonction continue sur un intervalle* $I = [a, b]$.

Si $f(I) \subset I$ *(*I *stable par* f*), alors* f *admet (au moins) un point fixe sur* I*. (C'est-à-dire : il existe (au moins) un réel* x *de* I *tel que* $f(x) = x$*).*

Preuve. *Considérons la fonction* g *définie sur* $I = [a, b]$ *par*

$$g(x) = f(x) - x$$

Montrons que $0 \in g(I)$. *On a*

$$g(a) = f(a) - a \in g(I)$$
$$g(b) = f(b) - b \in g(I)$$

Or, comme $f(I) \subset I$, *on a*

$$f(a) \geq a \quad et \quad f(b) \leq b,$$

c'est -à-dire

$$g(a) \geq 0 \quad et \quad g(b) \leq 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $x \in I$ *tel que*

$$g(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = x.$$

■

2.1.2 Un Théorème du Point Fixe Métrique.

Ce théorème est dit principe de l'application contractante,il est base de la théorie du point fixe.Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

Théorème 2.3 ***(Banach).***

Soient $(E; d)$ *un espace métrique complet et* $f : E \longrightarrow E$ *une application contractante. i.e; Lipschitzienne de rapport* $k < 1$.

Alors, f *admet un unique point fixe* $a \in E$.

De plus, pout tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$, avec $x_0 \in E$ quelconque et $x_{p+1} := f(x_p)$ converge vers a.

Preuve.

1. Existence :

Soit x_0 un point initial quelconque et (x_p) la suite itérée associée. On a

$$d(x_p, x_{p+1}) = d\left(f(x_{p-1}), f(x_p)\right) \quad p \geq 1.$$

On va prouver que (x_p) est une suite de Cauchy dans E. pour $p < q$, on utilise l'inégalité triangulaire

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + ... + d(x_{q-1}, x_q).$$

Puisque f est une contraction, on a

$$\begin{aligned} d(x_p, x_{p+1}) &= d\left(f(x_{p-1}), f(x_p)\right) \\ &\leq kd(x_{p-1}, x_p), \quad p \geq 1. \end{aligned}$$

En répétant cette inégalité, on obtient

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq \left(k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &\leq k^p \left(1 + k + ... + k^{q-p-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &\leq k^p \left(\frac{1}{1-k}\right) d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

On en déduit alors que (x_p) est une suite de Cauchy. Comme (E, d) est complet, la suite (x_p) converge vers un point limite $a \in E$.

Par ailleurs puisque f est continue, on a :

$$a = \lim_{p\to\infty} x_p = \lim_{p\to\infty} f(x_{p-1}) = f\left(\lim_{p\to\infty} x_{p-1}\right) = f(a)$$

Donc a est un point fixe de f (i.e, $f(a) = a$).

2. Unicité :

Supposons qu'il existe $a, b \in E$, $a \neq b$, tels qu'on ait $f(a) = a$ et $f(b) = b$.

Alors, on a

$$d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a,b)$$

ce qui implique que : $d(a,b) = 0$, i.e. $a = b$. (puisque $k < 1$). ∎

Nous allons montrer que les hypothèses du théorème de point fixe de Banach sont essentielles : si nous en négligeons seulement une, alors le point fixe n'existe pas.

Exemple 2.1 *Les exemples suivant montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire : si nous négligeons seulement une, alors le point fixe n'existe pas.*

(1).

$f :\ x \to \sqrt{1+x}$ *a un unique point fixe sur* $X = [0, \infty[$.

$\mathbb{R}^+$ *est un fermé de* X, $\mathbb{R}$ *est complet donc* X *est complet et*

$$f\left([0,\infty[\right) = [1,\infty[\subset [0,\infty[,$$

de plus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} < 1 \\ \sup_{x\in[0,\infty[} \left|f'(x)\right| &< 1 \Longrightarrow f \quad \textit{est contractante.} \end{aligned}$$

$$\left|f'(x)\right| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow f \textit{ est contractante.}$$

(2)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$x \dashrightarrow \sqrt{1+x^2}$ *n'a pas de point fixe car, elle n'est pas contractante .*

(3).

X n'est pas stable par f : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ *sur* $X = [0,1]$.

Or X est fermé dans $\mathbb{R}$, *et complet car* $\mathbb{R}$ *est complet.*

De plus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \\ \sup_{x\in X}\left|f'(x)\right| &< 1 \Longrightarrow f \text{ est contractante.} \end{aligned}$$

Mais f n'a pas de point fixe car

$$f([0,1]) = \left[1, \sqrt{2}\right],$$

i.e; X n'est pas stable par f.

(4).

f n'est pas de point fixe :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

sur $X = [0, \infty[$.

Or, $f : X \to X$ *et X est un fermé de* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ *est complet donc X est complet.*

Mais ;

$$\sup_{x\in X}\left|f'(x)\right| = 1$$

$\Longrightarrow$ *f n'a pas contractante..*

(5)

X n'est pas complet :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{2}$$

sur $X = \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Or,

$$\begin{aligned} f\left(\left]0,\frac{\pi}{4}\right]\right) &= \left]0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right] \subset \left]0,\frac{\pi}{4}\right], \\ \sup_{x\in X}\left|f'(x)\right| &= \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow f \textit{ est contractante.} \end{aligned}$$

Mais X n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc, n'est pas complet.

2.1.3 Un Théorème du Point Fixe Topologique

Les théorèmes de ce paragraphe expriment que toute application continue d'un ensemble convexe compact dans lui-même possède un point fixe.

2.1.4 Le théoreme du point fixe de type Brouwer

Le théorème de point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, qui donne l'existence d'un point fixe (mais pas nécessairement l'unicité) ,il fait partie de la grande famille des théorème du point fixe.

Il existe plusieurs formes du théorème selon le contexte d'utilisation la plus simple est parfois donnée sous la forme suivante :

Dans le plan : Toute application T continue du disque fermé dans lui-même admet au moins un point fixe.Il est possible de généraliser à toute dimension finie.

Dans un espace euclidien : Toute application continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe .

Il peut encore être un peut plus général sur :

Un convexe compact : Tout application continue T d'un convexe compact K d'un espac euclidien à valeur dans K admet un point fixe.

Théorème 2.4 *Soit K une partie non vide, compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \longrightarrow K$ une fonction continue. Il existe $x \in K$ tel que $f(x) = x$.*

Remarque 2.1 *Les parties convexes et compactes de $\mathbb{R}$ sont les segments.*

Le théorème de Brouwer prend donc dans le cas $n = 1$ la forme particulière suivante :

Théorème 2.5 *Si $f : [a; b] \to [a; b]$ est continue, alors il existe $x \in [a; b]$ tel que $f(x) = x$.*

Preuve. Si f est continue de $[a, b]$ dans lui-même, la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x \geq 0$ est continue, prend en a la valeur $f(a) - a \geq 0$ et en b la valeur $f(b) - b \leq 0$.

Alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule en un point x_0, qui est un point fixe de f. ■

Remarque 2.2 1. *L'hypothèse " I fermé " n'est là que pour assurer que $x_0 \in I$. Si on sait déjà, par ailleurs, que $x_0 \in I$ (en pratique, on a parfois déjà calculé ℓ en résolvant l'équation $f(x_0) = x_0$), cette hypothèse devient inutile.*

2. Le théorème du point fixe ne s'applique pas si l'on remplace l'hypothèse "f contractante sur$I$" par l'hypothèse "f 1-lipschitzienne sur I".

Voici un ***contre-exemple*** *:*

Soit, $I = [1, +\infty[$ et

$$f : I \to I$$

telle que,

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Soient x et y dans I avec $x < y$.comme la fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$, on a :

$$|f(y) - f(x)| \leq f(y) - f(x)$$

donc,

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x + \frac{x - y}{xy}$$

alors,

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x \leq |y - x| .$$

Ce qui prouve que f est 1-lipschitzienne sur I.

Cependant f n'a pas de point fixe sur I. (L'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution)

2.1.5 Le Théorème de Schauder

-Schauder va généraliser le résultat de brouwer en dimension infinie :

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Le théorème du point fixe de schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe,qui n'est pas nécessairement unique.

Et nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.6 *(Schauder).*

Soient E un espace de Banach et $K \subset E$ convexe et compact. Alors toute application continue $f : K \to K$ possède un point fixe.

Preuve. Soit $f : K \to K$ une application continue. Comme K est compact, f est uniformément continue ; donc, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in K$, on ait

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon, \text{ dès que } \|x - y\| \leq \delta$$

De plus, il existe un ensemble fini des points $\{x_1, ..., x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_j recouvrent K ;

i.e,

$$K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq P} B(x_j, \delta).$$

Si on désigne $L := Vect\,(f(x_j))_{1 \leq j \leq P}$, alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq P$, on définit la fonction continue $\psi_j : E \to \mathbb{R}$ par

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon} \end{cases}$$

et on voit que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors.

On a donc, pour tout $x \in K$, $\sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$, et donc on peut définir sur K les fonctions continues positives φ_j par

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^{p} \psi_k(x)}$$

pour lesquelles on a $\sum_{i=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$, pour tout $x \in K$.

On pose alors, pour $x \in K$,

$$g(x) := \sum_{i=1}^{p} \varphi_j(x) f(x_j).$$

g est continue (car elle est la somme des fonctions continues), et prend ses valeurs dans K^* (car $g(x)$ est un barycentre des $f(x_j)$).

Donc, si on prend la restriction $g_{/K^*} : K^* \to K^*$, g possède un point fixe $y \in K^*$. De plus,

$$\begin{aligned} f(y) - y &= f(y) - g(y) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_j(y) f(y) - \sum_{i=1}^{p} \varphi_j(y) f(x_j) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \varphi_j(y) (f(y) - f(x_j)) \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$, alors

$$\|y - x_j\| < \delta,$$

et donc

$$\|f(y) - f(x_j)\| < \epsilon.$$

Donc, on a pour tout j,

$$\left\|\varphi_j(y)(f(y) - f(x_j))\right\| \leq \epsilon\varphi_j(y),$$

et donc

$$\|f(y) - y\| \leq \sum_{i=1}^{p} \left\|\varphi_j(y)(f(y) - f(x_j))\right\| \leq \sum_{i=1}^{p} \epsilon\varphi_j(y) = \epsilon$$

Donc, pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que

$$\|(f(y_m) - y_m)\| < 2^{-m}$$

Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous-suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in K$.

Alors f étant continue, la suite $(f(y_{m_k}))$ converge vers $f(y^*)$ et on conclut que

$$f(y^*) = y^*,$$

i.e, y^* est un point fixe de f sur K. ■

Exemple 2.2 *Etude de la convergence de la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 \in [-1, +\infty[\\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

On utilisant le théorème suivant :

[6] *Soit g une fonction continue définie sur un intervalle I. On suppose de plus que l'intervalle I est stable par g.Si la suite récurrente (u_n) converge, c'est nécessairement vers un point fixe de g.*

On peut introduire l'application f définie sur $[-1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1+x}$$

***Point fixe** de f :*

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow x \geq 0$$

et

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

On montre facilement que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$, croissante sur $[-1,+\infty[$, puis

$$f([-1,+\infty[) = [0,+\infty[\subset [-1,+\infty[$$

L'intervalle $I = [-1,+\infty[$ est donc stable et la suite (u_n) est bien définie. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b-a|.$$

Donc, f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur I, donc contractante sur I.

En outre :

$$f(\mathbb{R}_+) = [1,+\infty[\subset \mathbb{R}_+.$$

Donc, $\mathbb{R}_+$ est stable par f .

D'après le théorème du point fixe, la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

converge donc vers λ.

Enfin, si $u_0 \in [-1, \infty]$ *alors* $u_1 \in \mathbb{R}_+$ *et d'après ce qui précède* (u_n)*converge encore vers* λ.

2.1.6 Théorèmes de Krasnoselskii et de Schaeffer

Citons maintenant le théorème de **Schaeffer** et le théorème hybride de **Krasnoselskii,** ce théorème est une combinaison comme on va le voir, du théorème de **Schauder** et celui de **Banach**. Il a été l'objet de plusieurs études ces dernières années et on le rencontre sous plusieurs formes.

Définition 2.4 *Soit* X *un espace normé, l'application* $A : X \to Y$ *est dite compacte si elle satisfait les conditions suivantes :*

i : A est continue.

ii : A transforme tout ensemble borné de X en un ensemble relativement compact (i.e.ensemble de fermeture compacte).

Théorème 2.7 ***(Schaeffer)*** *Soit* X *un espace de Banach et soit* $A : X \longrightarrow X$ *une application compacte, alors*

i. L'équation $x = \lambda Ax$ *admet une solution pour* $\lambda = 1$,

ii. Ou bien, l'ensemble $\varepsilon = \{x \in X,\ x = \lambda Ax,\ \lambda \in (0,1)\}$ *est non borné.*

Théorème 2.8 ***(Krasnoselskii)*** *Soit* M *un convexe fermé et non vide d'un espace de Banach* $(X, \|.\|)$. *Supposons que* A *et* B *sont deux applications de* M *dans* X *telles que*

i. $Ax + By \in M$, $\forall x,\ y \in M$.

ii. A est continue et AM est contenu dans un ensemble compact.

iii. B est une contraction de constante $\alpha < 1$.

Alors, il existe $x \in M$, *avec* $Ax + Bx = x$.

Notons, que si $A = 0$, le théorème se résume au théorème de **Banach**. Si $B = 0$, alors le théorème n'est autre que le théorème de **Schauder**.

Preuve. D'après la condition (iii). on a

$$\begin{aligned}
\|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| &= \|(x-y)-(Bx-By)\| \\
&\leq \|x-y\|+\|Bx-By\| \\
&\leq \|x-y\|+\alpha\|x-y\| \\
&\leq (1+\alpha)\|x-y\|
\end{aligned}$$

D'aute part,

$$\begin{aligned}
\|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| &= \|(x-y)-(Bx-By)\| \\
&\geq \|(x-y)\|-\|Bx-By\| \\
&> \|x-y\|-\alpha\|x-y\| \\
&> (1-\alpha)\|x-y\|
\end{aligned}$$

En résumé,

$$(1-\alpha)\|x-y\| \leq \|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| \leq (1+\alpha)\|x-y\|$$

Cette inégalité montre que $(I-B): M \longrightarrow (I-B)M$ est continue et bijective. Donc, $(I-B)^{-1}$ existe et est continue.

Posons $U := (I-B)^{-1}A$. Il est clair que U est une application compacte, puisque U est une composition d'une application continue avec une application compacte. En vertu du théorème de **Schauder**, U admet un point fixe, i.e.

$$\exists\, x \in M \text{ tel que } (I-B)^{-1}Ax = x.$$

Ceci équivaut à dire $Ax + Bx = x$ ■

Remarque 2.3 *Dans le théorème de Krasnoselskii si $\alpha = 1$ dans (iii) alors on n'a pas de point fixe. En effet voisi un* ***contre-exemple.***

*Le Théorème de **Krasnoselskii** a été utilisé pour prouver l'existence de la solution des équations différentielles et les équations intégrales non linéaires.*

Chapitre 3

Application

Résumé

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude d'existence et d'unicité de la solution d'un problème aux limites pour une équation de troisième ordre à multi-points en utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach, la fonction de Green associée pour le problème est également utilisé.

3.1 Application : Principe de contraction de Banach et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

On s'intéresse à l'étudie d'un problème aux limite engendré par une équation différentielle de troisième ordre à multi-points.

on va démonter et présenter ; la forme de la solution du problème, l'opérateur intégral associé et quelque propriétés des fonction de green G(t,s) dont nous avons besoin. Dans la deuxième séction, en utilisant l'alternative non linéaire de Leray Schauder et le principe de contraction de banach, nous prouvons les résultats d'éxistence et d'unicité de la solution du problème, on a démontré aussi que l'opérateur intégral associé est complètement continu par utilisation du théorème d'Arzéla-Ascoli.

Problème aux limite de troisième ordre

Soit $E = C[0,1]$ muni de la norme $\|y(t)\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |y(t)|$, pour tout $y \in E$ on s'intéresse à l'étude du problème aux limites du troisième ordre à multi-points suivant

$$\begin{cases} u''' + f(t, u(t), u'(t)) = 0, & t \in (0,1) \\ u(0) = u'(0) = 0, & u'(1) = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i u'(\eta_i) \end{cases} \tag{1}$$

où $\beta_i > 0$, $0 < \eta_i < 1$; pour $i = 1, ..., n$. et $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Nous avons d'abord introduire quelques espaces utiles. On va étuliser les espaces de Banach $C[0,1]$, $C^1[0,1]$, $L^1[0,1]$. Nous utilisons également l'espace Banach $X = \{u \in C^1[0,1] / u \in C[0,1], \ u' \in C[0,1]\}$, muni de la norme $\|u\|_X = \max\{\|u\|_\infty, \ \|u'\|_\infty\}$. où $\|u\|_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]} |u(t)|$.

Lemme 3.1 *Soit* $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \eta_i \neq 1$ *et* $y \in L^1[0,1]$, *alors le problème*

$$u''' + y(t) = 0, \quad 0 < t < 1 \tag{2}$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u'(\eta_i)$$

a une solution unique

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\,y(s)\,ds + \frac{t^2}{2\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right)}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\int_0^1 G^*(\eta_i,s)\,y(s)\,ds. \tag{3}$$

où

$$G(t,s) = \frac{1}{2}\begin{cases} (1-s)\,t^2, & t \le s \\ (-s+2t-t^2)\,s, & s \le t \end{cases} \tag{4}$$

et

$$G^*(t,s) = \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = \begin{cases} (1-s)\,t, & t \le s \\ (1-t)\,s, & s \le t \end{cases} \tag{5}$$

Preuve. Par intégration de l'équation dans (2) sur l'intervalle $[0,t]$ pour $t \in [0,1]$, nous obtenons

$$\begin{aligned} u'(t) &= -\int_0^t (t-s)\,y(s)\,ds + C_1 t + C_2 \\ u(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2\,y(s)\,ds + \frac{1}{2}C_1 t^2 + C_2 t + C_3 \end{aligned}$$

(i) La condition aux limites $u(0)=0$, implique que

$$C_3 = 0$$

Et par la condition aux limites $u'(0)=0$, nous obtenons

$$C_2 = 0$$

(ii) Et la conditions $u'(1)=\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i u'(\eta_i)$ implique que

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i}\int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds \\ &\quad -\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)\,y(s)\,ds. \end{aligned}$$

on a,

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2\,y(s)\,ds+\frac{1}{2}C_1t^2+C_2t+C_3 \\ u(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2\,y(s)\,ds \\ &\quad +\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i}\int_0^1(1-s)\,y(s)\,ds-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i}{1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)\,y(s)\,ds\right), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2\,y(s)\,ds \\ &\quad +\frac{t^2}{2}\int_0^1(1-s)\,y(s)\,ds+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i t^2}{2\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right)}\int_0^1(1-s)\,y(s)\,ds \\ &\quad -\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i t^2}{2\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)\,y(s)\,ds. \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
u(t) &= -\frac{1}{2}\left(\int_0^t (t-s)^2\, y(s)\, ds + t^2 \int_0^t (1-s)\, y(s)\, ds\right) \\
&\quad + \frac{t^2}{2}\int_t^1 (1-s)\, y(s)\, ds \\
&\quad + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i t^2}{2\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right)}\left(\eta_i \int_0^{\eta_i} (1-s)\, y(s)\, ds + \eta_i \int_{\eta_i}^1 (1-s)\, y(s)\, ds\right) \\
&\quad - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i t^2}{2\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i - s)\, y(s)\, ds.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^t \left(-s+2t-t^2\right) s y(s)\, ds + \int_t^1 (1-s)\, t^2 y(s)\, ds\right) \\
&\quad + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i t^2}{2\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right)}\left(\int_0^{\eta_i} (1-\eta_i)\, s y(s)\, ds + \int_{\eta_i}^1 (1-s)\, \eta_i y(s)\, ds\right)
\end{aligned}
$$

par conséquent

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds \\
&\quad + \frac{t^2}{2\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right)} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^1 G^*(\eta_i, s)\, y(s)\, ds.
\end{aligned}
$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Nous avons besoin de quelques propriétés des fonctions $G(t,s)$.

Lemme 3.2 *Pour tous* $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$, *nous avons*

$$
0 \le G^*(t,s) \le 2G(1,s)
$$

Preuve. Il est facile de vérifié que, si $t \leq s$, $G^*(t,s) = (1-s)t \leq (1-s)s = 2G(1,s)$. Si $s \leq t \Rightarrow -t \leq -s$, $G^*(t,s) = (1-t)s \leq (1-s)s = 2G(1,s)$.

La preuve est terminée. ■

Lemme 3.3 *Pour tous* $(t,s) \in [\tau,1] \times [0,1]$, *nous avons*

$$\tau^2 G(1,s) \leq G(t,s) \leq G(1,s) = \frac{1}{2}(1-s)s,$$

Preuve. Pour tous $t, s \in [0,1]$, si

$s \leq t$, il découle de (4) que

$$\begin{aligned} G(t,s) &= \frac{1}{2}\left(2t - t^2 - s\right)s = \frac{1}{2}\left[1 - s - \left(1 - t^2\right)\right]s \\ &\leq \frac{1}{2}(1-s)s = G(1,s), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G(t,s) &= \frac{1}{2}\left(2t - t^2 - s\right)s \\ G(t,s) &= \frac{1}{2}\left(2t - t^2 - s\right)s + t^2 - t^2 + t^2 s - t^2 s \\ &= \frac{1}{2}st^2(1-s) + \frac{1}{2}(1-t)\left[(t-s) + (1-s)t\right]s \\ &\geq 1/2s(1-s)t^2 \\ &\geq t^2 G(1,s). \end{aligned}$$

Si $t \leq s$, il découle de (4) que

$$\frac{1}{2}t^2(1-s)s \leq G(t,s) = \frac{1}{2}t^2(1-s) \leq G(1,s).$$

Ainsi,

$$t^2 G(1,s) \leq G(t,s) \leq G(1,s), \quad \forall (t,s) \in [0,1] \times [0,1].$$

Par conséquent,

$$\tau^2 G(1,s) \leq G(t,s) \leq G(1,s), \quad \forall (t,s) \in [\tau,1] \times [0,1].$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Définition 3.1 *Nous définissons un opérateur* $T : X \longrightarrow X$ *par*

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s),u'(s))\,ds \\ &+ \frac{t^2}{2\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right)} \sum_{i=1}^{n}\beta_i \int_0^1 G^*(\eta_i,s) f(s,u(s),u'(s))\,ds. \end{aligned} \tag{6}$$

La fonction $u \in X$ *est une solution du problème* (1) *si et seulement si*

$$Tu(t) = u(t);$$

(u *est un point fixe de* T).

3.2 Existence et unicité de la solution non triviale

En utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le théorème de contraction de Banach. nous donnons quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution non triviale du problème aux limites (1),

Lemme 3.4 *Soit* $u \in X$, *supposons que* $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i \neq 1$ *et* $k,\ h \in L^1([0,1],\mathbb{R}_+)$ *deux fonctions positives telles que*

$$|f(t,x,y) - f(t,u,v)| \leq k(t)|x-u| + h(t)|y-v|, \quad \forall x,y,u,v \in \mathbb{R},\ t \in [0,1] \tag{7}$$

et

$$2\left(1+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right)\int_0^1 G(1,s)\,(k(s)+h(s))\,ds<1$$

alors le problème aux limites (1) *admet une solution unique dans* X.

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 G(t,s)\,f(s,u(s),u'(s))\,ds \\ &+\frac{t^2}{2\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right)}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\int_0^1 G^*(\eta_i,s)\,f(s,u(s),u'(s))\,ds. \end{aligned}$$

Nous allons prouver que T est un contraction.

Soient $u,v\in X$, alors

$$\begin{aligned} |Tu(t)-Tv(t)| &\leq \int_0^1 G(1,s)\,|f(s,u(s),u'(s))-f(s,v(s),v'(s))|\,ds \\ &+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\int_0^1 G(1,s)\,|f(s,u(s),u'(s))-f(s,v(s),v'(s))|\,ds \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
|Tu(t) - Tv(t)| &\leq \left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1 - \sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right) \times \\
&\quad \int_0^1 G(1,s)\left[k(s)|u(s) - v(s)| + h(s)|u'(s) - v'(s)|\right]ds, \\
&\leq \left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1 - \sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right) \times \int_0^1 G(1,s)\, k(s)\, |u(s) - v(s)|\, ds \\
&\quad + \left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1 - \sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right) \int_0^1 G(1,s)\, h(s)\, |u'(s) - v'(s)|\, ds.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
|Tu(t) - Tv(t)| &\leq \left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1 - \sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right) \max\left\{\|u - v\|_\infty, \|u' - v'\|_\infty\right\} \int_0^1 G(1,s)\,(k(s) + h(s))\, ds \\
&\leq \|u - v\|_X \left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1 - \sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right) \int_0^1 G(1,s)\,(k(s) + h(s))\, ds
\end{aligned}$$

Et de même, on a

$$\begin{aligned}
T'u(t) &= \int_0^1 G^*(t,s)\, f(s, u(s), u'(s))\, ds \\
&\quad + \frac{t}{\left|1 - \sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|} \sum_{i=1}^{n}\beta_i \int_0^1 G^*(\eta_i, s)\, f(s, u(s), u'(s))\, ds.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}|T'u(t)-T'v(t)| &\leq 2\left(1+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right)\max_{0\leq t\leq 1}\left\{\|u-v\|_\infty,\|u'-v'\|_\infty\right\}\times\\ &\quad\int_0^1 G(1,s)(k(s)+h(s))\,ds\\ &\leq 2\|u-v\|_X\cdot\left(1+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right)\int_0^1 G(1,s)(k(s)+h(s))\,ds\end{aligned}$$

alors

$$\max\left\{\|Tu-Tv\|_\infty,\|T'u-T'v\|_\infty\right\}\leq\|u-v\|_X$$

Par conséquent

$$\|Tu-Tv\|_X\leq\|u-v\|_X\,.$$

Alors, T est un contraction. D'après le principe de contraction de Banach, l'opérateur T admet un unique point fixe qui est l'unique solution du problème (1). ■

Nous allons employer l'alternative non-linéaire de Leray-Shauder suivante

Lemme 3.5 [27] *Soit F un espace de Banach et Ω un sous ensemble ouvert et borné de F, $0\in\Omega$. $T:\overline{\Omega}\to F$ un opérateur complètement continu. Alors, soit il existe $x\in\partial\Omega$, $\lambda>1$ tel que $T(x)=\lambda x$, ou il existe un point fixe $x^*\in\overline{\Omega}$.*

Définition 3.2 ***(opérateur complètement continu)***

Soient E un espace de banach, Ω une partie de E.

On dit que l'opérateur $T:\Omega\to E$ est complètement continu s'il est continu et si pour toute partie bornée B de $T(B)$ est relativement compact dans E.

Théorème 3.1 *Nous supposons que $f(t,0,0)\neq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\neq 1$ et, il existe trois fonctions* *positives $k, l, h \in (L^1[0,1], \mathbb{R}_+)$ telles que*

$$|f(t,u,v)| \leq k(t)|u| + l(t)|v| + h(t), \ \forall u, v \in \mathbb{R}, \ t \in [0,1] \tag{8}$$

$$2\left(1+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right)\int_0^1 G(1,s)(k(s)+l(s))\,ds < 1,$$

Alors, le problème aux limites (1) a au moins une solution non triviale $u^* \in X$.

Preuve. Soit

$$F = 2\left(1+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right)\int_0^1 G(1,s)(k(s)+l(s))\,ds,$$

$$G = 2\left(1+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right)\int_0^1 G(1,s)\,h(s)\,ds,$$

Montrons que l'opérateur$T$ est complètement continu sur Ω

1) T est continu.

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers u dans X. Nous pouvons obtenir,

$$\begin{aligned}
|Tu_k(t) - Tu(t)| &\leq \left(1+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right)\times \\
&\quad \int_0^1 G(1,s)\left|f(s,u_k(s),u_k'(s)) - f(s,u(s),u'(s))\right| ds \\
&\leq \left(1+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right)\times \\
&\quad \int_0^1 G(1,s)\left(k(s)|u_k(s)-u(s)| + l(s)|u_k'(s)-u'(s)|\right) ds
\end{aligned}$$

$$\left|Tu_k(t) - Tu(t)\right| \leq \|u_k - u\|_X \left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta\right|_i}\right)\int_0^1 G(1,s)\left(k(s)+l(s)\right)ds$$

et de même, on a

$$\left|T'u_k(t) - T'u(t)\right| \leq 2\|u_k - u\|_X \left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right)\int_0^1 G(1,s)\left(k(s)+l(s)\right)ds$$

alors,

$$\|Tu_k - Tu\|_X \leq \|u_k - u\|_X$$

ce qui implique que T est continu, $\|Tu_k(t) - Tu(t)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) Soit $B_r = \{u \in X : \|u\|_X \leq r\}$ un sous ensemble borné. nous allons prouver que $T(\Omega \cap B_r)$ est relativement compact :

(i) $T(\Omega \cap B_r)$ est uniformément borné.

Pour certains $u \in \Omega \cap B_r$, on a :

$$|Tu(t)| \leq \left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right)\int_0^1 G(1,s)\left|f\left(s,u(s),u'(s)\right)\right|ds$$

$$|Tu(t)| \leq \left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right)\int_0^1 G(1,s)\left[k(s)\left|u_k(s)-u(s)\right| + l(s)\left|u_k'(s)-u'(s)\right| + h(s)\right]ds$$

$$\begin{aligned}|T'u(t)| &\leq \left(1+\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right)\|u_k-u\|_x\int_0^1 G(1,s)(k(s)+l(s))\,ds+\\ &\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right)_x\int_0^1 G(1,s)\,h(s)ds\end{aligned}$$

Et de même,on a

$$|T'u(t)| \leq 2\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right)\int_0^1 G(1,s)\,|f(s,u(s),u'(s))|\,ds$$

$$\begin{aligned}|T'u(t)| &\leq 2\|u_k-u\|_x\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right)\int_0^1 G(1,s)(k(s)+l(s))\,ds+\\ &2\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right)_x\int_0^1 G(1,s)\,h(s)ds\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\|Tu\|_X &\leq F\|u\|_X+G\\ &\leq Fr+G,\end{aligned}$$

alors, $T(\Omega\cap B_r)$ est uniformément borne.

(ii) $T(\Omega\cap B_r)$ est équicontinu.

$\forall\ t_1; t_2 \in [0,1]$; $u \in B_r$ d'après (7) , nous avons :

$$\begin{aligned}
|Tu(t_1) - Tu(t_2)| &= \left| \int_0^1 (G(t_1,s) - G(t_2,s)) f(s,u(s),u'(s))\, ds \right. \\
&\left. + \frac{t_1^2 - t_2^2}{2\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \eta_i\right)} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^1 G^*(\eta_i, s) f(s,u(s),u'(s))\, ds \right| .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|Tu(t_1) - Tu(t_2)| &\leq L \left[\int_0^{t_1} |G(t_1,s) - G(t_2,s)|\, ds + \int_{t_1}^{t_2} |G(t_1,s) - G(t_2,s)|\, ds \right. \\
&\left. + \int_{t_2}^1 |G(t_1,s) - G(t_2,s)|\, ds \right] \\
&+ \frac{L\left|t_1^2 - t_2^2\right|}{2\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \eta_i\right)} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^1 G^*(\eta_i, s)\, ds.
\end{aligned}$$

$$\text{où,}\quad L = \max_{0<s<1} |f(s,u(s),u'(s))|$$

$$\begin{aligned}
|Tu(t_1) - Tu(t_2)| &\leq L(t_2 - t_1) \left[\int_0^{t_1} |-2s + s(t_1 + t_2)|\, ds + \int_{t_2}^1 |(1-s)(t_1+t_2)|\, ds \right. \\
&\left. + \frac{t_1 + t_2}{2\left|1 - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \eta_i\right|} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^1 |G^*(\eta_i, s)|\, ds \right] \\
&+ L \int_{t_1}^{t_2} \left| \left(t_1^2 - st_2 + s^2\right) + \left(t_1^2 - t_2^2\right) s \right| ds.
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
|Tu(t_1) - Tu(t_2)| &\leq L(t_2 - t_1) \left[1 - t_2^2 + t_1(t_1 - t_2 + 3) \right. \\
&\left. + \frac{t_1 + t_2}{2\left|1 - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \eta_i\right|} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^1 |G^*(\eta_i, s)|\, ds \right]
\end{aligned}$$

De même nous avons

$$\begin{aligned}|T'u(t_1) - T'u(t_2)| &= \left| \int_0^1 (G^*(t_1, s) - G^*(t_2, s)) f(s, u(s), u'(s)) ds \right. \\ &\left. + \frac{t_1 - t_2}{2\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \eta_i\right)} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^1 G^*(\eta_i, s) f(s, u(s), u'(s)) ds \right| .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|T'u(t_1) - T'u(t_2)| &\leq L(t_2 - t_1) \left[\int_0^{t_1} |s| ds + \int_{t_2}^1 |s - 1| ds \right. \\ &\left. + \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i}{\left|1 - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \eta_i\right|} \int_0^1 |G^*(\eta_i, s)| ds \right] \\ &+ L \int_{t_1}^{t_2} |(t_1 - s) + (t_2 - t_1) s| ds.\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}|T'u(t_1) - T'u(t_2)| &\leq L(t_2 - t_1) \left[1 + (t_1 - t_2) + \frac{1}{2}(3t_2 - 5t_1) \right. \\ &\left. + \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i}{\left|1 - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \eta_i\right|} \int_0^1 |G^*(\eta_i, s)| ds \right]\end{aligned}$$

Alors, $|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \underset{t_1 \to t_2}{\longrightarrow} 0$ et $|T'u(t_1) - T'u(t_2)| \underset{t_1 \to t_2}{\longrightarrow} 0$.

Par conséquent, $T(\Omega \cap B_r)$ est equicontinu.

Du théorème d'Arzela-Ascoli, on en déduit que T est un opérateur complètement continu.

Remarquant que $F < 1$, $f(t, 0, 0) \neq 0$ et $G > 0$, alors il existe un intervalle $[\sigma, \tau] \subset [0, 1]$ telles que :

$$\min_{\sigma \leq t \leq \tau} |f(t, 0, 0)| > 0 \quad \text{et} \quad h(t) \geq |f(t, 0, 0)|, \quad t \in [0, 1].$$

Soit $m = G(1-F)^{-1}$, $\Omega = \{u \in X : \|u\| < m\}$.

Supposons que : $u \in \partial\Omega$, $\lambda > 1$ tel que, $Tu = \lambda u$, alors

$$\lambda m = \lambda \|u\| = \|Tu\|_X = \max_{0 \leq t \leq 1} \{\|Tu\|_\infty, \|T'u\|_\infty\},$$

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t,s) |f(s, u(s), u'(s))| \, ds \\
&\quad + \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{t^2}{2\left|1 - \sum\limits_{i=1}^n \beta_i \eta_i\right|} \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^1 G^*(\eta_i, s) |f(s, u(s), u'(s))| \, ds.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 G(1,s)(k(s)|u(s)| + l(s)|u'(s)| + h(s)) \, ds \\
&\quad + \frac{1}{\left|1 - \sum\limits_{i=1}^n \beta_i \eta_i\right|} \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^1 G(1,s)(k(s)|u(s)| + l(s)|u'(s)| + h(s)) \, ds.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| &\leq \left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^n \beta_i}{\left|1 - \sum\limits_{i=1}^n \beta_i \eta_i\right|}\right) \max_{0 \leq t \leq 1} \{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty\} \int_0^1 G(1,s)(k(s) + l(s)) \, ds \\
&\quad + \left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^n \beta_i}{\left|1 - \sum\limits_{i=1}^n \beta_i \eta_i\right|}\right) \int_0^1 G(1,s) h(s) \, ds \\
&\leq \|u\|_X \left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^n \beta_i}{\left|1 - \sum\limits_{i=1}^n \beta_i \eta_i\right|}\right) \int_0^1 G(1,s)(k(s) + l(s)) \, ds \\
&\quad + \left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^n \beta_i}{\left|1 - \sum\limits_{i=1}^n \beta_i \eta_i\right|}\right) \int_0^1 G(1,s) h(s) \, ds
\end{aligned}$$

Et de même on a,

$$\begin{aligned}|T'u(t)| &\leq \sup_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 G^*(t,s)\,|f(s,u(s),u'(s))|\,ds \\ &+\sup_{0\leq t\leq 1}\frac{t}{\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right)}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\int_0^1 G^*(\eta_i,s)\,|f(s,u(s),u'(s))|\,ds.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}|T'u(t)| &\leq 2\max_{0\leq t\leq 1}\{\|u\|_\infty,\|u'\|_\infty\}\int_0^1 G(1,s)\,|(k(s)+l(s))|\,ds \\ &+\frac{2}{\left|1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\int_0^1 G(1,s)\,h(s)\,ds.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|T'u(t)| &\leq 2\|u\|_X\left(1+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right)\int_0^1 G(1,s)\,(k(s)+l(s))\,ds \\ &+2\left(1+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i}{\left|1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|}\right)\int_0^1 G(1,s)\,h(s)\,ds.\end{aligned}$$

Ceci montre que

$$\lambda m=\|Tu\|_X\leq F\,\|u\|_X+G=Fm+G.$$

Alors, nous obtenons

$$\lambda\leq F+\frac{G}{m}=F+\frac{G}{G(1-F)^{-1}}=F+(1-F)=1,$$

ceci contredit $\lambda>1$.

En appliquant *le Lemma* 3.5,on conclut que l'opérateur T a un point fixe $u^* \in \overline{\Omega}$, puis le problème aux limites (1) a une solution non triviale $u^* \in X$. ■

3.3 Exemple

Afin d'illustrer nos résultats, nous donnons l'exemple ci-dessous

Exemple 3.1 *Considérons le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} u''' + t^2 + 4 + \frac{2t}{3} u \sin u + \frac{1}{5}(t+1)\, u' = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) = \sum_{i=1}^{3} \beta_i u'(\eta_i). \end{cases} \tag{E1}$$

Posons

$$\beta_1 = \frac{1}{3},\ \beta_2 = \frac{1}{4},\ \beta_3 = \frac{1}{5},$$

et

$$\eta_1 = \frac{1}{4},\ \eta_2 = \frac{1}{3},\ \eta_3 = \frac{1}{2}$$

où

$$\sum_{i=1}^{3} \beta_i u'(\eta_i) = \frac{16}{60} < 1$$

on a

$$f(t,u,v) = t^2 + 4 + \frac{2t}{3} u \sin u + \frac{1}{5}(t+1)\, v$$

1) *Nous pouvons choisir*

$$\begin{cases} k(t) = \frac{2}{3} t \\ h(t) = \frac{(t+1)}{5} \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

k, $l \in L^1[0,1]$ sont des fonctions positives et,

$$\begin{aligned} |f(t,x,y) - f(t,u,v)| &\le \frac{2t}{3}|x-u| + \frac{(t+1)}{5}|y-v|, \\ &\le k(t)|x-u| + h(t)|y-v|. \end{aligned}$$

Avec,

$$\int_0^1 G(1,s)\,(k(s)+h(s))\,ds < \frac{1-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i}{2\left(1+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(1-\eta_i)\right)}$$

Ainsi, d'aprés Le lemme 3.4*, le problème aux limites* $(E1)$ *a une unique solution non triviale,* $u^* \in X$.

2) *Et si*

$$\begin{aligned} |f(t,u,v)| &\leq \frac{2t}{3}|u| + \frac{(t+1)}{5}|v| + t^2 + 4, \\ &\leq k(t)\,|u| + l(t)\,|v| + h(t). \end{aligned}$$

Nous pouvons choisir

$$\begin{cases} k(t) = \frac{2}{3}t \\ l(t) = \frac{(t+1)}{5} \quad , \quad t \in [0,1] \\ h(t) = t^2 + 4 \end{cases}$$

avec

$$2\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}{1-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i}\right)\int_0^1 G(1,s)\,(k(s)+l(s))\,ds < 1,$$

k, l *et* $h \in L^1[0,1]$ *sont des fonctions positives.*

Ainsi, d'après le Théorème 3.1 *le problème aux limites* $(E1)$ *a au moins une une solution non triviale,* $u^* \in X$.

Conclusion 3.1 *Actuellement il y a une grande variété de théorèmes de points fixes, ces théorèmes donnent certaines conditions sous les quelles une application $f : E \to E$, admet un point fixe dans E.*

Ces théorèmes sont importants dans les mathématiques car il y a plusieurs applications, par exemple pour trouver les racines d'un polynôme, ou pour montrer l'existence des solutions numériques des équations différentielles.

Bibliographie

[1] **H. Brézis,** Analyse fonctionnelles, Théorie et applications. Masson, paris 1983

[2] **K. Deimling**, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, 1985.

[3] **R. G. Moorti and J. B. Garner,** Existence-uniqueness theorems for three point boundary value problmes for nth-order nonlinear differential equations, J. Differential Equations 29 (1978), 205-213.

[4] **R. Ma**, Positive solution of a nonlinear three point boundary value problem, E.J.D.E, (1998), 34, 1-8.

[5] **Y-P. Sun**; Nontrivial solution for a three-point boundary-value problem, E.J.D.E, Vol. 2004(2004), No. 111, 1-10. J. Math.Anal. Appl. 168(1992), 540–551.

[6] **L.Schwartz**, Analyse-topologie générale et analyse fonctionnelle, Hermann,Paris 1970.