République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP et Analyse numérique**

Par :

ABED Siham

Intitulé

Un schéma de discretisation pour l'équation de télégraphe

Dirigé par :

Devant le jury

PRESIDENT	Dr: HITTA Amara	Prof	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr: CHAOUI Abderezak	Prof	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr: ELLAGGOUNE Fateh	Prof	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier ALLAH qui m'a donné le courage, la santé, et la volonté pour réaliser ce modeste travail tout au long de mes années d'études.

A : **Pr CHAOUI Abderezak** , que je remercie de m'avoir inspiré le choix de ce sujet, pour son encadrement et pour ses précieux et judicieux conseils qu'elle n'a cessé de me prodiguer tout au long de ce travail.

Je suis trés honoré que **Pr HITTA Amara** , ait accepté de rapporter mon travail et de préséder mon jury de Memoire, je le remercie pour ses conseils et ses présieuses remarque.

Je remercie **Pr ELLAGGOUNE Fateh** d'avoir accepté d'examiner mon travail, je suis trés heureux de le voir participer à mon jury.

Mes remerciements vont également à tous mes enseignants de l'université de Guelma qui m'ont aidé pendant mes années d'étude.

Je remercie tous ceux qui ont participé de loin ou de prés à la réalisation de ce travail.

A mes collègues pour tous les moments qu'on a passé ensemble.

Dédicace

A l'aide de dieu tout puissant, qui m'a tracé le chemin de ma vie, j'ai pu réaliser ce travail que je dédie :

✠ A mes chers parents qui dieu leur procure bonne santé et loongue vie:

✠ A **ma mére** la lumiére de mes jour , la source de mes efforts.

✠ A mon **père** qui m'a appris le sens de la persévérance tout au long de mes études, pour son sacrifice, ses conseils et ses encouragements.

✠ A mes sœurs : **leyla**

✠ A mes frères : **Mounir** , **Oussama** et **Mohammed khayreddine**

✠ A toute la famille

✠ A mes amis **Roumaissa** , **Bessma** , **Meriem**, **Manal** , **chayma** , **Mouna** , **Amel** , **Saida** , **Hanan** , **Wafa** , **Loubna** et **Hada**.

Table des Matières

1 Rappel sur l'analyse fonctionnelle . . . 7

1.1 Espace de Banach . . . 7

1.2 Espace de Hilbert . . . 7

1.3 Espace de Lebesgue . . . 7

1.4 l'espace de $L^2(\Omega)$ . . . 8

1.5 Espace de Sobolev . . . 9

1.5.1 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ . . . 9

1.5.2 Espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ . . . 10

1.6 Les espaces de Boschner . . . 11

1.7 Convergence faible . . . 11

1.8 Espace dual . . . 13

1.9 Les inégalités utilisées . . . 13

1.9.1 L'inégalité de Cauchy-Schwarz . . . 13

1.9.2 L'ε inégalité . . . 14

1.9.3 Principe de Sommation d'Abel . . . 14

1.9.4 Inégalité de Gronwall . . . 14

1.9.5 Inégalité de Poincaré . . . 15

1.10 Quelques théorèmes utilisées . . . 15

1.10.1 Théorème de représentation de Riesz . . . 15

1.10.2 Théorème de Lax-Milgram . . . 15

1.10.3 Formule de Green . . . 16

2 probléme semi discretisé en temps et Quelques estimation a priori **17**

2.1 Position du problème 17

2.2 Le problème continu 18

2.3 le schéma numérique proposé 19

2.3.1 discrétisation du temps 19

3 probléme complétement discrtisé et Quelques estimations de l'erreur **29**

3.1 discrétisation dans l'espace 29

Bibliographie **34**

Introduction

Ces dernières années, on a constaté un intéret croissant pour l'étude des équations différentielles partielles. Ces problèmes se posent dans plusieurs domaines d'investigation par exemple dans la science , l'ingénierie la physique chimique et les biosciences...

L'équation télégraphique non linéaire dans l'espace N-dimensionnel avec des coefficients constants,modélise le mélange entre la diffusion et la propagation des ondes en introduisant un terme qui rend compte des effets de la vitesse finie sur la chaleur ou le transport de masse standard.

Il existe nombreuses méthodes de résolution d'équations aux dérivées partielles, l'une des ces méthodes est dite la méthode de Rothe ou discrétisation en temps ou les dérivées par rapport à une variable sont remplacées par des quotients de différences qui conduisent finalement à des systèmes d'équations différentielles.

Cette méthode comme approche approximative est bien adaptée non seulement pour prouver les résultats d'existence mais aussi pour diverses application. Elle a été présentée par Rothe en 1930 pour résoudre des équations hyperbolique linéaires du second ordre . Cette méthode a été adaptée par Ladyzen-Skaja (voir [6])pour résoudre des problèmes hyperbolique linéaires et quasi-linéaires de second ordre et les équations linéares d'ordre supérieure.

D'autre part ,la méthode des élément finis est l'une des méthodes communument utilisé pour l'aproximation numerique d'équations aux dérivées partielles

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'application de la méthode de Rothe combiné avec les élément finis et nous présentons un schéma de discrétisation complète du problème, avec l'estimation à priori et Quelques estimations de l'erreur

Le plan de ce mémoire est le suivant :

① Le chapitre 1, nous présentons quelques notions de bases , définitions élémentaires , les propriétées essentielles d'analyse fonctionnelle qui sont utiliser dans la suite.

② Le chapitre 2 , nous présentons le cadre général du problème continu,et un schéma de discrétisation du temps et Quelques estimations à priori

③ Le chapitre 3. nous présentons un schéma de discrétisation dans l'espace du problème par la méthode des élément finis ,et Quelques estimations de l'erreur

Chapitre 1

Rappel sur l'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, on va introduir quelques notions d'analyse fonctionnelle ultérieurement
.

1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.0 *Tout espace vectoriel normé complet est appellé espace de Banach.*

1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.2.0 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (donc normé) ,et complet pour la norme induite. Un espace de Hilbert est donc un cas particulier d'éspace de Banach*

1.3 Espace de Lebesgue

Définition 1.3.0 *Soit p un élément de $[1,+\infty[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on appelle espace de Lebesgue, et on note $L^P(\Omega)$ l'espace vectoriel de fonctions numériques u de Ω dans $\mathbb{C}$ Lebesgue mesurables vérifiant:*

– *Si* $1 \leq p \leq +\infty$

$$\boxed{\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty.}$$

– *Si* $p = \infty$

$$\boxed{\underset{x\in\Omega}{supess}\,|u(x)| < +\infty}$$

Où

$$\boxed{\underset{x\in\Omega}{supess}\,|u(x)| = \inf\{M \ telque \quad |u(x)| \leq M \quad p.p\}}$$

Quelques proriétés

1) L'application de $L^P(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^+$:

$$u \to \begin{cases} \|u\|_p = \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p \leq +\infty \\ \\ \|u\|_\infty = \underset{x\in\Omega}{supess}\,|u(x)| & p = +\infty \end{cases}$$

définit une norme sur $L^P(\Omega)$, norme par laquelle $L^P(\Omega)$ est un espace de Banach.

2) **Dual pour tout réel p dans** $[1, +\infty[$. le dual de $L^P(\Omega)$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à $L^q(\Omega)$. avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, l'application de dualité est définie par :

$$\begin{array}{rcl} L^P(\Omega) \times L^q(\Omega) & \to & \mathbb{C} \\ (u, v) & \to & \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx. \end{array}$$

pour tout réel p dans $[1, +\infty[$, le bidual de $L^P(\Omega)$ s'identifie algébriquement et topologiquement à $L^p(\Omega)$. On dit que l'espace $L^P(\Omega)$ est reflexif.

1.4 l'espace de $L^2(\Omega)$

Définition 1.4.0 *On note par* $\mathbf{L}^2(\Omega)$ *l'espace des fonctions de carées sommables sur* Ω, *où* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *c'est -à- dire :*

$$\boxed{L^2(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{C} \ mesurable \ tel \ que \ \int_\Omega |f(x)|^2 < +\infty\right\}}$$

muni du produit scalaire:

$$(f,g)=\int_\Omega f(x)\,g(x)\,dx.$$

$L^2(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*

1.5 Espace de Sobolev

Définition 1.5.0 *Soit $k\in\mathbb{N}$, $1\le p\le+\infty$. On définit l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{k,p}(\Omega)=\{\ f\in L^p(\Omega)\ tq\ D^\alpha f\ existe\ et\ D^\alpha f\ \in L^p(\Omega).\forall|\alpha|\le k\}$$

On muni les espaces de Sobolev par une structure d'espace normé dont les normes sont définies par

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)}=\left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega|D^\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\qquad 1\le p<+\infty.$$

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\Omega}|D^\alpha f(x)|\qquad p=+\infty.$$

Si $p=2$: H^k est un espace de Hilbert où $H^k=W^{k,2}$.

1.5.1 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Définition 1.5.0 *On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω, l'espace*

$$H^1(\Omega)=\{f\in L^2(\Omega),\ \frac{\partial f}{\partial x_i}\in L^2(\Omega),\ 1\le i\le n\}.$$

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire

$$\begin{aligned}(f,g) &= \int\limits_{\Omega} f.gdx + \int\limits_{\Omega} \nabla f.\nabla gdx \\ &= \int\limits_{\Omega} f.gdx + \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right) dx.\end{aligned}$$

La norme correspondante sera:

$$\boxed{\|f\|_{1,\Omega} = \sqrt{(f,f)_{1,\Omega}}.}$$

1.5.2 Espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.5.0 *On note par $H_0^1(\Omega)$ la fermèture de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$*

$$\boxed{H_0^1(\Omega) = D(\bar{\Omega})}$$

Théorème 1.5.1 *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. Alors $H_0^1(\Omega)$ est donné par:*

$$\boxed{H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega),\ v_{|\partial\Omega} = 0 \ sur\ \partial\Omega\},}$$

pour un entier non négatif m, $H^m(\Omega)$ dénote l'espace sobolev sur Ω avec la norme

$$\boxed{\|w\|_m = (\sum_{0 \leq \alpha \leq m} \|\frac{\partial^2 w}{\partial x^\alpha}\|^2)^{\frac{1}{2}}.}$$

1.6 Les espaces de Boschner

Définition 1.6.0

① $C(I, L^2(\Omega)) = \{f : I \to L^2(\Omega)$ *qui associé à* t, $f(t) \in L^2(\Omega)$*continue*$\}$.

muni de la norme:

$$\|f\|_{C(I,L^2(\Omega))} = \max_{t\in I} \|f\|_{L^2(\Omega)} \,.$$

② $L^\infty(I, L^2(\Omega)) = \{f : I \to L^2(\Omega)$ *essentiellement bornées* $\}$.

muni de la norme:

$$\|f\|_{L^\infty(I,L^2(\Omega))} = \sup_{t\in I} \|f\|_{L^2(\Omega)} \,.$$

③ $H^1(I, L^2(\Omega)) = \{f : I \to L^2(\Omega), \int_I \|f\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt < \infty$ *et* $\int_I \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt < \infty\}$.

muni de la norme:

$$\|f\|^2_{H^1(I,L^2(\Omega))} - \int_I \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt$$

④ $L^2(I, L^2(\Omega)) = \{ f : I \to L^2(\Omega)$ *à carrée intégrable*$\}$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^2(I,L^2(\Omega))} = \int_\Omega \|f\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \ < \infty.$$

1.7 Convergence faible

Soit E un espace de Banach

Définition 1.7.0 (x_n) *converge faiblement dans* E *vers* x *si l'on a:*

$$\lim_{n\to+\infty}\langle x', x_n\rangle = \langle x', x\rangle \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\langle x', x_n - x\rangle = 0 \qquad \forall x' \in E'.$$

avec E' l'espace dual de E.

Notation :

1. on note $x_n \longrightarrow x$ faiblement dans E par: $x_n \rightharpoonup x$
2. on note $x_n \longrightarrow x$ fortement dans E par: $x_n \longrightarrow x$ (c'est-à-dire la convergence en norme)

Remarque :

– Si $x_n \longrightarrow x$ fortement ($\|x_n - x\|_E \longrightarrow 0$) $\Longrightarrow$ $x_n \rightharpoonup x$ car

$$\forall\ x' \in E : |(x', x_n - x)| \le x'\ \|x'\| \,.\, \|x_n - x\| \longrightarrow 0$$

– Si $dimE < \infty$ on a équivalence de deux notions

En effet

$x^m = (x_1^m, x_2^m, ..., x_n^m)$, $\dim E' = n$; $\{e_1, e_2, e_n\}$base de $E \Longrightarrow \{e_j^*\}_{j=1}^n$ base dual tel que

$$e_j^*(e) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$x^m \rightharpoonup x = (x_1, x_2, ..., x_n) \implies \forall i = 1, ..., n, x' = e_i^*$$

$$(e_i^*, x^m - x) = x_i^m - x_i \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i^m - x_i| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Alors $\quad \|x^m - x\|_1 \longrightarrow 0$ ce qui donne $\|x^m - x\| \longrightarrow 0$

Car tout les normes de E sont équivalentes .

Théorème 1.7.1 *Soit E un espace de Banach reflexif et x_n une suite bornée dans E, alors il est possible d'extraire une sous suite de x_n qui converge faiblement dans E.*

Théorème 1.7.2 *Toute suite borné dans un espace de Hilbert possède une sous suite faiblement convergente .*

1.8 Espace dual

Si E un espace vectoriel normé sur $K = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$, le dual de E est l'espace $\pounds(E, \mathbb{k})$des formes linéaires continues sur $\mathbb{k}$, on le note E' de la norme subordonnée à la norme de E .

1.9 Les inégalités utilisées

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

1.9.1 L'inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1.9.1 $\forall\ u, v \in L^2(\Omega)$

$$\left|\int_\Omega uvdx\right| \leq \left(\int_\Omega |u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\sum_{i=1}^{N} u_i v_i \leq \left(\sum_{i=1}^{N} u_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N} v_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve.pour $\lambda \in \mathbb{R}$, définissions le trinôme du second degré

$$p(\lambda) = (u + \lambda v, u + \lambda v) = \lambda^2(v, v) + 2\lambda(u, v) + (u, u)$$

comme $p(\lambda) \geq 0 \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$, nécessairement le discriminant

$$\triangle = (u, v) - (u, u)(v, v)$$

doit être négatif ou nul . soit $|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}}(v, v)^{\frac{1}{2}}$
si $\triangle = 0$ alors le polynome $p(\lambda) = 0$ admet une racine double c'est-à-dire il existe $\lambda_1$tq $q(\lambda_2) = 0$ donc u et v sont colinéaires.

1.9.2 L'ε inégalité

$$\boxed{2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2 \quad \forall \varepsilon \geq 0, \forall ab.}$$

1.9.3 Principe de Sommation d'Abel

$$\boxed{2a(a-b) = a^2 - b^2 + (a-b)^2, \ \forall ab.}$$

1.9.4 Inégalité de Gronwall

Lemme 1.9.1

① ***Le cas continue :*** *Soient α ,β et γ sont des fonctions réelles dans $I = [0, +\infty[$ supposons que β et γ sont des fonctions continues, si β est positive ,α est croissante et si γ satisfait l'inégalité intégrale*

$$\gamma(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\gamma(s)ds \quad \forall t \in I.$$

Alors

$$\boxed{\gamma(t) \leq \alpha(t) exp(\int_a^t \beta(s)ds) \quad \forall t \in I.}$$

② ***Le cas discret :*** *Si $\gamma_n \geq 0$,$\alpha_n \geq \alpha_{n-1}$,$\beta_j \geq 0$ et*

$$\gamma_n \leq \alpha_n + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \gamma_j, \quad n \geq 0$$

Alors

$$\boxed{\gamma_n \leq \alpha_n \exp(\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j).}$$

1.9.5 Inégalité de Poincaré

Définition 1.9.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n, \Omega \subset \overline{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^n, a < b$ pour certain $\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| = 1, a, b \in \mathbb{R}^n\}$.(c'est -à-dire Ω est située entre deux hyperplans parallèles avec $\xi = b - a$). Alors il existe une constante universelle $c_0 > 0$(i. e indépendante de Ω) tel que :*

$$\boxed{\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_0 \xi \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad 1 \leq p \leq \infty.}$$

En particuler l'expression $\|\nabla u\|_p$ est une norme sur $W_0^1(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|u\|_{W,p}$ sur $H_0^1(\Omega)$. l'expression $\int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ est un produit scalaire qui induit la norme$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$équivalente à la norme $\|u\|_{H^1}$.

1.10 Quelques théorèmes utilisées

1.10.1 Théorème de représentation de Riesz

Théorème 1.10.1 *Soit l une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert $\mathbb{H}$. Alors il existe un unique vecteur $y_l \in \mathbb{H}$ tel que , pour tout $x \in \mathbb{H}$*

$$\boxed{l(x) = \langle x, y_l \rangle.}$$

1.10.2 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1.10.2 *Si $a(.,.)$ est une forme bilinèaire cntinue et coercive sur l'espace de hilbert $V \times V$ et $l(.)$ est une forme linèaire continue sur V alors le problème variationnel:*

$$(p) : \begin{cases} trouver, & u \in V \ tq; \\ a(u, v) = l(v), & \forall u \in V. \end{cases}$$

admet une unique solution

1.10.3 Formule de Green

Théorème 1.10.3 *On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ régulière, alors $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ on a*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} uv\gamma_i d\sigma.$$

où γ_i la $i^{\grave{e}me}$ composante du vecteur unitaire normale extérieure .
En remarquant $\Delta u = div(\nabla u)$, alors on a

$$\int_{\Omega} \Delta uvdx = -\int_{\Omega} \nabla u \nabla vdx + \int_{\Gamma} (\nabla u\eta)v.$$

Chapitre 2

probléme semi discretisé en temps et Quelques estimation a priori

2.1 Position du problème

Dans ce chapitre , on est concerné par l'étude du problème suivant

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + Au = f(x, t, u) \ \ dans \ \ Q \equiv \Omega \times I, \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \ \ dans \ \ \Omega. \quad (2.2)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x) \ \ dans \ \ \Omega. \quad (2.3)$$

$$u = 0 \ \ sur \ \ \Sigma \equiv \partial\Omega \times I. \quad (2.4)$$

Où $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N = 1, 2, 3)$ est borné simplement connex à bord

$\partial\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}, I \equiv (0, T)$ est un intervalle de temps . nous présentons l'opérateur différentiel elliptique A Défini par :

$$\boxed{Au := -\nabla \cdot (A(x)\nabla u) + a(x)u} \quad (2.5)$$

Où ∇ et $\nabla \cdot$ désigner les opérateurs de gradient et de divergence ,respectivement et $A(x)$ est une matrice symétrique avec des entrées qui sont uniformément bornées et mesurables. les fonctions f, u_0, u_1 et $A(x)$ sont les données du problème et seront supposés aussi suffisament réguliers

2.2 Le problème continu

Nous utiliserons les notations standard de l'analyse fonctionnelle (voir [5]) pour les espaces $L^2(\Omega)$ et $V \equiv H_0^1(\Omega)$. De plus ,$(\cdot,\cdot)$ est utilisé pour définir le produit intérieur dans $L_2(\Omega)$ et les normes sur $L_2(\Omega)$ et V seront notées par $|\cdot|$ et $\|\cdot\|$ respectivement, toutes les constantes qui se produisent au cours de ceci seront notées par C (ε est petit et $C_\varepsilon = C(\varepsilon^{-1})$) Enfin, afin de définir une solution généralisée du problème (2.1)(2.4) nous introduisons la forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)V \times V$ correspondant à l'opérateur différentiel A qui est donnée par:

$$\boxed{((u,v)) = (A\nabla u, \nabla v) + (au, v)} \qquad (2.6)$$

souci de simplicité, nous supposerons tout au long de ce travail les hypothèses suivantes:

(H1) $f : \Omega \times I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitz continue

$$\boxed{|f(x,t,s) - f(x,t',s')| \le c\{|t-t'|(|s|+|s'|) + |s-s'|\}, \ \forall t,t' \in I, \forall s,s' \in \mathbb{R}} \qquad (2.7)$$

et satisfait la condition de croissance

$$\boxed{|f(x,t,\xi)| \le C(1+|\xi|) \ \forall (x,t,\xi) \in \Omega \times I \times \mathbb{R}} \qquad (2.8)$$

(H2) $A(x)$ est une matrice symétrique et définie positive dans Q, i.e.

$$\boxed{(A\xi,\xi) \ge C|\xi|^2.} \qquad (2.9)$$

(H3) les coefficients $A(x)$ sont choisis de telle sorte que la forme bilinéaire soit symétrique, bornée et V-elliptique, c'est-à-dire,

$$\boxed{|((u,v))| \le c\|u\|\|v\|, \ ((u,u)) \ge c\|u\|^2 \ \forall u,v \in V} \qquad (2.10)$$

(H4) $u_0 \in V, \ u_1 \in L_2(\Omega)$.

Dans le sens Sous ces hypothèses, nous pouvons maintenant énoncer la forme variationnelle du problème télégraphique,i.e:

probléme (p)

trouver $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $u \in H^1(I; L_2(\Omega)) \cap L_2(I; V)$ et satisfait les conditions initiales $u(x, 0) = u_0(x)$ et $u_t(x, o) = u_1(x)$ ainsi que la relation intégrale

$$\boxed{-\int_I (\partial_t u, \partial_t v) - (u_1, v(., 0)) + \int_I (\partial_t u, v) + \int_I ((u, v)) = \int_I (f, v)} \quad (2.11)$$

pour tous $v \in H^1(I; L_2(\Omega)) \cap L_2(I; V)$ avec $v(x, T) = 0$

La solution exacte d'ondes progressives pour ce problème est évaluée [1] dans le cas $f(u) = u(a - u)(1 - u), 0 \leq a \leq 1$ (équation télégraphique de Nagumo). Généralement, le problème (P) avec les hypothèses supposées admet une solution d'onde progressive unique (voir [4], le théorème 4.1.7,p.95).

2.3 le schéma numérique proposé

Cette section est consacrée à proposer un schéma numérique compétitif basé sur la méthode de Rothe en discrétisation temporelle et sur la méthode de Galerkin-élément finis en discrétisation spatiale.à cet effet, introduisons d'abord quelques notations et hypothèses de base relatives aux discrétisations.

2.3.1 discrétisation du temps

nous subdivisons l'intervalle de temps I par des points $t_i = i\tau, \tau = T/n$,
$i = 0, 1, 2, ..., n$. où N est un entier positif. soient u_{-1} et u_0 définis comme $u_{-1}(x) = u_0(x) - \tau u_1(x)$ et $u_0 = u_0(x)$, une première discrétisation du problème (P) consiste en le problème suivant:

probléme (P_τ)

trouver $u_i \cong u(., t_i) \in V, i = 1, 2, ..., n$ tel que les équations

$$\boxed{(\delta^2 u_i, v) + (\delta u_i, v) + ((u_i; v)) = (f_i, v) \ \forall v \in V.} \quad (2.12)$$

sont satisfaits, nous utilisons ici les notatins

$$\boxed{\delta u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\tau}, \ \delta^2 u_i = \frac{\delta u_i - \delta u_{i-1}}{\tau}, \ f_i = f(x, t_i; u_{i-1}).} \quad (2.13)$$

l'existence d'une solution unique en chaque point t_i, $i = 1, 2, ..., n$ est asséré par le théorème de lax-milgram . ce qui donne.

Lemme 2.3.0 *le problème discrétisé (2.12) est résoluble.*
la fonction Rothe $u^n : I \to V$, destiné à être une approximation de u est introduit par

$$\boxed{u^n(t) = u_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta u_i, \ \forall t \in [t_{i-1}, t_i], 1 \leq i \leq n,}$$

$$\boxed{\delta u^n(t) = \delta u_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta^2 u_i, \ \forall t \in [t_{i-1}, t_i], 1 \leq i \leq n,}$$

d'ailleurs nous aurons besoin d'introduire les fonctions d'étape

$$\boxed{\bar{u}^n(t) = \begin{cases} u_i & t \in [t_{i-1}, t_i], 1 \leq i \leq n, \\ u_0 & t \in [-\tau, 0], \end{cases}}$$

$$\boxed{\bar{f}^n(t) = \begin{cases} f_i & t \in [t_{i-1}, t_i], 1 \leq i \leq n, \\ f_0 & t = 0. \end{cases}}$$

Soit t un élément arbitraire, , mais fixe élément de (0,T) et cela;
$v \in H^1(I; L_2(\Omega)) \cap L_2(I; V), v(x, T) = 0$, le problème discrétisé (2.12) peut être écrit sous la forme

$$\boxed{(\partial_t \delta u^n, v) + (\partial_t u^n, v) + ((\bar{u}^n, v)) = (\bar{f}^n, v).} \quad (2.14)$$

l'intégration de cette équation sur I rendements

$$\boxed{-\int_I (\partial_t u^n, \partial_t v) - (\delta u^n(0), v(.,0)) + \int_I (\partial_t u^n, v) + \int_I ((\bar{u}^n, v)) = \int_I (\bar{f}^n, v).} \quad (2.15)$$

pour tous $v \in H^1(I; L_2(\Omega)) \cap L_2(I; V)$ avec $v(x, T) = 0$.

pour prouver la stabilité du schéma d'approximation (2.12) nous dérivons des estimations a priori pour u_i et δu_i

Lemme 2.3.0 les estimations

① $|\delta u_s|^2 \leq \tau C$ $(2.16)_a$

② $\sum_{i=1}^{s} |\delta u_i - \delta u_{i-1}|^2 \leq \tau C$ $(2.16)_b$

③ $\sum_{i=1}^{s} \tau |\delta u_i|^2 \leq \tau C$ $(2.16)_c$

④ $\|u_s\|^2 \leq \tau C$ $(2.16)_d$

⑤ $\sum_{i=1}^{s} \|u_i - u_{i-1}\|^2 \leq \tau C$ $(2.16)_e$

sont vérifies uniformément pour s

Preuve.prenons $v = \tau \delta u_i$ comme une fonction de test en (2.12) et faisons la somme de i=1,2,...,s, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{s} (\delta^2 u_i, \tau \delta u_i) + \sum_{i=1}^{s} (\delta u_i, \tau \delta u_i) + \sum_{i=1}^{s} ((u_i, \tau \delta u_i)) = \sum_{i=1}^{s} (f_i, \tau \delta u_i)$$

on utilise la definition de $\delta^2 u_i$ et δu_i et en appliquant L'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\sum_{i=1}^{s} (\delta u_i - \delta u_{i-1}, \delta u_i) + \sum_{i=1}^{s} \tau |\delta u_i|^2 + \sum_{i=1}^{s} ((u_i, u_i - u_{i-1})) \leq \sum_{i=1}^{s} \tau |f_i| |\delta u_i| \quad (2.17)$$

On utilise le Principe de Sommation d'Abel :

$$\sum_{i=1}^{s}(\delta u_i - \delta u_{i-1}, \delta u_i) = \sum_{i=1}^{s}\frac{1}{2}(|\delta u_i|^2 - |\delta u_{i-1}|^2 + |\delta u_i - \delta u_{i-1}|^2)$$

Et

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s}(|\delta u_i|^2 - |\delta u_{i-1}|^2) &= (|\delta u_1|^2 - |\delta u_0|^2 + |\delta u_2|^2 - |\delta u_1|^2 + \ldots + |\delta u_s|^2)\\ &= |\delta u_s|^2 - |\delta u_0|^2\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{s}(\delta u_i - \delta u_{i-1}, \delta u_i) = \frac{1}{2}|\delta u_s|^2 - \frac{1}{2}|\delta u_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}|\delta u_i - \delta u_{i-1}|^2 \qquad (2.17)_a$$

De la même maniere :

$$\sum_{i=1}^{s}((u_i, u_i - u_{i-1})) = \sum_{i=1}^{s}\frac{1}{2}(\|u_i\|^2 - \|u_{i-1}\|^2 + \|u_i - u_{i-1}\|^2)$$

Et

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s}(\|u_i\|^2 - \|u_{i-1}\|^2) &= (\|u_1\|^2 - \|u_0\|^2 + \|u_2\|^2 - \|u_1\|^2 + \ldots + \|u_s\|^2)\\ &= \|u_s\|^2 - \|u_0\|^2\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{s}((u_i, u_i - u_{i-1})) = \frac{1}{2}\|u_s\|^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\|u_i - u_{i-1}\|^2 \qquad (2.17)_b$$

Substituons $(2.17)_a$ et $(2.17)_b$ dans (2.17) et on utilise L'εinégalité:

$$\begin{aligned}&|\delta u_s|^2 + \sum_{i=1}^{s}|\delta u_i - \delta u_{i-1}|^2 + \sum_{i=1}^{s}\tau|\delta u_i|^2 + \|u_s\|^2 + \sum_{i=1}^{s}\|u_i - u_{i-1}\|^2\\ &\leq C + \varepsilon\sum_{i=1}^{s}\tau|f_i|^2 + C_\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\tau|\delta u_i|^2\\ &\leq \varepsilon(1 + \sum_{i=1}^{s}\sum_{r=1}^{i-1}|\delta u_i|^2\tau^2) + C_\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\tau|\delta u_i|^2.\end{aligned}$$

En choisissant ε suffisamment petit et en appliquant le lemme de Gronwall (voir, par exemple [10]) on aura:

$$|\delta u_s|^2 + \sum_{i=1}^{s} |\delta u_i - \delta u_{i-1}|^2 + \sum_{i=1}^{s} \tau|\delta u_i|^2 + \|u_s\|^2 + \sum_{i=1}^{s} \|u_i - u_{i-1}\|^2$$

$$\leq \varepsilon(1 + \sum_{i=1}^{s}\sum_{r=1}^{i-1} |\delta u_i|^2\tau^2) + C_\varepsilon \sum_{i=1}^{s} \tau|\delta u_i|^2.$$

$$\leq \varepsilon(1 + \sum_{i=1}^{s}\sum_{r=1}^{s-1} |\delta u_i|^2\tau^2) + C_\varepsilon \sum_{i=1}^{s} \tau|\delta u_i|^2.$$

$$\leq \varepsilon(1 + \sum_{r=1}^{s-1}\sum_{i=1}^{s} |\delta u_i|^2\tau^2) + C_\varepsilon \sum_{i=1}^{s} \tau|\delta u_i|^2.$$

$$\leq \varepsilon(1 + C\sum_{i=1}^{s} |\delta u_i|^2\tau^2) + C_\varepsilon \sum_{i=1}^{s} \tau|\delta u_i|^2$$

$$\overset{l.G}{\leq} \varepsilon \exp(\sum_{i=1}^{s} \varepsilon C\tau^2) + C_\varepsilon \sum_{i=1}^{s} \tau|\delta u_i|^2$$

$$\overset{l.G}{\leq} \varepsilon C + \varepsilon C \exp(\sum_{i=1}^{s} C_\varepsilon \tau) \leq \varepsilon C \leq \tau C$$

Corollaire 2.3.0 les estimations

① $\|\partial_t u^n\|_{L_2(I;L_2(\Omega))} \leq C,$

② $\|\bar{u}^n\|_{L_2(I;V)} \leq C,$

③ $\|u^n - \bar{u}^n\|^2_{L_2(I;V)} \leq \frac{C}{n}$

④ $\|u^n - \bar{u}^n\|^2_{L_2(I;L_2(\Omega))} \leq \frac{C}{n^2},$

⑤ $\|u^n - \bar{u}^n_t\|^2_{L_2(I;L_2(\Omega))} \leq \frac{C}{n^2}$

⑥ $\|\delta u^n - \partial_t u^n\|^2_{L_2(I;L_2(\Omega))} \leq \frac{C}{n}$

sont satisfaites

Où $\bar{u}^n_t = \bar{u}^n(., t - \tau).$

Preuve.

1. On utilise $(2.16)_c$ et la définitions de u^n :

$$|\partial_t u^n|^2 = |\delta u_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{s} \tau |\delta u_i|^2 \leq \tau C \leq C$$

Alors

$$\int_I |\partial_t u^n|^2 dt \leq CT \leq C$$

C.à.d:

$$\boxed{\|\partial_t u^n\|_{L_2(I;L_2(\Omega))} \leq C.}$$

2. On utilise $(2.16)_d$ et la définitions de $\bar{u}^n$:

$$\|\bar{u}^n\|^2 = \|u_s\|^2 \leq C\tau \leq C \qquad avec \qquad t_{s-1} \leq t \leq t_s$$

Alors

$$\int_I \|\bar{u}^n\|^2 dt \leq CT \leq C$$

C.à.d:

$$\boxed{\|\bar{u}^n\|_{L_2(I;V)} \leq C.}$$

3. On utilise $(2.16)_c$ et les éfinitions de u^n et $\bar{u}^n$:

$$\begin{aligned}
|u^n - \bar{u}^n|^2 &= |u_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta u_i - u_i|^2 \\
&\leq (|u_{i-1} - u_i| + |(t - t_{i-1})\delta u_i|)^2 \\
&\leq (|\tau\delta u_i| + |\tau\delta u_i|)^2 \\
&\leq (2\tau|\delta u_i|)^2 \\
&\leq 4\tau^2|\delta u_i|^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{s} \tau^2 |\delta u_i|^2 \leq C\tau^2
\end{aligned}$$

Alors

$$\int_I |u^n - \bar{u}^n|^2 dt \leq CT\tau^2 \leq C\frac{T^2}{n^2} \leq \frac{C}{n^2}$$

C.à.d

$$\boxed{\|u^n - \bar{u}^n\|^2_{L_2(I;L_2(\Omega))} \leq \frac{C}{n^2}.}$$

4. On utilise $(2.16)_c$ et les éfinitions de u^n et $\bar{u}^n_\tau$:

$$\begin{aligned}
|u^n - \bar{u}^n_\tau|^2 &= |u_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta u_i - u_i|^2 \\
&\leq (|u_{i-1} - u_i| + |(t - t_{i-1})\delta u_i|)^2 \\
&\leq (|\tau\delta u_i| + |2\tau\delta u_i|)^2 \\
&\leq (3\tau|\delta u_i|)^2 = 9\tau^2|\delta u_i|^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{s} \tau^2|\delta u_i|^2 \leq C\tau^2
\end{aligned}$$

Où

$$t_{i-1} + \tau \leq t \leq t_i + \tau$$

Et

$$t - t_{i-1} \leq t_i - t_{i-1} + \tau \leq 2\tau$$

Alors

$$\int_I |u^n - \bar{u}^n_\tau|^2 dt \leq CT\tau^2 \leq C\frac{T^2}{n^2} \leq \frac{C}{n^2}$$

C.à.d

$$\boxed{\|u^n - \bar{u}^n_\tau\|^2_{L_2(I;L_2(\Omega))} \leq \frac{C}{n^2}.}$$

5. On utilise $(2.16)_e$ et les éfinitions de u^n , $\bar{u}^n$ et δu_i:

$$\begin{aligned}
\|u^n - \bar{u}^n\|^2 &= \|u_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta u_i - u_i\|^2 \\
&\leq (\|u_{i-1} - u_i\| + \|(t - t_{i-1})\delta u_i\|)^2 \\
&\leq (\|\tau\delta u_i\| + \|\tau\delta u_i\|)^2 \\
&\leq (2\|\tau\delta u_i\|)^2 = 4\|\tau\delta u_i\|^2 \\
&= 4\|u_i - u_{i-1}\|^2 \leq \sum_{i=1}^{s} \|u_i - u_{i-1}\|^2 \leq C\tau
\end{aligned}$$

Alors

$$\int_I \|u^n - \bar{u}^n\|^2 dt \leq CT\tau \leq C\frac{T}{n} \leq \frac{C}{n}$$

C.à.d

$$\boxed{\|u^n - \bar{u}^n\|^2_{L_2(I;V)} \leq \frac{C}{n}.}$$

6. On utilise $(2.16)_b$ et les éfinitions de u^n ,δu^n et $\delta^2 u_i$:

$$\begin{aligned}
|\delta u^n - \partial_t u^n|^2 &= |\delta u_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta^2 u_i - \delta u_i|^2 \\
&\leq (|\delta u_{i-1} - \delta u_i| + |(t - t_{i-1})\delta^2 u_i|)^2 \\
&\leq (|\tau\delta^2 u_i| + |\tau\delta^2 u_i|)^2 \\
&\leq (2|\tau\delta^2 u_i|)^2 = 4|\tau\delta^2 u_i|^2 \\
&= 4|\delta u_i - \delta u_{i-1}|^2 \leq \sum_{i=1}^{s} |\delta u_i - \delta u_{i-1}|^2 \leq C\tau
\end{aligned}$$

Alors

$$\int_I |\delta u^n - \partial_t u^n|^2 dt \leq CT\tau \leq C\frac{T}{n} \leq \frac{C}{n}$$

C.à.d

$$\boxed{\|\delta u^n - \partial_t u^n\|^2_{L_2(I;L_2(\Omega))} \leq \frac{C}{n}.}$$

Dénotant par $e_u = u - u^n$ et $e_f = f - \bar{f}^n$, nous pouvons prouver le théorème suivant

Théorème 2.3.1 *Sous les hypothèses (H1)-(H4) que nous avons*

$$\boxed{\|e_u\|^2_{C(I,L_2(\Omega))} + \|e_u\|^2_{L_2(I,V)} \leq C(\tau^2 + \tau).} \quad (2.18)$$

Preuve en soustrayant (2.15) de (2.11) on obtient.

$$-\int_I (\partial_t(u - u^n), \partial_t v)dt + \int_I (\partial_t(u - u^n), v)dt + \int_I ((u - \bar{u}^n, v))dt = \int_I (f - \bar{f}^n, v)dt$$

en utilisant $v = e_u(t)$ comme une fonction de test que nous obtenons :

$$-\int_I (\partial_t e_u, \partial_t e_u)dt + \int_I (\partial_t e_u, e_u)dt + \int_I ((u - \bar{u}^n, e_u))dt = \int_I (e_f, e_u)dt$$

Ensuite

$$-\int_I |\partial_t e_u|^2 dt + \frac{1}{2}\int_I \partial_t |e_u|^2 dt + \int_I ((u - u^n + u^n - \bar{u}^n, e_u))dt \overset{C.S}{\leq} \int_I |e_f||e_u|dt$$

De plus

$$-\int_I |\partial_t e_u|^2 dt + \frac{1}{2}|e_u|^2 + \int_I \|e_u\|^2 dt + \int_I ((u^n - \bar{u}^n, e_u))dt \leq \int_I |e_f||e_u|dt$$

Donc

$$-2\int_I |\partial_t e_u|^2 dt + |e_u|^2 + 2\int_I \|e_u\|^2 dt \leq 2\int_I |e_f||e_u|dt + 2\int_I ((\bar{u}^n - u^n, e_u))dt$$

On utilise (H3):

$$|e_u|^2 + 2\int_I \|e_u\|^2 dt \leq 2\int_I |e_f||e_u|dt + 2\int_I \|\bar{u}^n - u^n\|\|e_u\|dt + 2\int_I |\partial_t e_u|^2 dt$$

on applique L'εinégalité et le corollaire (2.3.0):

$$|e_u|^2 + 2\int_I \|e_u\|^2 dt \leq \varepsilon\int_I |e_f|^2 dt + C_\varepsilon\int_I |e_u|^2 dt + \int_I \|\bar{u}^n - u^n\|^2 dt + \int_I \|e_u\|^2 dt + 2\int_I |\partial_t e_u|^2 dt$$

De plus

$$|e_u|^2 + \int_I \|e_u\|^2 dt \leq \varepsilon\int_I |e_f|^2 dt + C_\varepsilon\int_I |e_u|^2 dt + \int_I \|\bar{u}^n - u^n\|^2 dt + 2\int_I |\partial_t e_u|^2 dt$$

Donc

$$|e_u|^2 + \int_I \|e_u\|^2 dt \leq \varepsilon\|e_f\|_{L_2(I;L_2(\Omega))} + C_\varepsilon\int_I |e_u|^2 dt + \int_I \|u^n - \bar{u}^n\|^2 dt + C\tau \quad (2.19)$$

Maintenant nous considérons

$$\begin{aligned}\|e_f\|_{L_2(I;L_2(\Omega))} &\leq \int_I (|f(t,u) - f(t,u^n|^2 + |f(t,u^n) - f(t,\bar{u}^n_\tau|^2 + |f(t,\bar{u}^n_\tau) - f(t_i,\bar{u}^n_\tau|^2) \\ &\overset{H1}{\leq} \int_I (|e_u|^2 + \|u^n - \bar{u}^n_\tau\|^2 + \tau^2). \quad (2.20)\end{aligned}$$

Substituons (2.19) dans (2.20) , choisissons ε suffisamment petit et en appliquant le lemme de Gronwall :

$$\begin{aligned}|e_u|^2+\int_I \|e_u\|^2 dt &\leq \varepsilon \int_I |e_u|^2 dt+\varepsilon \int_I \|u^n-\bar{u}^n_\tau\|^2 dt+\varepsilon \int_I \tau^2 dt+C_\varepsilon \int_I |e_u|^2 dt+\int_I \|u^n-\bar{u}^n\|^2 dt+C\tau \\ &\leq (\varepsilon + C_\varepsilon) \int_I |e_u|^2 dt + \varepsilon \int_I \|u^n - \bar{u}^n_\tau\|^2 dt + \varepsilon \int_I \tau^2 dt + \int_I \|u^n - \bar{u}^n\|^2 dt + C\tau \\ &\overset{l.G}{\leq} (\varepsilon \int_I \|u^n - \bar{u}^n_\tau\|^2 dt + \varepsilon \int_I \tau^2 dt + \int_I \|u^n - \bar{u}^n\|^2 dt + C\tau) \exp(\varepsilon + C_\varepsilon) \\ &\leq C(\varepsilon \int_I \|u^n - \bar{u}^n_\tau\|^2 dt + \varepsilon \int_I \tau^2 dt + \int_I \|u^n - \bar{u}^n\|^2 dt + C\tau)\end{aligned}$$

en utilisant le corollaire (2.3.0):

$$\begin{aligned}|e_u|^2 + \int_I \|e_u\|^2 dt &\leq C\tau^2 + C\tau^2 + C\tau^2 + C\tau \\ &\leq C(\tau^2 + \tau)\end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{\|e_u\|^2_{C(I,L_2(\Omega))} + \|e_u\|^2_{L_2(I,V)} \leq C(\tau^2 + \tau).}$$

Chapitre 3

probléme complétement discrtisé et Quelques estimations de l'erreur

3.1 discrétisation dans l'espace

Pour tout t_i, $0 \leq i \leq n$, soit σ_h^i une partition de Ω en triangles disjoints T_k^i tels qu'aucun sommet d'un triangle ne se trouve à l'intérieur d'un côté d'un autre triangle. Soit V_h l'ensemble des fonctions continues à la fermeture $\bar{\Omega}$ de Ω qui sont linéaires dans chaque triangle σ_h^i et disparaissent sur $\partial\Omega$. Nous pouvons définir V_h^i comme suit.

$$V_h^i = \left\{ \Phi_h \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ tel que } \Phi_h|_{T_k^i} \text{est une polynome de degré un } \forall T_k^i \in \sigma_h^i \right\}. \tag{3.1}$$

Soit $\{p_j\}_{j=1}^N$ les sommets intérieurs de σ_h^i et $\phi_j(x)$ la fonction pyramidale de V_h qui prend la valeur 1 à chaque sommet intérieur mais s'annule aux autres sommets. comme $\{\Phi_j(x)\}_{j=1}^N$ forme une base pour l'espace V_h. nous avons

$$u_h^i(t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^i \Phi_j(x) \in V_h^i. \tag{3.2}$$

En suite, la formulation complétement discrêtisie

$$(P'') \quad \begin{cases} \text{Trouver } u_h^i \in V_h^i(\Omega) \text{ telle que :} \\ \forall v_h \in V_h^i,\ \left(\partial_t \delta u_h^i, v_h\right) + \left(\partial_t u_h^i, v_h\right) + \left(\left(u_h^i, v_h\right)\right) = \left(f^i, v_h\right). \end{cases} \tag{3.3}$$

Théorème 3.1.1 *soient $u_h^0, u_h^1 \in H_0^1(\Omega)$ et $f \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$, alors la solution u_h^i de (P") vérifier*

$$\boxed{\|u_h^i\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C.} \tag{3.4}$$

$$\boxed{\|u_h^i\|_{L^2(0,T;V)} \leq C.} \tag{3.5}$$

Soit X un espace de Banach et $u \in X$, nous utilisons la norme suivante en version discrète.

$$\boxed{\|u\|_{L^\infty(0,T,\Delta t,X)} := \max_{0\leq m\leq J} \|u^m\|_X.} \tag{3.6}$$

$$\boxed{\|u\|^2_{L^2(0,T,\Delta t,X)} := \Delta t \sum_{m=1}^{J} \|u^m\|_X.} \tag{3.7}$$

Maintenant, nous fournissons d'abord une estimation d'erreur a priori pour l'approximation semi-discrète en utilisant Ritz-projection [12]. Nous définissons Ritz-projection R_h : $H_0^1(\Omega) \to V_h$ tel que

$$\boxed{(\nabla u, \nabla v) = (\nabla R_h u, \nabla v) \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega), v \in V_h.} \tag{3.8}$$

La comparaison directe entre u^i, u_h^i ne peut pas donner une convergence optimale. Par conséquent, en utilisant la projection intermédiaire (3.8), nous pouvons écrire l'erreur comme suit.

$$\begin{aligned} e^i = u^i - u_h^i &= u^i - R_h u^i + R_h u^i - u_h^i \\ &= \rho_h^i + \theta_h^i \qquad (3.9) \end{aligned}$$

Pour notre analyse plus approfondie, nous avons besoin des estimations suivantes.

Théorème 3.1.2 *Il existe une constante positive C, indépendante de h telle que*

$$\|u - R_h u\|_j \leq Ch^{i-j}\|u\|_i, \ \ \forall u \in H^i \cap H_0^1, j = 0, 1; i = 1, 2.$$

$$\|u_t - R_h u_t\|_j \leq Ch^{i-j}\|u_t\|_i, \ \ \forall u \in H^i \cap H_0^1, j = 0, 1; i = 1, 2.$$

$$\|u_{tt} - R_h u_{tt}\|_j \leq Ch^{i-j}\|u_{tt}\|_i, \ \ \forall u \in H^i \cap H_0^1, j = 0, 1; i = 1, 2.$$

Théorème 3.1.3 *soit u^i solution de (2.12) et u_h^i est une solution de (P"), alors*

$$\|u^i - u_h^i\|^2_{L^2(0,T,\sigma;V)} \leq C(h^2 + h^4). \tag{3.10}$$

Preuve.
On utilise (3.3) et (3.9) :

$$\begin{aligned}
(\partial_t\delta\theta_h^i, v_h) + (\partial_t\theta_h^i, v_h) + ((\theta_h^i, v_h)) &= (\partial_t\delta(R_h u^i - u_h^i), v_h) + (\partial_t(R_h u^i - u_h^i), v_h) + ((R_h u^i - u_h^i, v_h)) \\
&= (\partial_t\delta R_h u^i, v_h) - (\partial_t\delta u_h^i, v_h) + (\partial_t R_h u^i, v_h) - (\partial_t u_h^i, v_h) \\
&\quad + ((R_h u^i, v_h)) - ((u_h^i, v_h)) \\
&= -(f^i, v_h) + (\partial_t\delta R_h u^i, v_h) + (\partial_t R_h u^i, v_h) + ((R_h u^i, v_h)) \\
&= -(\partial_t\delta u^i, v_h) - (\partial_t u^i, v_h) - ((u^i, v_h)) + (\partial_t\delta R_h u^i, v_h) \\
&\quad + (\partial_t R_h u^i, v_h) + ((R_h u^i, v_h)) \\
&= -(\partial_t\delta\rho_h^i, v_h) - (\partial_t\rho_h^i, v_h) - ((\rho_h^i, v_h))
\end{aligned}$$

On pose $v_h = \sigma\delta\theta_h^i$

$$(\partial_t\delta\theta_h^i, \sigma\delta\theta_h^i) + \sigma|\partial_t\theta_h^i|^2 + \sigma((\theta_h^i, \delta\theta_h^i)) = -\sigma(\partial_t\delta\rho_h^i, \delta\theta_h^i) - \sigma(\partial_t\rho_h^i, \delta\theta_h^i) - \sigma((\rho_h^i, \delta\theta_h^i))$$

On utilise L'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^2}{2}\partial_t|\delta\theta_h^i|^2 + \sigma^2|\delta\theta_h^i|^2 + \frac{\sigma^2}{2}\delta\|\theta_h^i\|^2 &\leq \sigma^2|\partial_t\delta\rho_h^i||\delta\theta_h^i| + \sigma^2|\partial_t\rho_h^i||\delta\theta_h^i| + \sigma\|\rho_h^i\|\|\theta_h^i - \theta_h^{i-1}\| \\
&\leq \frac{\sigma^2}{2}|\partial_t\delta\rho_h^i|^2 + \frac{\sigma^2}{2}|\delta\theta_h^i|^2 + \frac{\sigma^2}{2}|\partial_t\rho_h^i|^2 + \frac{\sigma^2}{2}|\delta\theta_h^i|^2 + \sigma\|\rho_h^i\|\|\theta_h^i - \theta_h^{i-1}\|
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\sigma^2}{2}\partial_t|\delta\theta_h^i|^2+\frac{\sigma^2}{2}\delta\|\theta_h^i\|^2\leq\frac{\sigma^2}{2}|\partial_t\delta\rho_h^i|^2+\frac{\sigma^2}{2}|\partial_t\rho_h^i|^2+\sigma\|\rho_h^i\|\|\theta_h^i-\theta_h^{i-1}\|$$

l'εinégalité pour $\varepsilon=\frac{1}{4}$ nous donne:

$$\frac{\sigma^2}{2}\partial_t|\delta\theta_h^i|^2+\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\|\theta_h^i\|^2-\|\theta_h^{i-1}\|^2}{\sigma}\right)\leq\frac{\sigma^2}{2}|\partial_t\delta\rho_h^i|^2+\frac{\sigma^2}{2}|\partial_t\rho_h^i|^2+2\sigma\|\rho_h^i\|^2+\frac{\sigma}{8}\|\theta_h^i-\theta_h^{i-1}\|^2$$

De plus

$$\sigma^2\partial_t|\delta\theta_h^i|^2+\sigma\|\theta_h^i\|^2-\sigma\|\theta_h^{i-1}\|^2\leq\sigma^2|\partial_t\delta\rho_h^i|^2+\sigma^2|\partial_t\rho_h^i|^2+4\sigma^2\|\rho_h^i\|^2+\frac{\sigma}{2}\|\theta_h^i\|^2+\frac{\sigma}{2}\|\theta_h^{i-1}\|^2$$

Alors

$$\sigma^2\partial_t|\delta\theta_h^i|^2+\frac{\sigma}{2}\|\theta_h^i\|^2\leq\sigma^2|\partial_t\delta\rho_h^i|^2+\sigma^2|\partial_t\rho_h^i|^2+4\sigma^2\|\rho_h^i\|^2+\frac{3\sigma}{2}\|\theta_h^{i-1}\|^2$$

On prend la somme sur i=1 à n on trouve :

$$\sigma^2\partial_t|\delta\theta_h^n|^2+\frac{\sigma}{2}\sum_{i=1}^{n}\|\theta_h^i\|^2\leq\sigma^2\sum_{i=1}^{n}|\partial_t\delta\rho_h^i|^2+\sigma^2\sum_{i=1}^{n}|\partial_t\rho_h^i|^2+4\sigma^2\|\rho_h^i\|^2+\frac{3\sigma}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\|\theta_h^i\|^2$$

par Inégalité de Gronwall :

$$\sigma^2\partial_t|\delta\theta_h^n|^2+\frac{\sigma}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\|\theta_h^i\|^2+\frac{\sigma}{2}\|\theta_h^n\|^2\leq C\left(\sigma^2\sum_{i=1}^{n}|\partial_t\delta\rho_h^i|^2+\sigma^2\sum_{i=1}^{n}|\partial_t\rho_h^i|^2+\sigma\sum_{i=1}^{n}\|\rho_h^i\|^2\right)$$

C.à.d :

$$\sigma^2\partial_t|\delta\theta_h^n|^2+\frac{\sigma}{2}\sum_{i=1}^{n}\|\theta_h^i\|^2\leq C\left(\sigma^2\sum_{i=1}^{n}|\partial_t\delta\rho_h^i|^2+\sigma^2\sum_{i=1}^{n}|\partial_t\rho_h^i|^2+\sigma\sum_{i=1}^{n}\|\rho_h^i\|^2\right)$$

On intégre sur 0 à T :

$$\sigma^2|\delta\theta_h^n|^2+\sum_{i=1}^{n}\|\theta_h^i\|^2\leq\sigma^2|\delta\theta_h^0|^2+C\left(\sigma^2\sum_{i=1}^{n}|\partial_t\delta\rho_h^i|^2+\sigma^2\sum_{i=1}^{n}|\partial_t\rho_h^i|^2+\sigma\sum_{i=1}^{n}\|\rho_h^i\|^2\right)$$

(1)-

$$\delta\theta_h^i=\frac{1}{\sigma}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\theta_{hs}(s)ds$$

ET

$$\sigma^2|\delta\theta_h^i|^2 \leq \sigma \int_0^T |\theta_{hs}^i(s)|^2 ds$$

Avec

$$\sigma^2|\delta\theta_h^0|^2 \leq \sigma\|\theta_{ht}(0)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$

et comme

$$\|\theta_{ht}(0)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \|\partial_t(R_h u^0 - u_h^0)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$

Si $u_h^0 = P_h u_0$ ou $I_h u_0$ où P_h et I_h sont $L^2(\Omega)$ projection et interplant , respectivement ,sur V_h ensuite :

$$\begin{aligned}
\|\theta_{ht}(0)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq \|\partial_t(\Pi_h^0 u^0 - u^0)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\partial_t(u^0 - u_h^0)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\leq Ch^2\|u^0\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}
\end{aligned}$$

Alors

$$\sigma^2|\delta\theta_h^i|^2 \leq Ch^4$$

(2)-

$$\delta\partial_t\rho_h^i = \frac{1}{\sigma}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \partial_s\rho_h(s)ds$$

Avec

$$|\delta\partial_t\rho_h^i|^2 \leq \frac{1}{\sigma}\left\|\rho_{htt}\right\|^2_{L^2(t_{i-1},t_i;L^2(\Omega))}$$

ET

$$\begin{aligned}
\sigma^2\sum_{i=1}^n |\delta\partial_t\rho_h^i|^2 &\leq \sigma\sum_{i=1}^n \left\|\rho_{htt}\right\|^2_{L^2(t_{i-1},t_i;L^2(\Omega))} \\
&\leq \sigma\left\|\rho_{htt}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\leq Ch^4\sigma\left\|u_{htt}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.
\end{aligned}$$

donc

$$\sigma^2\sum_{i=1}^n |\delta\partial_t\rho_h^i|^2 \leq Ch^4\left\|u_{htt}\right\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}$$

(3)-

$$|\rho_h^i|^2 \leq Ch^2\|u_{ht}^i\|^2_{H^2(\Omega)}$$

Avec

$$\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} |\partial_t \rho_h^i|^2 \leq \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} Ch^4 \|u_{ht}^i\|^2_{H^2(\Omega)}$$

Et

$$\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} |\partial_t \rho_h^i|^2 \leq \sigma C h^4 \|u_{ht}\|^2_{L^2(0,T,\sigma,H^2(\Omega))}$$

Alors

$$\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} |\partial_t \rho_h^i|^2 \leq Ch^4 \|u_{ht}\|^2_{L^2(0,T,\sigma,H^2(\Omega))}$$

(4)-

$$\begin{aligned} \|\rho_h^i\|^2 &= (A\nabla\rho_h^i, \nabla\rho_h^i) + (a(x)\rho_h^i, \rho_h^i) \\ &\leq C(|\nabla\rho_h^i|^2 + |\rho_h^i|^2) \end{aligned}$$

ET

$$\begin{aligned} \sigma \sum_{i=1}^{n} \|\rho_h^i\|^2 &\leq C\sigma \sum_{i=1}^{n} \|\rho_h^i\|^2_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C\|\rho_h\|^2_{L^2(0,T,\sigma;H^1(\Omega))} \\ &\leq Ch^2 \|u_h\|^2_{L^2(0,T,\sigma;H^2(\Omega))} \end{aligned}$$

Donc

$$\sigma \sum_{i=1}^{n} \|\theta_h^i\|^2_V \leq C(h^2 + h^4)$$

C.à.d

$$\|\theta_h\|^2_{L^2(0,T,\sigma;V)} \leq C(h^2 + h^4)$$

Bibliography

[1] H.A. Abdusalam, Analytic and approximate solutions for Nagumo telegraph reaction diffusion equation, Appl.Math.Comput.157(2004) 515-522.

[2] M.S.El-Azab, MohamedEl-Gamel, A numerical algorithm for the solution of telegraph equations, 190 (2007) 757-764.

[3] Sudhakar Chaudhary,Vimal Srivastava V. V. K. Srinivas Kumar Balaji Srinivasan, Finite Element Approximation of Nonlocal Parabolic Problem, May 2017 786-813.

[4] J.Kacur, Method of Rothe in evolution equations, Teubner-Texte zur Mathematik, BSB Teubner Verlagsges, Leipzig, 1985.

[5] A. Kufner, O. John, S. Fucik, Function Spaces, Nordhoff, Leyden, 1997.

[6] K. Kuliev, L.-E. Petersson, An extension of Rothe's method to noncylindrical domains, Application of mathematics, Vol. 52(2007), No. 5, 365-389.

[7] A.C. Metaxas, R.J. Meredth, Industrial Microwave, Heating, Peter Peregrinus, London, 1993.

[8] K. Rektorys, The Method of Discretization in Time and Partial Differential Equations, Reidel Publ. Comp., Dortrecht-Boston-London, 1982.

[9] G. Roussy, J.A. Pearcy, Foundations and Industrial Application of Microwaves and Radio Frequency Fields, John Wiley, New York, 1995.

[10] V. Pluschke Rothe's method for parabolic problems with nonlinear degenerating coefficient, Report No. 14, des FB Mathematik und Informatik, 1996.

[11] Y.Sahki, Sur un problème pseudo-parabolique d'ordre fractionnaire , 2016-2017.

[12] M. F. Wheeler, A Priori l2 error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations, SIAM J Numer Anal 10 (1973), 723-759.

Merci

– Fin –