

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



250. 211



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et Analyse numérique

Par :

Melle. AMARI Nassira

Intitulé

**Critère de Dulac pour la non existence des solutions
périodiques et méthode pour obtenir les fonctions de Dulac**

Dirigé par : Mme. BADI Sabrina

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. BOUATIA Yassine	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. BADI Sabrina	MCA	Univ-Guelma
Co- RAPPORTEUR	Dr. ELLAGGOUNE Fateh	Prof	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. OUENNASE Nawel	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier ALLAH qui m'a donné le courage, la santé, et la volonté pour réaliser ce modeste travail tout au long de mes années d'études.

A : Dr. BADI Sabrina, que je remercie de m'avoir proposé ce sujet, pour son encadrement et pour ces précieux et judicieux conseils qu'elle m'a cessé de me prodiguer tout au long de ce travail, et je remercie aussi Dr. ELLAGGOUNE Fateh d'avoir accepté d'être mon co-encadreur.

Je suis très honoré que Dr. BOUATTIA Yassine, ait accepté de rapporter mon travail et de présider mon jury de Mémoire, je le remercie pour ses conseils et ses précieuses remarques.

Je remercie également Dr. OUENNASE Nawel d'avoir accepté d'examiner mon travail, je suis très honorée par leur présence.

Mes remerciements vont également à tous mes enseignants de l'université de Guelma qui m'ont aidé pendant mes années d'étude.

Je remercie tous ceux qui ont participé de loin ou de près à la réalisation de ce travail.

A mes collègues pour tous les moments qu'on a passé ensemble.

Dédicace

A l'aide de dieu tout puissant, qui ma tracé le chemin de ma vie, j'ai pu réaliser ce travail que je dédie:

- ❖ A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, mon bonheur de mon cher père, aucune dédicace ne saurait exprimer l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.
- ❖ A ma chère mère, tu as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études. Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.
- ❖ Aux personnes dont j'ai bien aimé, à tous mes chères sœurs Djazira, Fouzia, Nour el houda et mes chers frères Mouhamed et Ilyas, je dédie ce travail dont le grand plaisir leurs revient en premier lieu pour leurs conseils, aides, et encouragements, qui étaient toujours à mes côtés.
- ❖ Aux les enfants de de mes sœurs et leurs maris.
- ❖ Aux enfants de mes frères et de leurs femmes.
- ❖ Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, et qui m'ont accompagnaient durant mon chemin d'études, mes amis.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Introduction	v
1 Notions préliminaires	1
1.1 Problème à valeur initiale	1
1.2 Existence et unicité de la solution	2
1.3 Stabilité de la solution	2
1.4 Systèmes dynamiques	5
1.5 Flot d'une équation différentielle	7
1.6 Points d'équilibre et linéarisation	7
1.6.1 Points d'équilibre	7
1.6.2 La stabilité des points critiques par la méthode des fonctions de Lyapunov	7
1.6.3 Nature des points d'équilibre pour les systèmes linéaires à coefficients constants	11
1.6.4 Linéarisation	16
1.7 Plan et portrait de phase	19
1.8 Orbites périodiques et cycles limites	20
1.8.1 Orbite périodique	20
1.8.2 Cycle limite	21
2 Existence des solutions périodiques	23
2.1 Théorème de Poincaré Bendixon	23

3	Non existence des solutions périodiques	28
3.1	Critère de Bendixon	28
3.2	Critère de Dulac	30
3.3	Méthode pour obtenir les fonctions de Dulac	30
3.3.1	Quelques applications pour l'obtention des fonctions de Dulac	32
	Conclusion	35
	Bibliographie	36

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la non-existence des solutions périodiques pour des systèmes différentiels plan. Pour cette raison, nous présentons deux critères celui de Bendixon et celui de Dulac, qui affirment que sous certaines conditions, il ne peut avoir de solutions périodiques. Cependant, le critère de Dulac repose sur la recherche d'une certaine fonction qui porte son nom. On va présenter une technique pour l'obtention de cette fonction.

Abstract

In this memory, we are interested in the non-existence of periodic solutions for planar differential systems. For this reason, we present two criteria, the first one is due to Bendixon, and the second one is due to Dulac, which state that under certain conditions, it can't have periodic solutions. However, Dulac's criterion is based on the search for a certain function that bears his name. We will present a technique to obtain this function.

Introduction

Les cycles limites apparurent pour la 1^{ère} fois dans les applications en 1924 via l'équation de Vender Pol

$$\ddot{x} + (1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

Où $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ qui décrit les oscillations d'un circuit électronique.

Les cycles limites sont des solutions périodiques isolées dans l'ensemble de toutes les solutions périodiques d'un système différentiel autonome plan donné. Ils sont représentés dans le plan de phase par des courbes fermées isolées, les autres solutions se rapprochent des cycles limites ou s'en éloignent asymptotiquement lorsque le temps croît indéfiniment. Il s'agit là de stabilité des cycles limites.

Ce mémoire porte sur un aspect important de la théorie qualitative des systèmes différentiels planaires, à savoir les solutions périodiques.

On étudie l'existence des solutions périodiques grâce à un des théorèmes les plus importants de la dynamique non linéaire qui est le théorème de Poincaré-Bendixon qui affirme que dans une région compacte et bornée du plan, une trajectoire d'un système plan converge vers un point d'équilibre ou un cycle limite.

Ensuite, on passe à notre sujet principal qui est la non-existence des solutions périodiques grâce aux critères de Bendixon et celui de Dulac. cette étude sera enrichie par des applications.

Notre travail est reparti en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires sur les systèmes différentiels. Nous définissons les points critiques, la linéarisation et la notion de stabilité.

Dans le deuxième chapitre, on présente le théorème de Poincaré-Bendixon consacré à l'existence des solutions périodiques des systèmes différentiels planaires.

Le troisième chapitre qui est notre sujet principale est consacré à la non existence des solutions périodiques et ceci via les critères de : Bendixon et de Dulac. Nous présentons aussi une technique pour déterminer ce qu'on appelle les fonctions de Dulac pour l'application du critère de Dulac.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Problème à valeur initiale

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue.

Définition 1.1.1 *i) Une équation différentielle ordinaire (EDO) sur U est une relation de la forme :*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

que l'on note brièvement

$$\dot{x} = f(t, x) \text{ où } \dot{x} = \frac{dx}{dt}. \quad (1.1)$$

ii) Pour (t_0, x_0) donné, un problème à valeur initiale associé à l'équation (1.1) est donné sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Définition 1.1.2 *i) La fonction $x(t)$ est dite solution de l'équation (1.1)*

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle est définie et continûment dérivable sur I et si $(t, x(t)) \in U, \forall t \in I$ et si $x(t)$ satisfait la relation (1.1) sur I .

ii) Soit $(t_0, x_0) \in U$ donnée, la fonction x est dite solution du problème à valeur initiale (1.2) s'il existe un intervalle I contenant t_0 tel que x est une solution de l'équation (1.1) sur I et vérifie $x(t_0) = x_0$.

1.2 Existence et unicité de la solution

Théorème 1.2.1 (Existence) Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$

une fonction continue alors pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.2) admet au moins une solution.

Définition 1.2.1 Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $f = f(t, x) : U \rightarrow \mathbb{R}^d$.

f est localement lipchitzienne en x , Si pour tout fermé et borné (compact) K dans U , il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|$$

pour tout (t, x_1) et (t, x_2) dans K .

Théorème 1.2.2 (Unicité) Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$,

Si $f = f(t, x) : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ est continue et localement lipschitzienne en x , alors pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.2) admet une solution unique.

1.3 Stabilité de la solution

La stabilité est l'un des aspects essentiels dans l'étude des systèmes dynamiques. Cette notion a été étudiée par Liapunov (1857 – 1918).

Définition 1.3.1 Soit le problème à valeur initiale (1.2). Supposons que

f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution. Soit $\phi(t)$ une solution du problème (1.2) telle que $\phi(t_0) = \phi_0$, elle est dite stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que pour toute solution $x(t)$ de

(1.2) on a

$$\|x(t_0) - \phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Si de plus $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \phi(t)\| = 0$ alors la solution $\phi(t)$ est dite asymptotiquement stable.

Exemple 1.3.1 Montrons que la solution du problème suivant est stable :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

Pour cela, on a besoin de connaître $\Phi(t)$ qui vérifie

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et $X(t)$ telle que $X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

On résout le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

qui est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Les solutions de ce système sont :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos t - c_2 \sin t \\ c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{pmatrix}$$

où c_1, c_2 deux constantes arbitraires

or $x(0) = y(0) = 0$ alors

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos 0 - c_2 \sin 0 \\ c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $c_1 = c_2 = 0$, on obtient alors la solution :

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On va montrer que la solution $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable

Soit $X(t)$ la solution de ce système telle que

$$X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

elle est de la forme :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}$$

on a

$$\begin{aligned} \|X(t)\| &= \left\| \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix} \right\| \\ &= |x_0 \cos t - y_0 \sin t| + |x_0 \sin t + y_0 \cos t| \\ &< |x_0| + |y_0| + |x_0| + |y_0| \\ &< 2 \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ tel que $\|X(0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t)\| < \varepsilon, \forall t > 0$.

Donc la solution $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable.

1.4 Systèmes dynamiques

Définition 1.4.1 *Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application*

$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

- 1) $U(., x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- 2) $U(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue
- 3) $U(0, x) = x$.
- 4) $U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.4.1 *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Où A est une matrice constante, $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

La solution de (1.3) est donnée par

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Le système (1.3) engendre un système dynamique

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$U(t, x) = e^{At}x$$

Vérifions qu'il satisfait les 4 propriétés précédentes :

- 1) $\forall t, \tau \in \mathbb{R}^+, x$ fixé alors

$$\begin{aligned} \|U(t + \tau, x) - U(t, x)\| &= \|e^{A(t+\tau)}x - e^{At}x\| \\ &= \|e^{At}e^{A\tau}x - e^{At}x\| \\ &= \|e^{At}(e^{A\tau}x - x)\| \\ &= \|e^{At}\| \|e^{A\tau} - I\| \|x\| \\ &\leq e^{\|A\|t} (e^{\|A\|\tau} - 1) \|x\| \longrightarrow 0 \text{ pour } \tau \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

$\Rightarrow U(\cdot, x)$ est continue par rapport à t .

2) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, t fixé alors

$$\begin{aligned}\|U(t, x) - U(t, y)\| &= \|e^{At}x - e^{At}y\| \\ &= \|e^{At}(x - y)\| \\ &= \|e^{At}\| \|x - y\| \\ &\leq e^{\|A\||t|} \|x - y\| \\ &\leq M \|x - y\|\end{aligned}$$

$\Rightarrow U(t, \cdot)$ est continue par rapport à x .

$$\begin{aligned}3) U(0, x) &= e^{A \times 0}x \\ &= (I \mid 0 \mid \dots \mid 0)x \\ &= Ix \\ &= x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4) U(t + s, x) &= e^{A(t+s)}x \\ &= e^{At}e^{As}x \\ &= e^{At}U(s, x) \\ &= U(t, U(s, x))\end{aligned}$$

D'où le résultat.

1.5 Flot d'une équation différentielle

Définition 1.5.1 Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.4}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$, $x_0 \in E$, E est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et $f \in C^1(E)$. Soit $\Phi(t, x_0)$ la solution de (1.4).

L'ensemble des applications Φ_t définies par

$$\Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0)$$

est appelé le flot de l'équation différentielle (1.4).

Remarque 1.5.1 Le flot est dit autonome si f ne dépend pas explicitement du temps t , sinon il est dit non autonome.

1.6 Points d'équilibre et linéarisation

1.6.1 Points d'équilibre

Définition 1.6.1 Le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est appelé un point critique ou point d'équilibre du système (1.4) s'il vérifie

$$f(x_0) = 0$$

1.6.2 La stabilité des points critiques par la méthode des fonctions de Lyapunov

Soit $v(x_1, \dots, x_n)$ une fonction différentiable.

Soit le système :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, n \tag{1.5}$$

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(u)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(u)}{\partial x_i} f_i(\tau) \tag{1.6}$$

Théorème 1.6.1 *Si pour le système (1.5) ayant x_0 comme point critique, il existe une fonction $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ définie positive (ou négative) telle que :*

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

est une fonction semi définie négative (ou positive) ou identiquement nulle. Alors le point critique x_0 est stable au sens de Lyapunov.

$v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est dite fonction de Lyapunov.

Exemple 1.6.1 *Soit le système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -xy^4 \\ \frac{dy}{dt} = yx^4 \end{cases}$$

$(0, 0)$ est le point critique

Soit $v(x, y) = x^4 + y^4$ définie positive.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dot{y} = 4x^3(-xy^4) + 4y^3(yx^4) = 0 \Rightarrow (0, 0) \text{ est stable.}$$

Théorème 1.6.2 *Si pour le système (1.5) défini par :*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, n,$$

1.6. POINTS D'ÉQUILIBRE ET LINÉARISATION

il existe une fonction $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est de signe définie telle que :

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

est une fonction de signe définie inverse de v . Alors le point critique

x_0 est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.

Exemple 1.6.2 Soit le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^3. \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y^3. \end{cases}$$

$(0, 0)$ est le point d'équilibre.

Soit $v(x, y) = x^2 + y^2$ définie positive.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dot{y} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - 3y^3) = -2(x^4 + 3y^4) \text{ est définie négative}$$

$\Rightarrow (0, 0)$ est asymptotiquement stable.

Théorème 1.6.3 Si pour le système (1.5) définit par :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, n$$

il existe une fonction $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vérifiant $v(0, \dots, 0) = 0$ telle que :

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

est une fonction définie positive et s'il existe aussi près que l'on veut de

l'origine des points en $v(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$. Alors le point critique x_0 est instable au sens de Lyapunov.

Exemple 1.6.3 Soit le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$

$(0, 0)$ est le point d'équilibre.

soit $v(x, y) = x^2 - y^2$, $v(0, 0) = 0$.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dot{y} = 2x \times x - 2y \times (-y) = 2(x^2 + y^2) \text{ définie positive,}$$

prenons

$$v(x, 0) = x^2 > 0 \Rightarrow (0, 0) \text{ est instable.}$$

1.6.3 Nature des points d'équilibre pour les systèmes linéaires à coefficients constants

Soit le système différentiel linéaire $\dot{x} = Ax$ où A est une matrice 2×2 et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice.

Le seul point critique est $(0, 0)$, on distingue les différents cas suivant les valeurs propres de A :

1. Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe différent, alors le point critique $(0, 0)$ est un point selle, il est toujours instable (voir Figure 1.1).

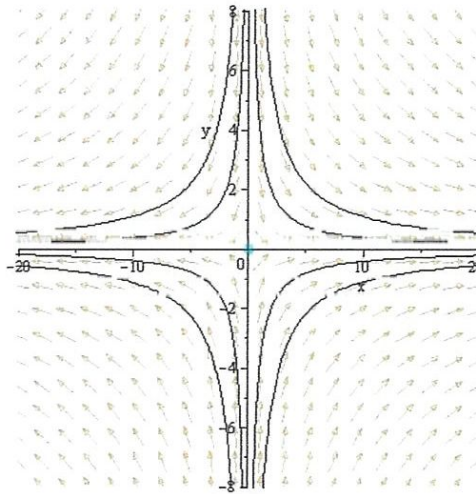


FIG. 1.1- $(0,0)$ est un point selle

2. Si λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe, on a trois cas :

- (a) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point critique $(0, 0)$ est un nœud stable (voir Figure 1.2).

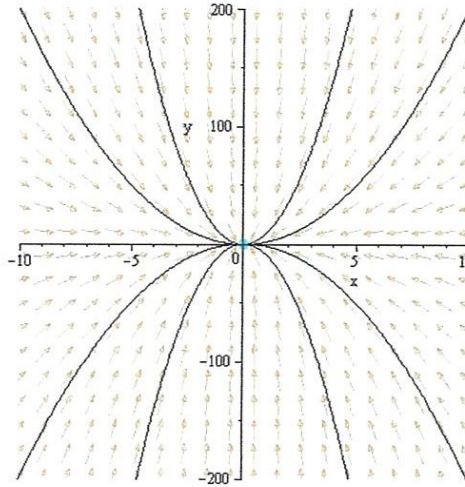


FIG. 1.2- $(0,0)$ est un nœud stable

- (b) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, le point critique $(0, 0)$ est un nœud instable (voir Figure 1.3).

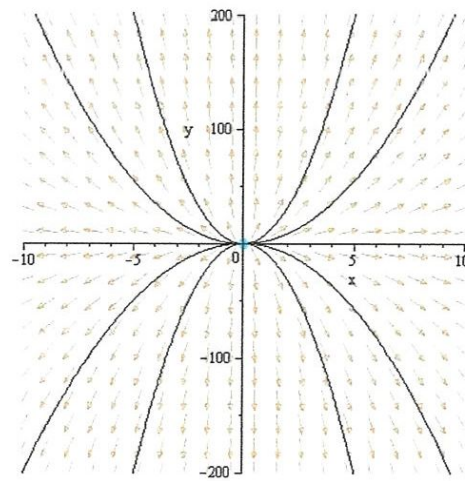


FIG. 1.3- $(0,0)$ est un nœud instable

1.6. POINTS D'ÉQUILIBRE ET LINÉARISATION

- (c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le point critique $(0, 0)$ est un nœud propre, il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$ (voir Figure 1.4 et 1.5).

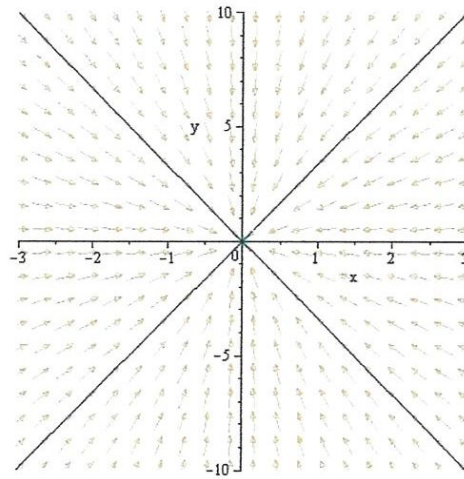


FIG. 1.4- $(0,0)$ est un nœud propre stable

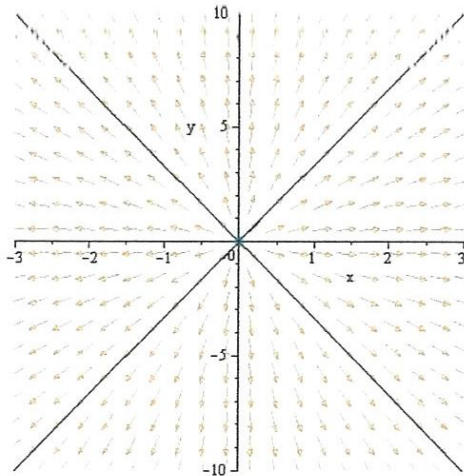


FIG. 1.5- $(0,0)$ est un nœud propre instable

3. Si λ_1 et λ_2 sont des complexes conjuguées et $\text{Im}(\lambda_{1,2}) \neq 0$, alors le point critique $(0,0)$ est un foyer. Il est stable si $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ et instable si $\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$ (voir Figure 1.6 et 1.7).

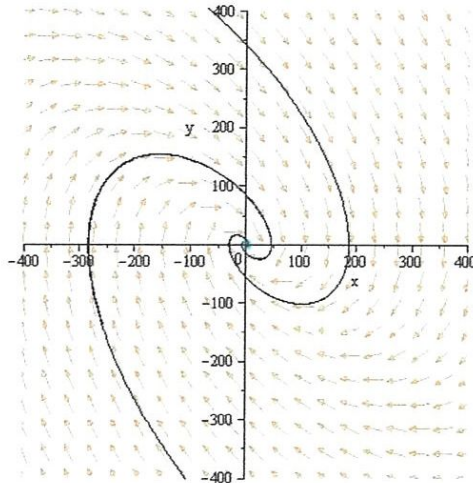


FIG. 1.6- $(0,0)$ est un foyer stable

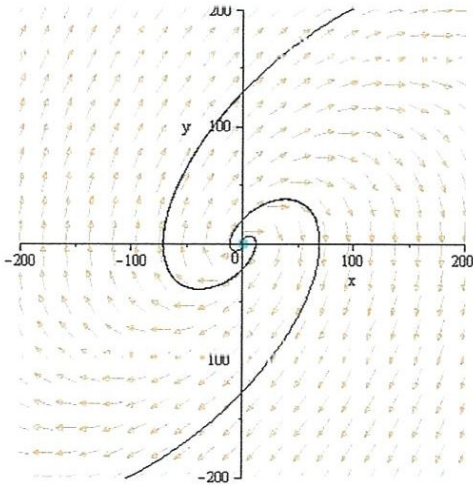


FIG. 1.7 $(0,0)$ est un foyer instable

1.6. POINTS D'ÉQUILIBRE ET LINÉARISATION

4. Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures, alors le point critique $(0, 0)$ est un centre, il est stable mais pas asymptotiquement stable (voir Figure 1.8).

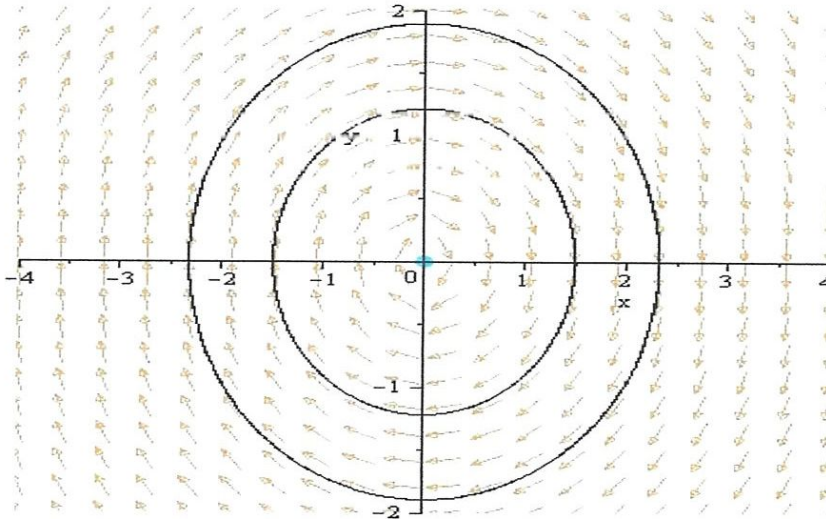


FIG. 1.8- $(0, 0)$ est un centre stable

Exemple 1.6.4 Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$$

Le point critique est $(0, 0)$, la matrice A est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{6}$$

alors le point critique $(0, 0)$ est un centre stable.

1.6.4 Linéarisation

Définition 1.6.2 *Considérons le système*

$$\dot{x} = f(x)$$

ayant x_0 comme point critique.

Le système

$$\dot{x} = Ax \quad \text{où } A = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad (1.7)$$

est appelé le système linéarisé du système (1.4) en x_0 .

Remarque 1.6.1 *La linéarisation d'un système différentiel nous ramène à*

l'étude de la nature des points critiques des systèmes différentiels non linéaires.

Définition 1.6.3 *Le point critique x_0 est dit hyperbolique si aucune des*

valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(x_0)$ n'a pas de partie réelle nulle.

Exemple 1.6.5 *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1^2 + x_2^3 - 2 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1^2 + x_2^3 - 2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Les points critiques sont :

$$(-1, 0) \text{ et } (1, 0)$$

1.6. POINTS D'ÉQUILIBRE ET LINÉARISATION

On a :

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 & 3x_2^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Au point $(-1, 0)$

$$Df(-1, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors les valeurs propres sont : -4 et 1

Donc le point critique $(-1, 0)$ est hyperbolique.

Le système linéarisé au point $(-1, 0)$ est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

2. Au point $(1, 0)$

$$Df(1, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors les valeurs propres sont : 4 et 1

Donc le point critique $(1, 0)$ est hyperbolique.

Le système linéarisé au point $(1, 0)$ est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

Théorème 1.6.4 Soit le système $\dot{x} = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ et x_0 son point d'équilibre

i) Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives, alors le point d'équilibre x_0 est asymptotiquement stable.

ii) S'il existe au moins une valeur propre de $Df(x_0)$ avec une partie réelle positive, alors le point d'équilibre x_0 est instable.

iii) Si $Df(x_0)$ a des valeurs propres avec des parties réelles négatives et d'autres avec des parties réelles nulles, alors on ne peut rien dire sur la stabilité du point d'équilibre x_0 .

Exemple 1.6.6 Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 2x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 2x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Le point $(0, 0)$ est un point critique de ce système.

On a :

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2 & 2x_2 + 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Au point critique

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice considérée sont : $1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$.

Comme $1 + \sqrt{3} > 0$

donc le point $(0, 0)$ est instable.

Théorème 1.6.5 (*Hartman-Grobman*)

Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \tag{*}$$

Ayant x_0 comme point critique.

Soit le système linéarisé de (*) en x_0

$$\dot{x} = Df(x_0)x \tag{**}$$

Ayant l'origine comme point critique.

Si l'origine est un point selle ou foyer ou nœud pour le système (**), alors le point critique x_0 de (*) sera respectivement selle ou foyer ou nœud pour le système (*) .

Cependant si l'origine est de type centre alors on ne peut rien dire sur la nature du point critique x_0 de (*).

1.7 Plan et portrait de phase

Pour un système dont l'évolution au cours du temps t est décrite par la fonction à valeur réelles $x(t)$, on appelle trajectoire de phase une représentation géométrique cartésienne dans laquelle on reporte les positions au cours du temps t d'un point représentatif M d'abscisse x et d'ordonnée $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Cette terminologie est en accord avec celle de la physique statique : le plan (x, \dot{x}) ou le plan de phase s'identifie (avec $p_x = m.\dot{x}$) à l'espace de phase (x, p_x) du problème , de telle sorte que la représentation au cours du temps du point M est bien la trajectoire du système dans son espace de phase.

Une trajectoire de phase donnée est décrite à partir d'un point

$M_0(x_0, \dot{x}_0)$ représentatif des conditions initiales de l'évolution considérée. L'ensemble des trajectoires de phase décrites par le système à partir de toutes les conditions initiales réalisables est le portrait de phase de celui-ci. Ainsi, le portrait de phase du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.8)$$

est l'ensemble des orbites qui représentent les solutions du système (1.8) dans l'espace des phases ainsi que ces points critiques qui sont considérés comme des solutions constantes. Le plan (x, y) est appelé plan de phase.

1.8 Orbites périodiques et cycles limites

Il est toutefois préférable d'envisager le point d'équilibre d'un système différentiel non comme un point de \mathbb{R}^n mais plutôt comme une solution particulière intéressante, une solution stationnaire, c-à-d une solution qui n'avance pas. Mais il existe d'autres solutions remarquables dont l'étude est très profitable, par exemple les solutions périodiques. On va en effet s'intéresser tout particulièrement à ce type de solutions.

1.8.1 Orbite périodique

Définition 1.8.1 *On appelle orbite périodique toute trajectoire $\Phi(t, x)$ de*

(1.8) telle qu'il existe un nombre $T > 0$, vérifiant

$$\Phi(t + T, x) = \Phi(t, x) \quad (1.9)$$

Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie (1.9) est appelé période.

1.8.2 Cycle limite

Définition 1.8.2 *Un cycle limite du système (1.8) est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques de ce système.*

Définition 1.8.3 *L'amplitude du cycle limite est la valeur maximale de $\|x\|$ de ce cycle limite.*

Exemple 1.8.1 *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (1.10)$$

tel que α est un paramètre. En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, le système (1.10) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Posons

$$f(r) = \dot{r} = \alpha r(1 - r^2).$$

Alors

$$f(r) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = 1 \text{ ou } r = -1.$$

On a donc un point d'équilibre $(0, 0)$ est un cycle limite l'amplitude $r = 1$

$$(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0)) \text{ tel que } \theta(0) = \theta_0$$

ou

$$x^2 + y^2 = 1.$$

1. *Pour $\alpha > 0$, on a deux cas :*

(a) *Si $r < 1$, alors $f(r) > 0$, d'où $r \nearrow$.*

(b) *Si $r > 1$, alors $f(r) < 0$, d'où $r \searrow$.*

Donc le cycle limite d'amplitude $r = 1$ est stable.

2. Pour $\alpha < 0$:

(a) Si $r < 1$, alors $f(r) < 0$, d'où $r(\searrow)$.

(b) Si $r > 1$, alors $f(r) > 0$, d'où $r(\nearrow)$.

Donc le cycle limite d'amplitude $r = 1$ est instable.

3. Si $\alpha = 0$, le système a une infinité d'orbites périodiques, et il n'y a pas de cycle limite.

Remarque 1.8.1 Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.

Chapitre 2

Existence des solutions périodiques

2.1 Théorème de Poincaré Bendixon

Beaucoup de problèmes dans la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires sont reliés aux solutions périodiques, ce fait motive leur étude.

Théorème 2.1.1 *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

Soit A une région fermée et bornée de \mathbb{R}^2 , supposons qu'une orbite $\gamma^+(x_0)$ du système (2.1), Soit à l'intérieur de A (contenue dans A entièrement)

alors :

- 1) Où bien $\gamma^+(x_0)$ est une solution périodique.
- 2) Où bien $\gamma^+(x_0)$ tend vers une solution périodique.
- 3) Où bien $\gamma^+(x_0)$ tend vers un point d'équilibre de (2.1).

Ce résultat est important quand A ne contient pas des points d'équilibres. Car il garantit l'existence d'au moins une solution périodique.

CHAPITRE 2. EXISTENCE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES

La difficulté dans l'application de ce résultat est bien la construction de l'anneau A . Pour cela cherchons deux cercles (C_1) et (C_2) telle que (C_1) soit à l'intérieur de (C_2) .

La recherche des cercles (C_1) et (C_2) ressemble à la recherche de la fonction de Lyapunov $v(x, y) = x^2 + y^2, x^4 + y^2, x^4 + y^4 \dots$

$$\begin{aligned} \text{Soit } (C) : v(x, y) = x^2 + y^2 = c > 0 \\ c_1 > 0 : (C_1) : x^2 + y^2 = c_1 \\ c_2 > 0 : (C_2) : x^2 + y^2 = c_2 \end{aligned} \text{ telle que } c_1 < c_2$$

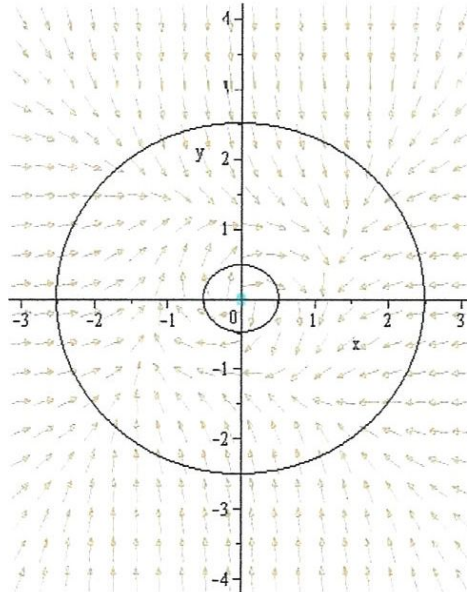
Si pour tout point $p \in (C)$

$$\text{On a } \left[\frac{dv}{dt} \right]_p = \frac{dv}{dx} \dot{x} + \frac{dv}{dy} \dot{y} > 0$$

\implies Toute trajectoire qui passe par le point p se dirige vers son extérieur.

$$\text{Ou } \left[\frac{dv}{dt} \right]_p = \frac{dv}{dx} \dot{x} + \frac{dv}{dy} \dot{y} < 0$$

\implies Toute trajectoire qui passe par le point p se dirige vers son intérieur.



2.1. THÉORÈME DE POINCARÉ BENDIXON

Exemple 2.1.1 Montrons que le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + x = f(x, y) \\ \dot{y} = -x - y^3 + y = g(x, y) \end{cases}$$

admet au moins une solution périodique dans une région de \mathbb{R}^2 .

On a le point $(0, 0)$ est le seul point d'équilibre.

La matrice jacobienne en $(0, 0)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i$$

$(0, 0)$ est un foyer instable pour le système linéarisé \Rightarrow il reste foyer instable pour le système non linéaire d'après le théorème de Hartman-Grobman.

Cherchons l'anneau A :

soit $v(x, y) = x^2 + y^2 = c$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{dv}{dx} \dot{x} + \frac{dv}{dy} \dot{y} = 2x(y - x^3 + x) + 2y(-x - y^3 + y) \\ &= 2[(x^2 + y^2) - (x^4 + y^4)] \end{aligned}$$

On a pour

$$\begin{aligned} 0 &< x^2 + y^2 < 1 \\ x^4 + y^4 &< (x^2 + y^2)^2 < x^2 + y^2 \end{aligned}$$

si on prend $(C_1) : x^2 + y^2 = c_1$

avec $0 < c_1 < 1$ $\frac{dv}{dt} > 0$

\Rightarrow toute trajectoire coupant (C_1) se dirige vers l'extérieur.

On a pour

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &> 2 \\ 2(x^4 + y^4) &> (x^2 + y^2)^2 > 2(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Pour $c_2 > 2$ $\frac{dv}{dt} < 0$

\Rightarrow toute trajectoire coupant (C_2) se dirige vers l'intérieur.

Alors d'après le théorème de Poincaré Bendixon il existe au moins une solution périodique dans l'anneau A formé des deux cercle (C_1) et (C_2) .

Exemple 2.1.2 *Montrons que le système suivant admet au moins une solution périodique dans \mathbb{R}^2*

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Remarquons que $(0, 0)$ est le point d'équilibre

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i \text{ (complexes avec } \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) > 0)$$

Alors $(0, 0)$ foyer instable.

Posons :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow (C) : x^2 + y^2 = r^2 \quad r > 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos \theta \dot{r} - r \sin \theta \dot{\theta} = r \cos \theta - r \sin \theta - r^3 \cos \theta & (1) \\ \dot{y} = \sin \theta \dot{r} + r \cos \theta \dot{\theta} - r^3 \sin \theta & (2) \end{cases}$$

2.1. THÉORÈME DE POINCARÉ BENDIXON

$$(1) \times \cos \theta + (2) \times \sin \theta \Rightarrow \dot{r} = r - r^3.$$

$$(2) \times \cos \theta - (1) \times \sin \theta \Rightarrow r \dot{\theta} = r.$$

On obtient le système écrit en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = 1 \text{ ou } r = -1.$$

Pour $r > 1$ on a $\frac{dr}{dt} < 0$: les trajectoires \nearrow (vers à l'extérieur).

Pour $0 < r < 1$ on a $\frac{dr}{dt} > 0$: les trajectoires \searrow (vers à l'intérieur).

$$(C_1) : x^2 + y^2 = r_1 \text{ telle que } 0 < r_1 < 1$$

\Rightarrow toute trajectoire passant par (C_1) se dirige vers l'extérieur(\nearrow).

$$(C_2) = x^2 + y^2 = r_2 \text{ telle que } r_2 > 1$$

\Rightarrow toute trajectoire passant par (C_2) se dirige vers l'intérieur(\searrow).

Alors d'après le théorème de Poincaré Bendixon il existe au moins une solution périodique dans l'anneau A formé des deux cercles (C_1) et (C_2) .

Chapitre 3

Non existence des solutions périodiques

3.1 Critère de Bendixon

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (3.1)$$

Soit $X = (P, Q)$ le champ de vecteur associé à (3.1).

Dans une région simplement connexe D du plan si

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

est non nulle et de signe constant (> 0 ou < 0) alors il ne peut avoir des

solutions périodiques pour (3.1) entièrement contenues dans D .

Preuve. Supposons qu'il existe une solution périodique γ de période T contenues dans D . Elle est représentée par une trajectoire fermée dans le plan.

3.1. CRITÈRE DE BENDIXON

Soit G l'intérieur de cette trajectoire. D'après le formule de Green on a :

$$\begin{aligned}
 \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{\gamma} P(x, y) dy - Q(x, y) dx \\
 &= \int_0^T \left[P(x, y) \frac{dy}{dt} - Q(x, y) \frac{dx}{dt} \right] dt \\
 &= \int_0^T 0 dt = 0
 \end{aligned}$$

Contradiction avec $\operatorname{div} X = 0$.

⇒ Il ne peut avoir des solutions périodiques contenues dans D . ■

Exemple 3.1.1 Soit l'équation de Liénard

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0 \tag{3.2}$$

avec $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$(3.2) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y = P(x, y) \\ \dot{y} = \ddot{x} = -f(x)y - x = Q(x, y) \end{cases}$$

On a

$$\operatorname{div}(P, Q) = -f(x) < 0$$

Donc d'après le **Critère de Bendixon** il ne peut avoir des solutions périodiques pour (3.2).

3.2 Critère de Dulac

Dans une région simplement connexe D , s'il existe une fonction $h(x, y) \in C^1(D)$, pour laquelle $\operatorname{div}(hX) \neq 0$ et de signe constant, et s'annule au plus sur un ensemble de mesure nulle dans ce cas le système (3.1) ne peut avoir des solutions périodiques entièrement contenue dans D .

Exemple 3.2.1 Soit l'équation

$$\ddot{x} + b\dot{x} - \beta\dot{x}^2 + ax - \alpha x^2 = 0. \quad (3.3)$$

Montrons que cette équation ne possède pas des solutions périodiques.

Prenons $h(x, y) = b \exp(-2\beta x)$ $b \neq 0$

$$\text{l'équation devient : } \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -by + \beta y^2 - ax + \alpha x^2 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(hX) &= \frac{\partial(hP)}{\partial x} + \frac{\partial(hQ)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (by \exp(-2\beta x)) + \frac{\partial}{\partial y} (b \exp(-2\beta x)[-by + \beta y^2 - ax + \alpha x^2]) \\ &= -2b\beta y \exp(-2\beta x) + b \exp(-2\beta x)(-b + 2\beta y) \\ &= -b^2 e^{-2\beta x} < 0. \end{aligned}$$

D'après le **Critère de Dulac** cette équation ne possède pas des solutions périodiques.

3.3 Méthode pour obtenir les fonctions de Dulac

La liste des fonctions h données ci-dessus ne sert qu'à un nombre limité

3.3. MÉTHODE POUR OBTENIR LES FONCTIONS DE DULAC

de système. On discute quelques situations plus générales.

On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (3.4)$$

1. Premièrement, proposons une autre fonction positive ou négative $K(x_1, x_2)$ qui s'annule seulement sur l'ensemble de mesure nulle telle qu'elle fasse

$$\frac{\partial(f_1 h)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2 h)}{\partial x_2} = K(x_1, x_2)$$

2. Maintenant choisissons K pour obtenir quelques résultats.

Alors prenons $K(x_1, x_2) = c(x_1, x_2) \times h(x_1, x_2)$, avec c est une fonction positive ou négative qui s'annule uniquement sur l'ensemble de mesure nulle, et substituons cette relation dans l'équation précédente pour obtenir l'expression suivante :

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + h \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) = c(x_1, x_2) \times h(x_1, x_2) \quad (3.5)$$

On peut réécrire cette équation

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = h \left(c(x_1, x_2) - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \right) \quad (3.6)$$

3. Trouvons la solution de cette équation aux dérivées partielles quasiliénaire du premier ordre.

4. Finalement, voyons si h est une fonction de Dulac pour le système (3.4)

Jusqu'ici, on a construit une méthode qui nous permet d'écartier les orbites périodiques associées au système d'équations différentielles dans le plan telle qu'elle est résumée dans ce qui suit.

Théorème 3.3.1 *Pour le système d'équations différentielles (3.4) une solution h du système associées (3.6) (pour quelques fonctions c qui ne changent pas de signe et s'annulent seulement sur un sous-ensemble de mesure nulle), est une fonction de Dulac pour le système (3.4) dans tout région A simplement connexe contenue dans $D \setminus \{h^{-1}(0)\}$.*

Corollaire 3.3.1 *Pour le système d'équations différentielles (3.4), si (3.6) (pour quelques fonctions c qui ne changent pas de signe et s'annulent seulement sur un sous-ensemble de mesure nulle) a une solution h sur D telle que h ne change pas de signe et s'annule sur un sous-ensemble de mesure nulle, alors h est une fonction de Dulac pour le système (3.4) sur D .*

Remarque 3.3.1 *Avec le choix de K dans l'étape 2, on obtient une équation linéaire (3.4) qui est simple à manipuler.*

Remarque 3.3.2 *Avec le choix de c est utilisé pour simplifier l'équation (3.5), on peut toujours prendre c une constante non nulle.*

3.3.1 Quelques applications pour l'obtention des fonctions de Dulac

Exemple 3.3.1 *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) \\ \dot{x}_2 = 3x_1^2 x_2 \end{cases}$$

D'après l'équation (3.6), on obtient :

3.3. MÉTHODE POUR OBTENIR LES FONCTIONS DE DULAC

$$x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) \frac{\partial h}{\partial x_1} + 3x_1^2 x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = h [c(x_1, x_2) - (2x_1 x_2^2 (1 - \cos x_2) + 3x_1^2)]$$

qui est une équation différentielle aux dérivées partielles quasilineaire.

En appliquant la méthode des caractéristiques, on obtient le système associé suivant

$$\begin{cases} dx_1 = x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) dt \\ dx_2 = 3x_1^2 x_2 dt \\ dh = h [c(x_1, x_2) - (2x_1 x_2^2 (1 - \cos x_2) + 3x_1^2)] dt \end{cases}$$

des deux premières équations, on élimine le paramètre t , on obtient

$$3x_1^2 x_2 dx_1 = x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) dx_2$$

Résolvant cette équation, on obtient la première caractéristique

$$3x_1 + x_2 \sin x_2 + \cos x_2 - \frac{1}{2} x_2^2 = c_1$$

Prenons $c = 3x_1^1$ dans la dernière équation et on multiplie l'équation par

x_1 , on trouve

$$x_1 dh = -h(2x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2)) dt$$

que l'on peut écrire comme suit, remplaçant dans la première équation

$$x_1 dh = -2h dx_1$$

et résolvant, on trouve $h = \frac{c_2}{x_1^2}$.

Notons que h est une fonction de Dulac pour le système donné en $x_1 > 0$ ou $x_1 < 0$, en particulier s'il ya une orbite périodique, elle doit couper $x_1 = 0$ qui n'est pas possible.

Exemple 3.3.2 *Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2x_2^2 \cos x_1 + (1 + x_1^2)x_2 + x_2^2 \end{cases}$$

Utilisons l'équation (3.6), et prenons $c = 1 + x_1^2$, on obtient

$$-2x_1x_2 \frac{\partial h}{\partial x_1} + (x_1^2x_2^2 \cos x_1 + (1 + x_1^2)x_2 + x_2^2) \frac{\partial h}{\partial x_2} = -h(2x_1^2x_2 \cos x_1)$$

Supposons que h dépend uniquement de x_1 on a

$$-2x_1x_2 \frac{\partial h}{\partial x_1} = -h(2x_1^2x_2 \cos x_1)$$

Alors la solution est

$$h = \exp \left(\int x_1 \cos x_1 dx_1 \right)$$

Conclusion

La théorie qualitative des équations différentielles prend une place de plus en plus importante en Mathématiques. Un des plus importants problèmes de cette théorie est l'étude de l'existence des solutions périodiques.

Pour cette raison notre travail a été consacré à la non existence des solutions périodiques plus précisément via les deux critères étudiés en parlons aussi de l'un des plus importants théorèmes d'existence qui est celui de Poincaré-Bendixon.

Bibliographie

- [1] Eric Benoit, Polycopié de cours : Equation différentielle CIMPA (2008).
- [2] D.W. Jordan and P. Smith, Nonlinear ordinary differential equations, Third edition, 1999.
- [3] Laurence Perko, Differential equation and dynamical systems , springer (2001).