République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatiquc et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et Analyse numérique

Par :

BAKHOUCHE Oussama

Intitulé

ETUDE DE QUELQUES RESULTATS DE PERTURBATIONS DANS LES ESPACES DE BANACH

Dirigé par : Dr. DEBBAR Rabah

Devant le jury

PRESIDENT	BADRAOUI Salah	Professeur	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	DEBBAR Rabah	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	ZENKOUFI Lilia	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Remerciements

Je voudrais en premier lieu remercier chaleureusement Monsieur DEBBAR Rabah, Maître de Conférences au Université de Guelma qui a accepté de diriger ce travail. Ses précieux conseils et sa patience m'ont permis d'effectuer mes travaux dans de bonnes conditions.

Mes sincères remerciements vont à Monsieur BADRAOUI Salah, Professeur à l'Université de Guelma, d'avoir accepté de présider le Jury, je tiens a lui exprimer mon extrême gratitude.

Je voudrais exprimer ma plus vive reconnaissance à Madame ZENKOUFI Lilia, Maître de Conférences à l'Université de Guelma, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en me faisant l'honneur d'en être des rapporteurs.

RÉSUMÉ

Il est bien connu que la théorie de Fredholm est un outil indispensable pour la résolution des équations de la forme (I-T)μ = f (alternative de Fredholm). Moyennant les propriétés remarquables de la mesure de non compacité d'un opérateur borné, on établit quelques résultats généralisant ceux obtenus dans cette direction par pas mal d'auteurs (voir [12], [13] ,[14], [15], [23]) et donnant une nouvelle caractérisation du spectre essentiel de Schechter d'un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans un espace de Banach.

Table des matières

Introduction

Le thème de mémoire central l'étude de certaines classes de perturbations ainsi que d'autres résultats rentrant dans le cadre de la théorie de Fredholm. Afin de rendre ce travail plus autonome et de limiter les renvois systématiques a la litt erature, on a rappelé dans le premier chapitre quelques résultats classiques et définitions dont on fera l'usage dans ce travail.

L'objectif du chapitre 2 est de montrer que si X est un espace réflexif hériditairement indécomposable de type Gowers et Maurey, alors on a les inclusions suivantes :
$\mathcal{S}(X \times X, X) \subsetneq \mathcal{F}_+(X \times X, X) \qquad \mathcal{CS}(X^*, X^* \times X^*) \subsetneq \mathcal{F}_-(X^*, X^* \times X^*)$

$$\mathcal{S}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \subsetneq \mathcal{F}_+^b\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \qquad et \qquad \mathcal{CS}\left(\prod_{i=1}^{n} Y_i\right) \subsetneq \mathcal{F}_-^b\left(\prod_{i=1}^{n} Y_i\right)$$

(où $X_i = X, Yi = X^*$ pour tout $i = 1, \cdots, n$ et $n > 2$)pour des classes d'opérateurs semi-Fredholm supérieures et inférieurs bornés et non bornés.

Les deux derniéres inclusions sont basées sur un résultat affirmant que si le spectre essentiel (de Wolf) de chaque opérateur borné sur un espace de Banach X est un ensemble maigre (d'intérieur vide) alors, on a nécéssairement $\mathcal{F}^b(X) = \mathcal{F}_+^b(X) = \mathcal{F}_-^b(X)$. Notons que cette classe d'espaces de Banach ayant cette propriété contient en particulier celle des espaces hériditairement indécomposables. L'étude faite dans ce chapitre a permi de donner des réponses à quelques questions qui sont restées longtemps ouvertes.

Il est bien connu que la théorie de Fredholm est un outil indispensable pour la résolution des equations de la forme $(I - T)\mu = f$ (alternative de Fredholm). Moyennant les propriétés remarquables de la mesure de non compacité d'un opérateur borné, on etablit quelques résultats généralisant ceux obtenus dans cette direction par pas mal d'auteurs (voir [12], [13], [14], [15], [22]) et donnant une nouvelle caracterisation du spectre essentiel de Schechter d'un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans un espace de Banach. Ceci fait l'objet du chapitre 3.

Etant donné deux espaces de Banach X et Y , on note $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires fermés à domaines denses de X dans Y et $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des opérateurs bornés de X dans Y. Si $A \in \mathcal{C}(X, Y)$, $N(A)$ (resp. $R(A)$) désigne le noyau (resp. l'image) de A. Si on pose
$\alpha(A) = dim[N(A)]$, $\beta(A) = Codim[R(A)]$, $\Phi_+(X, Y)$ (resp. $\Phi_-(X, Y)$) est défini comme etant l'ensemble des opérateurs $A \in \mathcal{C}(X, Y)$ vérifiant $\alpha(A) < +\infty$ et $R(A)$ fermé
(resp. $\beta(A) < +\infty$). On désigne par $\Phi(X, Y)$ l'ensemble $\Phi_+(X, Y) \cap \Phi_-(X, Y)$, c'est l'ensemble des opérateurs de Fredholm. Si $A \in \Phi(X)$, on appelle l'indice de A le nombre entier $i(A) = \alpha(A) - \beta(A)$.

Si $F \in \mathcal{L}(X,Y)$, on dit que F est une perturbation de Fredholm si pour tout $A \in \Phi(X,Y)$, $A+F \in \Phi(X,Y)$, F est une perturbation sur semi-Fredholm (resp. sous semi-Fredholm) si $A+F \in \Phi_+(X,Y)$ pour tout $A \in \Phi_+(X,Y)$ (resp. si $A+F \in \Phi_-(X,Y)$ pour tout $A \in \Phi_-(X,Y)$). Les ensembles des perturbations de Fredholm, sur semi-Fredholm et sous-semi Fredholm sont notés, respectivement $\mathcal{F}(X,Y)$, $\mathcal{F}_+(X,Y)$ et $\mathcal{F}_-(X,Y)$.
D'autre part, on va noter par $\Phi^b(X,Y)$, $\Phi^b_+(X,Y)$ et $\Phi^b_-(X,Y)$ les ensembles $\Phi(X,Y) \cap \mathcal{L}(X,Y)$, $\Phi_+(X,Y) \cap \mathcal{L}(X,Y)$, $\Phi_-(X,Y) \cap \mathcal{L}(X,Y)$ et les ensembles $\mathcal{F}^b(X,Y)$, $\mathcal{F}^b_+(X,Y)$ et $\mathcal{F}^b_-(X,Y)$ sont les classes qui leur sont associées. Il est bien connu que :

$$\mathcal{F}^b(X,Y) = \mathcal{F}(X,Y) \text{ si } \Phi(X,Y) \neq \varnothing.$$

D'autre part, si $X=Y$ alors $\mathcal{F}^b(X)$, $\mathcal{F}^b_+(X)$ et $\mathcal{F}^b_-(X)$ forment des idéaux bilatères fermés de $\mathcal{L}(X)$. Un des problèmes importants dans l'étude de ces classes est la relation entre l'ensemble des oprateurs strictement singuliers (resp. strictement cosinguliers) et celle des perturbations semi-Fredholm supérieurs (resp. l'ensemble des perturbations semi-Fredholm inférieures), en d'autres termes, existe-t-il des espaces de Banach $X_1, Y_1, X_2, Y_2, Z_1, Z_2 (X_1 \neq Y_1, X_2 \neq Y_2)$ tels que les inclusions
$S(X_1,Y_1) \subseteq \mathcal{F}_+(X_1,Y_1)$, $CS(X_2,Y_2) \subseteq \mathcal{F}_-(X_2,Y_2)$, $S(Z_1) \subseteq \mathcal{F}^b_+(Z_1)$ et $CS(Z_2) \subseteq \mathcal{F}^b_-(Z_2)$ soient strictes ? Ce probléme à été posé par plusieurs auteurs, il date de puis le fameux papier de I. Gohberg, A. Markus et A. Feldman [07], il a fallu plus de 40 ans pour le résoudre. Plus précisément, Il a fallu la découverte des espaces hériditairement indécomposables par T. Gowers et B. Maurey pour donner des réponses positives à la question mentionnée au dessus.

Dans le chapitre 3, on va etablir quelques nouveaux résultats intéressants en théorie de Fredholm. Soient X un espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(X)$ et soient P et Q deux polynômes complexes, désignons par δ la fonctionnelle de la mesure de non compacité définie sur $\mathcal{L}(X)$, soit $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ avec $P(\lambda_0) \neq 0$ et Q divise $P - P(\lambda_0)$, si on suppose que $\delta(P(tA)) < |P(\lambda_0)|$ pour tout $t \in [0,1]$ et $Q(0) \neq 0$ alors $Q(A)$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0.
L'étude faite dans ce chapitre à permi de trouver un cadre assez général unifiant tous les résultats déjà connus dans la littérature, de plus, elle nous donne une nouvelle caracterisation du spectre essentiel de Schechter d'un opérateur linéaire fermé à domaine dense sur un espace de Banach quelconque.

Chapitre 1

Notions Préliminaires et Rappels

Dans ce chapitre, on rappelle quelques définitions et résultats classiques sur la théorie de Fredholm et les semigroupes fortement continus .

1.1 Théorie de Fredholm et spectres essentiels

Etant donné un espace de Banach X, on note $C(X)$ l'espace des opérateurs linéaires fermés à domaines denses, pour tout $A \in C(X)$, Φ_A désigne l'ensemble des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda - A \in \Phi(X)$. Dans la proposition suivante, on donne quelques propriétés bien connues de cet ensemble.

Proposition 1.1.1. *(cf.[06],[T.kato 11])*
(i) Φ_A est un ensemble ouvert.
(ii) $i(\lambda - A)$ est constant sur chaque composante connexe de Φ_A.

Énonçons à présent le théorème d'Atkinson [15]

Théorème 1.1.1. *Soient X, Y et Z des espaces de Banach. Si $A \in \Phi(X,Y)$ et $B \in \Phi(Y,Z)$, alors $BA \in \Phi(X,Z)$ et*

$$i(BA) = i(A) + i(B)$$

Preuve. pour du montrer que le Théoème 1.1.1 on va montrer que

$$(a)\ D(BA) \text{ dense dans } X.$$

$$(b)\ BA \text{ opérateur fermé.}$$

$$(c)\ R(BA) \text{ fermé sur } Z.$$

$$(d)\ \alpha(BA) < +\infty, \beta(BA) < +\infty, \text{ et } i(BA) = i(A) + i(B) \text{ vérifée.}$$

□

Désignons par $\mathcal{K}(X,Y)$ le sous-espace fermé des opérateurs compacts de X dans Y . Le théoème suivant est une extension aux opérateurs de $\mathcal{C}(X,Y)$ du théoréme classique de Riesz.

Théorème 1.1.2. *Soient $A \in \Phi(X,Y)$ et $K \in \mathcal{K}(X,Y)$, alors*

$$A + K \in \Phi(X,Y) \text{ et } i(A+K) = i(A).$$

Il est bien connu que si A est un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert, alors son spectre essentiel est l'ensemble des points limites de son spectre, c'est à dire tous les points du spectre excepté les valeurs propres isolées de multiplicité algébriques finies. Lorsque A est fermé a domaine dense sur un espace de Banach X, il y a plusieurs définitions du spectre essentiel qui coincident toutes pour le cas auto-adjoint sur un espace de Hilbert. Aux moins six ont été mentionnées dans la littérature (voir cf. [12], [13], [14]). Plus précisément, Soient X un espace de Banach et $A \in \mathcal{C}(X)$, on définit les spectres essentiels

$$\text{de Gustafson} \quad \sigma_{e1}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda - A \notin \Phi_+(X)\}$$

$$\text{de Weidman} \quad \sigma_{e2}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda - A \notin \Phi_-(X)\}$$

$$\text{de Kato} \quad \sigma_{e3}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda - A \notin \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)\}$$

$$\text{de Wolf} \quad \sigma_{e4}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda - A \notin \Phi(X)\}$$

$$\text{de Schechter} \quad \sigma_{e5}(A) = \mathbb{C} \backslash \rho_5(A)$$

$$\text{de Browder} \quad \sigma_{e6}(A) = \mathbb{C} \backslash \rho_6(A)$$

où

$\rho_5(A) = \{\lambda \in \Phi_A; i(\lambda - A) = 0\}$ et $\rho_6(A) - \{\lambda \in \rho_5$: tout scalaire voisin de λ est dans $\rho(A)\}$.

On note, qu'en général, on a les inclusions

$$\sigma_{e1}(A) \cap \sigma_{e2}(A) = \sigma_{e3}(A) \subseteq \sigma_{e4}(A) \subseteq \sigma_{e5}(A) \subseteq \sigma_{e6}(A).$$

On rappelle une autre caractérisation du spectre de Schechter. Soit $A \in \mathcal{C}(X)$, on définit $\sigma_{e5}(A)$ par

$$\sigma_{e5}(A) = \bigcap_{K \subset \mathcal{K}(A)} \sigma(A+K) \qquad (*)$$

M. Schechter a établit une equivanlence entre $(*)$ et le résultat suivant :

Théorème 1.1.3. *Soit X un espace de Banach et $A \in \mathcal{C}(X)$. Alors,*

$$\lambda \notin \sigma_{e5}(A) \leftrightarrow \lambda \in \Phi_A^\circ - \{\lambda \in \Phi_A : i(\lambda - A) = 0\}$$

Soient X et Y deux espaces de Banach et $A \in \mathcal{C}(X,Y)$. Pour tout $x \in D(A)$ (le domaine de A), on pose

$$||x||_A = ||x||_X + ||Ax||_Y.$$

Comme A est fermé, $D(A)$ muni de la norme $||.||_A$ est un espace de Banach que nous notons X_A. Ainsi, A en tant qu'opérateur de X_A dans Y est borné. Soit J un opérateur de X dans Y . Si $D(A) \subseteq D(J)$, alors J est dit A-défini.
Dans ce cas, on désigne par $\hat{J}$ la restriction de J à D(A). De plus, si $\hat{J} \in \mathcal{L}(X_A, X)$
on dit que J est A-borné.

Définition 1.1.1. Soient X et Y deux espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est dit strictment singulier si sa restriction à chaque sous-espace fermé de dimension infinie n'est pas un isomorphisme.

On note $\mathcal{S}(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs strictement singuliers de X dans Y . Si $X = Y$, on ecrit $\mathcal{S}(X)$. Le concept d'opérateurs strictement singuliers à été introduit par(T. Kato[11]) comme généralisation des opérateurs compacts. A noter que tout opérateur compact est strictment singulier, la réciproque est en général fausse. Néanmoins, si X est un espace de Hilbert séparable et $X = l_p(1 \leq p < +\infty)$, on a $\mathcal{K}(X) = S(X)$. De plus, $\mathcal{S}(X)$ est un idéal bilatère fermé de $\mathcal{L}(X)$ (cf.[16]).

Soit X un espace de Banach et N un sous-espace fermé de X. On désigne par π_N la surjection canonique $X \to X/N$. La codimension de N, $codim(N)$, est définie comme etant la dimension de l'espace vectoriel X/N.

Définition 1.1.2. Soit X, Y deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. T est dit strictment cosingulier s'il n'existe pas des sous-espaces fermés de codimension infinies ($codim(N) = \infty$) tel que l'application π_N soit surjective.

On désigne par $\mathcal{CS}(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs strictment cosinguliers de X dans Y .Pelczynski [19], [20], Cette classe d'opérateurs à été introduites par A., l'ensemble $\mathcal{CS}(X, Y)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{L}(X, Y)$. Lorsque $X = Y$, $\mathcal{CS}(X)$ est un idéal bilatére fermé de $\mathcal{L}(X)$ (cf. [26]).

Notons que les trois familles de perturbation de Fredholm, au semi Fredholm et sous semi Fredholm ont été initialement introduites dans [07] pour les opérateurs de Fredholm et semi-Fredholm bornés c'est- a-dire

$$\Phi^b(X, Y) = \Phi(X, Y) \cap \mathcal{L}(X, Y), \Phi^b_+(X, Y) = \Phi_+(X, Y) \cap \mathcal{L}(X, Y)$$

et

$$\Phi^b_-(X, Y) = \Phi_-(X, Y) \cap \mathcal{L}(X, Y)$$

Ces ensembles seront notés, respectivement $\mathcal{F}^b(X, Y)$, $\mathcal{F}^b_+(X, Y)$ et $\mathcal{F}^b_-(X, Y)$. On rappelle qu'ils sont tous fermés dans $\mathcal{L}(X, Y)$ et que, lorsque $X = Y$, $\mathcal{F}^b(X)$, $\mathcal{F}^b_+(X)$ et $\mathcal{F}^b_-(X)$ sont des idéaux bilatères fermés [07]. De plus, on a

$$\mathcal{K}(X, Y) \subseteq \mathcal{S}(X, Y) \subseteq \mathcal{F}^b_+(X, Y) \subseteq \mathcal{F}^b(X, Y) \qquad (1.1)$$

$$\mathcal{K}(X, Y) \subseteq \mathcal{CS}(X, Y) \subseteq \mathcal{F}^b_-(X, Y) \subseteq \mathcal{F}^b(X, Y) \qquad (1.2)$$

Notons que l'inclusion $\mathcal{S}(X, Y) \subseteq \mathcal{F}^b_+(X, Y)$ est dûe à (T. Kato [11]) , tandis que l'inclusion $\mathcal{CS}(X, Y) \subseteq \mathcal{F}^b_-(X, Y)$ à été obtenue par Vladimirskii [26].

Soient X un espace de Banach et $R \in \mathcal{L}(X)$. Par définition R est dit de Riesz si $\Phi_R = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ Pour les propriétés de cette famille d'opéateurs notée $\mathcal{R}(X)$, on pourra consulter [05]. Toutefois, on signale le fait important que $\mathcal{R}(X)$ n'est pas un idéal de $\mathcal{L}(X)$, M. Schechter a montré que $\mathcal{F}^b(X)$ est le plus grand idéal de $\mathcal{L}(X)$ (au sens de l'inclusion) contenu dans $\mathcal{R}(X)$. On déduit alors en vertu de (1.1) et (1.2) que les ensembles $\mathcal{K}(X)$, $\mathcal{S}(X)$, $\mathcal{CS}(X)$, $\mathcal{F}_+^b(X)$ et $\mathcal{F}_-^b(X)$ sont contenus dans $\mathcal{R}(X)$. Par conséquent si R est dans l'un des ensembles, alors son spectre admet 0 comme unique point d'accumulation.

On termine cette section par rappeler un lemme fondamental qui va jouer un rôle essentiel dans le cadre du chapitre 3.

Soit B_X la boule unité fermée de l'espace de Banach X, on définit la mesure de noncompacité d'un ensemble borné $A \subset X$ par

$$\delta(A) = inf\{\delta > 0 : \exists M \text{ sous-ensemble fini de } X \text{ tel que } A \subset M + \delta B_X\}.$$

Il est clair que $\delta(A) = 0$ si et seulement si A est un ensemble relativement compact dans X. De plus, pour tout $T \in \mathcal{L}(X)$, $\delta(T)$ est défini comme etant le nombre $\delta[T(B_X)]$.

Lemme 1.1.1. *Soit X un espace de Banach, alors*
-Si $A \subset B \subset X$, on a $\delta(A) \leq \delta(B)$.
-Si $T \in \mathcal{L}(X)$, alors $\delta(T)$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}(X)$ et $\delta(T) \leq ||T||$.
-Si $B \in \mathcal{L}(X)$, alors $\delta(BT) \leq \delta(B)\delta(T)$.
-Si $K \in \mathcal{K}(X)$, alors $\delta(B + K) = \delta(B)$ pour tout $B \in \mathcal{L}(X)$
-Si A^* désigne le dual de l'opérateur A, alors

$$\frac{1}{2}\delta(A^*) \leq \delta(A) \leq 2\delta(A^*)$$

1.2 Théorie spectrale des opérateurs

Soit X un espace de Banach et $T : D(T) \subset X \to X$ un opérateur non borné que l'on suppose fermé et à domaine dense. On appelle l'ensemble résolvant de T, l'ensemble

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda - T : D(T) \to X \qquad \text{est bijectif }\}$$

Son complément dans le plan complexe s'appelle le spectre de T et sera noté $\sigma(T)$. On notera que si $\lambda \in \rho(T)$, l'inverse $R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1}$ est défini sur tout l'espace et est fermé. Par le théorème du graphe fermé, il est borné, c'est- a-dire :$R(\lambda, T) \in \mathcal{L}(X)$.

Cet opérateur est appellé la résolvante de T au point λ. L'ensemble résolvant $\rho(T)$ est un ouvert du plan complexe et l'application

$$\lambda \in \rho(T) \mapsto R(\lambda, T)$$

est analytique sur chaque composante connexe de $\rho(T)$. La résolvante vérifie l'équation fonctionnelle, dite identité de la résolvante, suivante

$$R(\lambda, T) - R(\lambda_0, T) = (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda, T)R(\lambda_0, T), \lambda_0, \lambda \in \rho(T).$$

Le spectre de T est un fermé de $\mathbb{C}$, et si de plus T est borné alors $\sigma(T)$ est un ensemble compact non vide. On appelle alors rayon spectral de T, le nombre que l'on note

$$r_\sigma(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Lorsque T n'est pas borné, un paramétre utile pour localiser son spectre est donné par l'abscisse spectrale

$$s(T) = \sup\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$$

avec la convention $s(T) = -\infty$ si $\sigma(T) = \varnothing$ et $s(T) = +\infty$ si l'ensemble $\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\} \cap [0; +\infty[$ est non borné et qui permet de définir le spectre périphérique par

$$\sigma_+(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \mathrm{Re}(\lambda) = s(T)\}.$$

Donnons à présent la structure du spectre. Le premier sous-ensemble important du spectre est le spectre ponctuel

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/ \text{ tel que } \lambda - T : D(T) \longrightarrow X \text{ n'est pas injectif }\}.$$

Un elément de $\sigma_p(T)$ est dit valeur propre de T, s'il lui correspond un x non nul appartient à $D(T)$ tel que $(\lambda - T)x = 0$ que l'on appelle vecteur propre (fonction propre lorsque X est un espace fonctionnel) correspondant à λ.

On définit le spectre approché de T par

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/\lambda - T : D(T) \mapsto X \text{ n'est pas injectif ou à image non fermée}\}.$$

(L'image d'un opérateur non borné A est défini par $\{Ax : x \in D(A)\}$). Le spectre résiduel est donné par

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/ \text{ tel que } \lambda - T : D(T) \mapsto X \text{ est à image non dense}\}.$$

On a toujours

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_r(T) \qquad et \qquad \sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T).$$

La proposition suivante donne une autre caractérisation du spectre approché :

Proposition 1.2.1. *Soit $\lambda \in \sigma(T)$. Alors $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_n \subset D(T)$, dite suite approximante, telle que*

$$||x_n|| = 1 \ et \ ||(\lambda - T)(x_n)|| \longrightarrow 0 \ quand \ n \longrightarrow +\infty.$$

Notons que le spectre essentiel de Schechter défini précédemment est un ensemble fermé de $\sigma(T)$. Il repésente la partie de $\sigma(T)$ invariante par perturbation de T par tout opérateur compact.

On a donc $\sigma_{e5}(T + K) = \sigma_{e5}(T)$. Ces résultats ont été raffinés par K. Latrach et A. Dehici [14] moyennant la classe des perturbations de Fredholm $\mathcal{F}^b(X)$. Lorsque X est de dimension infinie et T est un opérateur borné, $\sigma_{e5}(T)$ est un ensemble compact non vide, son rayon spectral essentiel est défini par

$$r_{e5}(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{e5}(T)\}.$$

Signalons aussi le résultat de stabilité du spectre essentiel dû à M. Schechter [21], [22],[23].

Proposition 1.2.2. *Soient T et S deux opérateurs fermés à domaine dense dans X. S'il existe $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(S)$ tel que $R(\lambda, T) - R(\lambda, S)$ soit compact, alors*

$$\sigma_{e5}(T) = \sigma_{e5}(S).$$

Ce résultat est d'un intérêt majeur, il a été étendu aussi par K. Latrach et A. Dehiciau cas des perturbation strictement singuliéres. Cet intérêt provient du fait qu'il peut déterminer le spectre eseentiel de l'opérateur de transport avec des conditions aux bords compactes, strictement singuliéres, en connaissant seulement celui du cadre neutronique (H = 0).

1.3 Théorie spectrale des semigroupes

Commençons par rappeler la définition d'un semigroupe fortement continu, noté C_0-semigroupe.

Définition 1.3.1. On appelle C_0-semigroupe sur un espace de Banach X, toute famille $(S(t), t \geq 0)$ d'opérateurs bornés sur X tels que
- $S(t+s) = S(t)S(s)$ pour tous $t, s \in \mathbb{R}^+$.
- $S(0) = Id_X$(l'op erateur identit e sur X).
- $\lim_{t \to 0} ||S(t)x - x|| = 0$ pour tout x∈X.

Le générateur A du semigroupe $(S(t), t \geq 0)$ est l'opérateur défini sur le domaine
$D(A) = \{x \in X \text{ tel que } \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{existe}\}$

par

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t}, \forall x \in D(A).$$

Remarque 1.3.1. le semigroupe $(S(t), t \geq 0)$ admet un unique générateur sur X.

Proposition 1.3.1. *Soit $(S(t), t \geq 0)$ un C_0 semigroupe sur X alors il existe deux constantes $\omega \geq 0$ et $\mu \geq 1$ telles que*

$$||S(t)|| \leq \mu . e^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

De plus, pour tout $x \in X$, l'application $t \longrightarrow S(t)x$ est continue de $\mathbb{R}^+$ dans X. L'existence des nombres ω et μ est une conséquence du théorème de Banach-Steihauss ([01], [08], [10]).

Si $\omega = 0$, le C_0-semigroupe $(S(t), t \geq 0)$ est dit uniformément borné. De plus, si $\mu = 1$, on dit que $(S(t), t \geq 0)$ est un semigroupe de contraction.

Le nombre ω est le type du semigroupe $(S(t), t \geq 0)$. Il est défini par

$$\omega = \inf_{t \geq 0} [\frac{\ln ||S(t)||}{t}] = \lim_{t \to \infty} \frac{\ln ||S(t)||}{t}$$

On note que le type ω du semigroupe $(S(t), t \geq 0)$ possède les propriétés suivantes :
a) $\sigma_r(S(T)) = e^{\omega t}(t \geq 0)$.
b) $s(A) \leq \omega$ ce qui montre que $\{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } Re(\lambda) > \omega\} \subset \rho(A)$.
c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re(\lambda) > \omega$ on a $R(\lambda, A)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t) dt, (x \in X)$.

On note que la propriété c) affirme que la résolvante de A est la transformée de Laplace du semigroupe. Le théorème de Hille-Yoshida donne une caractérisation des générateurs des C_0-semigroupes (cf. [10], [18]).

Théorème 1.3.1. *un générateur infinitésimal A du C_0-semigroupe $(S(t), t \geq 0)$ vérifie*
$||S(t)|| \leq M.e^{\omega t} \quad (t \geq 0)$
si et seulement si
(i) A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.
(ii) $]\omega, +\infty[\subseteq \rho(A)$ et $||(R(\lambda, A))^n|| \leq \frac{M}{(Re(\lambda)-\omega)^n} \quad (Re(\lambda)>\omega, n\in \mathbb{N})$.

Définition 1.3.2. Un C_0-groupe sur X est une famille d'opérateurs $(S(t), t \in \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}(X)$vérifiant les conditions de la définition 1.3.1 où $\mathbb{R}^+$ est remplacé par $\mathbb{R}$. Le générateur A d'un C_0-groupe $(S(t); t \in \mathbb{R})$ sur X est défini par

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t}$$

Le domaine $D(A)$ de A est l'ensemble de tous les $x \in X$ pour les quels la limite précédente existe.

On note que A est générateur d'un C_0-groupe $(S(t), t \in \mathbb{R})$ si et seulement si $\pm A$ engendrent des C_0-semigroupes $S_{\pm}(t)$. Dans ce cas,

$$S(t) = \begin{cases} S_+(t), t \geq 0 \\ S_-(-t), t \leq 0 \end{cases}$$

On note que si T est le générateur d'un C_0-semigroupe $(S(t), t \geq 0)$ d'un espace de Banach X, alors le probléme de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Tu(t), t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X \end{cases}$$

admet une solution unique donnée par $u(t) = S(t)u_0$.

La connaissance du spectre du semigroupe est un outil de base pour la compréhension du comportement asymptotique de la solution $u(t)$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$.

Dans le cas où T est un opérateur borné, ceci se traduit par un théorème d'application spectrale complet interprété par l'identité

$$\sigma(e^{(tT)})\backslash\{0\} = e^{(t\sigma(T))} = \{e^{(\lambda t)}; \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Malheureusement, dans le cas général, on à une inclusion stricte

$$e^{(t\sigma(T))} \subset \sigma(S(t)).$$

(Pour des exemples où l'inclusion précédente est stricte,on peut consulter [09]). Le fait que l'égalité n'est pas satisfaite provient du spectre approché $\sigma_{ap}(.)$ et en particulier du spectre continu car le théorème de l'application spectrale est vérifié pour les deux autres types de spectres, c'est a dire le ponctuel et le résiduel, en d'autres termes, on à seulement

$$e^{(t\sigma_{ap}(T))} \subset \sigma_{ap}(S(t)).$$

Le manque d'un théorème d'application spectrale complet à poussé plusieurs auteurs à chercher des théorèmes d'applications spectrales qui se traduisent par l'existence des réels $r \leq s(T)$ tels que

$$\sigma(S(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{(tr)}\} = e^{(t\sigma(T))} \cap \{e^{(t\lambda)} : Re(\lambda) > r\}.$$

Remarque 1.3.2. On note que si le théorème de l'application spectrale à lieu alors le type du semigroupe $S(t)$ coïncide avec l'abscisse spectrale de son générateur (ω(S(t)) = s(T)).

1.4 Type essentiel et comportement asymptotique

Soit $(S(t), t \geq 0)$ un C_0-semigroupe dans $\mathcal{L}(X)$ de type ω . Le type essentiel de $(S(t), t \geq 0)$ est $\omega_e \in [-\infty, \omega]$ défini par

$$\omega_e = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln[\delta(S(t))] = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \exists M, \delta(S(t)) \leq M \exp(\lambda t)\}.$$

où est la fonctionnelle de la mesure de non compacité définie dans [28]. De plus, on a

$$r_e(S(t)) = \exp(\omega_e t).$$

L'existence de ce réel a été démontré par L. Weis [28]. De plus, il vérifie

$$\omega(S(t)) = \max\{s(T) : \omega_e(S(t))\}.$$

Expliquons maintenant pourquoi le type essentiel ω_e est lié au comportement asymptotique du semigroupe.

Soit $(S(t), t \geq 0)$ un C_0-semigroupe, T son générateur et ω son type. Si $\omega_e < \omega$, alors pour tout α tel que $\omega_e < \alpha < \omega, \sigma(T) \cap \{\lambda, Re(\lambda) \geq \alpha\}$ est formé d'un ensemble non vide fini de valeurs propres de multiplicités algébriques finis. De plus la projection spectrale P_α correspondant à l'ensemble $\{\lambda \in \sigma(T), Re(\lambda) \geq \alpha\}$ commute avec $S(t)$ et il existe une constante C_α telle que

$$||S(t)(I - P_\alpha)|| \leq C_\alpha e^{\alpha t} :$$

Donc le comportement asymptotique du semigroupe $(S(t), t \geq 0)$ est déterminée par sa partie dans l'espace de dimension finie $P_\alpha(X)$. De plus, si X est un espace de Banach lattice et $S(t)_{t\geq 0}$ est un semigroupe positif, alors $\{\lambda \in \sigma(T), Re(\lambda) \geq \omega - \varepsilon\} = \{\varepsilon\}$ pour ε suffisament petit et si $\{S(t), t \geq 0\}$ est irréductible (cf. [17,Chapitre 3]) alors est algébriquement simple (de multiplicité 1) et la projection spectrale associée est strictement positive (voir [17, Chapitre3] pour plus de détails).

1.5 Perturbations bornées

Commençons cette section par rappeler le théorème classique des perturbations dû à Phillips [10], [18].

Théorème 1.5.1. *Soient X un espace de Banach et A le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $(S(t), t \geq 0)$ sur X vérifiant $||S(t)|| \leq M.e^{\omega t}$. Si $B \subset \mathcal{L}(X)$, alors $A+B$ engendre un C_0-semigroupe $(T(t), t \geq 0)$ sur X vérifiant*

$$||T(t)|| \leq Me^{(\omega+M||B||)t}, t > 0.$$

De plus, pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$, on a

$$T(t)x = S(t)x + \int_0^t S(t-s)BT(s)xds..........(\star)$$

On note que le semigroupe $(T(t), t \geq 0)$ est donné en itérant l'équation $(\star)$ au moyen de la série de Dyson-Phillips

$$T(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} T_i(t)......(\star\star)$$

où $T_0(t) = S(t)$ et $T_i(t) = \int_0^t S(s)BT_{i-1}(t-s)ds, (i \geq 1)$. La série $(\star\star)$ converge dans $\mathcal{L}(X)$ uniformément sur les intervalles bornés. De plus, le reste d'ordre n de cette série est donnée par

$$\int_{s_1+...+s_n \leq t, s_i \geq 0} S(s_1)B...S(s_n)BT(t - \sum_{i=1}^{n} s_i)ds_1...ds_n$$

L'intérêt des perturbations réside dans le fait que dans la plupart des situations les problèmes rencontrés n'ont pas des solutions classiques, comme dans le cas de l'opérateur de transport (ils ne sont pas auto-adjoints ni à résolvantes compactes) mais ils peuvent s'écrire sous la forme d'une perturbation d'opérateurs dont l'étude spectrale est plus au moins connue. Le recours aux techniques de perturbations permet d'obtenir des résultats spectraux importants aussi bien pour le générateur que pour le semigroupe.

Présentons maintenant le théorème fondamental suivant qui illustre le rôle de la compacité d'un reste de la série de Dyson-Phillips dans l'étude du comportement asymptotique.

Théorème 1.5.2. *On suppose que X est l'un des espaces $L_p([0,1])$. Alors, avec les mêmes notations ci-dessus, si un certain reste de la série de Dyson-phillips est compact pour $t \geq t_0$, alors*

$$r_e(S(t)) = r_e(T(t)), t \geq 0.$$

En particulier, l'ensemble

$$\sigma(T(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{t\omega}\}, t \geq 0$$

est formé des valeurs propres isolées de multiplicités algébriques finies.

On a aussi les récents résultats pertinents de S. Brendle et ses collaborateurs [02], [03]qui s'a ranchissent de la compacité.

Théorème 1.5.3. *Si pour un certain $t_0 > 0, R_1(t) = V(t) - U(t), (t_0 < t)$ est continu (à droite) en norme ou plus généralement, si pour un certain $k \geq 1$, l'application $t \in \mathbb{R}_+^* \longrightarrow R_k(t)$ est continue (à droite) en norme, alors*

$$\sigma(T(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{t\omega}\} = e^{t\sigma(T+K)} \cap \{e^{t\lambda}, Re(\lambda) > \omega\}$$

1.6 Compacité et continuité en norme des restes de la série de Dyson-Phillips

Dans cette section, on présente quelques outils qui nous permettent de faciliter l'étude des restes de la série de Dyson-Phillips, ils se résument dans la propriété de la stricte convexité introduite et utilisée par l'école allemande (L. Weis [29], G. Schluchtermann [24], [25] et J. Voigt [27]) et celle de la convolution qui assure la conservation de la compacité et la continuité en norme.

Théorème 1.6.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach. On note $\mathcal{K}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ le sous-espace des opérateurs compacts. Soit (ω,μ) un espace de mesure finie et*

$$G : \omega \longmapsto \mathcal{L}(X,Y)$$

une application bornée et fortement mesurable (c'est- a-dire que $\omega \longmapsto G(\omega)x$ est mesurable pour tout $x \in X$). Si $G(\omega) \in \mathcal{K}(X,Y)$ p.p. $\omega \in \Omega$, alors l'intégrale forte

$$x \in X \longmapsto \int_\Omega G(\omega)xdv(\omega) \in Y$$

est compacte.

Définition 1.6.1. Soient $f, g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathcal{L}(X)$ deux applications fortement continues. Leur convolution est donnée par

$$f \star g(t) : x \in X \longmapsto \int_0^t f(t-s)g(s)xds \in \mathcal{L}(X).\ (t \geq 0)$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $[f]^n = f \star f \star \cdots \star f$ (n fois). L'opération $\star$ est associative et on peut ecrire

Proposition 1.6.1. *Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$U_m(t) = [UK]^m \star U(t) \text{ et } R_m(t) = [UK]^m \star V(t),$$

On a aussi les résultats de conservation et de régularité suivante (cf., [17]) :

Théorème 1.6.2. *Soient $f, g :]0;+\infty[\longmapsto \alpha(X)$ deux applications fortement continues et soit $0 < M \leq +\infty$:*
- *Si $f(t)$ ou $g(t)$ est compacte pour tout $t \subset]0, M[$ alors $(f \star g)(t)$ est compacte pour tout $t \in]0, M[$.*
- *Si $]0, M[\ni t \longrightarrow f(t)$ ou $]0, M[\ni t \longrightarrow g(t)$ est continue en norme, alors $]0, M[\ni t \longrightarrow (f \star g(t))$ l'est aussi.*

Théorème 1.6.3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors*
- *Si $[UK]^n(t)$ est compact pour tout $t > 0$, alors $U_n(t)$ l'est aussi.*
- *Si $0 < t \longmapsto [UK]^n(t)$ est continue en norme, alors $0 < t \longmapsto U_m(t)$ l'est egalement.*

Théorème 1.6.4. *Soit $0 < M \leq +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a*
- *Le reste $R_n(t)$ est compact pour tout $t \subset]0, M[$ si et seulement si $U_m(t)$ est compacte pour tout $t \in]0, M[$.*
- *L'application $]0, M[\ni t \longmapsto R_n(t) \in \mathcal{L}(X)$ est continue en norme si et seulement si $]0, M[\ni t \longmapsto U_m(t) \in \mathcal{L}(X)$ est aussi continue en norme.*

On termine cette section par des arguments d'interpolation et de domination pour les opérateurs compacts positifs.

Théorème 1.6.5. $\bullet$*Soit* $K \in \bigcap_{q\geq 1} \mathcal{L}(L^q(\bigwedge))$. *S'il existe* $1 \leq q_0 \leq +\infty$ *tel que* K *soit compact dans* $\mathcal{L}(L^{q_0}(\bigwedge))$, *alors* K *est compact dans* $L^q(\bigwedge), 1 < q < +\infty$.

$\bullet$ *Soit* $0 \leq t \longmapsto f(t) \in \bigcap_{q\geq 1} \mathcal{L}(L^q(\bigwedge))$ *une application fortement continue en tant qu'une application à valeurs dans* $\mathcal{L}(L^q(\bigwedge))$ *pour tout* $1 \leq q < +\infty$. *S'il existe* $1 \leq q_0 < +\infty$ *tel que* $t \longrightarrow f(t)$ *soit continue en norme à valeurs dans* $\mathcal{L}(L^{q_0}(\bigwedge))$, *alors elle est continue en norme à valeurs dans* $\mathcal{L}(L^q(\bigwedge)), 1 < q < +\infty$.

Théorème 1.6.6. *Soient* A *et* B *deux opérateurs bornés sur* $L^p(\bigwedge)$ *avec* $1 < p < +\infty$. *Si* B *est compact et* $0 \leq A \leq B$, *alors* A *est compact.*

Ce théorème est un cas particulier d'un résultat dû à Doods et Fremlin établi dans un cadre général (sur un espace lattice quelconque c'est A^3 qui est compact, sur L^1 c'est A^2 qui est compact et sur $L^p, p > 1$, on tombe sur la compacité).

Chapitre 2

Quelque remarques sur les classes de perturbations semi-Fredholm et Fredholm

On montre l'existence des espaces de Banach X et Y tels que l'ensemble des opérateur strictement singuliers $\mathcal{S}(X,Y)$ (resp. l'ensemble des opérateurs strictement cosinguliers $\mathcal{CS}(X,Y)$) est strictement inclu dans l'ensemble $\mathcal{F}_+(X,Y)$ (resp. $\mathcal{F}_-(X,Y)$) pour une classe non vide d'opérateurs semi-Fredholm (fermés à domaines denses) supérieurs $\Phi_+(X,Y)$ (resp. pour une classe non vide d'opérateurs semi-Fredholm (fermés à domaines denses) inférieurs $\Phi_-(X,Y)$).

2.1 Introduction

Le travail de T. Kato [11] sur les opérateurs strictement singuliers à été le point de départ d'un domaine assez complexe en théorie des opérateurs, celui des perturbations Fredholm, semi-Fredholm et sous semi-Fredholm entre deux espaces de Banach X et Y notés par $\mathcal{F}(X,Y)$, $\mathcal{F}_+(X,Y)$ et $\mathcal{F}_-(X,Y)$, il a fait l'objet de plusieurs travaux traitant ces opérateurs, spécialement les inclusions entre toutes ces classes et le probléme de stabilité par passage au dual.
La difficulté d'étudier ces questions provient du fait qu'elles sont liées directement a la géométrie des espaces de Banach. La nouvauté ici consiste à étudier toutes ces classes pour des opérateurs semi-Fredholm et Fredholm fermés à domaines denses qui ne sont pas nécéssairement bornés. Pour $X = Y$, K. Latrach et A. Dehici [14, Lemme 2.3] ont montré que $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}^b(X)$ où $\mathcal{F}^b(X)$ désigne la classe des perturbations de Fredholm agissant sur $\Phi(X) \cap \mathcal{L}(X)$. Le cadre des ensembles $\mathcal{F}_+(X)$, $\mathcal{F}_+^b(X)$ et $\mathcal{F}_-(X)$ et $\mathcal{F}_-^b(X)$ est différent, on note juste les inclusions $\mathcal{F}_+(X) \subset \mathcal{F}_+^b(X)$ et $\mathcal{F}_-(X) \subset \mathcal{F}_-^b(X)$. Ces commentaires sont aussi applicables si $X \neq Y$. Ici, moyennant les espaces hériditairement indécomposables construits par T. Gowers et B. Maurey et notés par X_{GM} ; on va montrer que $\mathcal{S}(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) \subsetneq \mathcal{F}_+(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM})$ (resp., $\mathcal{CS}(X_{GM}^*, X_{GM}^* \times X_{GM}^*) \subsetneq \mathcal{F}_-(X_{GM}^*, X_{GM}^* \times X_{GM}^*)$), de plus, on va prouver que les inclusions $\mathcal{S}(Z) \subsetneq \mathcal{F}_+^b(Z)$ (resp.$\mathcal{CS}(Z) \subsetneq \mathcal{F}_-^b(Z)$) sont strictes pour une infinité d'espaces de Banach.

2.2 Quelques rappels nécessaire

Soient X et Y deux espaces de Banach et $A \in \mathcal{C}(X,Y)$.(l'ensemble des opérateurs fermés à domaines denses).Pour tout $x \in D(A)$ (le domaine de A), on ecrit :
$||x||_A = ||x||_X + ||Ax||_Y$ (la norme du graphe).

Comme il à été mentionné dans la partie rappels, $D(A)$ muni de la norme $||.||_A$est un espace de Banach noté par X_A, et A comme opérateur défini de X_A dans Y est borné Si $D(A) \subseteq D(J)$,
alors J est A-défini.
De plus, on a

$$\beta(\hat{A}) = \beta(A)$$
$$\alpha(\hat{A}) = \alpha(A), R(\hat{A}) = R(A), \alpha(\hat{A}+\hat{J}) = \alpha(A+J)$$

$$\beta(\hat{A}+\hat{J}) = \beta(A+J), R(\hat{A}+\hat{J}) = R(A+J)\text{........................}(2.1)$$

Il est clair que les relations (2.1) entrainent que

$$A \in \Phi_+(X,Y) \Leftrightarrow \hat{A} \in \Phi_+^b(X_A,Y)\text{................................}(2.2)$$

$$A \in \Phi_-(X,Y) \Leftrightarrow \hat{A} \in \Phi_-^b(X_A,Y)\text{................................}(2.3)$$

$$A \in \Phi(X,Y) \Leftrightarrow \hat{A} \in \Phi^b(X_A,Y)\text{..................................}(2.4)$$

2.3 Résultats principaux

On commence cette etude par donner le résultat suivant :

Proposition 2.3.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach ($\Phi(X,Y) \neq \varnothing$), donc*

$$\mathcal{F}^b(X,Y) = \mathcal{F}(X,Y)$$

Avant de compléter cette analyse, présentons quelques détails nécéssaires pour la suite.
Tout d'abord, donnons la définition des espaces totalement incomparables.

Définition 2.3.1. Deux espaces de Banach Xet Y sont dits totalement incomparables si leurs sous-espaces fermés de dimensions infinies ne sont jamais isomorphes.

Il est facile d'observer que chaque deux espaces de l'ensemble $\{c_0\} \cup \{l_p\}$ sont totalement incomparables. Plus précisément, on a :

Soit $p \in [1, +\infty[$, si $p < r$ (resp. $r < p$), donc

$$\mathcal{L}(l_r, l_p) = K(l_r, l_p) = \mathcal{S}(l_r, l_p) = \mathcal{F}^b(l_r, l_p) = \mathcal{F}(l_r, l_p)$$

(resp.$\mathcal{L}(l_r, l_p) = \mathcal{S}(l_r, l_p) = \mathcal{F}^b(l_r, l_p) \neq K(l_r, l_p)$).Ici on a $(\Phi(l_r, l_p) = \varnothing \ (r \neq p)$ mais on a aussi

$$\mathcal{F}^b(l_r, l_p) = \mathcal{F}(l_r, l_p) \quad (r \neq p)$$

D'autres part, il est facile de voir que si X et Y sont totalement incomparables, alors chaque opérateur borné de X dans Y est strictement singulier. De plus, la définition des perturbations de Fredholm permet d'affirmer ce qui suit

Lemme 2.3.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach tels que*

$$\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{F}^b\,(X,Y) \ \ \textit{alors} \ \Phi^b(X,Y) = \varnothing$$

On donne maintenant la définition des espaces héridipairement indécomposables qui jouera un rôle primordial dans les résultats qui suivent :

Définition 2.3.2. Un espace de Banach X est dit indécomposable s'il ne peut pas être décomposable en la somme directe de deux sous-espaces fermés de dimension infinies.

Définition 2.3.3. Un espace de Banach X est dit héridipairement indécomposable $(H.I)$ si tous ses sous-espaces fermés de dimension infinies sont indécomposables.

En 1993, T. Gowers et B. Maurey ont donné l'exemple d'un espace réflexif séparable héréditairement indécomposable noté X_{GM} ayant un quotient héritant de cette théorème.

Théorème 2.3.1. *On a :*

$$\mathcal{L}(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) = \mathcal{F}^b_+(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) \neq \mathcal{S}(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM})$$

$$\mathcal{L}(X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM}) = \mathcal{F}^b_-(X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM}) \neq \mathcal{CS}(X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM})$$

Remarque 2.3.1. Comme conséquence immédiate de ce théorème, on déduit que

Résultats principaux

$$\mathcal{L}(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) = \mathcal{F}^b(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) \neq \mathcal{S}(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM})$$

$$\mathcal{L}(X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM}) = \mathcal{F}^b(X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM}) \neq \mathcal{CS}(X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM})$$

On va montrer que le Théoème 2.3.1 reste vrai, respectivement, pour les classes de perturbations $\mathcal{F}_+(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM})$ et $\mathcal{F}\ (X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM})$ néanmoins les preuves sont plus compliquées.

le Théorème suivant est essentiel pour prouver le Théorème 2.3.3 qui peut être regardé comme une extension du Théorème 2.3.1 au cas des opérateurs semi-Fredholm fermés à domaines denses (non bornés).

Théorème 2.3.2. *On a :*
a) $\Phi_+(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) \neq \varnothing$
b) $\Phi_-(X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM}) \neq \varnothing$

Preuve : Pour a) : la classe $\Phi_+(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM})$, la preuve est basée sur la séparabilité de l'espace $X_{GM} \times X_{GM}$ et celle de l'espace X^*_{GM} muni de la topologie $*-$ faible. On peut montrer alors l'existence d'un opérateur compact injectiwwwwwwwww<à image dense de X_{GM} dans $X_{GM} \times X_{GM}$; Ceci implique que l'opérateur $K^{-1} : R(K) \subseteq X_{GM} \times X_{GM} \to X_{GM}$ est un opérateur de Fredholm fermé à domaine dense, ce qui entraîne que $\Phi(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) \neq \varnothing$ et par suite $\Phi_+(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) \neq \varnothing$.

Pour b) : une approche similaire par dualité permet d'établir le résultat pour la classe des opérateurs semi-Fredholm inférieurs.
La proposition suivante dûe a L. Weis [29], va jouer aussi un rôle fondamental dans la preuve du Théorème 2.3.3.

Proposition 2.3.2. *Soit Y un espace de Banach, alors.*
a) $\mathcal{L}(Y, Z) = \mathcal{S}(Y, Z) \cup \Phi_+(Y, Z)$ pour tout espace de Banach Z si et seulement si Y est un espace héridiitairement indécomposable.
b) $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{CS}(X, Y) \cup \Phi_-(X, Y)$ pour tout espace de Banach X si et seulement si les quotients de Y sont héridiitairement indécomposables.

Montrons maintenant le théorème suivant :

Théorème 2.3.3. *On a :*

$$\mathcal{L}(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) = \mathcal{F}_+(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) \neq \mathcal{S}(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM})$$

$$\mathcal{L}(X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM}) = \mathcal{F}_-(X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM}) \neq \mathcal{CS}(X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM})$$

<u>Preuve :</u> Pour a) : il suffit d'établir l'inclusion $\mathcal{L}(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) \subseteq \mathcal{F}_+(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM})$ .Soit $S \in \Phi_+(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM})$ et j l'application définie de X_S dans $X_{GM} \times X_{GM}$ par $j : (D(S), ||.||_S) = X_S \mapsto X_{GM} \times X_{GM}, j(x) = x$,on va montrer que j est strictement singulier.

En effet, comme $S \in \Phi_+(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}))$, la relation (2.2) montre que $\hat{S} \in \Phi_+(X_S, X_{GM})$, ceci implique l'existence d'un sous-espace de codimension finie H dans X_S qui est isomorphe à $R(\hat{S}) = R(S)$.D'autre part, $R(S)$est un sous-espace héridiitairement indécomposable fermé dans X_{GM}, donc H va hériter cette propriété dans l'espace de Banach X_S ce qui permet de conclure que X_S est un espace de Banach héridiitairement indécomposable. De plus, $j \not\subset \Phi_+(X_S, X_{GM} \times X_{GM})$ car si $j \subset \Phi_+(X_S, X_{GM} \times X_{GM})$on aura $X_S \sim X_{GM} \times X_{GM}$, ceci contredit le fait que $X_{GM} \times X_{GM}$ est un espace qui n'est pas héridiitairement indécomposable.
Ensuite, en appliquant la Proposition 2.3.2 (assertion a), on en déduit que j est strictement singulier de X_S dans$X_{GM} \times X_{GM}$.
Prenons maintenant un opérateur borné $T \in \mathcal{L}(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM})$, tout d'abord, on va montrer que les espaces $X_{S+T} = (D(S+T), ||.||_{S+T})$ et $X_S = (D(S), ||.||_S)$ sont isomorphes.
En effet, soit $x \in X_{S+T}$ donc

$$||x||_{S+T} = ||x|| + ||(S+T)(x)||$$

$$\leq ||x|| + ||S(x)|| + ||T(x)||$$

$$\leq ||x|| + ||S(x)|| + M||x||$$

$$\leq (1+M)(||x|| + ||S(x)||)$$

$$\leq (1+M)||x||_S$$

De plus, si $x \in X_S$, on peut etablir les estimations suivantes :

$$||x||_S = ||x|| + ||S(x)||$$

$$\leq ||x|| + ||(S+T)(x) - T(x)||$$

$$\leq ||x|| + ||(S+T)(x)|| + ||T(x)||$$

$$\leq ||x|| + ||(S+T)(x)|| + M||x||$$

$$\leq (1+M)||x||_{S+T}$$

et finalement :

$$\frac{||x||_S}{1+M} \leq ||x||_{S+T} \leq (1+M)||x||_S$$

Ce qui assure que les espacesX_{S+T} et X_S sont isomorphes. Cet ismorphisme va être noté par h et défini par $h(x) = x$.
D'autre part, l'opérateur$\widehat{T+S} : X_{S+T} \mapsto X_{GM}$ défini par $\widehat{T+S}(x) = (T_j h)(x) + (S_j h)(x)$ pour tout $x \in X_{S+T}$ est un élément de l'ensemble $\Phi_+(X_{S+T}, X_{GM})$, ceci provient directement du fait que les opérateurs $T_j h$ et $S_j h$ appartiennent respectivement aux classes $\mathcal{S}(X_{S+T}, X_{GM})$ et $\Phi_+(X_{S+T}, X_{GM})$.
Ensuite, en utilisant la relation ( ), on obtient $T+S \in \Phi_+(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM})$ et, par suite $T \in \mathcal{F}_+(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM})$.
Considérons maintenant l'opérateur de projection $Pr : X_{GM} \times X_{GM} \mapsto X_{GM}$ défini par $Pr(x,y) = x$.
Il est evident que $Pr \in \mathcal{L}(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM})$, mais cet opérateur n'est pas strictement singulier car sa restriction à l'espace $X \times \{0\}$ est un isomorphisme, donc
$\mathcal{L}(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) = \mathcal{F}_+(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) \neq \mathcal{S}(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM})$,Ceci achéve la preuve de a).
pour b) : soit $S \in \Phi_-(X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM})$ et soit $X_S = (D(S), ||.||_S)$, alors l'opérateur J^* défini par $J^* : X_S \mapsto X^*_{GM}, J^*(x) = x$ n'est pas un élément de la classe $\Phi_-(X_S, X^*_{GM})$ car si on suppose l'inverse on aura $X_S \simeq X^*_{GM}$ et par suite

$$X^*_{GM}/N(S) \simeq X_S/N(S) \simeq R(S)$$

Définition 3.3.1. Soit X un espace de Banach et soit $R \in \mathcal{L}(X)$, on dit que R est un opérateur de Riesz si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*, \lambda I - R \in \Phi(X)$.

Désignons par $\mathcal{R}(X)$ l'ensemble des opérateurs de Riesz sur X.

Une des questions clé en théorie des opérateurs consiste à donner une caractérisation pour cette classe d'opérateurs via celle des opérateurs compacts et quasinilpotents. Un des problèmes lié à ce sujet est la fameuse décomposition de West qui à été démontrée positivement que sur les espaces '$l_p(1 \leq p < +\infty)$ et $L_p(\nu)$, $(1 < p < +\infty)$, signalons que le problème est toujours ouvert sur un espace de Banach quelconque. Dans cette section, en utilisant le concept de la mesure de non-compacité, on va montrer que beaucoup de résultats connus dans cette direction s'inscrivent comme des cas particuliers de notre cadre général.

Notre premier résultat préparatoire est donné par la proposition suivante :

Proposition 3.3.1. *Soit X un espace de Banach et soit $R \in \mathcal{R}(X)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n(\varepsilon) \geq 1$ tel que $\delta(R^{n(\varepsilon)}) < \varepsilon$.*

preuve : Le fait que $R \in \mathcal{R}(X)$ satisfait à la théorie de Riesz-Schauder montre que l'ensemble des points $\lambda \in \sigma$(R) qui satisfont à l'inégalité $|\lambda| >\varepsilon$ est formé d'un ensemble fini $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{m_\varepsilon}\}$. Soit P_i la projection de X sur les sous-espaces $N(\lambda_i I - R)$ dans la décomposition

$$X = N(\lambda_i I - R) \oplus H(\lambda_i); (1 \leq i \leq m_\varepsilon).$$

On désigne par V l'opérateur $R - \sum_{i=1}^{m_\varepsilon} R \circ P_i$. Il est facile d'observer que $\sum_{i=1}^{m_\varepsilon} R \circ P_i$ est un opérateur de rang fini donc il est compact de plus on a

$$r_\sigma(V) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} ||V^n||^{1/n} < \varepsilon$$

ceci montre l'éxistence d'un entier n_ε tel que $||V^{n_\varepsilon}|| < \varepsilon$. D'autre part, on peut ecrire $R^{n_\varepsilon} = V^{n_\varepsilon} + F_{n_\varepsilon}$ où F_{n_ε} est un opérateur compact et explique que $\delta(R^{n_\varepsilon}) = \delta(V^{n_\varepsilon}) < \varepsilon$. Comme conséquence immédiate de ce résultat, on à le Lemme suivant qui donne une prpopriété classiques des opérateurs de Riesz.

Lemme 3.3.1. *Soit X un espace de Banach et $A \in \mathcal{R}(X)$, donc $i(\lambda I - A) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$*

Preuve : On utilise la décomposition $\lambda I - A = \lambda \left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)$. Il suffit donc de montrer que $\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)$ est d'indice nul. Le fait que $A \in \mathcal{R}(X)$ montre que $\frac{1}{\lambda}A$ est aussi un opérateur de Riesz, en appliquant la Proposition 3.3.1. à l'opérateur $\frac{1}{\lambda}A$ (en prenant $\varepsilon = 1$) et en tenant compte du Théorème 3.2.2. on obtient que $I - \frac{1}{\lambda}A \in \Phi(X)$ est d'indice nul ce qui donne le résultat.

3.4 Stabilité du spectre essentiel

Soit X un espace de Banach et A un opérateur fermé à domaine dense sur X Dans [12], [13], [15], [21], [22], les auteurs ont donné une caractérisation du spectre essentiel de Schechter ou de Weyl moyennant la classe des perturbations de Fredholm.
Posons :

$$\mathcal{M}_A(X) = \{M \in \mathcal{L}(X) : \forall \lambda \in \rho(A+M), \exists m > 0 \text{ tel que } \delta([(\lambda - A - M)^{-1}M]^m) < 1\}$$

Donnons à présent la caractérisation suivante du spectre $\sigma_{e_5}(A)$ qui généralise celle etablie par les auteurs mentionnés au dessus.

Théorème 3.4.1. *Soit A un opérateur fermé à domaine dense sur X, donc on a*

$$\sigma_{e_5}(A) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}_A(X)} \sigma(A+M)$$

Preuve : Comme $\delta(\mathrm{K}) = 0 < 1$ pour tout opérateur compact alors $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{M}_A(X)$ et par suite $\bigcap_{M \in \mathcal{M}_A(X)} \sigma(A+M) \subseteq \sigma_{e_5}(A)$
Montrons maintenant l'inclusion inverse. On considére $\lambda \in \sigma_{e_5}(A)$ et supposons que $\lambda \notin \bigcap_{M \in \mathcal{M}_A(X)} \sigma(A+M)$, ce qui implique l'existence d'un opérateur $\mathrm{M}_0 \in \mathcal{M}_A(X)$ tel que $\lambda \in \rho(A+M_0)$. D'autre part, on peut ecrire

$$\lambda - A = [I - (\lambda - A - M)^{-1}M_0](\lambda - A - M_0)$$

En tenant compte du Théorème 3.2.1. on a

$$[I - (\lambda - A - M)^{-1}M_0] \in \Phi(X) \text{ et } i[I - (\lambda - A - M)^{-1}M_0] = 0$$

De plus,

$$\lambda - A = (\lambda - A - M_0)[I - (\lambda - A - M\hat{})^{-1}M_0] \in \Phi(X)$$

et

$$i(\lambda - A) = i(\lambda - A - M_0) + i[I - (\lambda - A - M)^{-1}M_0] = 0 + 0 = 0$$

Ceci implique que $\lambda \in e_5(A)$. Ceci est une contradiction, donc

$$e_5(A) \subseteq \bigcap_{M \in \mathcal{M}_A(X)} \sigma(A+M)$$

Ce qui achéve la preuve.

Bibliographie

[1] N. Bellomo, Ed., Lectures Notes on the Mathematical Theory of the Boltzmann Equation, Adv. Math. Applied Sci., Vol. 33 World Sci., Vol. 33, World Scientific 1995.

[2] S. Brendle, On the asymptotic behavior of perturbed strongly continuous semigroups, Math. Nachr 226 (2001), 35-47.

[3] S. Brendle, R. Nagel and J. Poland, On the spectral mapping theorem for perturbed strongly continuous semigroups, Arch. Math. 74 (5) (2000), 365-378.

[4] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Paris, Masson. 1983.

[5] S. R. Caradus, Operators of Riesz type, Pacific J. Math., 18 (1966), 61-71.

[6] I. Gohberg and G. Krein, Fundamental theorems on deficiency numbers, root numbers and indices of linear operators, Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2, 13 (1960), 185-264.

[7] I. Gohberg, A. Markus and A. Feldman, Normaly solvable operators and ideals associated with terme, Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2, 61 (1967), 63-84.

[8] J. Goldstein, Semigroups of linear operators ans applications, Oxford Press, 1985.

[9] G. Greiner, J. Voigt and M. Wol , On the spectral bound of the generator of semi-groups of positive operators, J. Operator Theory 5 (1981), 245-256.

[10] E. Hille and R. S. Phillips, Functional Analysis and semigroups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 31 Providence R. I. (1957).

[11] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, 1966.

[12] K. Latrach, Essential spectra on spaces with the Dunford-Petit property, J. Math. Anal. Appl., 233 (1999), 607-622.

[13] K. Latrach and A. Dehici, Relatively strictly singular paerturbations, essential spectra and application to transport operators, J. Math. Anal. Appl. 252 2 (2000), 767-789.

[14] K. Latrach and A. Dehici, Fredholm, semi Fredholm perturbations and essential spectra, J. Math. Anal. Appl. 259 1 (2001), 277-301.

[15] K. Latrach and A. Jeribi, Some results on Fredholm operators, essential spectra and applications, J. Math. Anal. Appl., 225 (1998), 461-485.

[16] V. D. Milman, Some properties of strictly singular operators,, Funct. Anal. Appl. 3 (1969), 77-78.

[17] M. Mokhtar-Kharroubi, Mathematical topics in neutron transport theory new aspects, World Sci. Series on advances in Mathematics for applied Sciences. Vol. 46,1997.

[18] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer, New-York, 1983.

[19] A. Pelczynski, Strictly singular and strictly cosingular operators I. Strictly singular and cosingular operators on $C(\omega)$-space, Bull. Acad. Polon. Sci., 13 (1965), 31-36.

[20] A. Pelczynski, Strictly singular and strictly cosingular operators II. Strictly singular and cosingular operators on $L(\mu)$-space, Bull. Acad. Polon. Sci., 13 (1965), 37-41.

[21] M. Schechter, On the essential spectrum of an arbitrary operator, J. Math. Anal. Appl., 13, (1968), 1139-1144.

[22] M. Schechter, Invariance of essential spectrum, Bull. Amer. Math. Soc., New-York,71 (1965), 365-367.

[23] M. Schechter, Spectra of partial differential operators, North-Holland, Amerterdam,1971.

[24] G. Schluchtermann, On weakly- compact operators, Math. Ann.292 (1992), 263-266.

[25] G. Schluchtermann, Perturbation of linear semigroups, Recent progress in operator theory (Regensburg 1995), pp 263-277, Oper. theory Adv. Appl. 103, Birkhauser, Basel 1998.

[26] V. S. Vladimirskii, strictly cosingular operators, Soviet. Math Dokl., 8 (1967), 739-740.

[27] J. Voigt, On the convex compactness property for the strong operator topology, Note di. Mat. 12 (1992), 259-269.

[28] L. Weis, A Genaralization of the Vidav-Jorgens perturbation theorem for semigroup and its application to transport theory. J. Math. Anal. Appl. 129 (1988), 6-23.

[29] L. Weis, Perturbations clases of Semi-Fredholm operators, Math. Z., 178 (1981), 429-442.