République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP Et Analyse numérique**

Par :

BOULAKHIOUT Sarra

Intitulé

Sur la théorie des perturbations des systèmes dynamiques

Dirigé par : Dr. SELLAMI Nabil

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. LARIBI Naima	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. SELLAMI Nabil	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. OUENNASE Nawel	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2018

الإهداء

بسم الله الرحمن الرحيم

(قل اعملوا فسيرى الله عملكم و رسوله و المؤمنون)

صدق الله العظيم

الهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلا بطاعتك.. و لا تطيب اللحظات إلا بذكرك.. ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك.. ولا تطيب الحياة إلا برؤيتك

« الله جل جلاله»

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة.. ونصح الأمة.. إلى نبي الرحمة ونور العالمين

« سيدنا محمد صلى الله عليه و سلم»

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار.. إلى من علمني العطاء بدون انتظار..

إلى من احمل اسمه بكل افتخار.. أرجو من الله آن يمد في عمرك لترى ثمارا قد حان قطافها بعد طول انتظار وستبقى كلماتك نجوم اهتدي بها اليوم وفي الغد و إلى الأبد..

والدي العزيز

إلى ملاكي في الحياة.. إلى معنى الحب و إلى معنى الحنان والتفاني..

إلى بسمة الحياة و سر الوجود

إلى من كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي إلى أغلى الحبايب

أمي الحبيبة

إلى أخواتي ورفيقات دربي في هذه الحياة.. معكن أكون أنا وبدونكن أكون مثل أي شيء إلى من أرى التفاؤل بعينهن والسعادة في ضحكتهن..في نهاية مشواري أريد أن أشكركن على مواقفكن النبيلة إلى من تطلعن لنجاحي بنظرات الأمل

أخواتي حنان اسياء خديجة

إلى كل زميلاتي اللاتي سرن معي نحو الحلم خطوة بخطوة

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, on étudie la théorie de perturbation des systèmes dynamiques, on commence par un rappel des différentes notions de base de la théorie qualitative des systèmes dynamiques, ensuite on définit la notion de perturbation et son principe ainsi que ses types et on passe à présenter une des méthodes perturbatives remarquables qui est la Méthode de Lindstedt.

Enfin, on termine par une brève étude de la Méthode de Moyennisation et on donne trois formes différentes de cette Méthode.

Remerciements

*En préambule à ce mémoire, je tiens à remercier en premier lieu **ALLAH** qui m'a donné le pouvoir d'effectuer ce modeste travail.*

*Je tiens à exprimer ma gratitude, ma reconnaissance et mes profonds remerciements à mon directeur de mémoire monsieur **Dr.SELLAMI Nabil.** Je le remercie sincèrement pour sa confiance, ses encouragements, ses conseils précieux et pour le temps qu'il m'a accordé malgré ses obligations, ses devoirs et ses responsabilités. Je le remercie également pour sa rigueur, sa bonne humeur, sa sympathie et sa modestie.*

*Mes remerciements les plus respectueux vont au **Mme :Dr.LARIBI Naima** d'avoir accepté de présider le Jury.*

*Je remercie vivement **Mme :Dr.OUENNASE Nawel** qui a accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger ce mémoire.*

Je termine avec un remerciement bien particulier à quiconque qui de près ou de loin a contribué à ma réussite.

iv

Introduction

Beaucoup de problèmes rencontrés par les physiciens, les ingénieurs et les mathématiciens sont modélisés par des équations différentielles non linéaires dont il n'existe pas de méthode pour trouver leurs solutions exactes. Pour résoudre ces problèmes, on doit chercher une solution approximative ou bien numérique ou une combinaison des deux.

La recherche d'une solution approximative analytique est l'objet de la théorie des perturbations.

La question essentielle posée est : peut-on trouver une solution approchée à une équation dépendant d'un paramètre ϵ, en connaissant la solution exacte de cette équation pour certaines valeurs du paramètre ϵ. La solution approchée est donc représentée sous la forme d'un développement en série de puissances du paramètre ϵ.

La théorie des perturbations à été utilisée par les astronomes en mécanique céleste au début du $18^{ème}$ siècle. En particulier, elle a été utilisé dans l'étude du problème de N corps, car les équations différentielles décrivant un système de N corps en interaction gravitationnelle n'a pas de solution exacte générale pour $N \geqslant 3$.

A la fin du $19^{ème}$ siècle, cette théorie à été étudié par Laplace et Poincaré, avant de connaitre de nouveaux développement au $20^{ème}$ siècle dans la théorie KAM. (Kolmogorov, Arnold et Moser) en 1954. Plusieurs méthodes utilisant la technique de perturbations ont été crée à savoir : la méthode de Lindstedt, time scales, moyennisation ...

Dans ce mémoire, on présente une brève introduction à la théorie des perturbations puis on étudie la méthode de Lindstedt et la méthode de moyennisation.

Notre mémoire comporte trois chapitres :

Le premier chapitre contient des notions de base de la théorie des systèmes dynamiques.

Dans le deuxième chapitre, on introduit la notion de perturbation avec ses deux types : régulière et singulière puis on présente la méthode de Lindstedt.

Enfin, le troisième chapitre est consacré à l'étude de la méthode de moyennisation. On donne la version ancienne de cette méthode puis on passe à d'autres versions développées actuellement

Chapitre 1

Notions Préliminaires

1.1 Système Dynamique

Définition 1.1. Un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$ est une application

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

définie telle que

$$\begin{cases} U(.,x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n & \text{est continue} \\ U(t,.) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n & \text{est continue} \\ U(0,x) = x \\ U(t+s,x) = U(t, U(s,x)) \, \forall t, s \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Exemple 1.1. Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}^+, x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

où A est une matrice constante. La solution de (1.1) est

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

Le système (1.1) engendre un système dynamique, car l'application

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

qui à tout $t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$ associe

$$U(t,x) = e^{tA}x$$

vérifie les quatre propriétés précédentes.

1.2 Système linéarisé

Définition 1.2 (Système linéarisé). Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.2}$$

On appelle système linéarisé de (1.2) au voisinage du point d'équilibre x_0, le système

$$\dot{x} = Df(x_0)\, x$$

où $Df(x_0)$ est la jacobienne de f au point x_0

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

1.3 Points critiques

Définition 1.3. (Point critique). On appelle point critique, point d'équilibre, point singulier ou point fixe du système (1.2), tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ telle que

$$f(x_0) = 0$$

Définition 1.4. (Point critique hyperbolique). Si la jacobienne $Df(x_0)$ n'a aucune valeur propre de partie réelle nulle, alors le point d'équilibre est dit hyperbolique.

1.3.1 Nature des points critiques.

1. Cas des systèmes linéaires
Soit le système différentiel linéaire

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.3}$$

où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est une matrice constante, $x = (x_1, x_2)$. Le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique. On propose la classification des trajectoires en fonction des valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A. Le comportement de ces trajectoires au voisinage du point critique, détermine le type du point d'équilibre représenté par ce dernier. Il s'agit d'une classification topologique locale. On distingue les différents cas selon les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A

a. λ_1 et λ_2 réelles de signes différents

La singularité est un selle qui est toujours instable

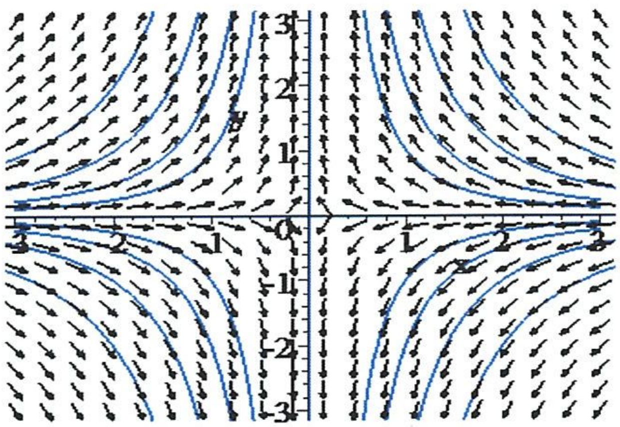

Figure 1.1 : Selle

b. λ_1 et λ_2 réelles de même signe
Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, la singularité est un nœud stable.

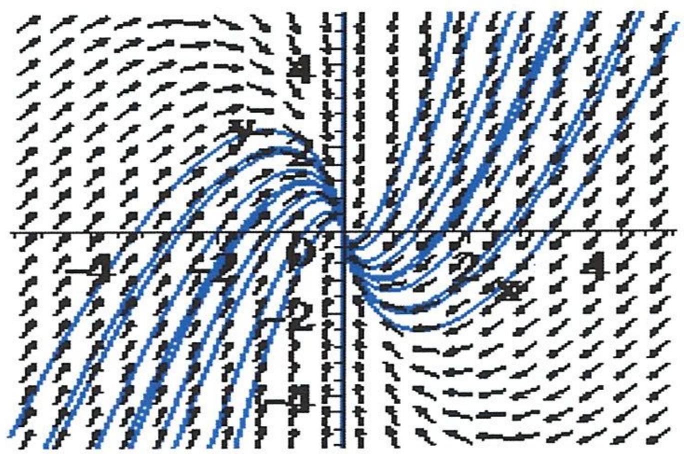

Figure 1.2 : Noeud Stable

Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, la singularité est un nœud instable.

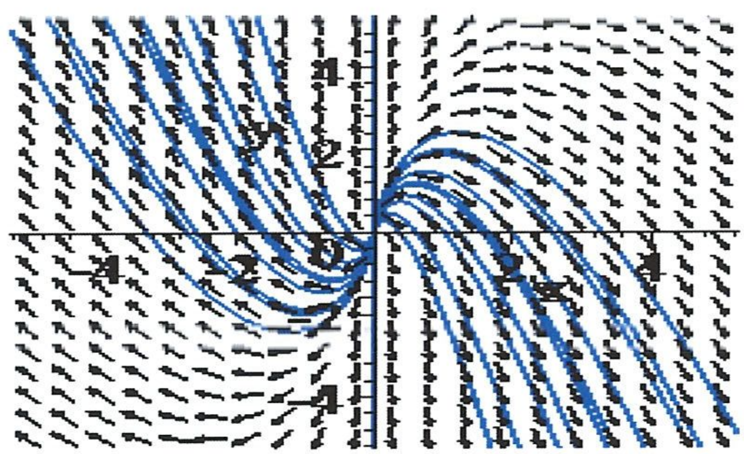

Figure 1.3 : Noeud instable

c. λ_1 et λ_2 complexes conjuguées avec la partie réelle non nulle.
La singularité est un foyer stable ou instable selon le signe de la partie réelle négative ou positive respectivement.

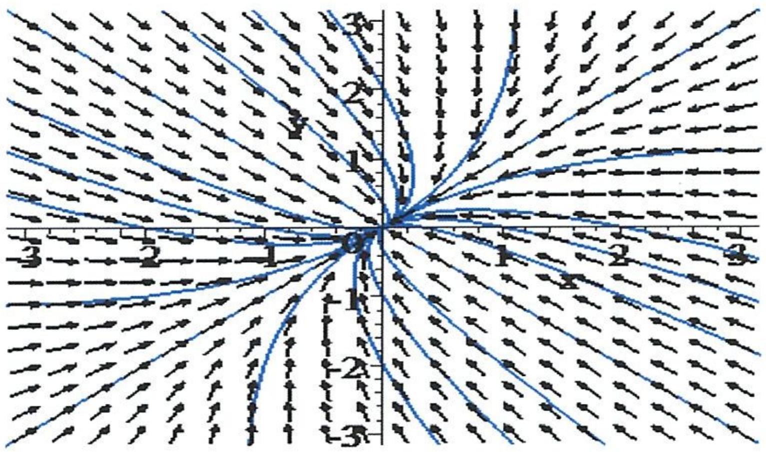

Figure 1.4 : Foyer stable

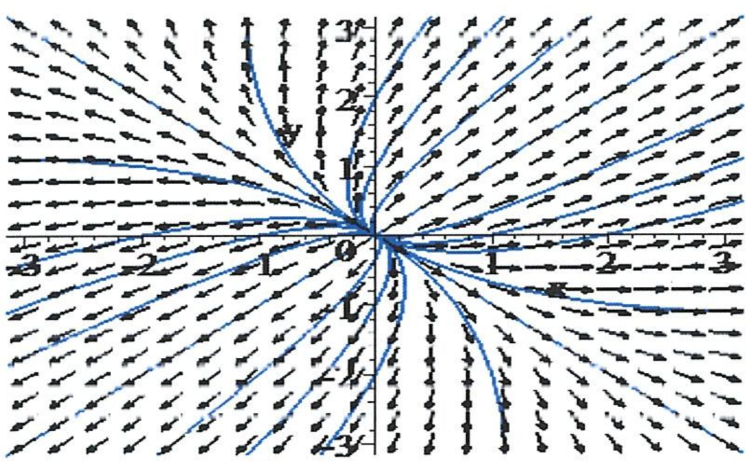

Figure 1.5 : foyer instable

d. λ_1 et λ_2 imaginaires pures. La singularité est un centre

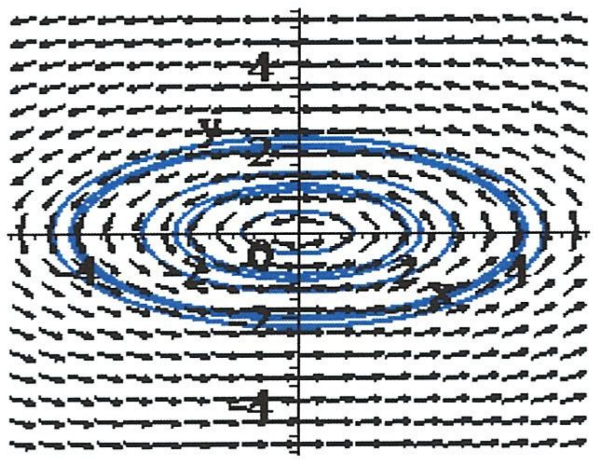

Figure 1.6 : centre

2. Cas des systèmes non linéaires.
Considérons maintenant le système non linéaire (1.2) où $x = (x_1, ..., x_n)$, $f = (f_1, ..., f_n)$. Un point critique x_0 de (1.2) est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives ; il est appelé source si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles positives, il est appelé selle s'il est hyperbolique et si $A = Df(x_0)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.
Théorème 1.1. (Hartman Grobman) Si x_0 est un point d'équilibre hyperbolique de (1.2), alors il existe un voisinage de ce point dans lequel le système $\dot{x} = f(x)$ est topologiquement équivalent a son linéarisé $\dot{x} = Df(x_0)x$.

1.3.2 Stabilité des points critiques

Proposition 1.1. (Stabilité d'un point critique)
i) Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives, alors le point critique x_0 est asymptotiquement stable.
ii) S'il existe au moins une valeur propre de $Df(x_0)$ avec une partie réelle positive, alors le point critique x_0 est instable.

iii) Si en plus des valeurs propres avec des parties réelles négatives il ya des valeurs propres avec des parties réelles nulles, on ne peut rien dire sur la stabilité du point x_0.
Remarque 1.1. Un point critique hyperbolique est soit asymptotiquement stable soit instable.

1.4 Cycles limites

Définition 1.5. (Solution périodique)**.** On appelle solution périodique toute solution $x = \Phi(t)$ de l'équation (1.2) telle qu'il existe un nombre T vérifiant $\Phi(t+T) = \Phi(t)$.
Définition 1.6. (Cycles limites) :Un cycle limite est une solution périodique isolée, c'est à dire qu'il existe un voisinage de ce cycle où on ne peut pas trouver une autre orbite fermée.

Chapitre 2

Méthode de perturbation

2.1 Quelques définitions :

2.1.1 Approximation asymptotique :

Définition 2.1 : Soit $f(\epsilon)$ et $g(\epsilon)$, on dit que $g(\epsilon)$ est une approximation asymptotique de $f(\epsilon)$ quand $\epsilon \longrightarrow \epsilon_0$ si $f = g + o(g)$ quand $\epsilon \longrightarrow \epsilon_0$. Dans ce cas, on écrit $f \sim g$ quand $\epsilon \longrightarrow \epsilon_0$, ceci est équivalent à $\lim_{\epsilon \to \epsilon_0} \frac{f(\epsilon)}{g(\epsilon)} = 1$

2.1.2 Développement asymptotique

Définition 2.2 : On dit que les fonctions $\Phi_1(\epsilon), \Phi_2(\epsilon), \ldots$ forment une suite asymptotique ou qu'elle sont bien ordonnées, quand $\epsilon \longrightarrow \epsilon_0$ si et seulement si $\Phi_{m+1} = o(\Phi_m)$, quand $\epsilon \longrightarrow \epsilon_0$, $\forall m$

Définition 2.3 : Soit $\Phi_1(\epsilon), \Phi_2(\epsilon), \ldots$ une suite asymptotique, alors la fonction $f(\epsilon)$ admet un développement asymptotique si et seulement si :

$$f = \sum_{k=1}^{m} a_k \Phi_k + o(\Phi_m),\ m = 1, 2, \ldots, n \text{ quand } \epsilon \longrightarrow \epsilon_0$$

où les a_k sont indépendantes de ϵ. Dans ce cas, on écrit :

$$f \sim a_1\Phi_1(\epsilon) + a_2\Phi_2(\epsilon) + \cdots + a_n\Phi_n(\epsilon), \text{ quand } \epsilon \longrightarrow \epsilon_0.$$

2.2 Théorie des perturbations :

L'idée de la théorie des perturbations repose sur la possibilité de trouver une solution approchée d'une équation (E_ϵ) dépendante d'un petit paramètre ϵ, en connaissant la solution de cette équation pour une certaine valeur ϵ_0 de ϵ. La méthode consiste à chercher la solution approchée de l'équation (E_ϵ) sous la forme d'un développement en série de puissances du paramètre ϵ. L'équation (E_ϵ) est appelée équation perturbée et sa solution est la solution approximative, et pour $\epsilon \longrightarrow \epsilon_0$, l'équation (E_{ϵ_0}) est appelée équation réduite ou non perturbée et sa solution est la solution exacte.

Théorème 2.1. (Théorème fondamental de la théorie des perturbations). Si

$$A_0 + \epsilon A_1 + \epsilon^2 A_2 + \cdots + O\left(\epsilon^{n+1}\right) = 0$$

pour

$$\epsilon \longrightarrow 0$$

et $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont indépendantes de ϵ, alors

$$A_0 = A_1 = \cdots = A_n = 0.$$

Dans le cas où l'effet du petit paramètre ϵ est faible, la perturbation est dite régulière et la solution approximative est proche de la solution exacte.
Si l'ajout d'un petit terme change radicalement la solution, la perturbation est dite singulière.
On illustre l'idée de base de la théorie des perturbations par des exemples.

2.3 Perturbations régulières

Exemple 2.1. Soit l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} + 2x = 0, x(0) = 1 \tag{2.1}$$

Cette équation, après perturbation est devenue

$$\dot{x} + 2x + \epsilon x^2 = 0 \quad , x(0) = \cosh(\epsilon) \tag{2.2}$$

où ϵ est le paramètre de perturbation $0<\epsilon<<1$, l'idée est de poser

$$x(t, \epsilon) = x_0(t) + x_1(t)\epsilon + x_2(t)\epsilon^2 + \cdots \tag{2.3}$$

En substituant (2.3) dans (2.2) on obtient :

$$(\dot{x}_0 + 2x_0) + \left(\dot{x}_1 + 2x_1 + x_0^2\right)\epsilon + \left(\dot{x}_2 + 2x_2 + 2x_0x_1\right)\epsilon^2 + \cdots = 0 \qquad (2.4)$$

$$x(0) = x_0(0) + x_1(0)\epsilon + x_2(0)\epsilon^2 + \cdots = 1 + \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^4}{24} + \cdots \qquad (2.5)$$

L'équation (2.4) peut être considérée comme un polynôme en ϵ, d'ou on a le système

$$\begin{cases} \epsilon^0] \ \dot{x}_0 + 2x_0 = 0 & , \ x_0(0) = 1 \\ \epsilon^1] \ \dot{x}_1 + 2x_1 = -x_0^2 & , \ x_1(0) = 0 \\ \epsilon^2] \ \dot{x}_2 + 2x_2 = -2x_0x_1 & , \ x_2(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

on obtient les solutions suivantes

$$\begin{cases} x_0(t) = e^{-2t} \\ x_1(t) = \frac{1}{2}(e^{-4t} - e^{-2t}) \\ x_2 = \frac{1}{4}(3e^{-2t} + e^{-6t} - 2e^{-4t}) \end{cases} \qquad (2.6)$$

Donc

$$x(t) = e^{-2t} + \frac{1}{2}(e^{-4t} - e^{-2t})\epsilon + \frac{1}{4}(3e^{-2t} + e^{-6t} - 2e^{-4t})\epsilon^2 + \cdots \qquad (2.7)$$

On remarque dans (2.7) que la coefficient de chaque ϵ^n dans le développement est bornée et comme $0 < \epsilon << 1$, la contribution du $(n+1)^{ème}$ terme est petite comparée au même terme en vue de cela nous pouvons tronquer le développement après le second terme et considérer ceci comme solution approximative de l'équation (2.2) .

Remarque 2.1. Si nous obtenons $x_1(t) = 0$ dans le développement de la solution, on pose alors

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon^2 x_2(t)$$

comme solution approximative.

Plus généralement si $x_1(t) = \cdots = x_{n-1}(t) = 0$ alors la solution approximative est

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon^n x_n(t)$$

Nous avons remplacé l'équation (2.2) qui est non linéaire par un système d'équations linéaires homogènes. Ceci est l'un des avantages majeur de cette approche car il n'y a pas de méthode générale pour résoudre les équations différentielles non linéaires. Cette technique faite pour une équation peut être généralisée pour chercher une solution approximative d'un système d'équations.

Exemple 2.2. Soit le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y + \epsilon y^2 \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + \epsilon x^2 \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 1, \ 0 < \epsilon << 1$$

Posons

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + \cdots$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \cdots \\ y(t) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \cdots \end{cases}$$

après substitution on a à l'ordre ϵ^0, le système

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = -2x_0 + y_0 & x_0(0) = 1 \\ \frac{dy_0}{dt} = x_0 - 2y_0 & y_0(0) = 1 \end{cases}$$

et à l'ordre ϵ^1, le système

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + y_1 + y_0^2 & x_1(0) = 0 \\ \frac{dy_1}{dt} = x_1 - 2y_1 + x_0^2 & y_1(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(0) \\ y_0(0) \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} x_1(0) \\ y_1(0) \end{pmatrix} + \cdots = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} &= e^{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{\begin{pmatrix} -2t & t \\ t & -2t \end{pmatrix}} \left(\int_0^t e^{\begin{pmatrix} 2s & -s \\ -s & 2s \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} e^{-s} \\ e^{-s} \end{pmatrix} ds \right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{pmatrix} + \cdots$$

2.4 Perturbations singulières

Parfois la méthode de perturbations régulière ne donne pas les fonctions $x_n(t)$ bornées, dans ce cas on utilise la méthode des perturbations singulières
Exemple 2.3. Soit l'équation différentielle suivante :

$$\epsilon\ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \tag{2.8}$$

où ϵ est le paramètre de perturbation $0 < \epsilon << 1$, l'idée est de poser

$$x(t,\epsilon) = x_0(t) + x_1(t)\epsilon + x_2(t)\epsilon^2 + \cdots \tag{2.9}$$

En substituant (2.9) dans (2.8) on obtient :

$$(\dot{x}_0 + x_0) + (\ddot{x}_0 + \dot{x}_1 + x_1)\epsilon + (\ddot{x}_1 + \dot{x}_2 + x_2)\epsilon^2 + \cdots = 0 \tag{2.10}$$

L'équation (2.10) peut être considérée comme un polynôme en ϵ, d'ou on a le système

$$\begin{cases} \epsilon^0] & \dot{x}_0 + x_0 = 0 \\ \epsilon^1] & \ddot{x}_0 + \dot{x}_1 + x_1 = 0 \\ \epsilon^2] & \ddot{x}_1 + \dot{x}_2 + x_2 = 0 \end{cases}$$

on obtient les solutions suivantes

$$\begin{cases} x_0(t) = Ae^{-t} \\ x_1(t) = Ae^{-t} + Bte^{-t} \end{cases} \tag{2.11}$$

Donc

$$x(t,\epsilon) = Ae^{-t} + \epsilon\left(Ae^{-t} + Bte^{-t}\right) + \cdots$$

où A et B sont des constante.
On remarque dans l'expression de la solution approchée $x(t)$ que $x_1(t)$ n'est pas bornée. Donc la solution approximative ne s'accorde pas avec la solution exacte.

2.5 Méthode de lindstedt

2.5.1 Principe de la méthode

Si on considère le développement de $\sin((1+\epsilon)t)$

$$\sin((1+\epsilon)t) = \sin t + \epsilon t \cos t - \frac{\epsilon^2 t^2}{2}\sin t + \cdots$$

Si on retient un nombre fini de termes du membre de droit, on obtient une fonction qui est apériodique et non borné quand $t \to +\infty$. Les termes $t^n \cos t$, $t^n \sin t$ s'appellent termes séculaires, ces termes détruisent la périodicité. Une technique pour éviter les termes séculaires est donnée par Lindstedt.
La méthode de Lindstedt s'applique aux équations de la forme :

$$\ddot{x} + x + \epsilon F(x, \dot{x}) = 0 \tag{2.12}$$

La méthode consiste a introduire une transformation de la variable indépendante, cette transformation nous permet de faire entrer les termes séculaires dans les solutions sous forme de série de perturbation de l'équation (2.12).
On illustre la méthode de Lindstedt par l'exemple suivant :
Exemple 2.4. Soit l'équation de Duffing :

$$\ddot{x} + x = \epsilon x^3 \quad , x(0) = k, \ \dot{x}(0) = 0 \tag{2.13}$$

posons $\tau = \omega t$, on obtient

$$\omega^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = \epsilon x^3 \quad , x(0) = k, \ \dot{x}(0) = 0, \ x = x(\tau) \tag{2.14}$$

On pose

$$\begin{aligned} x(\tau) &= x_0(\tau) + \epsilon x_1(\tau) + \epsilon^2 x_2(\tau) + \cdots \\ \omega &= 1 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \cdots \end{aligned}$$

On a

$$\begin{cases} x_0(0) + \epsilon x_1(0) + \cdots = k \\ \omega \dot{x}_0(0) + \omega \epsilon \dot{x}_1(0) + \cdots = 0 \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} x_0(0) = k, \ x_1(0) = 0, \ x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_0(0) = 0, \ \dot{x}_1(0) = 0, \ \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$$

L'équation (2.14) devient

$$\left(1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \cdots\right)^2 \left(\ddot{x}_0(\tau) + \epsilon \ddot{x}_1(\tau) + \epsilon^2 \ddot{x}_2(\tau) + \cdots\right) = \epsilon \left(x_0(\tau) + \epsilon x_1(\tau) + \cdots\right)^3$$

En identifiant les termes de même puissance de ϵ, on a

$$\begin{cases} \epsilon^0] \ \ddot{x}_0(\tau) + x_0(\tau) = 0 \\ \epsilon^1] \ \ddot{x}_1(\tau) + x_1(\tau) = x_0^3(\tau) - 2\omega_1 \ddot{x}_0(\tau) \\ \epsilon^2] \ \ddot{x}_2(\tau) + x_2(\tau) = 3x_0^2(\tau)x_1(\tau) - 2\omega_1 \ddot{x}_1(\tau) - (\omega_1^2 + 2\omega_2)\ddot{x}_0(\tau) \end{cases} \tag{2.15}$$

On obtient de la $1^{ère}$ équation du système (2.15)

$$x_0(\tau) = k\cos(\tau)$$

La seconde équation du (2.15) devient

$$\ddot{x}_1(\tau) + x_1(\tau) = k^3\cos^3(\tau) + 2k\omega_1\cos(\tau)$$

Or

$$\cos^3(\tau) = \frac{1}{4}\left(3\cos(\tau) + \cos(3\tau)\right)$$

donc

$$\ddot{x}_1(\tau) + x_1(\tau) = \left(\frac{3}{4}k^3 + 2\omega_1 k\right)\cos(\tau) + \frac{k^3}{4}\cos(3\tau) \tag{2.16}$$

Le premier terme du second membre de l'équation (2.16) s'appelle terme séculaire, il cause des problèmes pour les éviter on pose

$$\frac{3}{4}k^3 + 2\omega_1 k = 0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{-3k^2}{8}$$

D'où on a

$$\ddot{x}_1(\tau) + x_1(\tau) = \frac{k^3}{4}\cos(3\tau), \qquad x_1(0) = 0,\ \dot{x}_1(0) = 0$$

qui possède la solution suivante

$$x_1(\tau) = \frac{k^3}{4}(\cos(\tau) - \cos(3\tau))$$

La $3^{ème}$ équation du (2.15) s'écrit

$$\ddot{x}_2(\tau) + x_2(\tau) = \cos(\tau)(\frac{21}{128}k^5 + 2\omega_2 k) + T.N.S$$

où T.N.S sont les termes non séculaires, pour les éviter on pose

$$\omega_2 = \frac{21}{256}k^4$$

On a alors

$$x_2(\tau) + x_2(\tau) = T.N.S$$

on trouve

$$x_2(\tau) = \frac{k^5}{1024}(23\cos(\tau) - 24\cos(3\tau) + \cos(5\tau)).$$

Ainsi

$$x(t) = k\cos(\omega\tau) + \frac{\epsilon k^3}{32}(\cos(\omega t) - \cos(3\omega t)) + \cdots$$

où

$$\omega = 1 - \frac{3\epsilon k^2}{8} + \cdots$$

Remarques 2.2.

1] Le second membre des équations ne doit pas contenir des multiples de $\cos(\tau)$ et $\sin(\tau)$ sinon il y aura des termes séculaires.

2] Cette méthode ne donne pas toutes les solutions de l'équation différentielle car on a supposé que chaque $x_n(t)$ est périodique. La méthode de Lindstedt donne seulement les solutions périodiques.

3] En général, pour une valeur de k quelconque il n'existe pas de solution périodique.

2.5.2 Conditions pour obtenir une solution périodique

Soit le problème

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = \epsilon F(x, \dot{x}) \\ x(0) = A, \ \dot{x}(0) = 0, \ 0 < \epsilon << 1 \end{cases} \tag{2.17}$$

On suppose que F est un polynôme en $\dot{x}$ et x, posons

$$\tau = \omega t$$

où

$$\omega = 1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \cdots \tag{2.18}$$

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \epsilon x_1(\tau) + \epsilon^2 x_2(\tau) + \cdots \tag{2.19}$$

Après substitution de (2.18) et (2.19) dans l'équation (2.17), on obtient le système linéaire

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 + x_0 = 0 \quad , x_0(0) = A, \ \dot{x}_0(0) = 0 \\ \ddot{x}_1 + x_1 = -2\omega_1\ddot{x}_0 + F(x_0, \dot{x}_0) \quad , x_1(0) = 0, \ \dot{x}_1(0) = 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

des équations différentielles du premier ordre pour $A(t)$ et $\Phi(t)$. On a

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \sin^m(x)\cos^n(x)dx$$

$$I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} = I_{m-2,n} \tag{3.9}$$

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} = I_{m,n-2} \tag{3.10}$$

on descend jusqu'à arriver à : $I_{0,0} = 2\pi$ ou $I_{0,1} = I_{1,0} = I_{1,1} = 0$ notons que $I_{m,n} \neq 0$ seulement pour m et n pairs

Exemple 3.1 : Soit l'équation de van der Pol

$$\ddot{x} + x - \epsilon\left(1 - x^2\right)\dot{x} = 0$$

D'après la méthode de moyennisation, on a

$$f(x, \dot{x}) = -\left(1 - x^2\right)\dot{x}$$

écrivons le système (3.8)

$$\dot{A}(t) = -\frac{\epsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} A(1 - A^2\sin^2\theta)\cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{\epsilon A}{2\pi}(I_{0,2} - A^2 I_{2,2})$$

$$= \frac{\epsilon A}{2\pi}\left(\frac{1}{2}2\pi - A^2\frac{1}{4}\frac{1}{2}2\pi\right)$$

$$= \frac{\epsilon A}{8}(4 - A^2)$$

On a

$$\int \frac{dA}{A(2-A)(2+A)} = \frac{\epsilon}{8}\int dt$$

$$\frac{1}{A\left(2-A\right)\left(2+A\right)} = \frac{1}{4A} + \frac{1}{8\left(2-A\right)} - \frac{1}{8\left(2+A\right)}$$

$$\ln\left(\frac{A^2}{c\,(4-A^2)}\right)=\varepsilon t$$

posons

$$A\,(0)=A_0\Rightarrow c=\frac{A_0^2}{4-A_0^2}$$

d'où

$$A^2\,(t)=\frac{\frac{4A_0^2}{4-A_0^2}e^{\varepsilon t}}{1+\left(\frac{A_0^2}{4-A_0^2}\right)e^{\varepsilon t}}$$

donc

$$A(t)=\frac{2}{\left[\left(\frac{4}{A_0^2}-1\right)e^{-\varepsilon t}+1\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$A(t)\to 2$ quand $t\to+\infty$ indépendamment de A_0

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}\,(t) &= \frac{-\varepsilon}{2\pi A}\int_0^{2\pi}A\left(1-A^2\sin^2(\theta)\right)\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta\\ &= \frac{-\varepsilon}{2\pi}\left(I_{1.1}-A^2I_{3.1}\right)=0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\Phi\,(t)=\Phi\,(0)=\Phi_0=cnst$$

La solution est donnée approximativement par

$$\begin{cases} x\,(t)=A\,(t)\sin\left(\omega t+\Phi\,(t)\right)\\ \dot{x}\,(t)=A\,(t)\,\omega\cos\left(\omega t+\Phi\,(t)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases} x\,(t)=\dfrac{2}{\left[\left(\frac{4}{A_0^2}-1\right)e^{-\varepsilon t}+1\right]^{\frac{1}{2}}}\sin\left(t+\Phi_0\right)\\ \dot{x}\,(t)=\dfrac{2}{\left[\left(\frac{4}{A_0^2}-1\right)e^{-\varepsilon t}+1\right]^{\frac{1}{2}}}\cos\left(t+\Phi_0\right)\end{cases}$$

Donc

$$x^2+y^2=\frac{4}{\left(\frac{4}{A_0^2}-1\right)e^{-\varepsilon t}+1}$$

Si $A_0=2$ alors $x^2+y^2=4$

3.2 Méthode de moyennisation du premier ordre pour les solutions périodiques

On considère le système différentiel a valeur initiale suivant

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F(t, x(t)) + \varepsilon^2 R(t, x(t), \varepsilon), x(0) = x_0 \tag{3.11}$$

avec $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, D un domaine borné et $t \geq 0$. On suppose que $F(t, x)$ et $R(t, x, \varepsilon)$ sont T -périodiques en t. Le système moyenné associé au système (3.11) est défini par

$$\dot{y}(t) = \varepsilon f^0(y(t)), y(0) = x_0 \tag{3.12}$$

où

$$f^0(y) = \frac{1}{T}\int_0^T F(s, y)\, ds \tag{3.13}$$

Le théorème suivant nous donne les conditions pour lesquelles les point singuliers du système moyenné (3.12) fournissent des solutions périodiques du système (3.11)

Théorème 3.1. Considérons le système (3.11) et supposons que les fonctions vectorielle F, R, D_xF, D_x^2F et D_xR sont continues et bornées par une constante K (indépendante de ε) dans $[0, \infty[\times D$ avec $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. De plus, on suppose que F et R sont T- périodiques en t avec T indépendante de ε.

1) Si $p \in D$ est un point singulier du système moyenné (3.12) tel que

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0$$

alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T- périodique $x_\varepsilon(t)$ du système (3.11) telle que $x_\varepsilon(t) \to p$ quand $\varepsilon \to 0$

2) Si le point singulier $y = p$ du système moyenné (3.12) est hyperbolique alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit la solution périodique correspondante $x_\varepsilon(t)$ du système moyenné (3.11) est unique, hyperbolique et de même type de stabilité que p.

Exemple 3.2 : Considérons l'équation de van der Pol

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}$$

qui peut être écrite sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon\left(1 - x^2\right) y \end{cases} \tag{3.14}$$

En coordonnées polaire (r, θ) où $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r\left(1 - r^2\cos^2\theta\right)\sin^2\theta \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon\cos\theta\left(1 - r^2\cos^2\theta\right)\sin\theta \end{cases}$$

ou d'une manière équivalente

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r\left(1 - r^2\cos^2\theta\right)\sin^2\theta + O\left(\varepsilon^2\right)$$

de (3.13) on obtient

$$\begin{aligned} f^0(r) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\left(1 - r^2\cos^2\theta\right)\sin^2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{8}r\left(r^2 - 4\right) \end{aligned}$$

La seule racine positive de $f^0(r)$ est $r = 2$. Comme $\left(\frac{df^0}{dr}\right)(2) = 1$, d'après le Théorème 3.1, il suit que le système (3.14) pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit, admet un cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique de rayon 2 du système non perturbé (3.14) avec $\varepsilon = 0$. De plus, comme $\left(\frac{df^0}{dr}\right)(2) = 1 > 0$, ce cycle limite est instable.

Proposition 3.1 : le système de Liénard de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x^k\right) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \tag{3.15}$$

avec ε suffisamment petit et $a_n \neq 0$ a au plus $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ cycles limites bifurquant des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$, et il y a des exemples avec exactement $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ cycles limites. Ici $[.]$ désigne la fonction partie entière.

Preuve 3.1. En écrivant le système (3.15) en coordonnées polaires (r, θ) ou $x = r\cos\theta$ et $r\sin\theta$, on obtient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon\sum_{k=1}^{n} a_k r^k \cos^{k+1}\theta \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon\sin\theta\sum_{k=1}^{n} a_k r^{k-1}\cos^k\theta \end{cases}$$

En divisant $\dot{r}$ par $\dot{\theta}$, on trouve

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon \sum_{k=1}^{n} a_k r^k \cos^{k+1}\theta + O\left(\varepsilon^2\right).$$

Alors on a

$$f^0\left(r\right) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} a_k r^k \int_0^{2\pi} \cos^{k+1}\theta \; d\theta = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}} a_k b_k r^k = p\left(r\right)$$

où $b_k = \int_0^{2\pi} \cos^{k+1}\theta \; d\theta \neq 0$ si k est impair. Alors on applique le Théorème 3.1, puisque le polynôme $p(r)$ a au plus $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ racines positives, et on peut choisir les coefficients a_k avec k impair telles que $p(r)$ a exactement $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ racines positives simples, le résultat de la proposition suit immédiatement.

3.3 Autre méthode de moyennisation du premier ordre pour les solutions périodiques

On considère le problème de la bifurcation des solutions T- périodiques du système différentiel

$$\dot{x}\left(t\right) = F_0\left(x,t\right) + \varepsilon F_1\left(x,t\right) + \varepsilon^2 F_2\left(x,t,\varepsilon\right) \tag{3.16}$$

Avec ε suffisamment petit. Les fonctions $F_0, F_1 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et $F_2 : \Omega \times \mathbb{R}\times \left]-\varepsilon_0, \varepsilon_0\right[\to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions C^2, T- périodiques en t et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. on suppose que le système non perturbé

$$\dot{x}\left(t\right) = F_0\left(x,t\right) \tag{3.17}$$

a une sous-variété de dimension k de solutions périodiques. Soit $x\left(t,z\right)$ la solution du système non perturbé (3.17) telle que $x(0,z) = z$. La linéarisation du système non perturbé (3.17) le long de la solution périodique $x\left(t,z\right)$ est écrite comme

$$\dot{y} = D_x F_0\left(x\left(t,z\right), t\right) y \tag{3.18}$$

Dans la suite, on note par $M_z\left(t\right)$ la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (3.18) et par $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ la projection de $\mathbb{R}^n$ sur ses k premières coordonnées ; i. e. $\xi\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \left(x_1,\ldots,x_k\right)$.

Théorème 3.2 : Soit $V \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert borné, $\beta_0 : \bar{V} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction C^2. On suppose que

(i) $Z = \left\{ z_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in \bar{V} \right\} \subset \Omega$ et que pour chaque $z_\alpha \in Z$ la solution $x(t, z_\alpha)$ de (3.17) est T- périodique.

(ii) pour chaque $z_\alpha \in Z$, il existe une matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(t)$ de (3.18) telle que la matrice $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$ contient dans le haut coin droit la matrice nulle de dimension $k \times (n-k)$ et dans le bas coin droit une matrice $\Delta_\alpha\,((n-k) \times (n-k))$ avec $\det \Delta_\alpha \neq 0$.

On considère la fonction $F : \bar{V} \longrightarrow \mathbb{R}^k$

$$F(\alpha) = \xi \left(\int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t)\, F_1(x(t, z_\alpha), t)\, dt \right) \tag{3.19}$$

S'il existe $a \in V$ telle que $F(a) = 0$ et $\det\left(\left(\frac{dF}{d\alpha}\right)(a) \right) \neq 0$, alors il existe une solution T périodique $\varphi(0, \varepsilon) \longrightarrow z_\alpha$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Corollaire 3.1 : On suppose qu'il existe un ensemble ouvert et borné V avec $\bar{V} \subset \Omega$ telle que pour chaque $z \in \bar{V}$, la solution $x(t, z)$ est T- périodique et on considère la fonction $F : \bar{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$F(z) = \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t)\, F_1(x(t, z_\alpha), t)\, dt \tag{3.20}$$

S'il existe $a \in V$ avec $F(a) = 0$ et $\det\left(\left(\frac{dF}{d\alpha}\right)(a) \right) \neq 0$, alors il existe une solution T périodique $\varphi(0, \varepsilon) \longrightarrow z$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Exemple 3.3. On considère l'équation suivante

$$\dddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = \varepsilon(2 + \cos t)\left(x^2 + 2x^3\right). \tag{3.21}$$

Si $y = \dot{x}$, $z = \ddot{x}$, l'équation (3.21) peut être écrite sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = x - y + z + \varepsilon(2 + \cos t)\left(x^2 + 2x^3\right) \\ \quad = x - y + z + \varepsilon F(x, y, z, t) \end{cases} \tag{3.22}$$

L'origine est l'unique point d'équilibre du système (3.22) lorsque $\varepsilon = 0$. La partie linéaire du système (3.22) avec $\varepsilon = 0$ à l'origine est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $\pm i$ et 1. Avec la transformation linéaire inversible $(X, Y, Z)^t = B\,(x, y, z)^t$, on transforme le système (3.22) en un autre système dont sa partie linéaire est la forme de Jordan réelle de la partie linéaire du système (3.22) avec $\varepsilon = 0$, c.-à-d. $\left(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}\right)^t = J\,(X, Y, Z)^t$, où J est la forme de Jordan réelle de la matrice A donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$BAB^{-1} = J \Rightarrow BA - JB = 0$$

D'où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - y \\ Y = -y + z \\ Z = x + z \end{cases}$$

et

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{X-Y+Z}{2} \\ y = \frac{-X-Y+Z}{2} \\ z = \frac{-X+Y+Z}{2} \end{cases}$$

Le nouveau système s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \tilde{F}\,(X, Y, Z, t) \\ \dot{Z} = Z + \varepsilon \tilde{F}\,(X, Y, Z, t) \end{cases} \tag{3.23}$$

$$\tilde{F}\,(X, Y, Z, t) = F\left(\frac{X - Y + Z}{2}, \frac{-X - Y + Z}{2}, \frac{-X + Y + Z}{2}, t\right)$$

Pour $\varepsilon = 0$, la solution du système $(3.23)_{\varepsilon=0}$ est

$$\begin{pmatrix} X\,(t) \\ Y\,(t) \\ Z\,(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ X_0 \sin t + Y_0 \cos t \\ Z_0 e^t \end{pmatrix}$$

Avec les notations introduites dans le théorème 3.2, le système (3.23) est similaire au système (3.16) avec

$$\begin{aligned} x &= (X, Y, Z), \; F_0(x,t) = (-Y, X, Z) \\ F_1(x,t) &= \left(0, \tilde{F}, \tilde{F}\right) \text{ et } F_2(x,t,\varepsilon) = (0,0,0) \end{aligned}$$

Soit $x(t, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon)$ la solution du système (3.23) telle que

$$x(0, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0)$$

Le système (3.23) avec $\varepsilon = 0$ a un centre linéaire à l'origine dans le plan (X, Y) qui est un plan invariant par le flot du système non perturbé, et les solutions périodiques de ce centre sont

$$x(t, X_0, Y_0, 0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t))$$

telle que

$$X(t) = X_0 \cos t - Y_0 \sin t, \; Y(t) = X_0 \sin t + Y_0 \cos t, \; Z(t) = 0 \qquad (3.24)$$

Notons que ces solutions sont 2π périodiques. Pour notre système le V et le α du théorème 3.2 sont

$$V = \left\{(X, Y, 0) : 0 < X^2 + Y^2 < \rho\right\} \text{ pour } \rho > 0 \text{ et } \alpha = (X_0, Y_0) \in V$$

La matrice fondamentale $M(t)$ du système (3.23) avec $\varepsilon = 0$ par rapport à la solution périodique (3.24) telle que $M(0) = I$ est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

On remarque qu'elle est indépendante des conditions initiales $(X_0, Y_0, 0)$ et on a

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi} \end{pmatrix}$$

On a $(1 - e^{-2\pi}) \neq 0$. Alors toutes les conditions du théorème 3.2 sont satisfaites.

Par conséquent, on doit étudier les zéros $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$ des deux premières composantes $(\mathcal{F}_1(\alpha), \mathcal{F}_2(\alpha))$ de la fonction $\mathcal{F}(\alpha)$ donnée dans (3.19)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \sin t\ \tilde{F}(x(t, X_0, Y_0, 0, 0), t)\ dt \qquad (3.25) \\
&= \int_0^{2\pi} \sin t\ F\left(\frac{X(t)-Y(t)}{2}, -\frac{X(t)+Y(t)}{2}, \frac{-X(t)+Y(t)}{2}, t\right)\ dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \cos t\ \tilde{F}(x(t, X_0, Y_0, 0, 0), t)\ dt \qquad (3.26) \\
&= \int_0^{2\pi} \cos t\ F\left(\frac{X(t)-Y(t)}{2}, -\frac{X(t)+Y(t)}{2}, \frac{-X(t)+Y(t)}{2}, t\right)\ dt
\end{aligned}$$

où $X(t)$ et $Y(t)$ sont données par (3.24). On pose $\mathcal{F}(\alpha) = (f_1(X_0, Y_0), f_2(X_0, Y_0))$ et on intègre (3.25) et (3.26) on obtient

$$\begin{cases} f_1(X_0, Y_0) = \frac{-1}{16}(X_0 + Y_0)(6X_0^2 + X_0 + 6Y_0^2 - Y_0) \\ f_2(X_0, Y_0) = \frac{3}{8}(-X_0^2 Y_0 + X_0 Y_0^2) - \frac{3}{8}(X_0^3 - Y_0^3) + \frac{1}{8}(X_0^2 + Y_0^2) - \frac{1}{8} X_0 Y_0 \end{cases}$$

Si $f_1(X_0, Y_0) = f_2(X_0, Y_0) = 0$, on trouve $(X_0^*, Y_0^*) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. On a

$$\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(X_0, Y_0)}\right)_{|(X_0, Y_0) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{2048} \neq 0.$$

Alors pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, il existe une solution 2π-périodique du système différentiel (3.23) telle que

$$x(0, \varepsilon) \to -\frac{1}{4},\ \dot{x}(0, \varepsilon) \to 0,\ \ddot{x}(0, \varepsilon) \to \frac{1}{4}$$

Quand $\varepsilon \to 0$

Bibliographie

[1] N. Berglund, *Perturbation Theory of dynamical systems. Lecture Notes.* ETH. Zurich Switzerland. 2001.

[2] N. N. Bogoliubov and Yu. A. Mitropolski. *Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations.* Gordon and Breach. New york. 1961.

[3] A. Buica, J. P. Françoise et J. Llibre. *Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter.* Comm. Pure Appl. Anal 6 n° 1. 2007. P. P. 103-111.

[4] A. Cima, J. Llibre and M. A. Teixeira. *Limit cycles of some polynomial differential systeml in dimension 2, 3 and 4 via averaging theory. Applicable Analysis.* 87. (2008), 149-164.

[5] M. H. Holmes, *Introduction to perturbation Methods.* Second edition. Texts in applied Mthematics 20 Springer. New york. 2013.

[6] J. Kevorkian and J.D. Cole, "*Perturbation Methods in Applied mathematics,*" Springer-Verlag, New York, 1981.

[7] H.K. Khalil. . *Nonlinear systems*, Prentice Hall (1996)

[8] N. M. Krylov and Bogoliubov. *Introduction to nonlinear mechanics (in Russian), Izd.* ANUKSSR, Kiev, 1937. Vvedenie v Nelineinikhu Mekhaniku

[9] A. Makhlouf. *Systèmes dynamiques.* Cours 1^{ere} année P. G. Univ Annaba. 2002/2003 .

[10] A. H. Nayfeh, *Introduction to perturbation techniques*, J.Wiley and sons, iNC. 1993.

[11] A. H. Nayfeh, *Perturbation Methods,* Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, Weinheim 2004.

[12] R. H. Rand and D. Armbruster, *Perturbation Methods, Bifurcation Theory and Computer Algebra. Springer*-Verlag. New York. 1987.

[13] J. A. Sanders and F. Verhulst. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems.* Applied Mathematical Sciences 59. Springer. New york. 1985.

[14] J.G. Simmonds and J.E. Mann, Jr., "*A First Look at Perturbation theory,*" second edition, Dover Publications, Inc. 1998.

[15] F. Verhulst. *Nonlinear Di erential Equations and Dynamic Systems*, p.340, Springer-Verlag, New York (2000).

[16] T. Weinhart, A. Singh, A. R. Thornton, *Perturbation Theory and Stability Analysis*, University of Twente 2010.