République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

**Mémoire**

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master en Mathématiques**

Option : **EDP et Analyse numérique**

Par :

**BENCHEIKH Nessma**



# Intitulé

## SPECTRE PONCTUEL D'UN CERTAIN OPÉRATEUR DE TRANSPORT

**Dirigé par : Dr LARRIBI Naima**

**Devant le jury**

| | | | |
|---|---|---|---|
| PRESIDENT | Dr: BELAOUER Djamel | MCA | Univ-Guelma |
| RAPPORTEUR | Dr: LARRIBI Naima | MCB | Univ-Guelma |
| EXAMINATEUR | Dr: GUEBBAI Hamza | MCA | Univ-Guelma |

**Session Juin 2018**

# Table des matières

# *Remerciements*

Je *tiens tout d'abord à remercier Allah de m'avoir donné la patience pour accomplir ce petit travail*

*J'adresse mes remerciements les plus sincères à mon encadreur **Mme : Laribi Naima** pour les conseils et le temps précieux qu'il m'a consacré durant ce travail*

*J'adresse mes sincères remercient à monsieur **Belaouar Djamel** qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider ce jury*

*Je remercie chaleureusement monsieur **Guebbai Hamza** de m'avoir fait l'honneur d'accepter de faire partie de ce jury*

*Merci à toutes les personnes qui sont venues assister à ma soutenance.*

# *Dédicace*

*Je dédie ce travail :*

*A mon père et ma mère.*

*A mes sœurs Leila et warda et ma frères Said.*

*A mon fiancé Abd Esslame.*

*A mes proches et amies Hena , Abla , Halima et Merieme, Hanane.*

*A les fils des frères.*

# Résumé


Dans ce travail, on étudie le spectre ponctuel d'un opérateur de transport avec un potentiel exponentiellent déroissant, défini par :

$$(Lf)(x,\mu) = -i\mu f_x(x,\mu) + c_0(x)\int_{-1}^{1} f(x,\mu')\,d\mu',$$
$$x \in \mathbb{R},\ \mu \in (-1,1)$$

où $D = \mathbb{R} \times [-1,1]$, avec un domaine de définition maximal et un potentiel qui décroit exponentiellement. On transforme l'opérateur de transport au modèle de Friedrichs.

# Abstract

In this work we présent the result of finite of the point spectrum of transport operator who défined by :

$$\begin{aligned}(Lf)(x,\mu) &= -i\mu f_x(x,\mu) + c_0(x)\int_{-1}^{1} f(x,\mu')\,d\mu',\\ &x\in\mathbb{R},\ \mu\in(-1,1)\end{aligned}$$

where $D=\mathbb{R}\times[-1,1]$ and $c_0(x)$ a exponentialy decreasing function. We transform this operator to the Friedrichs' model.

# Introduction

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude du spectre ponctuel d'un opérateur de transport, on transforme l'opérateur de transport sous la forme du modèle de Friedrichs pour simplifier beaucoup de calculs spectraux. Ce problème a été étudie par plusieurs travaux comme Lehner et Naboko (*voir* [7] , [11])

En utilisant la théorie des opérateurs non auto-adjoints qui jouent à présent un grand role dans des domaines différents de la physique mathématiques où beaucoups de problèmes peuvent être modélisés par des équations au dérivées partielles qui constituent aujourd'hui un des thèmes majeurs.

Dans le premier chapitre nous avons rappelé quelques résultats classiques et définitions dans nous ferons usage dans ce travail (voir [11]) .

Ensuite, dans le deuxième chapitre nous donnons le modèle de Friedrichs de l'opérateur de transport défini par (voir [3])

$$\begin{aligned}(Lf)(x,\mu) &= -i\mu\frac{\partial f}{\partial x}(x,\mu) + c_0(x)\int_{-1}^{1} f(x,\mu')\,d\mu' \\ x &\in \mathbb{R},\ \mu \in (-1,1)\end{aligned}$$

dans l'espace $L^2(D)$ où $D = \mathbb{R} \times [-1,1]$
$c_0(x)$ est le potentiel de l'opérateur $L$ supposé être une fonction exponentiellement décroissante, autrement dit :

$$|c_0(x)| \leq c e^{-\epsilon|x|}, \quad c > 0, x \in \mathbb{R}.$$

et est factorisé de sorte que :

$$c_0(x) = \overline{c_{01}(x)}c_{02}(x), \quad |c_{01}(x)| = |c_{02}(x)|$$

En utilisant la transformation de Fourier à l'opérateur de transport et en appliquant un changement de variable, on obtient le modèle de Friedrichs qui est unitairement équivalent à l'opérateur de transport $L$ défini plus haut.
Cette forme nous a permis d'étudier le spectre de cet opérateur directement à l'aide de la résolvante ce qui évité des calculs trés compliqués.

Dans le troisième chapitre nous avons donné l'étude de la résolvante du modèle Friedrichs ensuite en va donner le théorème de finitude du spectre ponctuel de l'opérateur de transport étudier (voir [3]) .

# Chapitre 1

# Définitions et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, on va rappeler quelques résultats et définitions dont on aura besoin dans la suite (voir [4] , [5] , [14]) .

## 1.1 Opérateurs

Soient $H$ et $H'$ deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$ (voir [5], [14]).

**Definition 1** *Toute application linéaire continue $T : H \to H'$ s'appelle un opérateur. L'espace vectoriel $L(H, H')$ des applications linéaires continues de $H$ dans $H'$ est l'espace des opérateurs de $H$ dans $H'$.*

### 1.1.1 Adjoint d'un opérateur

**Definition 2** *Soit $T \in L(H, H')$. Alors il existe un opérateur unique $T^* \in L(H,H')$, tel que :*

$$\forall x \in H,\ \forall y \in H', \langle Tx, y\rangle_{H'} = \langle x, T^*y\rangle_{H}$$

*l'opérateur $T^*$ s'appelle l'adjoint de $T$.*

### 1.1.2 Opérateurs bornés

**Definition 3** *$T$ est dit borné s'il existe une constante $c > 0$, telle que*

$$\|Tu\| \leq c\|u\|, \quad \forall u \in X.$$

### 1.1.3 Inverse d'un opérateur

**Definition 4** *Soit $E$ et $F$ deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E,F)$ un opérateur linéaire quelconque. On dit que $A$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que : $A \circ B = I_F$ et $B \circ A = I_E$ où $I_E$ (respectivement $I_F$) est l'opérateur identité de $E$ (respectivement $F$) .Un tel opérateur $B$ .(lorsqu'il existe) est unique on l'appelle inverse de $A$ et on le note : $B = A^{-1}$.*

### 1.1.4 Opérateurs isométriques,unitaires

**Definition 5** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Hilbert.*

*1. Un opérateur $U \in \pounds(E,F)$ est appelé unitaire si $U^*U = Id_E$ et $UU^* = Id_F$.*

*2. Un opérateur $U \in \pounds(E,F)$ est appelé isométrique si $\|U(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.*

**Proposition 6** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*1. $T$ est unitaire.*

*2. $T$ est surjective et $T^*T = Id_E$.*

*3. $T$ est une isométric surjective.*

### 1.1.5 Opérateur compact

**Definition 7** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Hilbert Une application linéaire continue $T \in \pounds(E,F)$ est dite compacte si l'image $T(B_E)$ est une partie relativement compacte de $F$. On note $K(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de $E$ dans $F$. On pose $K(E) = K(E,E)$.*

*$A$ est dit compact si l'image de la boule unité de $X$ est relativement compacte pour la topologie forte.*

### 1.1.6 Relativement compact

**Definition 8** *On dit qu'une partie $B$ incluse dans un espace séparé $E$ est relativement compact si son adhérence $\overline{B}$ est compact.*

### 1.1.7 Opérateur de multiplication

**Definition 9** *Un opérateur $T$ défini par multiplication par une fonction fixe est appllée opérateur de multiplication.*

### 1.1.8 L'ensemble résolvant, la résolvante et spectre d'un opérateur

**Definition 10** *l'ensemble résolvant d'un opérateur linéaire $A$ est un ouvert du plan complexe défini par :*

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda I - A : D(A) \longrightarrow X \text{ est bijectif et} \\ &\qquad\qquad (\lambda I - A)^{-1} : X \mapsto X \text{ est borné}\}. \end{aligned}$$

*Le complémentaire, dans le plan complexe de $\rho(A)$ est le spectre de $A$, $\sigma(A) = \mathbb{C}/\rho(A)$. Pour $\lambda \in \rho(A)$, on note $R(\lambda, A)$ la résolvante de $A$ au point $\lambda$ et*

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

*La fonction $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ est holomorphe dans $\rho(A)$ et à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$.*

### 1.1.9 Spectre ponctuel

**Definition 11** *Le spectre ponctuel d'un opérateur linéaire $A$ est constitué des valeurs propres de $A$ :*

$$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}, (\lambda I - A) \text{ n'est pas injectif}\}$$

## 1.2 Fonction holomorphe, analytique et prolongement analytique

### 1.2.1 Fonction holomorphe

**Definition 12** *Soit l'application $f : \Omega \longrightarrow E$, où $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{C}.f$ est holomorphe si est seulement si pour tout $a \in \Omega$, la limite*

$$f'(a) = \lim_{z \longrightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

*existe dans $E$.*

### 1.2.2 Fonction Analytique

**Definition 13** *Une fonction analytique est une fonction d'une variable réelle ou complexe qui est devloppable en série entière au voisinage de chacun des point de son domaine de définition , c'est-à-dire pour tout $x_0$ de ce domaine, il existe une suite $(a_n)$ donnant une expression de la fonction, valable pour tout $x$ assez proche de $x_0$, sous la forme d'une série convergent :*

$$f(x) = \sum_{n-0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

*Toute fonction analytique est dérivable de dérivée analytique, ce qui implique que toute fonction analytique est indéfiniment dérivable , mais la réciproque est fausse en* *analyse réelle . En analyse complexe, toute fonction simplement dérivable sur un ouvert est analytique et vérifie de nombreuses autres propriétés*

### 1.2.3 Prolongement analytique

**Definition 14** *Soit $f$ une fonction analytique dans un domaine ouvert $D_0$, soit $D_1$ un autre domaine ouvert tel que $D_0 \cap D_1 \neq \phi$. On dit que $f$ admet un prolongement analytique dans $D_1$ s'il existe une fonction $g$, analytique dans $D_1$, telle que $f = g$ dans $D_0 \cap D_1$ : D'aprés le théorème d'unicité, un tel prolongement est nécessairement unique.*

**Théorème 1.2.1** *(théorème de Gohberg (th 5.1 [4])) Soit $K(\zeta)$ une fonction opératorielle holomorphe et compacte sur un ouvert $G$ sauf peut être aux points isolés si $1 - K(\zeta)$ est inversible au moins en un point $\zeta_0 \in G$ alors $1 - K(\zeta)$ est inversible et à inverse borné sur tout $G$ sauf aux points isolés.*

## 1.3 Equation de transport et opérateur de transport

L'équation de transport s'écrit sous la forme générale :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v\vec{\Omega} \nabla u + \sigma u - \int_{S^2} f(x, \Omega, \Omega') u(x, v\Omega') d\Omega' = 0 \\ u(v, v\vec{\Omega}, t) = 0 \qquad si \qquad x \in \partial\Omega, \qquad v.\vec{\Omega} < 0 \\ u(x, v\vec{\Omega}, 0) = u_0(x, v\vec{\Omega}). \end{cases} \tag{1.1}$$

Dans (1.1) $u$ désigne une fonction scalaire représentant la quantité de neutrons située à l'instant $t$ au poit $x$ et animés de la vitesse $v.\vec{\Omega}$; $x$ appartient à un ouvert $X$ de $\mathbb{R}^3$, de frontière régulière $\partial X$, on notera $v$ la normale extérieure à $\partial X$ en tout point $x \in X$, $\vec{\Omega}$ appartiendra à la sphère unité et $v$ à $\mathbb{R}_+$, on notera $V$ l'ensemble des points $v\vec{\Omega}$; $\frac{\partial}{\partial t} + v\vec{\Omega}$. $\nabla$ représente la différence entre ce qui rentre dans un élément volume et ce qui en sort. $\sigma$ représente un terme d'absorption et d'émission et le terme intégrale représente la quantité de neutrons qui repartiront dans la direction $v\vec{\Omega}$ aprés être arrivés dans la direction

$v\vec{\Omega}'$ et avoir eu leurs trajectoires modifiées.

On définit l'opérateur de transport par :

$$Tu = -v\vec{\Omega} \bigtriangledown u - \sigma u + \int_{S^2} f(x, \Omega, \Omega') u(x, v\Omega') d\Omega'$$

# Chapitre 2

# Modèle de Friedrichs

Dans ce chapitre, on va donner le modèle de Friedrichs de l'opérateur de transport défini par la suite (voir [3]).

## 2.1 Cadre fonctionnel

On considère dans l'espace $L^2(D)$ où $D = [-\infty, \infty] \times [-1, 1]$, l'opérateur de transport

$$\begin{aligned} (Lf)(x, \mu) &= -i\mu f_x(x, \mu) + c_0(x) \textstyle\int_{-1}^{1} f(x, \mu')\, d\mu', \\ & x \in \mathbb{R},\ \mu \in (-1, 1) \end{aligned} \tag{2.1}$$

On introduit l'espace de Hilbert $H$ des fonction $\varphi(s, \mu)$, $(s, \mu) \in \mathbb{R} \times [-1, 1]$,

$$H = \left\{ \varphi(s, \mu) : \int_R \int_{-1}^{1} |\varphi(s, \mu)|^2 \frac{1}{|\mu|} ds d\mu < \infty \right\} \tag{2.2}$$

avec la norme

$$\|\varphi\|_H^2 = \int_R \int_{-1}^{1} |\varphi(s, \mu)|^2 \frac{1}{|\mu|} ds d\mu \tag{2.3}$$

On a besoin de l'opérateur $Z : L^2(\mathbb{R}) \to H$, défini par

$$(Zc)(s,\mu) = c\left(\frac{s}{\mu}\right), \qquad c \in L^2(\mathbb{R}) \tag{2.4}$$

La norme dans $H$ d'après (2.2) s'écrit à l'aide de l'intégrale double sur

$$D = \{(s,\mu), s \in \mathbb{R}, \mu \in (-1,1)\}$$

On considère le changement de variables $\qquad (s,\mu) \to (\tau,\mu)$

$$\begin{cases} \tau = \dfrac{s}{\mu}, & \mu \neq 0 \\ \mu = \mu & \end{cases} \quad \begin{cases} s = \tau\mu \\ \mu = \mu \end{cases} \tag{2.5}$$

le changement $(s,\mu) \to (\tau,\mu)$, où

$$\begin{cases} \tau = \frac{s}{\mu} \\ \mu = \mu \end{cases} \tag{2.6}$$

transforme le domaine $D$ en lui-même et

$$d\mu\, ds = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial\mu}{\partial\mu} & \frac{\partial\mu}{\partial\tau} \\ \frac{\partial s}{\partial\mu} & \frac{\partial s}{\partial\tau} \end{vmatrix} ds\mu d\tau = \pm \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \tau & \mu \end{vmatrix} d\mu\, d\tau = |\mu| d\mu\, d\tau$$

On a besoin de l'opérateur $Z : L^2(\mathbb{R}) \to H$ défini par la relation

$$(Zc)(s,\mu) = c\left(\frac{s}{\mu}\right), \qquad c \in L^2(\mathbb{R}) \tag{2.7}$$

nous avons

$$\|Zc\|_H^2 = \int_R \int_{-1}^{1} \left| c\left(\frac{s}{\mu}\right)\right|^2 \frac{1}{|\mu|} ds d\mu \tag{2.8}$$

D'où ( voir (2.8) )

$$\|Zc\|_H^2 = \|Zc\|_H^2 = \int\limits_R \int\limits_{-1}^{1} |(Zc)(s,\mu)|^2 \frac{1}{|\mu|} ds d\mu = \int\limits_R \int\limits_{-1}^{1} \left| c\left(\frac{s}{\mu}\right)\right|^2 \frac{1}{|\mu|} ds d\mu$$

On fait le changement de variables classique dans l'intégrale double

$$\|Zc\|_H^2 = \int\limits_R \int\limits_{-1}^{1} |c(\tau)|^2 d\mu \, d\tau = \int\limits_{-1}^{1} d\mu \int\limits_R |c(\tau)|^2 d\tau = 2\|c\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad .$$

d'où $\|Z\| \leq \sqrt{2}$ , alors l'opérateur $Z$ est borné .On a besoin de son opérateur adjoint.

Pour trouver l'opérateur adjoint, on utilise de nouveau ce changement de variables et d'après la définition de l'opérateur adjoint (voir [14] )

$$(Zc, \varphi)_H = (c, Z^*\varphi)_{L^2(\mathbb{R})} \tag{2.9}$$

on a

$$(Zc, \varphi)_H = \int\limits_R \int\limits_{-1}^{1} c\left(\frac{s}{\mu}\right) \overline{\varphi(s,\mu)} \frac{1}{|\mu|} ds d\mu = \int\limits_R \int\limits_{-1}^{1} c(\tau) \overline{\varphi(\tau\mu,\mu)} d\mu d\tau = \tag{2.10}$$

$$= \int\limits_R c(\tau) \int\limits_{-1}^{1} \overline{\varphi(\tau\mu,\mu)} d\mu d\tau = \int\limits_R c(\tau) \overline{(Z^*\varphi)(\tau)} d\tau$$

d'où

$$(Z^*\varphi)(\tau) = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(\tau\mu,\mu) \, d\mu \tag{2.11}$$

On considère l'opérateur $F_0 : L^2(D) \to H$ défini par

$$(F_0 u)(s, \mu) = u(\frac{s}{\mu}, \mu) \tag{2.12}$$

Montrons que $F_0$ est unitaire. Il faut montrer que $F_0$ est une isométrie et que $R(F_0) = H$ (voir [6])

D'abord $F_0$ est une isométrie, en effet

$$\|F_0 u\|_H^2 = \int_R \int_{-1}^{1} |(F_0 u)(s, \mu)|^2 \frac{1}{|\mu|} ds d\mu = \int_R \int_{-1}^{1} \frac{1}{|\mu|} \left| u\left(\frac{s}{\mu}, \mu\right)\right|^2 ds d\mu \tag{2.13}$$

$$= \int_R \int_{-1}^{1} |u(\tau, \mu)|^2 d\mu d\tau = \|u\|_{L^2(D)}^2$$

donc $R(F_0) \subset H$.

Ensuite pour $R(F_0) \supset H$, puisque si $\varphi \in H$ est bornée

$$\begin{aligned} F_0 u &= \varphi, \quad (F_0 u)(s, \mu) = \varphi(s, \mu) \\ \text{c-à-d} \qquad u\left(\frac{s}{\mu}, \mu\right) &= \varphi(s, \mu) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Soit $s = t\mu$, on obtient $u(t, \mu) = \varphi(\mu t, \mu)$

On sait que si

$$F_0 : L^2(D) \to H$$
$$F_0^{-1} : H \to L^2(D)$$

ou

$$\left(F_0^{-1} \varphi\right)(\tau, \mu) = \varphi(\mu\tau, \mu) \tag{2.15}$$

Pour démontrer que le domaine de valeurs $R(F_0)$ coïncide avec $H$ tout entier, il faut vérifier que $F_0^{-1}\varphi$ est défini pour chaque $\varphi \in H$ comme un élément de $L^2(D)$.

D'après le changement de variables

$$\begin{cases} s = \tau\mu \\ \mu = \mu \end{cases}$$

$$\int_R \int_{-1}^{1} |\varphi(\mu\tau, \mu)|^2 \, d\mu d\tau = \int_R \int_{-1}^{1} \frac{1}{|\mu|} |\varphi(s, \mu)|^2 \, ds d\mu = \|\varphi\|_H^2 < \infty \qquad (2.16)$$

donc la fonction $(\tau, \mu) \to \varphi(\mu\tau, \mu)$ appartient à l'espace $L^2(D)$.

On suppose que le potentiel est factorisé de façon que $c_0(x) = \overline{c_{01}(x)} c_{02}(x)$ et

$$|c_{01}(x)| = |c_{02}(x)| = \sqrt{|c_0(x)|}$$

Cette factorisation est toujours réalisable. En effet,

Si $x$ est tel que $c_0(x) = 0$ alors $c_{01}(x) = c_{02}(x) = 0$

Si $x$ est tel que $c_0(x) \neq 0$ alors $c_{01}(x)$ est arbitraire tel que $|c_{01}(x)| = \sqrt{|c_0(x)|}$, par exemple $|c_{01}(x)| = \sqrt{|c_0(x)|}$. Ensuite d'après $c_{02}(x) = \dfrac{c_0(x)}{\overline{c_{01}(x)}}$, on trouve $c_{02}(x) = \dfrac{c_0(x)}{\sqrt{|c_0(x)|}}$

Exemple :

Si $c_0(x) = e^{-|x|+ix^2}$, on a $c_{01}(x) = \sqrt{|e^{-|x|+ix^2}|} = \sqrt{e^{-|x|}} = e^{-\frac{|x|}{2}}$ et $c_{02}(x) = \frac{e^{-|x|+ix^2}}{e^{-\frac{|x|}{2}}} = e^{-\frac{|x|}{2}+ix^2}$

On suppose toujours que

$$|c_0(x)| < ce^{-\varepsilon|x|}, \varepsilon > 0, x \in \mathbb{R} \qquad (2.17)$$

Notons par $C_{01}, C_{02} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ les opérateurs de multiplication par les fonctions respectivement $c_{01}(x), c_{02}(x)$ :

$$(C_{01}\varphi)(x) = c_{01}(x)\varphi(x), \quad (C_{02}\varphi)(x) = c_{02}(x)\varphi(x) \tag{2.18}$$

Remarquons que

$$|c_{01}(x)| < c_1 e^{-\frac{\varepsilon}{2}|x|}, \quad |c_{12}(x)| < c_2 e^{-\frac{\varepsilon}{2}|x|}, \ \varepsilon > 0, \ x \in \mathbb{R} \tag{2.19}$$

Considérons l'opérateur unitaire

$$U = F_0 F : L^2(\mathbb{D}) \to H$$

Le modèle de Friedrichs sera défini dans l'espace $H$ comme une certaine perturbation de l'opérateur de multiplication par la variable indépendante

$$\begin{aligned} S &: H \to H, \\ (S\varphi)(\tau,\mu) &= \tau\varphi(\tau,\mu), \ \tau \in \mathbb{R}, \ \mu \in (-1,1) \end{aligned} \tag{2.20}$$

avec le domaine de définition maximal $D(S)$.

## 2.2 Modèle de Friedrichs de l'opérateur de transport

**Lemme 2.2.1** *Soit $L : L^2(\mathbb{D}) \to L^2(\mathbb{D})$ l'opérateur de domaine de définition maximal défini par (2.1). Alors*

$$ULU^{-1} = S + V : H \to H \tag{2.21}$$

*où l'opérateur*

$$
\begin{gathered}
(V\varphi)(s,\mu) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\mu'}{|\mu'|}\int\limits_{\mathbb{R}}\widetilde{c}_0\left(\frac{s'}{\mu'}-\frac{s}{\mu}\right)\varphi(s',\mu')ds', \\
\widetilde{c}_0(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} c_0(x)e^{ixy}dx
\end{gathered}
\tag{2.22}
$$

*est borné dans $H$ et admet la factorisation $V = A^*B$ avec $A, B : H \to L^2(\mathbb{R})$ où*

$$
A = C_{01}F^{-1}Z^*, \qquad B = C_{02}F^{-1}Z^* \tag{2.23}
$$

$$
ou \begin{cases}
(A\varphi)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}c_{01}(x)\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{|\mu|}e^{ix\frac{s}{\mu}}\varphi(s,\mu)ds\,d\mu, \\
(B\varphi)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}c_{02}(x)\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{|\mu|}e^{ix\frac{s}{\mu}}\varphi(s,\mu)ds\,d\mu
\end{cases}
\tag{2.24}
$$

***Démonstration :*** *Par application de l'opérateur $F_0 : L^2(D) \to H$ (voir (2.12)) nous obtenons l'égalité dans l'espace $H$ :*

$$
(F_0FLf)(s,\mu) = s\varphi(s,\mu) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} c_0(x)\int\limits_{-1}^{1} f(x,\mu')e^{-ix\frac{s}{\mu}}dx\,d\mu' \tag{2.25}
$$

*où $\varphi(s,\mu) = u\left(\dfrac{s}{\mu},\mu\right) = (F_0u)(s,\mu) = (F_0Ff)(s,\mu)$. Inversement (voir (2.15)-(2.4))*

$$
\begin{aligned}
f(x,\mu) &= (F^{-1}F_0^{-1}\varphi)(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}(F_0^{-1}\varphi)(\tau,\mu)e^{i\tau x}d\tau = \qquad (2.26) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(\mu\tau,\mu)e^{i\tau x}d\tau = \begin{cases}
\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int\limits_{\infty}^{\infty}\varphi(s',\mu)e^{i\frac{s'}{\mu}x}\frac{ds'}{\mu}, & \mu > 0 \\
\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\infty}^{-\infty}\varphi(s',\mu)e^{i\frac{s'}{\mu}x}\frac{ds'}{\mu}, & \mu < 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

*correspondant aux cas $\mu > 0$ et $\mu < 0$ où on utilise le changement de variables suivant*

$$s' = \tau\mu$$

*Pour les bornes d'intégration , dans le cas où $\mu > 0$ on a*

$$\begin{array}{c|c} t = -\infty & s' = -\infty \\ t = +\infty & s' = +\infty \end{array}$$

*Dans le cas où $\mu < 0$ on a*

$$\begin{array}{c|c} t = -\infty & s' = +\infty \\ t = +\infty & s' = -\infty \end{array}$$

*donc*

$$f(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(s',\mu) e^{i\frac{s'}{\mu}x} \frac{ds'}{|\mu|}.$$

*Substituant cette valeur dans (2.25), nous obtenons l'expression (2.22). Il reste à démontrer les relations (2.23). Nous fixons les valeurs $s, \mu = const$ et nous introduisons les fonctions (voir (2.22))*

$$c_t(\tau) = \widetilde{c}_0(\tau - t), \qquad t = \frac{s}{\mu}.$$

*En utilisant l'opérateur $Z$ (voir (2.7)) nous représentons l'opérateur $V$ (voir (2.22)) sous la forme*

$$(V\varphi)(s,\mu) = (Zd)(s,\mu)$$

*où*

$$d(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\mu'}{|\mu'|} \int\limits_{\mathbb{R}} c_t\left(\frac{s'}{\mu'}\right) \varphi(s',\mu') ds' = \frac{1}{2\pi} (\varphi, Z\bar{c}_t)_H = \frac{1}{2\pi} (Z^*\varphi, \bar{c}_t)_{L^2(\mathbb{R})} -$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} Z^*\varphi(\tau)c_t(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} Z^*\varphi(\tau)\left(\int\limits_{\mathbb{R}} c_0(x)e^{ix(\tau-t)}dx\right)d\tau = \qquad (2.27)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} c_0(x)\left(\int\limits_{\mathbb{R}} Z^*\varphi(\tau)e^{ix\tau}d\tau\right)e^{-ixt}dx = (FC_0F^{-1}Z^*\varphi)(t).$$

*Ainsi,*

$$V\varphi = Zd = ZFC_{01}^*C_{02}F^{-1}Z^*\varphi = A^*B\varphi$$

*où*

$$A = C_{01}F^{-1}Z^*,$$
$$B = C_{02}F^{-1}Z^*$$

*Observons que les opérateurs considérés dans les relations (2.22)-(2.23) sont bornés (et les fonctions* $C_{01}(x)$, $C_{02}(x)$ *décroissent exponentiellement quand* $|x| \to \infty$ *). Par conséquent pour prouver chaque relation, il suffit d'utiliser seulement un sous espace d'éléments dense. Ainsi nous pouvons choisir tels éléments qui nous permettent le changement d'ordre de l'intégration dans (2.23), (2.24) et (2.26). Le lemme est ainsi démontré.* ■

Nous appelons l'opérateur

$$T = S + V, \qquad V = A^*B \qquad (2.28)$$

modèle de Friedrichs dans l'espace $H$. Comme corollaire du Lemme 13 nous obtenons que

$$L = U^{-1}TU$$

l'opérateur $L : L^2(D) \to L^2(D)$ (voir (2.1)) est unitairement équivalent au modèle de Friedrichs (2.28).

# Chapitre 3

# L'étude du spectre ponctuel de l'opérateur L

Dans ce chapitre on va étudier le spectre ponctuel de l'opérateur de transport $L$ , en utilisant le modèle de Friedrichs (voir 3).

## 3.1 Etude de la résolvante dans le cas $\zeta \to \infty$

L'étude du spectre de l'opérateur $L$ se réduit à celle de l'opérateur $T$ et sera donnée directement à partir de la résolvante .

Soit l'équation

$$(T-\zeta)\varphi = \psi, \quad \psi \in H\text{- arbitraire} \tag{3.1}$$

Comme $\qquad T = S + A^*B,$

on a $\qquad (S-\zeta)\varphi + A^*B\varphi = \psi$

or $\zeta \notin \mathbb{R}$ , l'opérateur $S_\zeta = (S-\zeta)^{-1}$ est borné. D'ici résulte que

$$\varphi + S_\zeta A^*B\varphi = S_\zeta\psi \tag{3.2}$$

En multipliant à gauche par $B$ , on obtient $\qquad (1 + BS_\zeta A^*)B\varphi = BS_\zeta\psi$

On note

$$K(\zeta) = 1 + BS_\zeta A^* \tag{3.3}$$

Si $K(\zeta)$ est inversible alors $B\varphi = K(\zeta)^{-1}BS_\zeta\psi$ et en substiuant dans (2.2) on obtient

$$T_\zeta\psi = (T-\zeta)^{-1}\psi = \varphi = S_\zeta\psi - S_\zeta A^* K(\zeta)^{-1}BS_\zeta\psi \tag{3.4}$$

Par conséquent, les propriétes de la résolvante dépendent de celles de l'opérateur

$$K(\zeta) - 1 = BS_\zeta A^* = C_{02}F^{-1}Z^*S_\zeta ZFC_{01}^* \tag{3.5}$$

Les prolongements analytiques de $K(\zeta)$ par l'axe réel seront notés $K_\pm(\zeta)$ et leurs noyaux respectivement par $k_\pm(x, y, \zeta)$.

**Lemme 3.1.1** *1) L'opérateur $K(\zeta) - 1 : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $\zeta \notin \mathbb{R}$ est compact et $\|K(\zeta) - 1\| \to 0$, $r \to \infty$ uniformément dans le domaine $|\zeta| > r$, $|Im\zeta| > \nu_0$ pour chaque $\nu_0 > 0$ ; 2) L'opérateur $K(\zeta) - 1$ admet un prolongement analytique au-dessus des demi-axes $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ et $\|K_\pm(\zeta) - 1\| \to 0$, $|\zeta| \to \infty$, uniformément dans le domaine $|Im\zeta| < \varepsilon_1$ pour chaque $\varepsilon_1 < \varepsilon/2$.*

**Démonstration :** D'après (3.5) nous commençons à calculer l'opérateur $Z^*S_\zeta Z$. Soit $c \in L^2(\mathbb{R})$ alors (voir (2.7))

$$(S_\zeta Zc)(s, \mu) = \frac{1}{s-\zeta} c\left(\frac{s}{\mu}\right), \qquad Im\zeta \neq 0$$

et, en utilisant (2.11)

$$(Z^*S_\zeta Zc)(\tau) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\tau\mu - \zeta} c(\tau) d\mu = c(\tau) \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{\tau\mu - \zeta} \tag{3.6}$$

Ainsi, l'opérateur $Z^* S_\zeta Z$ est un opérateur de multiplication dans $L^2(\mathbb{R})$ par la fonction

$$l(\tau, \zeta) = \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{\tau\mu - \zeta} = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{dt}{t - \zeta}, \qquad \zeta \notin [-|\tau|, |\tau|]. \tag{3.7}$$

Soit $\zeta = \sigma + i\eta$, comme $1/(t - \zeta) = (t - \sigma + i\eta)/\left((t - \sigma)^2 + \eta^2\right)$ et

$$\int_{-\tau}^{\tau} \frac{dt}{(t - \sigma)^2 + \eta^2} = \frac{\pi}{|\eta|} sign\tau + O\left(\frac{1}{\tau}\right), \qquad \tau \to \infty$$

nous obtenons

$$l(\tau, \zeta) = \frac{\pi i}{|\tau|} sign\eta + O\left(\frac{1}{\tau^2}\right), \qquad \tau \to \infty. \tag{3.8}$$

Ainsi, la fonction $\tau \to l(\tau, \zeta)$ est continue et est bornée dans $\mathbb{R}$ et appartient à $L^2(\mathbb{R})$. Selon (3.5)–(3.6) nous avons

$$(K(\zeta) - 1)h = C_{02} F^{-1} l(\cdot, \zeta) F C_{01}^* h, \qquad h \in L^2(\mathbb{R}). \tag{3.9}$$

Comme la fonction $c_{01}(x)$ decroît exponentiellement alors la fonction $g = C_{01}^* h$ permet de changer l'ordre de l'intégration dans l'expression suivante

$$(F^{-1} l\,(\cdot, \zeta)\, Fg)(y) = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} e^{i\tau y} l(\tau, \zeta) \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau x} g(x) dx \right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{N \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{-N}^{N} e^{i\tau(y-x)} l(\tau, \zeta) d\tau \right) g(x) dx = \tag{3.10}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{i\tau(y-x)} l(\tau, \zeta) d\tau \right) g(x) dx.$$

Finalement les relations (3.9)–(3.10) donnent

$$((K(\zeta)-1)h)(y)=\int\limits_{\mathbb{R}} k(x,y,\zeta)h(x)\,dx, \qquad y\in\mathbb{R}, \quad Im\zeta\neq 0 \tag{3.11}$$

où

$$k(x,y,\zeta)=\frac{1}{2\pi}c_{02}(y)\overline{c_{01}(x)}\mathcal{I}(y-x,\zeta), \quad x,y\in\mathbb{R} \tag{3.12}$$

et

$$\mathcal{I}(u,\zeta)=\int\limits_{\mathbb{R}} l(\tau,\zeta)e^{i\tau u}d\tau, \qquad Im\zeta\neq 0. \tag{3.13}$$

Nous étudierons l'estimation pour $\|K(\zeta)-1\|^2$, i.e.

$$I(\zeta)\equiv\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |k(x,y,\zeta)|^2 dx\,dy, \qquad Im\zeta\neq 0 \tag{3.14}$$

pour le noyau $k(x,y,\zeta)$, $Im\zeta\neq 0$ aussi bien pour ses prolongements analytiques $k_{\pm}(x,y,\zeta)$ au-dessus et au dessous de l'axe réel $Im\zeta=0$. Les propriétés analytiques de la fonction $l(\tau,\zeta)$ comme intégrale de Cauchy (voir (3.7)) sont simples dans la différence de la fonction $\mathcal{I}(u,\zeta)$ (voir (3.12)). Ainsi, nous avons besoin d'une autre forme de $\mathcal{I}(u,\zeta)$ :

$$\mathcal{I}(u,\zeta)=\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{-\tau}^{\tau}\frac{dt}{t-\zeta}\right)\frac{e^{i\tau u}}{\tau}d\tau=2\int\limits_{0}^{\infty}\left(\int\limits_{-\tau}^{\tau}\frac{dt}{t-\zeta}\right)\frac{\cos\tau u}{\tau}d\tau=$$

$$=4\zeta\int\limits_{0}^{\infty}\left(\int\limits_{0}^{\tau}\frac{dt}{t^2-\zeta^2}\right)\frac{\cos\tau|u|}{\tau}d\tau.$$

En effet, $\int\limits_{-\tau}^{\tau}\frac{dt}{t-\zeta}=\int\limits_{-\tau}^{0}\frac{dt}{t-\zeta}+\int\limits_{0}^{\tau}\frac{dt}{t-\zeta}$ Soit $\quad u=-t\Rightarrow t=-u$ et $dt=-du$

$\int\limits_{-\tau}^{0}\frac{dt}{t-\zeta}=-\int\limits_{\tau}^{0}\frac{du}{-u-\zeta}=-\int\limits_{0}^{\tau}\frac{dt}{u+\zeta}=-\int\limits_{0}^{\tau}\frac{dt}{t+\zeta}$

$\frac{1}{t-\zeta}-\frac{1}{t+\zeta}=\frac{2\zeta}{t^2-\zeta^2}$

L'intégration par parties donne

$$\mathcal{I}(u,\zeta) = 4\zeta \int_0^\infty \frac{f(\tau|u|)}{\tau^2-\zeta^2} d\tau \tag{3.15}$$

où

$$f(\theta) = \int_\theta^\infty \frac{\cos t}{t} dt.$$

En plus, notons que nous avons besoin de l'estimation

$$\left\{ \begin{array}{ll} |f(\theta)| < a_1 |\ln \theta| + a_2, & 0 < \theta < 1 \\ |f(\theta)| < \dfrac{a}{\theta}, & \theta > 1 \end{array} \right. . \tag{3.16}$$

pour certaines constantes $a$, $a_1$, $a_2$ .

En effet, si $0 < \theta < 1$ on a

$$f(\theta) = \int_\theta^1 \frac{\cos t - 1}{t} dt + \int_\theta^1 \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \frac{\cos t}{t} dt$$

d'où

$$|f(\theta)| \leqslant 2 \int_\theta^1 \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{t} dt + |\ln \theta| + C \leqslant |\ln \theta| + a_2$$

Si $\theta > 1$ alors on intègre par parties

$$f(\theta) = \int_\theta^\infty \frac{d(\sin t)}{t} = \left. \frac{\sin t}{t} \right|_\theta^\infty + \int_\theta^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt$$

d'où

$$|f(\theta)| \leqslant \left| \frac{\sin \theta}{\theta} \right| + \int_\theta^\infty \frac{dt}{t^2} \leqslant \frac{a}{\theta}$$

1) Soit $\zeta = \theta + i\tau_0$. Nous allons démontrer dans le cas $\tau_0 \neq 0$ que pour chaque $\delta > 0$ il

existe $\tau > 0$ tel que

$$I(\zeta) < \delta, \quad \zeta = \theta + i\tau_0, \quad |\zeta| > \tau, \quad |\tau_0| > \nu_0. \tag{3.17}$$

Nous avons (voir (3.15))

$$\frac{1}{2}\mathcal{I}(u,\zeta) = \int_0^\infty \frac{f(|u|\tau)}{\tau - \zeta} d\tau - \int_0^\infty \frac{f(|u|\tau)}{\tau + \zeta} d\tau. \tag{3.18}$$

Comme $|\theta| = |Re\zeta| \to \infty$ i.e. $\theta \to +\infty$ et $\theta \to -\infty$ alors l'estimation des deux intégrales coïncide ( $Im\zeta = \tau_0$ change de signe seulement). Ainsi, nous considérons la première intégrale seulement.

Soit $N > 0$ – valeur arbitraire et

$$\int_0^\infty f(|u|\tau)\frac{d\tau}{\tau - \zeta} = \left(\int_0^N + \int_N^\infty\right) f(|u|\tau)\frac{d\tau}{\tau - \zeta} \equiv \mathcal{I}_1(u,\zeta) + \mathcal{I}_2(u,\zeta). \tag{3.19}$$

Nous considérons dans (3.14) le noyau

$$k(x,y,\zeta) = \frac{1}{\pi} c_{02}(y)\overline{c_{01}(x)}\left[\mathcal{I}_1(y-x,\zeta) + \mathcal{I}_2(y-x,\zeta)\right].$$

Comme $|\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2|^2 \leqslant 2\left(|\mathcal{I}_1|^2 + |\mathcal{I}_2|^2\right)$ alors nous avons pour $\eta > 0$ arbitraire

$$\frac{\pi^2}{2} I(\zeta) \leqslant \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |c_{02}(y)c_{01}(x)|^2 \left|\mathcal{I}_1(u,\zeta)\right|^2 dx\, dy +$$

$$+\left(\int\int_{|u|<\eta} + \int\int_{|u|>\eta}\right) |c_{02}(y)c_{01}(x)|^2 |\mathcal{I}_2(u,\zeta)|^2 dx\, dy = k_1 + k_2 + k_3, \quad u = y - x. \tag{3.20}$$

Nous choisissons les nombres $p$, $q$ tels que $p > 2$, $1 < q < 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $\delta_1 > 0$ est une certaine valeur que nous allons préciser plus loin.

Nous choisissons $\eta > 0$ tel que

$$\iint\limits_{|u|<\eta} \frac{|c_{02}(y)c_{01}(x)|^2}{|y-x|^{\frac{2}{p}}} dx\, dy < \delta_1, \quad u \equiv y - x \tag{3.22}$$

alors $k_2 \leqslant M_0^2 M^2(\nu_0)\delta_1$.Dans le domaine $|u| > \eta$ nous changeons l'estimation (3.21) comme suit :

$$|\mathcal{I}_2(u,\zeta)| \leqslant \left(\int_{|u|N}^{\infty} |f(t)|^p \frac{dt}{|u|}\right)^{\frac{1}{p}} M(\nu_0) \leqslant \frac{1}{\eta^{\frac{1}{p}}} \left(\int_{\eta N}^{\infty} |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} M(\nu_0)$$

La valeur $\eta$ est définie par $\delta_1$ dans (3.22), maintenant nous définissons $N_2 > 0$ tel que

$$\eta^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{\eta N}^{\infty} |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} < \sqrt{\delta_1}, \quad N > N_2$$

Alors

$$k_3 \leqslant M_0^2(\nu_0)\delta_1 \iint\limits_{|u|>\eta} |c_{02}(y)c_{01}(x)|^2 dx\, dy \leqslant C M_0^2(\nu_0)\delta_1, \quad C = const$$

Nous définissons $\delta_1 > 0$ par $\delta$ comme suit

$$\frac{2}{\pi^2}(k_1 + k_2 + k_3) \leqslant \frac{2}{\pi^2}(M_1 + M_0^2 M^2(\nu_0) + C M_0^2(\nu_0))\delta_1 < \delta,$$

après nous définissons $N_1, \eta, N_2$, et nous obtenons (3.17) de (3.20) pour $|\zeta| > 2\max(N_1, N_2)$, i.e. pour $|\zeta| > r$ où $r = 2\max(N_1, N_2)$, ce qui prouve 1).

2) Nous passons aux opérateurs $K_{\pm}(\zeta) - 1$ (voir (3.11)–(3.12), (3.18)). Evidemment, il suffit de considérer seulement la prolongation de $K_{-}(\zeta) - 1$ au-dessus du demi-axe $(0, \infty)$ . Nous fixons un point $z_0 = \sigma_0 + i\varepsilon_0$ tel que $\sigma_0 > 0$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0 < \varepsilon/2$. Soit $\Gamma_1 = \{sz_0,\ 0 < s < 1\}$ un segment de droite lequel joint l'origine avec $z_0 = \sigma_0 + i\varepsilon_0$ et $\Gamma_2 = \{\sigma + i\varepsilon_0,\ \sigma_0 < \sigma < \infty\}$ la droite horizontale de $z_0$ jusqu'à l'infini. Nous notons $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Soit $\Omega$ le domaine localisé au dessus du contour $\Gamma$.

Evidemment (voir (3.12))

$$((K_-(\zeta)-1)h)(y)=\int_{\mathbb{R}} k_-(x,y,\zeta)h(x)dx, \quad y\in\mathbb{R}, \quad \zeta\in\Omega$$

où

$$k_-(x,y,\zeta)=\frac{1}{2\pi}c_{02}(y)\overline{c_{01}(x)}\mathcal{I}_-(y-x,\zeta), \quad x,y\in\mathbb{R}, \quad \zeta\in\Omega$$

et

$$\frac{1}{2}\mathcal{I}_-(u,\zeta)=\int_\Gamma \frac{f(|u|z)}{z-\zeta}dz-\int_0^\infty \frac{f(|u|\tau)}{\tau+\zeta}d\tau, \quad \zeta\in\Omega \tag{3.23}$$

Nous devons prouver, que $I(\theta)\equiv\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|c_{02}(y)c_{01}(x)|^2|\mathcal{I}_-(y-x,\theta+i\tau_0)|^2dx\,dy\to 0, \quad \theta\to +\infty$ uniformément si $|\tau_0|<\varepsilon_1$.

Le second terme dans (3.23) admet une simple estimation ($\zeta=\theta+i\tau_0$)

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty \frac{f(|u|\tau)}{\tau+\zeta}d\tau\right| &\leqslant \left(\int_0^\infty |f(|u|\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty \frac{d\tau}{|\tau+\zeta|^q}\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\\ &\leqslant \frac{M_0}{|u|^{\frac{1}{p}}}\left(\int_\theta^\infty \frac{dt}{|t+i\tau_0|^q}\right)^{\frac{1}{q}}\to 0, \quad \theta\to+\infty\end{aligned}$$

uniformément si $|\tau_0|<\varepsilon_1$ et la partie correspondante de $I(\theta)$ tend aussi vers zéro si $\theta\to+\infty$ ( analogue à l'estimation de $k_1$).

Le premier terme dans (3.23) contient une valeur $f(|u|z)$ (où $z=\sigma+i\tau$) de la prolongation de la fonction

$$f(\tau)=\int_\tau^\infty \frac{\cos t}{t}dt.$$

Ici, pour déformer le contour de l'intégration nous utilisons la ligne verticale $t=|u|(\sigma+is)$, $0\leqslant s\leqslant\tau$, alors

$$f(|u|z)=\int_{|u|z}^\infty \frac{\cos t}{t}dt=\int_{|u|\sigma}^\infty \frac{\cos t}{t}dt+\int_{|u|z}^{|u|\sigma}\frac{\cos t}{t}dt=f(|u|\sigma)-i\int_0^\tau \frac{\cos(|u|(\sigma+is))}{\sigma+is}ds.$$

Il reste à estimer la partie de $I(\theta)$ correspondant à la fonction ( $z = \sigma + i\tau$)

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(|u|z)}{z-\zeta} dz = \int\limits_{\Gamma} \frac{f(|u|\sigma)}{z-\zeta} dz - i \int\limits_{\Gamma} \frac{f_0(|u|, \sigma, \tau)}{z-\zeta} dz \equiv \mathcal{I}_1(u,\zeta) - i\mathcal{I}_2(u,\zeta) \tag{3.25}$$

où

$$f_0(|u|, \sigma, \tau) = \int\limits_0^{\tau} \frac{\cos(|u|(\sigma + is))}{\sigma + is} ds.$$

Nous commençons par la fonction

$$\mathcal{I}_1(u,\zeta) = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(|u|\sigma)}{z-\zeta} dz + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{f(|u|\sigma)}{z-\zeta} dz.$$

a) Sur $\Gamma_1$ nous avons

$$z = sz_0 = s(\sigma_0 + i\varepsilon_0) = \sigma + i\tau, \qquad dz = z_0 ds \tag{3.26}$$

Ainsi

$$\left| \int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(|u|\sigma)}{z-\zeta} dz \right| = \left| \int\limits_0^1 \frac{f(|u|s\sigma_0)}{sz_0 - \zeta} z_0 ds \right| \leqslant |z_0| \max_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} \frac{1}{|\tau z_0 - \zeta|} \int\limits_0^1 |f(|u|s\sigma_0)| ds \leqslant$$

$$= \frac{|z_0|}{\sigma_0} \max_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} \frac{1}{|\tau z_0 - \zeta|} \frac{1}{|u|} \int\limits_0^{|u|\sigma_0} |f(t)| dt.$$

D'après (3.16) nous obtenons

$$\frac{1}{|u|} \int\limits_0^{|u|\sigma_0} |f(\tau)| d\tau \leqslant \begin{cases} \dfrac{a|\ln|u|| + b}{|u|}, & |u| > \dfrac{1}{\sigma_0} \\ c|\ln|u|| + d, & |u| < \dfrac{1}{\sigma_0} \end{cases}$$

où $a, b, c, d$ – certaines constantes.

En effet ,

1) $|u|\,\sigma_0 < 1, \quad 0 < \tau < |u|\,\sigma_0 < 1$

$\frac{1}{|u|}\int_0^{|u|\sigma_0} |f(\tau)|\, d\tau < \frac{1}{|u|}\int_0^{|u|\sigma_0} [a_1\,|\ln \tau| + a_2]\, d\tau = a_1\sigma_0\,|\ln|u|\,\sigma_0| + (a_1+a_2)\,\sigma_0$

2) $|u|\,\sigma_0 > 1$

$$\frac{1}{|u|}\int_0^{|u|\sigma_0} () = \frac{1}{|u|}\left[\int_0^1 + \int_1^{|u|\sigma_0}\right] \leq \frac{1}{|u|}\left[b + \int_1^{|u|\sigma_0} \frac{a}{\tau} d\tau\right] = \frac{1}{|u|}\left[b + a\ln|u|\,\sigma_0\right].$$

Ainsi, la partie correspondante de $I(\theta)$ est finie et, comme

$$\max_{0\leqslant\tau\leqslant 1} \frac{1}{|\tau z_0 - (\theta + i\tau_0)|} \to 0, \qquad \theta \to +\infty,$$

tend vers zéro si $\theta \to +\infty$ uniformément si $|\tau_0| < \varepsilon_1$.

b) Sur $\Gamma_2$ nous avons

$$z = \sigma + i\varepsilon_0, \quad \sigma > \sigma_0, \quad dz = d\sigma \tag{3.27}$$

par conséquent

$$\int\limits_{\Gamma_2} \frac{f(|u|\sigma)}{z-\zeta} d\sigma = \int\limits_{\sigma_0}^{\infty} \frac{f(|u|\sigma)}{\sigma + i\varepsilon_0 - \zeta} d\sigma$$

Cette intégrale a la même forme que l'intégrale (3.19), Ainsi la partie correspondante de $I(\theta)$ tend vers zéro si $\theta \to +\infty$ uniformément si $|Im\zeta| < \varepsilon_1$.

Il reste à considérer la fonction (voir (3.25))

$$\mathcal{I}_2(u,\zeta) = \int_\Gamma \frac{f_0(|u|,\sigma,\tau)}{z-\zeta} dz, \quad z = \sigma + i\tau, \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \tag{3.28}$$

Comme $\big|\cos(|u|(\sigma+is))\big| < e^{|u|s}$, $s > 0$

en effet,

$\cos(|u|(\sigma+is)) = \left|\dfrac{e^{i|u|(\sigma+is)} + e^{-i|u|(\sigma+is)}}{2}\right| \leq \dfrac{\left|e^{i|u|\sigma}\right|\left|e^{-|u|s}\right| + \left|e^{-i|u|\sigma}\right|\left|e^{|u|s}\right|}{2} \leq \dfrac{e^{-|u|s} + e^{|u|s}}{2} \leq$
$\dfrac{e^{|u|s} + e^{|u|s}}{2} = e^{|u|s}$, $s > 0$.

Alors

$$|f_0(|u|,\sigma,\tau)| \leqslant e^{|u|\tau}\int_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{s^2+\sigma^2}} = e^{|u|\tau}\ln\left|\frac{\tau}{\sigma}+\sqrt{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^2+1}\right|, \quad \tau>0$$

a) Sur $\Gamma_1$,d'après ( 3.26) nous avons $\dfrac{\tau}{\sigma}=\dfrac{\varepsilon_0}{\sigma_0}=const$, par conséquent

$$\left|\int_{\Gamma_1}\frac{f_0(|u|,\sigma,\tau)}{z-\zeta}dz\right| \leqslant Ce^{|u|\varepsilon_0}\int_{\Gamma_1}\frac{|dz|}{|z-(\theta+i\tau_0)|}\longrightarrow 0, \quad \theta\to+\infty$$

uniformément si $|\tau_0|<\varepsilon_1$ où nous utilisons le fait que le contour $\Gamma_1$ est borné.

Le facteur $e^{|u|\varepsilon_0}=e^{|y-x|\varepsilon_0}$ n'influt pas sur la convergence de la partie correspondante de l'intégrale (3.24) puisque $\varepsilon_0<\varepsilon$.

b) Sur $\Gamma_2$, d'après (3.27) nous avons $z=\sigma+i\varepsilon_0$, so $\tau=\varepsilon_0$ et

$$f_0(|u|,\sigma,\varepsilon_0)=\int_0^{\varepsilon_0}\frac{\cos(|u|(\sigma+is))}{\sigma+is}ds$$

Le contour $\Gamma_2$ est non borné, la valeur

$$\sup_{z\in\Gamma_2}\frac{1}{|z-\zeta|}=\sup_{z\in\Gamma_2}\frac{1}{|z-(\theta+i\tau_0)|}=\frac{1}{\varepsilon_0-\tau_0}, \quad \tau_0<\varepsilon_1<\varepsilon_0$$

ne tend vers zéro si $\theta\longrightarrow+\infty$ et l'estimation évidente $f_0(|u|,\sigma,\varepsilon_0)=O\left(\frac{1}{\sigma}\right)$, $\sigma\longrightarrow+\infty$ est suffisante pour obtenir la convergence seulement de l'intégrale (3.28).

En effet,

$\sqrt{1+x}-1\backsim\dfrac{x}{2},\ x\to 0$

$\sqrt{1+\left(\dfrac{\tau}{\sigma}\right)^2}-1\backsim\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\tau}{\sigma}\right)^2, \quad \sigma\to\infty$

$\ln(1+x)\backsim x, \quad x\to 0, \quad \ln\left|\frac{\tau}{\sigma}+\sqrt{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^2+1}\right|=\ln\left(1+\dfrac{\tau}{\sigma}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\tau}{\sigma}\right)^2+o\left(\dfrac{1}{\sigma}\right)\right)-$
$\dfrac{\tau}{\sigma}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\tau}{\sigma}\right)^2+o\left(\dfrac{1}{\sigma}\right)=O\left(\dfrac{1}{\sigma}\right)$

Ainsi, nous décomposons la fonction en deux termes :

$$f_0(|u|, \sigma, \varepsilon_0) = \int_0^{\varepsilon_0} \cos(|u|(\sigma + is)) \left[\frac{1}{\sigma + is} - \frac{1}{\sigma}\right] ds +$$

$$+ \frac{2}{\sigma|u|} \operatorname{sh} \frac{|u|\varepsilon_0}{2} \cos\left(|u|\sigma + i|u|\frac{\varepsilon_0}{2}\right) \equiv f_1(|u|\sigma) + f_2(|u|\sigma)$$

En effet,

$$\int_0^{\varepsilon_0} \cos(|u|(\sigma + is)) ds = \frac{\sin(|u|(\sigma + is))}{i|u|} |_0^{\varepsilon_0} =$$

$$= \frac{1}{i|u|} [\sin(|u|(\sigma + i\varepsilon_0)) - \sin|u|\,\sigma] = \frac{2}{i|u|} \sin\frac{i\,|u|\,\varepsilon_0}{2} \cos(|u|\sigma + \frac{i\,|u|\,\varepsilon_0}{2}) =$$

$$\tfrac{2}{|u|} sh \tfrac{|u|\varepsilon_0}{2} \cos(|u|\sigma + \tfrac{i|u|\varepsilon_0}{2}) \text{ puisque } \sin i\alpha = \tfrac{1}{2i}\left(e^{i.i\alpha} - e^{-i.i\alpha}\right) =$$
$$\tfrac{1}{2i}\left(e^{-\alpha} - e^{\alpha}\right) = i \operatorname{sh} \alpha,$$

L'intégrale sur $\Gamma_2$ avec le terme $f_1(|u|, \theta)$ admet l'estimation

$$\left|\int_{\Gamma_2} \frac{f_1(|u|, \sigma)}{z - \zeta} dz\right| \leqslant C e^{\varepsilon_0 |u|} \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^2 |\sigma + i\varepsilon_0 - \zeta|} \to 0, \quad \zeta = \theta + i\tau_0 \to \infty$$

uniformément si $|\tau_0| < \varepsilon_1$ ( majorante integrable tendant vers zéro) et d'après l'inégalité $\varepsilon_0 < \varepsilon$ sa valeur satisfait (3.24) (voir (3.23) aussi).

L'intégrale sur $\Gamma_2$ avec le terme $f_2(|u|, \sigma)$ est décomposée comme la somme

$$\int_{\Gamma_2} \frac{f_2(|u|, \sigma)}{z - \zeta} dz = \frac{2}{|u|} \operatorname{sh} \frac{|u|\varepsilon_0}{2} \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{\cos(|u|\sigma + i|u|\frac{\varepsilon_0}{2})}{\sigma(\sigma + i\varepsilon_0 - \zeta)} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{|u|} \operatorname{sh} \frac{|u|\varepsilon_0}{2} \left[e^{-\frac{|u|\varepsilon_0}{2}} \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{e^{i|u|\sigma}}{\sigma(\sigma + i\varepsilon_0 - \zeta)} d\sigma + e^{\frac{|u|\varepsilon_0}{2}} \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{e^{-i|u|\sigma}}{\sigma(\sigma + i\varepsilon_0 - \zeta)} d\sigma\right]$$

Il suffit de considérer dans cette somme le second terme seulement et l'autre terme sera donné par analogie. Soit

$$F(|u|, \zeta) = \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{e^{-i|u|\sigma}}{\sigma(\sigma + i\varepsilon_0 - \zeta)} d\sigma \tag{3.29}$$

La partie correspondante de $I(\theta)$ (voir (3.29)) est

$$X \equiv \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |c_{02}(y) c_{01}(x)|^2 \frac{1}{|u|^2} \mathrm{sh}^{\,2} \frac{|u|\varepsilon_0}{2} e^{|u|\varepsilon_0} |F(|u|, \zeta)|^2 dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-2[\varepsilon(|x| + |y|) - \varepsilon_0 |u|]\right) |F(|u|, \zeta)|^2 dx\, dy, \quad u = y - x$$

Le changement de variables

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = y + x, \end{cases}$$

la relation élémentaire

$$\frac{1}{2} \inf_{u \in R} [\varepsilon(|v - u| + |v + u|) - 2\varepsilon_0 |u|] = (\varepsilon - \varepsilon_0)|v|$$

et la condition $\varepsilon_0 < \varepsilon$ donnent

$$X \leqslant C \int_{\mathbb{R}} \exp(-(\varepsilon - \varepsilon_0)|v|) dv \int_{\mathbb{R}} |F(|u|, \zeta)|^2 du$$

en effet,

Soit

$$X = \varepsilon(|v - u| + |v + u|) - 2\varepsilon_0 |u|$$

a) $u > 0, \qquad -u < v < u, \qquad |u - v| = u - v$ et $|u + v| = u + v$

$X = \varepsilon(u - v + u + v) - 2\varepsilon_0 u = 2\varepsilon u - 2\varepsilon_0 u = 2(\varepsilon - \varepsilon_0) u > 2(\varepsilon - \varepsilon_0)|v|$

b) $v > u,\ v > -u \Rightarrow v > |u|,\ -|u| > -v$

$X = \varepsilon(v - u + v + u) - 2\varepsilon_0 |u| = 2\varepsilon v - 2\varepsilon_0 |u| > 2\varepsilon v - 2\varepsilon_0 v = 2v(\varepsilon - \varepsilon_0) = 2(\varepsilon - \varepsilon_0)|v|$

c) $v < -u,\ v > u,\ u < 0 \Rightarrow -v < -u \Rightarrow -u < |v|$

$X = \varepsilon(v - u + v + u) + 2\varepsilon_0 u = -2\varepsilon u + 2\varepsilon_0 u = -2u(\varepsilon - \varepsilon_0) > 2(\varepsilon - \varepsilon_0)|v|$

d) $v < -u,\ v < u \Rightarrow v < -|u|,\ v < 0$

$X = \varepsilon(u - v + u + v) - 2\varepsilon_0 |u| = -2\varepsilon v - 2\varepsilon_0 |u| > -2\varepsilon v + 2\varepsilon_0 v = -2v(\varepsilon - \varepsilon_0) = 2(\varepsilon - \varepsilon_0)|v|$

De la propriété de la transformation de Fourier nous obtenons de (3.29)

$$\int_{\mathbb{R}} |F(|u|,\zeta)|^2 du \leqslant C \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^2|\sigma + i\varepsilon_0 - (\theta + i\tau_0)|^2} \to 0, \quad \theta \to +\infty$$

uniformément si $|\tau_0| < \varepsilon_1$ donc la relation est prouvée(3.29), i.e. 2).

En effet, si on pose

$$g(\sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma(\sigma + i\varepsilon_0 - \zeta)}, & \sigma > \sigma_0 \\ 0, & \sigma < \sigma_0 \end{cases}$$

puisque la transformation de Fourier est bornée alors on a

$$\|\mathcal{F}g\|^2 \leq C \|g\|^2$$

Ici nous utilisons encore l'existence de la majorante intégrable pour la fonction sous le signe de l'intégrale.

Le lemme est ainsi démontré.

Comme corollaire nous notons que les calculs sont plus compliqués que dans le cas du modèle de Friedrichs dans le cas scalaire (voir par ex. [8]-[13]). ∎

## 3.2 Etude de la résolvante dans le cas $\zeta \to 0$

Nous allons obtenir la limite principale du comportement asymptotique du noyau de l'opérateur $K(\zeta) - 1$ si $\zeta \to 0$ et étudier l'opérateur inverse $K(s)^{-1}$ avec la condition supplémentaire sur le potentiel $c_0(x)$ (voir (3.1)). Ce noyau est (voir (3.12), (3.15))

$$k(x, y, \zeta) = \frac{1}{2\pi} c_{02}(y)\overline{c_{01}(x)}\mathcal{I}(u, \zeta), \quad u = y - x \tag{3.30}$$

Soit $\delta > 0$ — une valeur arbitraire et $\Omega_- = \{\zeta : |\zeta| \leqslant \delta,\ Im\zeta \leqslant 0,\ \zeta \neq 0\}$ (respectivement $\Omega_+$ pour $Im\zeta \geqslant 0$). Nous avons besoin de l'estimation (uniforme) de la fonction $\mathcal{I}(u,\zeta)$ dans le domaine $\Omega_\pm$.

Nous notons par $\ln\zeta$ la branche continue de la fonction dans le domaine $\zeta \notin (0,\infty)$ tel que $\ln(-1) = \pi i$.

**Lemme 3.2.1** *Soit $p > 1$ et $\zeta = \sigma + i\nu \in \Omega_\pm$, alors il existe la constante $C > 0$ tel que*

$$\mathcal{I}(u,\zeta) = \gamma(\zeta) + \mathcal{I}_0(u,\zeta) \ (\ \mathcal{I}_0 \textit{est borné par rapport à } \zeta\ ) \tag{3.31}$$

*où $\gamma(\zeta) = -\pi i \,\mathrm{sign}\, \nu \ln\zeta$ et*

$$|\mathcal{I}_0(u,\zeta)| \leqslant C\left[\frac{1}{|u|^{\frac{1}{p}}} + |u|\right], \quad \zeta \in \Omega_\pm, \quad |u| \in (0,\infty) \tag{3.32}$$

**Démonstration :** Nous allons d'abord, étudier l'estimation pour $Im\zeta \neq 0$ et après cela nous vérifierons l'inégalité correspondante quand $Im\zeta \to \pm 0$, $Re\zeta = const$. D'après (3.20)–(3.21)

$$\frac{1}{2}\mathcal{I}(u,\zeta) = \left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right) f(|u|t)\frac{2\zeta}{t^2-\zeta^2}dt \equiv \mathcal{I}_1(u,\zeta) + \mathcal{I}_2(u,\zeta), \quad Im\zeta \neq 0$$

Ici

$$|\mathcal{I}_2(u,\zeta)| = \left|\int_1^\infty f(|u|t)\frac{2\zeta}{t^2-\zeta^2}dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_1^\infty |f(|u|t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_1^\infty \left|\frac{2\zeta}{t^2-\zeta^2}\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

où

$$\int_1^\infty |f(|u|t)|^p dt - \int_{|u|}^\infty |f(t)|^p \frac{dt}{|u|} \leqslant \frac{1}{|u|}\int_0^\infty |f(t)|^p dt \tag{3.33}$$

Evidemment, la fonction $\mathcal{I}_2(u,\zeta)$ admet l'estimation de type (3.32) (estimation de $f(t)$ voir dans (3.16)).

Après
$$\mathcal{I}_1(u,\zeta)=\int_0^1 f(|u|t)\frac{2\zeta}{t^2-\zeta^2}dt=\int_0^1\left(\int_{|u|t}^{\infty}\frac{\cos\tau}{\tau}d\tau\right)\frac{2\zeta}{t^2-\zeta^2}dt,$$
Ici nous changeons l'ordre de l'intégration

$$\mathcal{I}_1(u,\zeta)=\int_0^{|u|}\frac{\cos\tau}{\tau}\left(\int_0^{\frac{\tau}{|u|}}\frac{2\zeta}{t^2-\zeta^2}dt\right)d\tau+\int_{|u|}^{\infty}\frac{\cos\tau}{\tau}\left(\int_0^1\frac{2\zeta}{t^2-\zeta^2}dt\right)d\tau\equiv$$

$$\equiv F_1(u,\zeta)+F_2(u,\zeta) \tag{3.34}$$

Si $\zeta=\sigma+i\theta$ alors

$$\int_0^{\theta}\frac{2\zeta}{t^2-\zeta^2}dt=\frac{1}{2}\ln\frac{(\theta-\sigma)^2+\nu^2}{(\theta+\sigma)^2+\nu^2}+i\left(\operatorname{arctg}\frac{\theta-\sigma}{\nu}+\operatorname{arctg}\frac{\theta+\sigma}{\nu}\right) \tag{3.35}$$

Nous noterons cette fonction par

$$E(\theta,\zeta)\equiv\int\limits_0^{\theta}\frac{2\zeta}{t^2-\zeta^2}dt. \tag{3.36}$$

Il est evident que la fonction est bornée d'après (3.35) dans les domaines $\Omega_{\pm}$. En utilisant l'estimation (3.16) de la fonction $f(\tau)$ , nous obtenons la valeur $C>0$ tel que pour $\zeta\in\Omega_{\pm}$

$$|F_2(u,\zeta)|=|f(|u|)E(1,\zeta)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{C}{|u|}, & |u|>1\\ C(1+|\ln|u||), & |u|<1\end{cases} \tag{3.37}$$

le changement de variables $\theta=\dfrac{\tau}{|u|}$ donne (voir (3.34))

$F_1(u,\zeta)=\int\limits_0^1\dfrac{\cos\theta|u|}{\theta}E(\theta,\zeta)\,d\theta=\int\limits_0^1\frac{1}{\theta}E(\theta,\zeta)d\theta-2\int\limits_0^1\dfrac{\sin^2\dfrac{\theta|u|}{2}}{\theta}E(\theta,\zeta)\,d\theta\equiv$
$G_1(\zeta)+G_2(u,\zeta)$

Soit $|u| > 1$ alors $\sin^2 \frac{\theta|u|}{2} < \frac{\theta^2 u^2}{4}$ if $\theta \in \left(0, \frac{1}{|u|}\right)$ et $\sin^2 \frac{\theta|u|}{2} < 1$ if $\theta \in \left(\frac{1}{|u|}, 1\right)$. Ainsi nous obtenons facilement la constante $C > 0$ telle que

$$|G_2(u,\zeta)| \leqslant C \int_0^1 \frac{\sin^2 \frac{\theta|u|}{2}}{\theta} d\theta \leqslant \begin{cases} C(1 + \ln|u|), & |u| > 1 \\ C, & |u| < 1 \end{cases} . \tag{3.38}$$

Nous posons $\zeta_0 = \frac{\zeta}{|\zeta|}$. Le changement $t = |\zeta|s$ dans l'intégrale (3.36) donne $E(\theta,\zeta) = E\left(\frac{\theta}{|\zeta|}, \zeta_0\right)$ et le changement $\theta = |\zeta|\alpha$ dans l'intégrale suivante donne

$$\begin{aligned} G_1(\zeta) &= \int_0^1 \frac{1}{\theta} E(\theta,\zeta)\, d\theta = \int_0^1 \frac{1}{\theta} E\left(\frac{\theta}{|\zeta|}, \zeta_0\right) d\theta = \\ \int_0^{\frac{1}{|\zeta|}} \frac{1}{\alpha} E(\alpha,\zeta_0) d\alpha &= \int_0^1 \frac{1}{\alpha} E(\alpha,\zeta_0) d\alpha + \int_1^{\frac{1}{|\zeta|}} \frac{1}{\alpha} E(\alpha,\zeta_0) d\alpha. \end{aligned}$$

Comme $E(\alpha,\zeta_0) = O(\alpha)$, $\alpha \to +0$ nous obtenons

$$G_1(\zeta) = \int_1^{\frac{1}{|\zeta|}} \frac{1}{\alpha} E(\alpha,\zeta_0) d\alpha + O(1), \quad |\zeta| \to 0. \tag{3.39}$$

D'après (3.35)–(3.36)

$$E(\infty,\zeta_0) = \pi i sign \nu, \qquad \zeta_0 = \frac{\zeta}{|\zeta|}, \quad \zeta = \sigma + i\nu$$

et

$$E(\alpha,\zeta_0) = E(\infty,\zeta_0) - \int_\alpha^\infty \frac{2\zeta_0}{s^2 - \zeta^2} ds = E(\infty,\zeta_0) + O\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad \alpha \to \infty.$$

Substitutant dans (3.39) nous obtenons

$$G_1(\zeta) = E(\infty, \zeta_0) \int_1^{\frac{1}{|\zeta|}} \frac{d\alpha}{\alpha} + O(1) = -E(\infty, \zeta_0) \ln|\zeta| + O(1) = -\pi i sign\nu \ln \zeta + O(1), \quad |\zeta| \to 0$$

ce qui prouve la décomposition (3.31). L'estimation (3.37) résulte de l'estimation (3.33), (3.37)–(3.38). Nous trouvons la même estimation si $\zeta = \sigma + i\nu \to \sigma + i.0$. Le lemme est ainsi démontré.

**Lemme 3.2.2** *Soient les domaines $\Omega_\pm$ donnés avec le rayon $\varepsilon$, alors il existe $C_0(\varepsilon) > 0$ telle que*

$$\begin{aligned} K(\zeta) - 1 &= \gamma(\zeta)(\cdot, c_{01})_{L^2(\mathbb{R})} c_{02} + Q(\zeta), \\ \gamma(\zeta) &= -\pi i sign\nu \ln \zeta, \quad \zeta = \sigma + i\nu \in \Omega_\pm \end{aligned} \tag{3.40}$$

*où l'opérateur $Q(\zeta) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ admet l'estimation*

$$\|Q(\zeta)\| \leqslant C_0(\varepsilon)\|c_0\|_\varepsilon, \quad \zeta \in \Omega_\pm \tag{3.41}$$

*où* $\|c_0\|_\varepsilon = \left( \int\limits_R |c_0(x)|^2 e^{2\varepsilon|x|} dx \right)^{1/2}$.

**Démonstration :** Nous substituons (3.31) dans (3.30) alors

$$(K(\zeta) - 1)f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} c_{02}(y)\overline{c_{01}(x)}[\gamma(\zeta) + \mathcal{I}_0(y - x, \zeta)]f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\gamma(\zeta)(f, c_{01})c_{02}(y) + Q(\zeta)f(y), \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

où (nous utilisons (3.32) avec $p > 4$)

$$\|Q(\zeta)\|^2 \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |c_{02}(y)c_{01}(x)|^2 |\mathcal{I}_0(y - x, \zeta)|^2 dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |c_{02}(y)c_{01}(x)|^2 \left[ |y - x|^{-\frac{2}{p}} + (y - x)^2 \right] dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant C_0(\varepsilon)^2 \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |c_0(y)|^2 |c_0(x)|^2 \exp\left[2\varepsilon(|x|+|y|)\right] dx\, dy \right)^{1/2} =$$

$$= C_0(\varepsilon)^2 \int_{\mathbb{R}} |c_0(x)|^2 e^{2\varepsilon|x|} dx$$

où

$$C_0(\varepsilon)^2 \equiv C_1 \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[ |y-x|^{-\frac{4}{p}} + (y-x)^4 \right] \exp\left[-2\varepsilon(|x|+|y|)\right] dx\, dy \right)^{1/2}$$

Ici nous utilisons les relations $|c_{01}(x)| = |c_{02}(x)| = |c_0(x)|^{1/2}$. D'après le Lemme 3.2.1, l'estimation (3.41) est satisfaite pour les valeurs limites $Q_{\pm}(\sigma)$ aussi. Le lemme est ainsi démontré. ■ ■

## 3.3 Spectre ponctuel de l'opérateur $L$

Notons que la constante $C_0(\varepsilon)$ dans (3.41) ne dépend pas de l'opérateur $L$. Nous introduisons la constante $C(\varepsilon) = 1/(3C_0(\varepsilon))$ laquelle définit le sous-ensemble suivant $N \subset L^2(\mathbb{R})$ :

$$N = \left\{ h \in L^2(\mathbb{R}) : \|h\|_{\varepsilon} \leqslant C(\varepsilon) \left| \int_{\mathbb{R}} h(x) dx \right| \Big/ \int_{\mathbb{R}} |h(x)|\, dx \right\} \qquad (3.42)$$

**Théorème 3.3.1** *Pour chaque potentiel $c_0 \in N$ il existe $\delta > 0$ tel que l'opérateur $T$ (voir (2.28)) n'a pas de spectre ponctuel dans le domaine* $0 < |\zeta| < \delta$.

**Démonstration :** L'opérateur $K(\zeta) - 1 : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ $Im\zeta \neq 0$ est compact (voir Lemme 3.1.1). Par conséquent si L'opérateur $K(\zeta)$ est inversible alors l'inverse $K(\zeta)^{-1}$ est un opérateur borné (voir [8], 1.2.1 th), alors $\zeta \in \rho(L)$ (voir (3.4), (2.21), (2.11)).

Supposons que $K(\zeta)c = 0$, alors (voir (3.40))

$$c + \gamma(\zeta)(c, c_{01})_{L^2(\mathbb{R})} c_{02} + Q(\zeta)c = 0, \qquad Im\zeta \neq 0, \quad \zeta \neq 0. \qquad (3.43)$$

Multiplions par $c_{01}$ nous obtenons

$$(c, c_{01})_{L^2(\mathbb{R})}[1 + \gamma(\zeta)(c_{02}, c_{01})_{L^2(\mathbb{R})}] + (Q(\zeta)c, c_{01})_{L^2(\mathbb{R})} = 0$$

$c_0 \in N$ ( voir (3.42)) alors $(c_{02}, c_{01})_{L^2(\mathbb{R})} \neq 0$ où

$$(c_{02}, c_{01})_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} c_{02}(x)\overline{c_{01}(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} c_0(x)dx \tag{3.44}$$

Evidemment $1 + \gamma(\zeta)(c_{02}, c_{01})_{L^2(\mathbb{R})} \not\equiv 0$ et (voir (3.43))

$$c + Q_1(\zeta)c = 0 \tag{3.45}$$

où

$$Q_1(\zeta) = -\frac{\gamma(\zeta)(Q(\zeta)c, c_{01})_{L^2(\mathbb{R})}}{1 + \gamma(\zeta)(c_{02}, c_{01})_{L^2(\mathbb{R})}} c_{02} + Q(\zeta)c$$

L'équation $K(\zeta)c = 0$ n' a pas de solution $c \neq 0$ si $\|Q_1(\zeta)\| < 1$ (voir (3.45)). Comme $\gamma(\zeta) \to \infty$, $|\zeta| \to 0$ nous obtenons la valeur $\delta_0 > 0$ telle que

$$\left|\frac{\gamma(\zeta)}{1 + \gamma(\zeta)(c_{02}, c_{01})_{L^2(\mathbb{R})}}\right| < \frac{3}{2|(c_{02}, c_{01})_{L^2(\mathbb{R})}|}, \quad |\zeta| < \delta_0$$

Soit $z = \gamma(\zeta)(c_{02}, c_{01})$, l'inégalité $\left|\frac{z}{1+z}\right| < \frac{3}{2}$, i.e. $\left|\frac{1}{z} + 1\right| > \frac{2}{3}$ est satisfaite si $|z| > 3$ ou

$$|\gamma(\zeta)| > \frac{3}{|(c_{02}, c_{01})_{L^2(\mathbb{R})}|} \tag{3.46}$$

Soit $\delta = \min(\varepsilon, \delta_0)$, alors pour $|\zeta| < \delta$ d'après (3.41) nous avons

$$\|Q_1(\zeta)\| \leqslant \left[\frac{3\|c_{01}\|_{L^2(\mathbb{R})}\|c_{02}\|_{L^2(\mathbb{R})}}{2|(c_{02}, c_{01})_{L^2(\mathbb{R})}|} + 1\right] \|Q(\zeta)\| \leqslant \frac{5\|c_{01}\|_{L^2(\mathbb{R})}\|c_{02}\|_{L^2(\mathbb{R})}}{2|(c_{02}, c_{01})_{L^2(\mathbb{R})}|} C_0(\zeta)\|c_0\|_\varepsilon$$

Ici

$$\|c_{02}\|_{L^2(\mathbb{R})}\|c_{01}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |c_{02}(y)|^2 dy\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |c_{01}(x)|^2 dx\right)^{1/2} = \int_{\mathbb{R}} |c_0(x)| dx$$

Comme $c_0 \in N$ nous avons l'estimation (3.42), par conséquent $(C(\zeta)C_0(\zeta) = 1/3)$

$$\|Q_1(\zeta)\| \leqslant \frac{5}{2}C_0(\zeta)C(\zeta) = \frac{5}{6} < 1, \qquad 0 < |\zeta| < \delta, \quad Im\zeta \neq 0.$$

Ainsi, l'opérateur inverse $K^{-1}(\zeta)$ existe et $\zeta \in \rho(L)$. Evidemment nous avons la même estimation pour l'opérateur $K_{\pm}(\sigma) - 1$, $0 < \sigma < \delta$.

Le théorème est démontré. ■

Nous appelons la singularité spectrale de l'opérateur $T$ un pôle généralisé $\sigma_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ des fonctions $\sigma \to (T_\sigma\varphi, \psi)_\perp$, où $(T_\sigma\varphi, \psi)_\perp = \lim_{\varepsilon\to\pm 0}(T_{\sigma+i\varepsilon}\varphi, \psi)_H$, $T_\zeta = (T-\zeta)^{-1}$ et les fonctions $\varphi$, $\psi$ sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

En raison de l'équivalence unitaire $ULU^{-1} = T$ (voir le lemme 2.2.1) nous définissons la singularité spectrale de l'opérator $L$ comme la singularité spectrale de son modèle de Friedrichs $T = S + V$.

L'ensemble de toutes les valeurs propres et singularités spectrales d'un opérateur s'appelle le spectre ponctuel de cet opérateur. Nous n'étudions pas $\zeta = 0$ comme point du spectre.

**Lemme 3.3.1** *La valeur propre $\zeta_0$, $Im\zeta_0 \neq 0$ et la singularité spectrale $\sigma_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ de l'opérateur sont respectivement pôles de la fonction opératorielle $K(\zeta)^{-1}$, $Im\zeta \neq 0$ et son prolongement analytique $K_+(\sigma)^{-1}$ ou $K_-(\sigma)^{-1}$, $\sigma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.*

**Démonstration :** D'après la représentation (3.4) chaque point singulier $\zeta_0$ de la résolvante $\zeta \to T_\zeta$ est un point singulier de la fonction $\zeta \to K(\zeta)^{-1}$. D'après le lemme 14 il existe $M > 0$ tel que l'opérateur $K(\zeta)^{-1}$ existe si $|\zeta| > M$, $Im\zeta \neq 0$. D'après le théorème bien connu sur la fonction opératorielle holomorphe (*th* 1.2.1) (voir [4]) le point singulier de $K(\zeta)^{-1}$ est un pôle. La singularité spectrale est considéré par analogie.

Le lemme est démontré ■

**Théorème 3.3.2** *Le spectre ponctuel de l'opérateur $L$ est fini pour tout potentiel $c_0(x)$ exponentiellement décroissant de l'ensemble $N \subset L^2(0,\infty)$ (voir (3.42)).*

**Démonstration :** Evidemment, il est suffisant de démontrer le contenu du théorème pour l'opérateur $T$. D'après le lemme 3.1.1 et le théorème 1 le spectre ponctuel $\zeta \neq 0$ appartient au domaine $\{\zeta : \delta < |\zeta| < r\}$ pour certains $\delta$, $r > 0$. D'où ce domaine ne contient aucun point d'accumulation de pôles des fonctions $K(\zeta)^{-1}$, i.e. le point d'accumulation du spectre ponctuel de l'opérateur $T$.

Le théorème est démontré. ■

**Conclusion générale**

Nous avons obtenu que le spectre ponctuel de l'opérateur $L$ est fini pour un potentiel $c_0(x)$ exponentiellement décroissant à valeur complexe qui satisfait la condition

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |c_0(x)|^2 e^{2\varepsilon|x|} dx\right)^{1/2} \leqslant C(\varepsilon) \left|\int_{\mathbb{R}} c_0(x) dx\right| \Big/ \int_{\mathbb{R}} |c_0(x)|\, dx$$

(voir Position du problème).

Notons que le membre droit de cette inégalité résulte du fait que le spectre ponctuel est fini au voisinage de l'origine du plan complexe. Nous utilisons la décomposition (3.31) semblable aux travaux [7],[6],[11], mais notre démonstration de l'estimation pour l'opérateur $K(\zeta) - 1$ est assez compliquée. On peut considérer que le théorème 3.3.2 résulte en un certain sens de [10],[9], où le modèle de Friedrichs a été étudié dans le cas scalaire sur la droite. Pour ouvrir des perspectives de recherche, nous proposons de transformer le problème initial dans le modèle de Friedrichs afin de montrer que le spectre est fini où on peut trouver le comportement asymptotique des solutions de certaines équations d'evolution.

Nous envisageons dans l'avenir d'essayer de trouver une asymptotique pour l'opérateur de transport.

# Bibliographie


[1] Cheremnikh E.V., *On normal eigenvalue embedded in continuous spectrum*, Meth. Func. Anal. Topol.. 2001. vol. 7., No 1, P.1-16.

[2] Cheremnikh E.V. *Friedrichs model and problems with non-local boundary conditions*, Method. mathem. and phys. mech. .elds (2000), v.43, n.3, p.143-156 (Ukrain.).

[3] Diaba F. Cheremnikh E. *On The point spectrum of transport operator* , Methods of Functional analysis and Topology ( MFAT), vol 11, no. 1, 2005

[4] I.Z. Gohberg, Krein M.G. *Introduction to theory of linear non-selfadjoint operators in Hilbcrt spacc*, Nauka Moscou 1965, pp.448 (Russian). English transl.in Transl. Math.Mnographs, vol 18, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1969.

[5] Kato T. *Perturbation theory for linear operators,* Springer-Verlag, 1980.

[6] Yu.A. Kuperin, S.N. Naboko, R.V. Romanov *Spectral analysis of a transmission operator to a speed and the functional model,* Funct.anal. and its appl (1999), v.33, n.3, p.47-58 (Russian)

[7] J. Lehner, *The spectrum of the neutron transport operator for the slab*, J.Math.Mech (1962),v,11, no. 2, 173-181

[8] Ljance V.E. *Non selfadjoint differential operators 2th order on the half line,* in the book M.A.Naimark, Linear differential operators,1969, 526pp.(russian).

[9] V.E. Ljancé, *On the perturbation of a continuous spectrum*, Soviet Math. Dokl., (1969), v.10, n.4, p.896-899

[10] W.E.Ljancé, *Completely regular perturbation of a continuous spectrum*; IMath.Sbornik, (1970),v.82,n.1,p.126-156 ;IIMath.Sbornik, (1971), v.84,n.1,p.141-158(Russian) ; English transl.I.Math.URSSSB.11(1970),115-143 ; II.Math.URSSSB.13(1971),137-154.

[11] S. Naboko, R. Romanov, *Spectral singularities, Szokefalvi-Nagi-Foias functional model and the spectral analysis of the Boltzmann operator, Operator Theory* : Advances and Applications

[12] M.Reed and B.Simon, *Methods of modern mathematical physics, III.Scattering theory,* Academic Press, New York, 1979

[13] Shilov G.E., *Mathematical analysis*, 2th special course,.,1965,327pp.(russia).

[14] Yosido K. *Functional analysis, Third edition,* Springer-Heidelberg, New York,1971..