

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et des
Sciences de la Matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
MAGISTER en Mathématiques

Option : Equations aux Dérivées Partielles

Par :

BECHOUAT Taher

Intitulé

Résolution numérique d'une classe de problèmes inverses

Dirigé par : Mr. BOUSSETILA Nadjib

Devant le jury

Président	BADRAOUI Salah	MCA	Univ. Guelma
Rapporteur	BOUSSETILA Nadjib	MCA	Univ. Guelma
Examineur	HITTA Amara	MCA	Univ. Guelma
Examineur	REBBANI Faouzia	Prof	Univ. Annaba
Examineur	ZOUYED Fairouz	MCA	Univ. Annaba

Année 2012

ملخص

من خلال هذه الدراسة نقوم بحل معادلة تكاملية من الصنف الأول و هذا بإستعمال طرق عددية من نوع التجميع المعدل.

نبرهن مشروعية هذه المقاربة و هذا بإثبات تقارب الحل العددي مع الحل الأصلي مدعمة بتقدير الخطأ

Résumé

Dans cette étude, on utilise deux méthodes numériques pour résoudre une équation intégrale de première espèce. La première est basée sur la méthode de collocation régularisée, et la seconde emploie les approximations de Sinc combiné avec une procédure de régularisation de type Tikhonov.

Il a été montré que ces méthodes peuvent nous fournir des solutions approximatives précises. Dans cette investigation, on montre des résultats de convergence pour ces approches, et on donne le bilan d'erreur. Enfin, des exemples numériques sont inclus pour démontrer la validité et l'applicabilité de ces techniques d'approximation.

Abstract

In this study, we use two numerical methods for solving an integral equation of the first kind. The first method is based on regularized collocation method, and the second is the regularized Sinc-Collocation.

It was shown that these methods can provide us accurate approximate solutions. We show a convergence results for these methods, and we give the error estimates. Finally, numerical examples are included to demonstrate the validity and applicability of these approaches.

Université 8 Mai 1945 GUELMA
Faculté de Mathématiques et de l'Informatiques
et des Sciences de la Matière

Mémoire de MAGISTER

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'UNE CLASSE DE PROBLÈMES INVERSES



REMERCIEMENT



Mes premiers remerciements vont à monsieur **BOUSSETILA Nadjib** qui a accepté de me prendre sous sa direction. Sans ses conseils précieux, sa grande disponibilité et sa patience, ce mémoire n'aurait jamais vu le jour. Je le prie de croire à l'expression de ma très profonde gratitude.

Je suis très sensible à l'honneur que m'a fait le Docteur **BADRAOUI Salah** en acceptant de présider mon jury de soutenance et d'examiner mon mémoire.

Je tiens à remercier vivement le Professeur **REBBANI Faouzia**, les Docteurs **HITTA Amara** et **ZOUYED Fairouz** qui ont accepté de faire partie du jury.

Mes sincères remerciements à tous mes enseignants et les responsables de l'école doctorale, qui m'ont donné la chance d'approfondir mes connaissances et de m'orienter vers plusieurs axes de recherches.

Je remercie également tous les membres du département de Mathématiques de l'université de Guelma, pour toute l'aide qui m'a été accordée.



**To my parents and my family, for their
love, support, and encouragement**

Table des matières

Introduction	7
1 Rappels et notations	9
1.1 Equations intégrales	9
1.1.1 Opérateurs compacts et théorie de Riesz-Fredholm	9
1.1.2 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts	11
1.1.3 Equations intégrales de première espèce	13
1.2 Problèmes inverses et problèmes mal posés	19
1.2.1 Définitions et terminologie des problèmes mal posés	22
1.2.2 Outils d'analyse des problèmes mal posés	23
1.2.3 Méthodes de régularisation	25
1.3 Intégration numérique et formules de quadratures	28
1.3.1 La méthode des rectangles à gauche	28
1.3.2 La méthode des points milieu	29
1.3.3 Méthode de Simpson	29
1.3.4 Méthode des trapèzes	29
1.4 Méthode de sinc	31
2 Méthode de collocation régularisée pour une équation intégrale de Fredholm de première espèce	37
2.1 Position du problème	37
2.2 Procédure de Régularisation	49
2.3 Choix du paramètre de régularisation	54
3 Méthode de Sinc-Collocation régularisée pour une équation intégrale de Fredholm de première espèce	59
3.1 Position du problème	59
3.1.1 Approximation de Sinc sur la droite réelle	59
3.2 Méthode de Sinc-Collocation régularisée	61
3.3 Analyse de convergence	63
A Programme MATLAB	69
B Tests numériques	79
B.1 Méthode de Collocation	79
B.2 Méthode de Sinc	84
RÉFÉRENCES	89

Introduction

Thème de recherche

Plusieurs problèmes inverses en sciences et technologie définis sur un espace unidimensionnel, peuvent être modélisés par des équations intégrales de Fredholm de première espèce, i.e., des équations de la forme :

$$\mathbf{K}f(t) = \int_a^b k(t,s)f(s)ds = g(t), \quad (\text{IEFK})$$

où $k(.,.) \in L^2(a,b)$ est le noyau, qui est en général non dégénéré, $g \in L^2(a,b)$ est la donnée et $f \in L^2(a,b)$ est l'inconnu recherché.

Ces problèmes sont mal posés au sens de Hadamard, et leur traitement numérique pose un problème très délicat¹.

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes numériques ont été développées pour traiter cette catégorie de problèmes instables [10].

Parmi ces méthodes, on distingue deux variétés les plus utilisées : les méthodes de *quadrature-collocation* (méthodes de Nyström) qui sont basées sur l'approximation numérique des intégrales par des sommes pondérées supportées sur un ensemble de points (noeuds). La seconde variété est connue sous le nom *méthode de Galerkin* (méthodes de projection) qui consiste à projeter l'équation sur un sous-espace de dimension finie, où la solution recherchée s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de base de cet espace [10].

Dans les deux cas, il a été démontré que le taux de convergence de ces méthodes est d'ordre polynômial, i.e., de la forme $O(1/N^p)$, $p \geq 1$, où N représente la dimension finie de l'espace dans sur lequel se fait la projection ou le nombre de points de la formule de quadrature.

Dans [29], il a été démontré, que pour une certaine classe de fonctions assez régulières, l'approximation de Sinc donne un taux de convergence exponentiel, i.e., de la forme $O(e^{-c\sqrt{N}})$, $c > 0$. Ce résultat a été ensuite exploité avec succès, pour approcher numériquement beaucoup de problèmes d'EDP, d'équations intégrales de deuxième espèce. Les résultats obtenus ont montré l'efficacité de la méthode de Sinc-Collocation comme

1. Les problèmes mal-posés sont les plus contraignants d'un point de vue pratique mais les plus attrayants d'un point de vue mathématique

un outil d'approximation numérique. Récemment, dans les travaux [19, 20, Maleknejad et al., 2010, 2011], les auteurs ont appliqué cette dernière à une classe d'équations intégrales de première espèce, où ils ont montré des résultats de convergence, et ont justifié numériquement la validité de la méthode.

Le présent travail est une continuité dans la même direction. Dans notre investigation, on propose l'étude de la méthode de Sinc-Collocation régularisée, i.e., la méthode de Sinc-Collocation combinée avec une procédure de régularisation de type Tikhonov. On montre la convergence de cette approche, et on donne le bilan d'erreur justifié par des expérimentations numériques.

Contenu du mémoire

Le présent travail porte sur l'étude numérique d'une classe d'équations intégrales de première espèce.

Le mémoire est composé de trois chapitres. Le premier chapitre est consacré au vocabulaire lié à cette thématique, et les autres constituent la contribution principale de la problématique étudiée dans ce mémoire de recherche.

Dans le Chapitre 1, on rappelle quelques résultats de la théorie de Riesz Fredholm pour les opérateurs compacts, et les théorèmes de diagonalisation.

On donne aussi un aperçu sur les problèmes inverses et les problèmes mal posés pour faciliter la lecture et comprendre le caractère mal posé des équations intégrales de première espèce.

Pour les méthodes d'intégration numérique, on a rappelé uniquement les méthodes de base.

Le chapitre 2 est une décortication de l'article "*Regularized collocation method for Fredholm integral equations of the first kind*" de NAIR et PEREVERZEV "J. Complex., (2007)", qui traite la méthode de collocation régularisée appliquée à une équation intégrale de première espèce. On doit mentionner ici que dans cet article, les auteurs ont donné uniquement l'analyse théorique de la méthode. Notre contribution c'était donc la validation numérique de cette approche par des exemples concrets.

Quant au chapitre 3, on développe la méthode de Sinc-Collocation combinée avec une procédure de régularisation de Tikhonov. Notre contribution est originale et généralise les travaux qui ont été développés par *Maleknejad et al.*^{2010,2011}.

Rappels et notations

1.1 Equations intégrales

1.1.1 Opérateurs compacts et théorie de Riesz-Fredholm

On se place dans un cadre normé $(E_1 \rightarrow E_2)$, où E_1 et E_2 sont deux espaces de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , les normes sont notées respectivement par $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$.

Définition 1.1.1. Un opérateur linéaire est une application $A : \mathcal{D}(A) \subseteq E_1 \rightarrow E_2$ linéaire, où $\mathcal{D}(A)$ est le domaine de définition de l'application linéaire A , qui est un sous-espace vectoriel de E_1 , que l'on suppose en général dense dans E_1 . L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subseteq E_1 \rightarrow E_2$ est dit borné si la quantité

$$\|A\| = \sup \{ \|Au\|_{E_2}, u \in \mathcal{D}(A), \|u\|_{E_1} = 1 \}$$

est finie. Dans ce cas A est une application linéaire continue sur $\mathcal{D}(A)$, et lorsque $\mathcal{D}(A)$ est dense dans E_1 , A s'étend de manière unique à un opérateur borné sur E_1 .

Notations. On note par $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ (resp. $\mathcal{L}(E)$ si $E = E_1 = E_2$) l'espace vectoriel des *applications (opérateurs) linéaires continues* de E_1 dans E_2 (resp. des *endomorphismes continus* de E), que l'on munit de la norme (**de la convergence uniforme**) définie par :

$$A \in \mathcal{L}(E_1, E_2), \quad \|A\| = \sup_{0 \neq u \in E_1} \frac{\|Au\|_{E_2}}{\|u\|_{E_1}}.$$

On vérifie que, si E_2 est un espace de Banach (complet), alors $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ est un espace de Banach.

- Tout opérateur A est complètement défini par son graphe $\mathbf{G}(A)$ qui est un sous-espace vectoriel de $E_1 \times E_2$ défini par $\mathbf{G}(A) = \{(v, Av), v \in \mathcal{D}(A)\}$.

Pour tout opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subseteq E_1 \rightarrow E_2$, on note par :

$$\mathbf{N}(A) = \{h \in \mathcal{D}(A), Ah = 0\} \text{ (noyau de } A), \quad \mathbf{R}(A) = \{h_2 = Ah_1, h_1 \in \mathcal{D}(A)\} \text{ (image de } A).$$

Définition 1.1.2. Soient E et F deux espaces de Banach. Une application $T \in L(E, F)$ est dite **compacte** si l'image $T(B_E(0, 1))$ par l'application T de la boule unité de E est relativement compacte, i.e., $\overline{T(B_E(0, 1))}$ est un ensemble compact pour la topologie forte de $F \iff$ Pour toute suite bornée (x_n) de E , la suite (Tx_n) admet une sous-suite qui converge dans F .

On note $\mathcal{K}(E, F)$ (resp. $\mathcal{K}(E)$ si $E = F$) l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F .

Si $\dim(\mathbf{R}(T))$ est finie, on dit alors que T est de rang fini. On note $\mathcal{K}_0(E, F)$ (resp. $\mathcal{K}_0(E)$ si $E = F$) l'ensemble des applications linéaires de rang fini de E dans F .

Remarque 1.1.1. Il est clair que tout opérateur T de rang fini est compact. En effet, l'ensemble $T(B_E(0, 1))$ est alors un ensemble borné d'un espace vectoriel de dimension finie, donc il est relativement compact (tous e.v.n de dimension finie est localement compact).

La proposition suivante donne des propriétés fondamentales de stabilité des opérateurs compacts.

Proposition 1.1.1. Soient E et F deux espaces de Banach. Alors :

- (i) $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.
- (ii) Soient E, F et G des espaces de Banach, $S \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T \in \mathcal{L}(F, G)$. Si S ou T est compacte alors TS est compacte. En particulier, $\mathcal{K}(E)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 1.1.2. Soit T un opérateur continu de l'espace de Hilbert H_1 dans l'espace de Hilbert H_2 . Les deux énoncés suivants sont équivalents :

- (i) T est compact.
- (ii) Pour toute suite $(x_n) \subset H_1$, on a $x_n \rightarrow x \implies Tx_n \rightarrow Tx$.

Théorème 1.1.1. Soit T un opérateur continu de l'espace de Hilbert H_1 dans l'espace de Hilbert H_2 . Les deux énoncés suivants sont équivalents :

- (i) T est compact.
- (ii) Pour toute suite orthonormale $(e_n) \subset H_1$, on a $Te_n \rightarrow 0$.

Proposition 1.1.3. Soit T un opérateur borné de l'espace de Hilbert H_1 vers l'espace de Hilbert H_2 . Alors T est compact si et seulement si T^* est compact.

Théorème 1.1.2. $\mathcal{K}(H) = \overline{\mathcal{K}_0(H)}$, i.e., pour tout $T \in \mathcal{K}(H)$ il existe une suite $(T_n) \subset \mathcal{K}_0(H)$ telle que $\|T - T_n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

1.1.2 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts

Théorème 1.1.3. [Alternative de Fredholm : V1] Soit $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. On a les propriétés suivantes :

- (i) $\mathbf{N}(T) = \mathbf{R}(T^*)^\perp$.
- (ii) $\mathbf{N}(T^*) = \mathbf{R}(T)^\perp$.
- (iii) $\overline{\mathbf{R}(T)} = \mathbf{N}(T^*)^\perp$.
- (iv) $\overline{\mathbf{R}(T^*)} = \mathbf{N}(T)^\perp$.

Théorème 1.1.4. [Alternative de Fredholm : V2] Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact et $\lambda \neq 0$. On a

- (i) $N(T - \lambda I)$ est de dimension finie et $\dim(N(T - \lambda I)) = \dim(N(T^* - \bar{\lambda}I))$.
- (ii) $R(T - \lambda I)$ est sous-espace fermé dans H .
- (iii) $R(T - \lambda I) = \overline{R(T - \lambda I)} = N(T^* - \bar{\lambda}I)^\perp$.
- (iv) $H = R(T - \lambda I) \iff N(T^* - \bar{\lambda}I) = \{0\} \iff N(T - \lambda I) = \{0\} \iff R(T^* - \bar{\lambda}I) = H$.

Théorème 1.1.5. Soit $K \in \mathcal{K}(E)$ avec $\dim(E) = \infty$. Alors on a :

- (a) $0 \in \sigma(K)$,
- (b) $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$,
- (c) l'une des situations suivantes :
 - ou bien $\sigma(K) = \{0\}$,
 - ou bien $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est fini,
 - ou bien $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

Théorème 1.1.6. Soit H un espace de Hilbert séparable et $A \in \mathcal{K}(H)$. Si A est hermitien (auto-adjoint), il existe un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{C}$ qui est fini ou dénombrable avec 0 comme unique valeur d'adhérence et des projections orthogonales P_λ sur des espaces vectoriels fermés N_λ deux à deux orthogonaux, de dimension finie sauf éventuellement pour $\lambda = 0$, tels que

$$A = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda P_\lambda, \quad (1.1.1)$$

En fait, $\Lambda = \sigma(A)$, $N_\lambda = \mathbf{N}(A - \lambda I)$ et $H = \overline{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda}$. En particulier, A a une valeur propre de module $\|A\| = \sup_{\lambda \in \Lambda} |\lambda|$.

Ce résultat vaut encore si A est normal lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

L'équation (1.1.1) signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\Lambda_1 \subset \Lambda$ fini tel que $\left\| A - \sum_{\lambda \in \Lambda_1} \lambda p_\lambda \right\| < \varepsilon$.

Théorème 1.1.7. Soient H un espace séparable et $A \in \mathcal{K}(H)$. Il existe des systèmes orthonormés (v_j) et (w_j) et une suite réelle (s_j) qui décroît vers 0 tels que

$$A(v) = \sum s_j \langle v, v_j \rangle w_j \quad \text{pour tout } v \in H. \quad (1.1.2)$$

En fait, les s_j sont les valeurs propres de $|A|$ répétées selon leur multiplicité et associées avec les vecteurs propres v_j : ce sont les valeurs singulières de A .

Théorème 1.1.8. On suppose que H est séparable. Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T :

$$\forall x \in H, \quad x = x_0 + \sum_{k \geq 1} (x, e_k) e_k, \quad x_0 \in \mathbf{N}(T), \quad Tx = \sum_{k \geq 1} \lambda_k e_k.$$

Equations opérationnelles et Alternative de Fredholm

On suppose que H est séparable. Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact donnée par sa décomposition spectrale :

$$\forall h \in H, \quad h = h_0 + \sum_{k \geq 1} (h, e_k) e_k, \quad h_0 \in \mathbf{N}(A), \quad Th = \sum_{k \geq 1} \lambda_k e_k.$$

Considérons l'équation

$$(T - \lambda I)f = g, \quad (1.1.3)$$

où $f = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n e_n$, $g = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n e_n$ sont deux vecteurs de H donnés.

• Si $\lambda \notin \sigma(A)$, la solution de l'équation (1.1.3) est donnée par :

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g_n}{\lambda_n - \lambda} \right) e_n - \frac{g_0}{\lambda}.$$

• Si $\lambda = \lambda_s \neq 0$, l'équation (1.1.3) n'a de solution que si $g_s = 0$ ($\Leftrightarrow g \in \mathbf{N}(T - \lambda_s I)^\perp$) et dans ce cas les solutions sont données par :

$$f = \left[\sum_{n \neq s}^{\infty} \left(\frac{g_n}{\lambda_n - \lambda} \right) e_n - \frac{g_0}{\lambda_s} \right] + G_s,$$

où G_s est un élément arbitraire de $\mathbf{N}(T - \lambda_s I)$.

• Si $\lambda = 0$, pour que l'équation $Tf = g$ ait une solution il faut et il suffit que

$$f_0 = 0 \Leftrightarrow f \in \mathbf{N}(T)^\perp = \overline{\mathbf{R}(T)}$$

et que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n|^2}{\lambda_n^2}$$

soit convergente. Dans ce cas les solutions sont données par :

$$f = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g_n}{\lambda_n - \lambda} \right) e_n \right] + G_0,$$

où G_0 est un élément arbitraire de $\mathbf{N}(T)$.

1.1.3 Equations intégrales de première espèce

Définition 1.1.3. [Opérateurs de Hilbert-Schmidt] Soit H un espace de Hilbert séparable. On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt (on note $T \in \mathcal{L}_{hs}(H) :=$ ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt définis sur H s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$ de H telle que $\sum_{n=1}^{n=\infty} \|Te_n\| < \infty$. On note cette quantité par $\|T\|_{hs}$.

Théorème 1.1.9. Soient H un espace de Hilbert séparable, et $T \in \mathcal{L}_{hs}(H)$. On a :

(i) Si $(f_m)_{m \geq 1}$ est une autre base hilbertienne de H , alors

$$\mathbf{a} \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \|Te_n\| = \sum_{m=1}^{m=\infty} \|T^* f_m\|.$$

$$\mathbf{b} \quad \text{Pour toute base hilbertienne } (\hat{e}_m)_{m \geq 1} \text{ de } H, \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \|Te_n\| = \sum_{m=1}^{m=\infty} \|T\hat{e}_m\|.$$

(ii) T est compact.

(iii) On suppose que $H = L^2(\Omega)$, où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N . Soit $k(.,.) : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K} (= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction $L^2(\Omega \times \Omega)$. Alors l'opérateur intégral défini par :

$$\mathbf{K}u(x) = \int_{\Omega \times \Omega} k(x, y) u(y) dy$$

est compact.

(iv) Tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur $H = L^2(\Omega)$ s'écrit de manière unique sous la forme \mathbf{K} .

Considérons l'équation intégrale de Fredholm de première espèce (resp. de seconde espèce)

$$\int_a^b k(x, y) f(y) dy = g(x), \quad (1.1.4)$$

$$f(x) - \lambda \int_a^b k(x, y) f(y) dy = g(x), \quad (1.1.5)$$

où le noyau $k \in L^2([a, b[\times]a, b[)$, le second membre $g \in L^2(a, b)$ et le multiplicateur $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sont donnés. Notre but est d'étudier l'existence d'une solution $f \in L^2(a, b)$ à ces équations et, si possible, de la représenter.

On sait que, sous la condition $k \in L^2(]a, b[\times]a, b[)$, l'opérateur \mathbf{K} défini dans $H := L^2(a, b)$ par :

$$\mathbf{K}f(x) := \int_a^b k(x, y)f(y)dy, \quad x \in [a, b]$$

est du type Hilbert-Schmidt (donc compact) et nous réduirons les équations intégrales envisagées aux formes abstraites

$$\mathbf{K}f = g, \quad (I - \lambda\mathbf{K})f = g,$$

avec \mathbf{K} compact dans un espace de Hilbert H .

Pour toutes fonctions f et $g \in L^2(a, b)$ une application du théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{K}f, g \rangle &= \int_a^b \left(\int_a^b k(x, y)f(y)dy \right) \overline{g(x)}dx = \int_a^b f(y)dy \left(\int_a^b k(x, y)\overline{g(x)}dx \right) dx = \\ &= \int_a^b f(y)dy \overline{\left(\int_a^b \overline{k(x, y)}g(x)dx \right)} = \langle f, \mathbf{K}^*g \rangle, \end{aligned}$$

si bien que l'adjoint \mathbf{K}^* est défini par $\mathbf{K}^*g(x) = \int_a^b \overline{k(y, x)}g(y)dy$ et l'opérateur \mathbf{K} est auto-adjoint ssi $\overline{k(y, x)} = k(x, y)$ p.p. dans $]a, b[\times]a, b[$.

Une application directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\|\mathbf{K}\| \leq \left(\int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} = \|k\|_{\text{hs}}.$$

Définition 1.1.4. On dit que $\lambda \neq 0$ est une valeur singulière de l'opérateur \mathbf{K} si l'équation

$$(I - \lambda\mathbf{K})f = 0$$

admet une solution $f \neq 0$ i.e., $N(I - \lambda\mathbf{K}) \neq \{0\}$. Comme cette équation s'écrit encore $\left(\frac{1}{\lambda}I - \mathbf{K}\right)f$, on voit que λ est une valeur singulière de \mathbf{K} si et seulement si $\mu = \frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de \mathbf{K} . Les solutions non nulles de $(I - \lambda\mathbf{K})f = 0$ seront encore appelées éléments propres et le nombre d'éléments propres linéairement indépendants associés à une même valeur singulière λ définit la multiplicité de celle-ci.

On sait bien qu'un opérateur compact \mathbf{K} admet un nombre fini ou une suite de valeurs singulières dont les modules croissent vers $+\infty$. Chaque valeur singulière est de multiplicité finie et λ est valeur singulière de \mathbf{K} si et seulement si $\bar{\lambda}$ est valeur singulière de \mathbf{K}^* , avec la même multiplicité.

En vertu du Théorème (1.1.4), on déduit le résultat suivant connu sous le nom "alternative de Fredholm".

Théorème 1.1.10. Soit $\mathbf{K} \in \mathcal{K}(H)$. Alors

- (i) Ou bien l'équation $(I - \lambda \mathbf{K})f = 0$ n'admet que la solution $f = 0$ ($N(I - \lambda \mathbf{K}) = \{0\}$) et l'équation $(I - \lambda \mathbf{K})f = g$ admet une et une seule solution quel que soit le second membre $g \in H$.
- (ii) Ou bien l'équation homogène $(I - \lambda \mathbf{K})f = 0$ admet des solutions non nulles ($N(I - \lambda \mathbf{K}) \neq \{0\}$) et l'équation $(I - \lambda \mathbf{K})f = g$ admet une solution si et seulement si le second membre g est orthogonal aux solutions de l'équation homogène adjointe $(I - \bar{\lambda} \mathbf{K}^*)f = 0$ ($g \in N(I - \bar{\lambda} \mathbf{K}^*)^\perp$).

Preuve. Puisque $\lambda \neq 0$, l'équation $(I - \lambda \mathbf{K})f = g$ peut s'écrire $\left(\mathbf{K} - \frac{1}{\lambda} I\right)f = -\frac{1}{\lambda} g$.

Dans la première éventualité, $\frac{1}{\lambda}$ n'est pas une valeur propre de \mathbf{K} et l'opérateur $\left(\mathbf{K} - \frac{1}{\lambda} I\right)$ est inversible dans $\mathcal{L}(H)$, puisque pour un opérateur compact \mathbf{K} , $\sigma(\mathbf{K}) = \sigma_p(\mathbf{K}) \cup \{0\}$. L'équation $(I - \lambda \mathbf{K})f = g$ admet donc une solution unique donnée par $f = -\frac{1}{\lambda} \left(\mathbf{K} - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} g$.

Dans la seconde éventualité, $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de \mathbf{K} et l'équation $(I - \lambda \mathbf{K})f = g$ n'est résoluble qu'à la condition nécessaire et suffisante

$$g \in R\left(\mathbf{K} - \frac{1}{\lambda} I\right) = N\left(\mathbf{K}^* - \frac{1}{\lambda} I\right)^\perp = N\left(I - \bar{\lambda} \mathbf{K}^*\right)^\perp.$$

On peut représenter la (les) solution(s) de l'équation non homogène de seconde espèce lorsque \mathbf{K} est auto-adjoint, i.e., la condition $k(x, y) = \overline{k(y, x)}$ est satisfaite.

Théorème 1.1.11. [Alternative de Fredholm] Soient H un espace de Hilbert séparable et \mathbf{K} un opérateur auto-adjoint compact. Notons $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} \in \mathbb{R}$ les valeurs singulières de \mathbf{K} , où (μ_n, e_n) sont les couples propres de \mathbf{K} , i.e.,

$$\mathbf{K}e_n = \mu_n e_n, \quad \langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}, \quad \forall h \in H, h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n \rangle e_n + h_0, \quad h_0 \in N(\mathbf{K}).$$

L'équation $(I - \lambda \mathbf{K})f = g$ s'écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda \mu_n) \langle f, e_n \rangle e_n + f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, e_n \rangle e_n + g_0, \quad f_0, g_0 \in N(\mathbf{K}).$$

- Si λ n'est pas une valeur singulière de \mathbf{K} ($\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \notin \sigma(\mathbf{K})$), alors

$$\begin{aligned} f &= g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g, e_n \rangle}{1 - \lambda \mu_n} e_n = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g, e_n \rangle}{1 - \frac{1}{\lambda} \lambda} e_n = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \langle g, e_n \rangle e_n = \\ &= g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda + \lambda}{\lambda_n - \lambda} \langle g, e_n \rangle e_n = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, e_n \rangle e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} \langle g, e_n \rangle e_n = g + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle g, e_n \rangle e_n. \end{aligned}$$

Si λ n'est pas une valeur singulière de \mathbf{K} , alors $f = g + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle g, e_n \rangle e_n$.

- Si λ est une valeur singulière de \mathbf{K} , i.e., $\lambda = \lambda_s = \frac{1}{\mu_s}$ pour un certain $s \in \mathbb{N}$. Alors l'équation $(I - \lambda \mathbf{K})f = g$ est résoluble ssi $g \in R(\mathbf{K} - \mu_s) = N(\mathbf{K} - \mu_s)^\perp = N(I - \lambda_s \mathbf{K})^\perp$, et dans ce cas les solutions f sont données par

$$f = g + \lambda \sum_{\substack{n=1 \\ \lambda \neq \lambda_s}}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle g, e_n \rangle e_n + G_s, \text{ où } G_s \in N(I - \lambda_s \mathbf{K}).$$

Considérons maintenant l'équation de première espèce sous sa forme abstraite $\mathbf{K}f = g$, avec \mathbf{K} opérateur compact dans H séparable. Cette équation n'admet une solution que si $g \in R(\mathbf{K})$.

Proposition 1.1.4. *On suppose que $g \in \overline{R(\mathbf{K})} = N(\mathbf{K}^*)^\perp$, alors on a*

$$\mathbf{K}f = g \iff \mathbf{K}^* \mathbf{K}f = \mathbf{K}^* g. \quad (GS)$$

Preuve. En effet, il est immédiat que $\mathbf{K}f = g \implies \mathbf{K}^* \mathbf{K}f = \mathbf{K}^* g$ et pour l'implication inverse, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^* \mathbf{K}f = \mathbf{K}^* g &\implies \langle \mathbf{K}^* \mathbf{K}f, h \rangle = \langle \mathbf{K}^* g, h \rangle, \quad \forall h \in H \\ &\implies \langle \mathbf{K}f, \mathbf{K}h \rangle = \langle g, \mathbf{K}h \rangle, \quad \forall h \in H \\ &\implies \langle \mathbf{K}f, \hat{h} \rangle = \langle g, \hat{h} \rangle, \quad \forall \hat{h} \in \overline{R(\mathbf{K})} \\ &\implies \langle \mathbf{K}f - g, \hat{h} \rangle = 0, \quad \forall \hat{h} \in \overline{R(\mathbf{K})}. \end{aligned}$$

$g \in \overline{R(\mathbf{K})}$ par hypothèse et $\mathbf{K}f \in R(\mathbf{K})$, donc $\mathbf{K}f - g \in \overline{R(\mathbf{K})}$. Puisque l'égalité $\langle \mathbf{K}f - g, \hat{h} \rangle = 0$ est vraie pour tout $\hat{h} \in \overline{R(\mathbf{K})}$, en particulier pour $\hat{h} = \mathbf{K}f - g$, il vient donc $\langle \mathbf{K}f - g, \mathbf{K}f - g \rangle = 0$, d'où $\mathbf{K}f - g = 0 \implies \mathbf{K}f = g$.

Proposition 1.1.5. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors $N(T^* T) = N(T)$ et $N(T T^*) = N(T^*)$.*

Preuve. $v \in N(T) \implies Tv = 0 \implies T^* Tv = 0 \implies v \in N(T^* T) \implies N(T) \subseteq N(T^* T)$. Pour l'autre inclusion on a $T^* Tv = 0 \implies \langle T^* Tv, v \rangle = 0 = \langle Tv, Tv \rangle = \|Tv\|^2 \implies Tv = 0 \implies v \in N(T)$.

Pour la deuxième égalité, il suffit de remplacer T par T^* et d'utiliser l'égalité $T^{**} = T$.

L'opérateur $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$ est auto-adjoint compact (donc diagonalisable) et ses valeurs propres sont positives ou nulles. D'après le théorème de diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts, $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$ admet un nombre fini ou une suite de valeurs propres décroissantes vers 0 et si on répète les valeurs propres non nulles σ_n selon leur multiplicité. Notons (σ_n, φ_n) les couples propres de $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$, i.e.,

$$\mathbf{K}^* \mathbf{K} \varphi_n = \sigma_n \varphi_n, \quad \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{nm}.$$

On pose

$$\lambda_n := \frac{1}{\sqrt{\sigma_n}}, \quad \psi_n := \lambda_n \mathbf{K} \varphi_n,$$

d'où

$$\mathbf{K}^* \psi_n = \mathbf{K}^* (\lambda_n \mathbf{K} \varphi_n) = \lambda_n \mathbf{K}^* \mathbf{K} \varphi_n = \sqrt{\sigma_n} \varphi_n.$$

Théorème 1.1.12. *La famille $\{\psi_n\}$ est totale orthonormée dans $\overline{R(\mathbf{K})}$ et la famille $\{\varphi_n\}$ est totale orthonormée dans $\overline{R(\mathbf{K}^*)}$.*

Preuve. Il est évident que les ψ_n appartiennent à $\overline{R(\mathbf{K})}$ et ils sont orthonormés, puisque

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \langle \lambda_n \mathbf{K} \varphi_n, \lambda_m \mathbf{K} \varphi_m \rangle = \lambda_n \lambda_m \langle \mathbf{K}^* \mathbf{K} \varphi_n, \varphi_m \rangle = \lambda_n \lambda_m \langle \sigma_n \varphi_n, \varphi_m \rangle =$$

$$\lambda_n \lambda_m \sigma_n \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \lambda_n \lambda_m \sigma_n \delta_{nm} = \delta_{nm}.$$

Ils sont totaux dans $\overline{R(\mathbf{K})}$, puisque si $h \in \overline{R(\mathbf{K})} = N(\mathbf{K}^*)^\perp$ vérifie $\langle h, \psi_n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient $h = 0$. En effet, on a

$$\langle h, \psi_n \rangle = 0 = \langle h, \lambda_n \mathbf{K} \varphi_n \rangle = \lambda_n \langle h, \mathbf{K} \varphi_n \rangle = \lambda_n \langle \mathbf{K}^* h, \varphi_n \rangle,$$

pour tout n avec $\lambda_n > 0$, d'où

$$(\mathbf{K}^* \mathbf{K}) \mathbf{K}^* h = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \langle \mathbf{K}^* h, \varphi_n \rangle \varphi_n = 0,$$

et $\mathbf{K} \mathbf{K}^* h \in N(\mathbf{K}^*)$. De là, puisque $h \in N(\mathbf{K}^*)^\perp$, $\langle h, \mathbf{K} \mathbf{K}^* h \rangle = 0$, soit encore $\langle \mathbf{K}^* h, \mathbf{K}^* h \rangle = 0 = \|\mathbf{K}^* h\|^2 = 0$, et $h \in N(\mathbf{K}^*)$. Donc $h \in N(\mathbf{K}^*) \cap N(\mathbf{K}^*)^\perp = \{0\}$, d'où $h = 0$.

Passons aux φ_n . Ils appartiennent à $\overline{R(\mathbf{K}^*)}$ et sont orthonormés. Ils sont totaux dans $\overline{R(\mathbf{K}^*)}$, puisque si $h \in \overline{R(\mathbf{K}^*)} = N(\mathbf{K})^\perp$ vérifie $\langle h, \varphi_n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient $h = 0$. En effet, on a

$$\langle h, \varphi_n \rangle = 0 = \langle h, \lambda_n \mathbf{K}^* \psi_n \rangle = \lambda_n \langle h, \mathbf{K}^* \psi_n \rangle = \lambda_n \langle \mathbf{K} h, \psi_n \rangle,$$

pour tout n avec $\lambda_n > 0$, d'où $\langle \mathbf{K} h, \psi_n \rangle = 0$ pour tout n et $\mathbf{K} h = 0$ par la totalité des ψ_n dans $\overline{R(\mathbf{K})}$. Ainsi $h \in N(\mathbf{K}) \cap N(\mathbf{K})^\perp = \{0\}$, donc $h = 0$.

Définition 1.1.5. La suite des triplets $\{(\varphi_n, \psi_n, \sigma_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est dite système singulier pour \mathbf{K}

Théorème 1.1.13. [de PICARD] *On suppose que H est un espace de Hilbert séparable. Soient $K \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur compact et $\{(\varphi_n, \psi_n, \sigma_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ son système singulier. Alors l'équation $\mathbf{K}h = g$ admet une solution si et seulement si*

$$(i) \quad g \in N(\mathbf{K}^*)^\perp = \overline{R(\mathbf{K})}.$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle g, \psi_n \rangle|^2 < \infty.$$

- Si $N(\mathbf{K}) = \{0\}$, cette solution est unique et elle est donnée par :

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle g, \psi_n \rangle \varphi_n. \quad (S1)$$

- Si $N(\mathbf{K}) \neq \{0\}$ i.e. 0 est une valeur propre \mathbf{K} , alors la solution générale est donnée par :

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle g, \psi_n \rangle \varphi_n + g_0, \quad g_0 \in N(\mathbf{K}). \quad (S2)$$

Preuve. Si l'équation $\mathbf{K}h = g$ admet une solution, alors $g \in N(\mathbf{K}^*)^\perp = \overline{R(\mathbf{K})}$ et $\mathbf{K}^* \mathbf{K}h = \mathbf{K}^* g$ (cf. Prop (1.1.4), formule (SG)).

L'égalité

$$H = N(\mathbf{K}^* \mathbf{K}) \oplus N(\mathbf{K}^* \mathbf{K})^\perp = N(\mathbf{K}) \oplus N(\mathbf{K})^\perp = N(\mathbf{K}) \oplus \overline{R(\mathbf{K}^*)},$$

nous permet d'écrire

$$\forall \xi \in H, \quad \xi = \xi_1 + \xi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi, \varphi_n \rangle \varphi_n + \xi_0, \quad \xi_0 \in N(\mathbf{K}).$$

En développant les deux côtés de l'équation $\mathbf{K}^* \mathbf{K}h = \mathbf{K}^* g$ dans la base $(\varphi_n) \oplus N(\mathbf{K})$, on obtient

$$\mathbf{K}^* \mathbf{K}h = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n = \mathbf{K}^* g = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, \varphi_n \rangle \mathbf{K}^* \varphi_n,$$

d'où $\langle h, \varphi_n \rangle = \frac{1}{\sigma_n} \langle \mathbf{K}^* g, \varphi_n \rangle$. Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma_n} \right)^2 |\langle \mathbf{K}^* g, \varphi_n \rangle|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma_n} \right)^2 |\langle g, \mathbf{K} \varphi_n \rangle|^2 = \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma_n} \right)^2 |\langle g, \sqrt{\sigma_n} \psi_n \rangle|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle g, \psi_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, \varphi_n \rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, \varphi_n \rangle|^2 + \|h_0\|^2 = \|h\|^2, \end{aligned}$$

et la solution h s'exprime par la série

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n + h_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle g, \psi_n \rangle \varphi_n + h_0, \quad h_0 \in N(\mathbf{K}) = N(\mathbf{K}^* \mathbf{K}).$$

On en déduit

$$\mathbf{K}h = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle g, \psi_n \rangle \mathbf{K} \varphi_n + \mathbf{K}h_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \mathbf{K}f, \psi_n \rangle \mathbf{K} \psi_n + \mathbf{K}h_0,$$

et, en comparant ce développement avec

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \mathbf{K}f, \psi_n \rangle \psi_n,$$

on obtient $Th_0 = 0$, i.e., $h_0 \in N(\mathbf{K})$. Ce qui achève d'établir la condition nécessaire et la formule de la solution.

Réciproquement, si les conditions (i) et (ii) sont satisfaites, l'élément

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle g, \psi_n \rangle \varphi_n + h_0$$

est bien défini, car $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle g, \psi_n \rangle|^2 + \|h_0\|^2 < +\infty$. De plus, cet élément h est une solution de l'équation $\mathbf{K}h = g$, car

$$\mathbf{K}h = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle g, \psi_n \rangle \mathbf{K}\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, \psi_n \rangle \psi_n,$$

puisque $g \in \overline{R(\mathbf{K})}$ et que les ψ_n sont totaux. ■

1.2 Problèmes inverses et problèmes mal posés

□ Problèmes directs en EDP

Étant donné un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, on s'intéresse aux solutions u :

$\Omega \times [0, \infty[\ni (x, t) \longrightarrow u(x, t) \in E$ de

$$\begin{cases} u_t + F(t, x, \partial_{x_1}^{\alpha_1} u, \dots, \partial_{x_p}^{\alpha_p} u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ \{B_i\}_{i=1}^q u = g_i, & \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

□ Problèmes inverses en EDP

A partir d'une connaissance partielle de la solution u de l'EDP (mesures internes, mesures frontières), retrouver :

- $f, g_1, \dots, g_q \longrightarrow$ Identification de sources.
- $u_0 \longrightarrow$ Identification de données initiales.
- $F \longrightarrow$ Identification de coefficients.
- $\Omega \longrightarrow$ Identification géométrique.

► Toute problématique directe génère une famille de problèmes inverses.

La difficulté principale des problèmes inverses est leur caractère généralement mal posé.¹

□ **Sensibilité des vecteurs propres aux perturbations additives.** Le problème du calcul d'un vecteur propre commun est mal posé au sens de Hadamard, comme le montre l'exemple suivant :

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

1. Alors que les mêmes causes provoquent les mêmes effets, des effets identiques peuvent avoir de multiples causes : les problèmes inverses sont mal posés.

Par un simple calcul exact, on trouve les couples propres suivants :

$$\left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = 1, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \lambda_1(\varepsilon) = 1 + \varepsilon, w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2(\varepsilon) = 1 - \varepsilon, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pour $\varepsilon = 0$, B et A ont un vecteur propre commun $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour $\varepsilon \neq 0$, elles n'ont aucun vecteur propre commun, cela signifie qu'il est impossible de trouver un vecteur propre commun d'un couple de matrices en **présence d'erreurs d'arrondies**. En effet les perturbations sont susceptibles de transformer un couple, ayant un vecteur propre commun, en un couple qui ne vérifie pas cette propriété. La raison topologique derrière ceci est due au fait que l'ensemble des matrices qui n'ont aucun vecteur propre en commun est dense dans l'ensemble de tous les couples de matrices.

Cet exemple montre que les vecteurs propres sont sensibles aux perturbation additives (erreurs d'arrondi, erreurs de troncature) : deux matrices proches avec deux configurations spectrales divergentes !

Théorème 1.2.1. Pour $A \in \mathbf{M}_N(\mathbb{C})$, on note $EV(A)$ l'ensemble des vecteurs propres de A et

$$S := \{(A, B) \in \mathbf{M}_N(\mathbb{C}) \times \mathbf{M}_N(\mathbb{C}) : EV(A) \cap EV(B) = \emptyset\}$$

i.e., l'ensemble de tous les couples de matrices qui n'ont aucun vecteur propre commun. Alors S est dense dans $\mathbf{M}_N(\mathbb{C}) \times \mathbf{M}_N(\mathbb{C})$ ($\bar{S} = \mathbf{M}_N(\mathbb{C}) \times \mathbf{M}_N(\mathbb{C})$).

Exemple 1.2.1. Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_y u(x, 0) = \varphi_\varepsilon(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon \sin(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. On vérifie aisément que $u_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^2 \sinh(y/\varepsilon) \sin(x/\varepsilon)$ est une solution du problème (1.2.1). On remarque que $(\varphi_\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0)$ mais $(u_\varepsilon(x, y) \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0)$ pour tout $x > 0$ fixé. Ce qui prouve que les solutions de (1.2.1) ne dépendent pas continûment des données initiales.

Exemple 1.2.2. Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur. Trouver $u(x, 0) = u_0(x)$ (condition initiale inconnue), sachant que le champ de température $u(x, t)$ vérifié :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t \in (0, T), \\ u(x, T) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (BCP)$$

où $\psi \in L_2(0, \pi)$ est une fonction donnée. Par la méthode de Fourier, on peut expliciter la solution du problème (BCP) sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(T-t)n^2} \psi_n e_n(x),$$

où ψ_n est le coefficient de Fourier d'ordre n de ψ :

$$\psi_n = \langle \psi, e_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \psi(x) \sin(nx) dx, \quad e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

Soit $\varphi(x) = u_0(x, 0)$ la température initiale. Alors d'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n^2 T} |\psi_n|^2.$$

On considère maintenant le problème (BCP) avec des données bruitées :

$$\psi_k = \psi + \frac{1}{k} e_k(x).$$

On remarque que $\|\psi_k - \psi\| = \frac{1}{k} \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty$ mais $\|u(\psi_k; 0) - u(\psi; 0)\| = \frac{1}{k} e^{k^2 T} \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty$. On voit très clair que le problème (BCP) est instable donc mal posé. C'est pour cela, qu'on dit que les phénomènes de la chaleur sont **irréversibles**.

La solution de l'équation de la chaleur avec la condition initial $u(x, 0) = \varphi(x) \in L_2(0, \pi)$ est donnée par la formule :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \varphi_n e_n(x) = \int_0^{\pi} \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \sin(nx) \sin(n\xi) \right\} \varphi(\xi) d\xi.$$

Ainsi, u est solution du problème (BCP) ssi φ satisfait l'équation de Fredholm de première espèce :

$$\mathcal{K}\varphi = \psi, \quad u(x, T) = \int_0^{\pi} K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

où $K(x, \xi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 T} \sin(nx) \sin(n\xi)$.

L'opérateur intégral \mathcal{K} est du type Hilbert-Schmidt (donc compact), d'où \mathcal{K}^{-1} n'est pas borné. Ce qui montre le caractère mal posé du problème (BCP).

Exemple 1.2.3. Equation hyperbolique avec conditions de Dirichlet. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(0) = \varphi, \quad u(T) = \psi, \end{cases} \quad (HCP)$$

où φ, ψ sont des fonctions données dans H , et $A: \mathcal{D}(A) : H \rightarrow H$ tel que $A = A^*$ et $A \geq \delta > 0$.

Si $\lambda_k = (k\pi)^2/T^2$, $k = 1, 2, \dots$, ne sont pas des valeurs propres de A , alors l'opérateur $\left(\sin(T\sqrt{A})\right)$ est injectif, et la solution formelle du problème (HCP) est donnée par :

$$u(t) = \sin((T-t)\sqrt{A}) \left(\sin(T\sqrt{A})\right)^{-1} \psi + \sin(t\sqrt{A}) \left(\sin(T\sqrt{A})\right)^{-1} \varphi.$$

Inversement, si $\{\lambda_k = (k\pi)^2/T^2, k = 1, 2, \dots\} \cap \sigma_p(A) \neq \emptyset$, alors la solution du problème (HCP) **n'est pas unique**.

Cependant, le problème (HCP) est mal posé au sens d'HADAMARD dans les deux cas : les valeurs $\lambda_k = (k\pi/T)^2$, $k = 1, 2, \dots$, peuvent être proches des valeurs propres de A :

$$[\delta, +\infty[\ni \lambda \mapsto \frac{1}{\sin(T\sqrt{\lambda})} \text{ n'est pas bornée au voisinage des } \lambda_k.$$

► On remarque d'après les exemples donnés, qu'il y a deux questions sérieuses liées à cette catégorie de problèmes :

1 La non unicité. Pour cette question, il nous faut des informations supplémentaires sur la solution et une bonne connaissance de la nature physique du problème, pour récupérer l'unicité.

2 L'instabilité. Ce caractère est le plus problématique, surtout dans l'implémentation numérique. Cela veut dire qu'il est impossible de donner un schéma numérique convergent et stable quel que soit la performance de la méthode proposée. Pour traiter ce caractère d'instabilité, on régularise par un problème proche (dans un certain sens) qui est stable. Les méthodes de régularisation sont variées, chaque problème nécessite un traitement spécifique selon sa complexité et son degré de mal position (Pour une bonne référence sur les méthodes de régularisation, on cite le livre de H.W. Engel).

1.2.1 Définitions et terminologie des problèmes mal posés

On peut schématiser un problème inverse comme suit :



INPUT = vecteur, données initiales, conditions aux limites, paramètres, géométrie du domaine...

OUTPUT = solution = état du système physique, quantité matérielle, propriétés qualitatives

Problème direct : OUTPUT = solution = Modèle(INPUT)

Problème inverse : INPUT = Modèle⁻¹(OUTPUT)

□ **Formulation abstraite**

On peut toujours écrire un problème inverse sous une formulation vectorielle abstraite (input-output).

Définition 1.2.1. [Hadamard 1923] Soient X, Y deux espaces de Banach, et $A : X \supseteq D(A) \longrightarrow Y$ un opérateur (linéaire ou non-linéaire). Le problème inverse $Ax = y$ est **bien posé** au sens de Hadamard si

Existence : Pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tel que $Ax = y$.

Unicité : Pour tout $y \in Y$, il y a au plus une solution $x \in X$.

Stabilité : La solution x dépend continûment de la donnée y .

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, alors le problème est dit **mal posé**. En pratique, cela veut souvent dire qu'il n'existe pas de solution unique ou que, si elle existe, une légère modification des données conduit à des solutions très différentes.

Le choix des espaces de départ et d'arrivée X et Y est bien sûr très important dans cette définition. La stabilité est une condition primordiale. En effet, s'il y a un problème de stabilité, le calcul numérique de la solution peut devenir impossible à cause des erreurs de mesures ou d'arrondis.

Remarque 1.2.1. La définition donnée par Hadamard est très contraignante dans la pratique. Il faut donc relaxer la définition d'un problème bien posé.

Définition 1.2.2. [Lavrentiev 1959] (Stabilité conditionnelle) Soit $A : X \supseteq D(A) \longrightarrow Y$ un opérateur fermé, densément défini. On dit que le problème $Ax = y$ est **conditionnellement stable** (ou **correct** au sens de Tikhonov) sur $M \subset \mathcal{D}(A)$ s'il existe une fonction

$$\omega : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \text{ continue en } 0 \text{ avec } \omega(0) = 0,$$

telle que l'on ait

$$\|x_2 - x_1\| \leq \omega\left(\|Ax_2 - Ax_1\|\right), \quad \forall x_2, x_1 \in M.$$

L'ensemble M est appelée ensemble des contraintes (ou ensemble des informations a priori). L'appartenance de u à M signifie certaine régularité ou certaine bornitude vérifiée par la solution u .

1.2.2 Outils d'analyse des problèmes mal posés

Dans l'étude des équations de la forme :

$$B : D(B) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2, \quad u \longmapsto Bu = v,$$

la fermeture de $\mathbf{R}(B)$ est une propriété cruciale, pour que l'inverse de B soit borné. Le Théorème de Banach nous fournit une caractérisation topologique sur cette question :

Théorème 1.2.2. [Théorème de Banach sur l'inversion bornée] *On suppose que B est injectif. Alors $B^{-1} : \mathbf{R}(B) \longrightarrow H_1$ est borné ssi $\mathbf{R}(B)$ est fermée.*

Dans des situations pratiques, la vérification de la fermeture de l'image est souvent une tâche très difficile, et en général, on n'a pas beaucoup d'outils pour étudier cette question. Si la carte spectrale de l'opérateur est bien connue, cette information peut être exploitée pour étudier la fermeture de son image. On a dans cette direction la caractérisation spectrale suivante :

Théorème 1.2.3. (cf. Kulkarni et al^{2000, 2008} [11, 12]) *Soit $B : D(B) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur fermé densément défini. Alors $\mathbf{R}(B)$ est fermée ssi il existe $r > 0$ tel que $\sigma(B^*B) \subseteq \{0\} \cup [r, +\infty[$.*

Si de plus, $H_1 = H_2$ et $B = B^$, alors $\mathbf{R}(B)$ est fermée ssi 0 n'est pas un point d'accumulation de $\sigma(B)$.*

- Considérons maintenant un opérateur compact $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, où H_1, H_2 sont deux espaces de Hilbert séparables. Une des approches les plus pratiques pour étudier le problème inverse $Th_1 = h_2$, consiste à utiliser la décomposition en valeurs singulières (SVD)² de l'opérateur T . Cette représentation propose des bases pour les espaces de Hilbert H_1 et H_2 permettant d'exprimer et de résoudre simplement le problème.

Définition 1.2.3. Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert séparables et $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. On appelle valeur singulière de l'opérateur T , le réel positif $s = \sqrt{\lambda}$, où λ est une valeur propre de l'opérateur $K = T^*T : H_1 \longrightarrow H_1$.

Théorème 1.2.4. [Décomposition en valeurs singulières (SVD)] *Soit $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ et Pr_0 la projection orthogonale sur $\mathbf{N}(T)$. Alors il existe une suite de valeurs singulières (s_n) et deux systèmes orthonormés $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset H_1, \{\psi_1, \psi_2, \dots\} \subset H_2$ tels que :*

(i) (s_n) est décroissante, $s_n \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$.

(ii) $T\varphi_k = s_k\psi_k, \quad T^*\psi_k = s_k\varphi_k$.

(iii) $\forall h \in H_1, \quad h = \sum_{k \geq 1} (h, \varphi_k)\varphi_k + \text{Pr}_0 h$.

(iv) $\forall h \in H_1, \quad Th = \sum_{k \geq 1} s_k(h, \varphi_k)\psi_k$.

(v) $\forall \tilde{h} \in H_2, \quad T^*\tilde{h} = \sum_{k \geq 1} s_k(h, \psi_k)\varphi_k$.

Le système $\{(s_k; \varphi_k, \psi_k)\}_{k \geq 1}$ est appelé le **système singulier** de T .

La famille (φ_n) est une base hilbertienne de $\mathbf{N}(T)^\perp$, la famille (ψ_n) est une base hilbertienne de $\overline{\mathbf{R}(T)}$.

Remarque 1.2.2. Le calcul des valeurs singulières et l'étude de leur vitesse de décroissance peut donc fournir des renseignements sur le caractère mal posé d'un problème donné.

2. La notion de **valeurs singulières** généralise la notion de valeurs propres liée aux opérateurs auto-adjoints.

Théorème 1.2.5. [Théorème de Picard]

Soit $K \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ un opérateur compact, et $\{(\sigma_n, \varphi_n, \psi_n), n \in \mathbb{N}\}$ son système singulier. Alors le problème :

$$Kf = g$$

est résoluble ssi

$$g \in \mathbf{N}(K^*)^\perp = \overline{\mathbf{R}(K)} \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sigma_n^2} |\langle g, \psi_n \rangle|^2 < +\infty.$$

Dans ce cas, la solution est donnée par la formule :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sigma_n} \langle g, \psi_n \rangle \varphi_n + f_0, \quad f_0 \in \mathbf{N}(K).$$

► Afin de proposer une stratégie de régularisation efficace, on doit mesurer tout d'abord la complexité du problème posé. En général, on ne dispose pas d'un cadre théorique permettant de donner des réponses à ce type de questions, mais dans des cas particuliers, on a des critères qui caractérisent que tels problèmes sont fortement mal posés ou faiblement mal posés.

► Pour les opérateurs compacts, on utilise le critère suivant :

Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert séparables, $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, et soit le problème inverse :

$$T : H_1 \longrightarrow H_2, \quad u \longrightarrow Tu = v. \quad (E)$$

Définition 1.2.4. On dit que le problème (E) est *faiblement* mal posé (resp. *fortement* mal posé), si les valeurs singulières s_n de $K = T^*T$ sont équivalentes à $\frac{C}{n^p}$ (resp. Ce^{-n^p}), où C et p sont des constantes positives.

1.2.3 Méthodes de régularisation

La régularisation des problèmes mal posés, due initialement à Tikhonov [33], cherche à redéfinir les notions d'inversion et de solution (*quasi-solution, solution approchée, ...*), de façon que la "solution régularisée" obtenue par "inversion régularisée" dépende continûment des données et soit proche de la solution exacte (supposant que celle-ci existe pour des données proches des valeurs effectivement obtenues par la mesure). En d'autres termes, on remplace le problème initial mal posé par un autre "proche dans un sens" du premier et qui est bien posé.

Considérons un opérateur inverse $Kh_1 = h_2$ où $K : H_1 \longrightarrow H_2$ est un opérateur compact injectif.³ On suppose que $h_2 \in \mathbf{R}(K)$, i.e., le problème inverse possède une solution unique.⁴

3. Le fait de choisir K injectif n'est pas très contraignant car on peut toujours restreindre l'espace H_1 au complément orthogonal de $\mathbf{N}(K)$, où \mathbf{N} désigne le noyau.

4. Il faut noter que notre problème $Kh_1 = h_2$ inverse est toujours mal posé à cause de la non continuité de K^{-1} .

Définition 1.2.5. Une famille d'opérateurs linéaires bornés $R_\alpha : H_2 \longrightarrow H_1$, ($\alpha > 0$) est dite "**famille régularisante**" pour l'opérateur K si

$$\forall h_1 \in H_1, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} (R_\alpha K)h_1 = h_1, \text{ i.e., } R_\alpha K \longrightarrow I \text{ simplement.}$$

Remarque 1.2.3. Si R_α est une famille régularisante pour l'opérateur $K : H_1 \longrightarrow H_2$, où H_1 est de dimension infinie, alors les opérateurs R_α ne sont pas uniformément bornés, i.e., il existe une suite $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_{\alpha_n}\| = +\infty$.

La donnée initiale $h_2 \in H_2$ n'est jamais connue exactement : il y a toujours un bruit qui vient la perturber.

Notons h_2^η la donnée perturbée où le nombre $\eta > 0$ est le niveau du bruit, i.e., $|h_2 - h_2^\eta| \leq \eta$.

Notons $h_1^{\alpha,\eta} = R_\alpha h_2^\eta$ l'approximation de la solution du problème inverse $Kh_1 = h_2$ obtenue avec l'opérateur de régularisation et la donnée perturbée. En utilisant l'inégalité triangulaire sur $|h_1 - h_1^{\alpha,\eta}|$ on obtient

$$|h_1 - h_1^{\alpha,\eta}| = |(h_1 - R_\alpha h_2) + (R_\alpha h_2 - h_1^{\alpha,\eta})| \leq \eta \|R_\alpha\| + |(h_1 - R_\alpha h_2)|. \quad (1.2.2)$$

Le premier terme de droite de l'équation (1.2.2) représente la majoration de l'erreur due au niveau de bruit. Par la Remarque (1.2.3), nous avons vu que $\|R_\alpha\| \longrightarrow +\infty$ quand $\alpha \longrightarrow 0$. Il ne faut donc pas choisir α **trop petit** sinon l'erreur peut devenir **très grande**. Par contre le second terme de droite de (1.2.2) tend vers 0 quand α tend vers 0 par définition de R_α . Nous allons faire tendre le niveau de bruit η vers 0 et nous allons choisir une stratégie de régularisation de manière à ne pas commettre une trop grande erreur sur la vraie solution h_1 .

Définition 1.2.6. Une stratégie de régularisation $\eta \longmapsto \alpha(\eta)$ est **admissible** si pour tout $h_1 \in H_1$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \alpha(\eta) = 0 \text{ et } \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\sup_{h_2^\eta \in H_2} \{|R_{\alpha(\eta)} h_2^\eta - h_1| \text{ tel que } |Kh_1 - h_2^\eta| \leq \eta\} \right) = 0. \quad (1.2.3)$$

Les stratégies de régularisation sont variées, chaque problème nécessite un traitement spécifique selon son degré de complexité, pour plus de détails (cf. [3, 8, 7, 22]). Parmi les méthodes les plus connues en problèmes inverses et en calcul matriciel mal conditionné, on a la méthode de Tikhonov et la méthode de la troncature spectrale.

► Le principe de la régularisation de Tikhonov pour stabiliser le problème inverse mal posé $Kf = g$ est de choisir comme solution l'élément f_α qui minimise la fonctionnelle

$$|Kf - g|^2 + \alpha |f|^2, \quad \alpha > 0. \quad (1.2.4)$$

L'existence et l'unicité du minimum est assurée grâce à la coercivité et stricte convexité de $f \longmapsto |f|^2$. Le paramètre α est appelé le paramètre de régularisation et le terme $|f|^2$ est appelé le terme de correction. Le choix du paramètre α est basé sur un critère d'équilibre entre l'erreur due au terme de correction et le gain de la stabilité. On a le Théorème suivant :

Théorème 1.2.6. Soit $K \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors la fonctionnelle de Tikhonov admet un unique minimum f_α . L'élément f_α est la solution de l'équation normale

$$S_\alpha f_\alpha = (\alpha I + K^* K) f_\alpha = K^* g. \quad (1.2.5)$$

La famille d'opérateurs $R_\alpha = (\alpha I + K^* K)^{-1} K^* : H_2 \rightarrow H_1$ ⁵ est appelée famille régularisante de Tikhonov. On a $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ et tout choix de $\alpha(\eta) \rightarrow 0$ avec $\eta^2 \alpha(\eta) \rightarrow 0$ est admissible. Pour les résultats de la vitesse de convergence, on peut consulter les références [8, 22] pour plus de détails.

► Le paramètre de régularisation $\alpha > 0$ est choisi via le *principe d'écart* (en anglais : *discrepancy principle*) de Morozov [8, 22], ce principe consiste à fixer le paramètre α tel que la solution correspondante ait une erreur égale au niveau de bruit *cf.* [8, 22].

Le choix optimal est extrêmement difficile et les critères qui existent sont d'application délicate, et nécessitent des méthodes itératives pour être mis en oeuvre.^{6 7}

► Dans la pratique nous supposons qu'un paramètre α est valable si l'erreur appartient à un petit intervalle contenant la valeur du niveau de bruit $\eta > 0$ (*cf.* [22], page 172).

5. $(S_\alpha = S_\alpha^*, \langle S_\alpha h, h \rangle = |Sh|^2 + \alpha|h|^2 \geq \alpha|h|^2, \forall h \in H_1) \implies (\sigma(S_\alpha) \subset [\alpha, \|S_\alpha\|] \implies 0 \in \rho(S_\alpha))$, i.e., S_α^{-1} existe et $S_\alpha^{-1} \in \mathcal{L}(H_1)$.

6. **Méthodes a priori** : utilisent l'information sur le niveau d'erreur η et sur l'opérateur K .

7. **Méthodes a posteriori** : utilisent aussi les données g_η .

$\alpha_{opt} := \max \{ \alpha : |Kf_\alpha - g_\eta| \leq \eta \}$, où $f_\alpha = \inf_f \{ |Kf - g_\eta|^2 + \alpha|f|^2 \}$.

1.3 Intégration numérique et formules de quadratures

Soit f une fonction réelle intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. Le calcul explicite de l'intégrale définie

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

peut être difficile, voire impossible.

On appelle **formule de quadrature** ou **formule d'intégration numérique** toute formule permettant de calculer une approximation de $I(f)$.

Une possibilité consiste à remplacer f par une approximation f_n , où n est un entier positif, et calculer $I(f_n)$ au lieu de $I(f)$. En posant $I_n(f) = I(f_n)$, on a

$$I_n(f) = \int_a^b f_n(x) dx, \quad n \geq 0.$$

Si $f \in C^0([a, b])$, l'erreur de quadrature $E_n(f) = I(f) - I_n(f)$ satisfait

$$|E_n(f)| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq (b-a) \|f - f_n\|_\infty$$

Donc, si pour un certain n , $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$, alors $|E_n(f)| \leq \varepsilon(b-a)$.

L'approximation f_n doit être facilement intégrable, ce qui est le cas si, par exemple, $f_n \in P_n$.

En général la formule de quadratures est donnée par

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

Cette formule est une somme pondérée des valeurs de f aux points x_i , pour $i = 0, \dots, n$. On dit que ces points sont les **noeuds** de la formule de quadrature, et que les nombres $\alpha_i \in \mathbb{R}$ sont ses coefficients ou encore ses poids. Les poids et les noeuds dépendent en général de n .

1.3.1 La méthode des rectangles à gauche

En prenant les points x_i équidistants dans $[a, b]$; c'est-à-dire

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, \dots, n,$$

et les coefficients α_i tous égaux à $(b-a)/n$, pour i compris entre 0 et $n-1$, le coefficient α_n étant nul, on obtient la formule des rectangles à gauche :

$$I_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ et n un entier naturel non nul, alors :

$$\|E_n(f)\|_\infty \leq \frac{\|f^{(1)}\|_\infty (b-a)^2}{2n}.$$

1.3.2 La méthode des points milieux

Cette méthode consiste à utiliser les sommes de Riemann avec le point milieu $\varepsilon_i = (x_i + x_{i+1})/2$, la formule des points milieux est donnée par

$$I_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$ et n un entier naturel non nul, alors :

$$\|E_n(f)\|_\infty \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \|f^{(2)}\|_\infty$$

1.3.3 Méthode de Simpson

On remplace f , sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$ par son polynôme d'interpolation P_i de Lagrange de degré 2 ayant les mêmes valeurs que f aux bornes de l'intervalle et en son milieu.

La valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la méthode de Simpson est donnée par

$$I_n(f) = \frac{b-a}{6n} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \right)$$

Si f est de classe C^3 sur $[a, b]$, alors, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$\|E_n(f)\|_\infty \leq \frac{(b-a)^4}{192n^3} \|f^{(3)}\|_\infty$$

1.3.4 Méthode des trapèzes

Principe

On remplace la courbe représentative de f , sur chaque segment de la subdivision, par le segment qui joint $(x_i, f(x_i))$ à $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Cela revient donc à interpoler la fonction f sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$ par le polynôme de Lagrange de degré 1 aux points x_i et x_{i+1} .

Proposition 1.3.1. *La valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la méthode des trapèzes est alors donnée par*

$$I_n(f) = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

Preuve :

L'aire du trapèze de base $[x_i, x_{i+1}]$ est

$$\frac{(x_{i+1} - x_i)(f(x_i) + f(x_{i+1}))}{2}$$

On en déduit que

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2} ((f(x_i) + f(x_{i+1}))) = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

Evaluation de l'erreur

Proposition 1.3.2. Si f est de classe C^2 sur $[a, b]$, alors on a, pour tout entier n non nul

$$\|E_n(f)\|_\infty \leq (b-a)^3 \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{12n}$$

On en déduit que $I_n(f)$ converge vers $I(f)$.

Preuve :

Cette méthode consiste à remplacer f sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$ par son polynôme d'interpolation P_i de Lagrange de degré 1 ayant les mêmes valeurs que f aux bornes de l'intervalle, et comme f est de classe C^2 , on a

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}], \quad f(x) - P_i(x) = (x_{i+1} - x)(x - x_i) \frac{f^{(2)}(x)}{2}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - P_i(x)) dx \right| &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |(x_{i+1} - x)(x - x_i)| \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{2} dx \\ &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} (|(x_{i+1} - x)| |x - x_{i+1}| + |(x_{i+1} - x)(x_{i+1} - x_i)|) dx \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{2} \\ &\leq |(x_{i+1} - x_i)|^3 \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{12} \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} |E_n(f)| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - P_i(x)) dx \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - P_i(x)| dx \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^3 \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{12} = n \frac{(\frac{b-a}{n})^3 \|f^{(2)}\|_\infty}{12} = (b-a)^3 \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{12n}, \end{aligned}$$

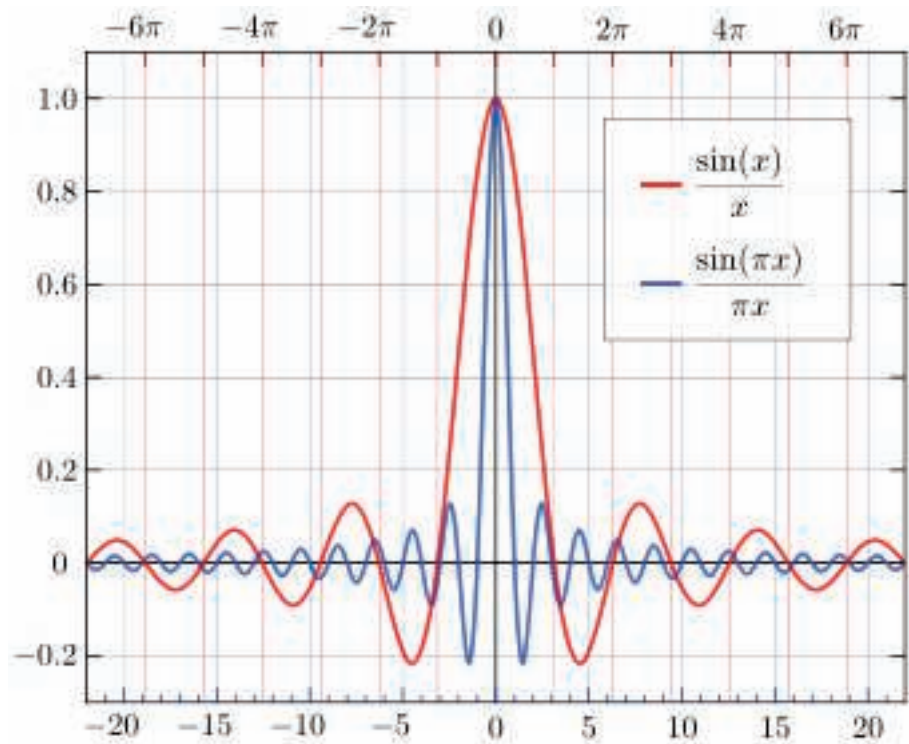
donc

$$\|E_n(f)\|_\infty \leq (b-a)^3 \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{12n}.$$

1.4 Méthode de sinc

Dans cette section, on donne quelques propriétés de la fonction sinus cardinal, notée $\text{sinc}(\cdot)$ et qui est définie par :

$$\text{Sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, \quad t \neq 0, \quad \text{Sinc}(0) = 1.$$



On montre facilement les propriétés suivantes :

(i) la fonction Sinc est paire, i.e., $\forall t \in \mathbb{R}, \text{Sinc}(-t) = \text{Sinc}(t)$,

(ii) $Z(\text{Sinc}) = \{t \in \mathbb{R} : \text{Sinc}(t) = 0\} = \mathbb{Z}^*$,

$$(iii) \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sinc}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sinc}(t)^2 dt = 1.$$

Pour $h > 0$ et $k \in \mathbb{Z}$, on définit la $k^{\text{ème}}$ fonction de $\text{Sinc}(\cdot)$ de taille h par :

$$S(k, h)(t) = \text{Sinc}\left(\frac{t}{h} - k\right).$$

On remarque que

$$S(k, h)(jh) = \text{Sinc}\left(\frac{jh}{h} - k\right) = \text{Sinc}(j - k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Définition 1.4.1. Pour $h > 0$, on désigne par $B(h)$ (espace de Paley-Wiener)⁸ l'ensemble des fonctions f entières (analytiques) vérifiant les conditions suivantes :

$$(i) \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

$$(ii) \quad |f(z)| \leq K \exp\left(\frac{\pi|z|}{h}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad K \text{ et } h \text{ sont deux constantes positives indépendantes de } z.$$

Une fonction analytique vérifiant la propriété (ii) est dite *fonction de type exponentiel* $\sigma = \frac{\pi}{h}$.

Définition 1.4.2. Si f est une fonction périodique de période p et $f \in L^2\left(\frac{-p}{h}, \frac{p}{h}\right)$, la série de Fourier de f dans la base orthonormée $\{\varepsilon_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{p}} \exp\left(\frac{2\pi i k t}{p}\right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est donnée par :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp\left(\frac{2\pi i k t}{p}\right), \quad a_k = \frac{1}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t) \exp\left(-\frac{2\pi i k t}{p}\right) dt.$$

Exemple 1.4.1. Soient $z \in \mathbb{C}$ un paramètre fixé et $t \in \left(\frac{-\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right)$, $h > 0$. Considérons la fonction $f(t) = \exp(-izt)$ qui est périodique de période $p = \frac{2\pi}{h}$. Le développement de Fourier de f dans la base orthonormée $\{\varepsilon_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp(ikh t),$$

où

$$a_k = \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \exp(-izt) \exp(-ikh t) dt = \sum_{k=(\cdot)}^k h(z).$$

D'où le développement de Fourier de la fonction $f(t) = \exp(-izt)$ est

$$\exp(-izt) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(ikh t) S(k, h)(z). \quad (1.4.1)$$

Puisque la fonction f est continûment différentiable, la série (1.4.1) est uniformément et absolument convergente.

Théorème 1.4.1. [Théorème de Paley-Wiener] Supposons que la fonction f est de classe $B(h)$, alors

$$\mathcal{F}(f) \in L^2\left(\frac{-\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right) \text{ et } f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \mathcal{F}(f)(x) \exp(-ixz) dx,$$

où $\mathcal{F}(f)$ est la transformation de Fourier donnée par :

$$\mathcal{F}(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(ixt) dt.$$

8. Pour plus de détails sur l'espace de Paley-Wiener, on renvoie le lecteur aux références de base :

1 L. Lundin and F. Stenger, *Cardinal-Type Approximations of a Function and Its Derivatives*, SIAM J. Math. Anal, 10 (1979), 139-160.

2 J. McNamee, F. Stenger, and E. L. Whitney, *Whittaker's Cardinal Function in Retrospect*, Math. Comp., 25 (1971), 141-154.

Théorème 1.4.2. [Théorème de Parseval] Notons $H = L^2(\mathbb{R}, dt)$, $\widehat{H} = L^2\left(\mathbb{R}, \frac{dx}{2\pi}\right)$. Soient f et g deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, on a alors

$$\langle f, g \rangle_H = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_{\widehat{H}}, \text{ i.e., } \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(x) \overline{\mathcal{F}(g)(x)} dx$$

Proposition 1.4.1. Le système $\left\{ \frac{1}{\sqrt{h}} \text{Sinc}\left(\frac{t-kh}{h}\right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est un ensemble orthonormé dans $B(h)$.

Preuve. En appliquant le Théorème de Parseval avec

$$f(t) = \text{Sinc}\left(\frac{t-kh}{h}\right) \in L^2(\mathbb{R}) \text{ et } g(t) = \text{Sinc}\left(\frac{t-nh}{h}\right) \in L^2(\mathbb{R}),$$

on peut écrire

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sinc}\left(\frac{t-kh}{h}\right) \text{Sinc}\left(\frac{t-nh}{h}\right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left(\text{Sinc}\left(\frac{t-kh}{h}\right)\right)(x) \overline{\mathcal{F}\left(\text{Sinc}\left(\frac{t-nh}{h}\right)\right)(x)} dx.$$

On a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]}(x) \exp(-ixt) dx = \frac{1}{h} \text{Sinc}\left(\frac{t}{h}\right),$$

et

$$\frac{1}{h} \text{Sinc}\left(\frac{t}{h}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left(\frac{1}{h} \text{Sinc}\left(\frac{t}{h}\right)\right)(x) \exp(-ixt) dx,$$

donc

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{h} \text{Sinc}\left(\frac{t}{h}\right)\right)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} \text{Sinc}\left(\frac{t}{h}\right) \exp(ixt) dt = \chi_{\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]}(x).$$

En faisant le changement de variable $t = \zeta - mh$, on obtient

$$\mathcal{F}\left(\text{Sinc}\left(\frac{\zeta-mh}{h}\right)\right)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sinc}\left(\frac{\zeta-mh}{h}\right) \exp(ix\zeta) d\zeta = h \exp(ixmh) \chi_{\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]}(x),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sinc}\left(\frac{t-kh}{h}\right) \text{Sinc}\left(\frac{t-nh}{h}\right) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h^2 \exp(ixkh) \exp(-ixnh) \chi_{\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]}^2(x) dx \\ &= \frac{h^2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \exp(ixh(k-n)) dx = h \delta_{nk} = \begin{cases} h, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\left\{ \frac{1}{\sqrt{h}} \text{Sinc}\left(\frac{t-kh}{h}\right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est un ensemble orthonormé dans $B(h)$. ■

Remarque 1.4.1. [Hardy, 1941] Le système $\left\{ \frac{1}{\sqrt{h}} \text{Sinc}\left(\frac{t-kh}{h}\right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée dans $L^2(\mathbb{R})$. La preuve repose sur le Théorème suivant :

Théorème. Un système orthonormé $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans un espace de Hilbert séparable H est total (complet) ssi

$$\forall f, g \in H, \langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \langle g, \varphi_k \rangle.$$

Théorème 1.4.3. [Développement de Sinc] Si f de classe $B(h)$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) S(k, h)(z),$$

où

$$f(kh) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) S(k, h)(t) dt.$$

Preuve. Puisque $f \in B(h)$, le théorème de Paley-Wiener, nous permet d'écrire

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \mathcal{F}(f)(x) \exp(-ixz) dx,$$

et du développement

$$\exp(-izt) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(ikh t) S(k, h)(z)$$

on obtient

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \mathcal{F}(f)(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(ikhx) S(k, h)(z) dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k, h)(z) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \mathcal{F}(f)(x) \exp(ikhx) dx \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(-kh) S(k, h)(z) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) S(k, h)(z). \end{aligned}$$

D'autre part, on a le développement

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \mathcal{F}(f)(x) \exp(-ixz) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(ixt) dt \right] \exp(-ixz) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \exp(ix(t-z)) dx \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{\exp(i\pi(t-z)/h) - \exp(-i\pi(t-z)/h)}{i(t-z)} \right] dt \\ &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{Sinc}\left(\frac{t-z}{h}\right) dt, \end{aligned}$$

d'où

$$f(kh) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) S(k, h)(t) dt.$$

■

Corollaire 1.4.1. Si $f \in B(h)$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)$$

Preuve. Soit $f \in B(h)$, alors d'après le Théorème 1.4.3, on a le développement

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) S(k, h)(z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.4.2)$$

En remplaçant z par $t \in \mathbb{R}$ et en intégrant les deux côtés de l'égalité (1.4.2) sur la droite réelle, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(kh) S(k, h)(t) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \int_{-\infty}^{\infty} S(k, h)(t) dt, \end{aligned}$$

et de l'égalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(k, h)(t) dt = h \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sinc}(s) ds = h$$

il résulte donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)$$

■

Méthode de collocation régularisée pour une équation intégrale de Fredholm de première espèce

Ce chapitre est consacré à la résolution numérique d'une ÉQUATION INTÉGRALE DE PREMIÈRE ESPÈCE, où la procédure numérique est basée sur un schéma de discrétisation de type collocation régularisée. Il est bien connu que si on dispose une information a priori sur la vitesse de décroissance des valeurs singulières de la matrice de collocation, cette méthode peut donner des bons résultats, et dans ce cas le nombre de collocation joue le rôle du paramètre de régularisation. Dans le cas contraire, i.e., si l'information mentionnée ci-dessus n'est pas disponible, alors le recours aux méthode de régularisation de type Tikhonov est nécessaire pour filtrer la nuisance des hautes fréquences de manière selective.

Notre objectif ici est de donner un formalisme assez général, pour une méthode de collocation régularisée, dont l'approche utilisée repose essentiellement sur le degré de régularité de la solution exacte. Dans ce but, on introduit un échelle hilbertien de mesure de régularité, i.e., une classe de sous espaces définis par une fonction monotone d'opérateurs auto-adjoints positifs. Ce choix couvre une variété très large de tous les types de régularité étudiés dans la théorie de régularisation de Tikhonov. De plus, en utilisant un calcul a posteriori, le paramètre peut être choisi de manière contrôlée, ce qui nous permet d'atteindre un ordre optimal d'exactitude, lorsque le niveau du bruit est déterministe.

2.1 Position du problème

Dans l'espace de Hilbert $H = L^2(0, 1)$, on considère l'équation intégrale de Fredholm de première espèce :

$$\int_0^1 k(s, t) x(t) dt = y(s), \quad 0 \leq s \leq 1, \quad (2.1.1)$$

où le noyau $k(., .)$ est non-dégénéré.

Le problème (2.1.1) peut s'écrire sous la forme

$$Kx = y, \quad (2.1.2)$$

où K est un opérateur intégral donné par son noyau $k(.,.)$, x est la solution recherchée et y est la donnée.

- On suppose que $y \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ et $k(.,.) \in \mathcal{C}([0, 1] \times [0, 1]; \mathbb{R})$.

Pour la résolution numérique du problème (2.1.1), on propose un schéma de collocation standardisé, qui est une forme particulière de discrétisation en remplaçant le problème continu par un problème discret posé dans l'espace Euclidien \mathbb{R}^n .

Rappelons que pour tout entier positif n , une procédure de collocation est donnée par le couple $(\Delta_n, \Gamma_{\Delta_n})$, où Δ_n est l'ensemble des points de collocation :

$$\Delta_n = \{\tau_i^n\}_{i=1}^n \subset [0, 1], \quad 0 \leq \tau_1^n < \tau_2^n < \dots < \tau_n^n \leq 1,$$

et les opérateurs Γ_{Δ_n} sont donnés :

$$\Gamma_{\Delta_n} : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Gamma_{\Delta_n} f = (f(\tau_1^n), f(\tau_2^n), \dots, f(\tau_n^n)).$$

Dans un schéma de collocation basé sur $(\Delta_n, \Gamma_{\Delta_n})$, le problème original (2.1.1) est remplacé par une équation linéaire dans \mathbb{R}^n , qui peut être écrite de manière abstraite sous la forme :

$$K_n x = \Gamma_{\Delta_n} y, \tag{2.1.3}$$

où $K_n = \Gamma_{\Delta_n} K$.

Puisque le problème (2.1.1) est mal posé (car l'opérateur intégral K est compact), le problème discret sera mal conditionné, et les méthodes de résolution directes ne sont pas applicables en présence des données bruitées $y_1^\delta, y_2^\delta, \dots, y_n^\delta$ de $y(\tau_1^n), y(\tau_2^n), \dots, y(\tau_n^n)$, cette situation peut changer radicalement l'inversion et donne des résultats ambigus, donc on aura besoin à des filtres de régularisation, qui sont capables de contrôler le mauvais conditionnement de la matrice de collocation du problème (2.1.3).

Dans la littérature des problèmes inverses, on remarque que les méthodes de collocation régularisée ont été largement exploitées pour des problèmes faiblement mal posés, où il a été supposé que la solution exacte \hat{x} de (2.1.1) possède le degré de régularité suivant :

$$\hat{x} = (K^* K)^\mu v, \quad v \in L^2(0, 1), \tag{2.1.4}$$

Cette propriété peut être interprétée comme étant une appartenance à un espace de Sobolev, i.e., $\hat{x} \in W_2^{2\mu}(0, 1)$.

Dans cette investigation, on considère un cas plus général, plus précisément, on suppose que la solution exacte possède un degré de régularité donné par la formule suivante :

$$\hat{x} = \varphi(K^* K) v, \quad v \in L^2(0, 1), \tag{2.1.5}$$

où φ une fonction monotone d'opérateurs.

(H1) Cette hypothèse est similaire à celle utilisée par Groetsch [9] :

on suppose qu'il existe une constante ω , un ensemble de poids positifs $\{\omega_i^n\}_{i=1}^n$ associés aux points de collocation $\{\tau_i^n\}_{i=1}^n$, $n = 1, 2, \dots$ et une suite décroissante $\{\pi_n\}$ de nombres réels positifs tels que :

(i) $\pi_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$,

(ii) $\sum_{i=1}^n \omega_i^n \leq \omega$, $n = 1, 2, \dots$,

(iii) $\left\| \int_0^1 k(\tau, \cdot) k(\tau, \cdot) d\tau - \sum_{i=1}^n \omega_i^n k(\tau_i^n, \cdot) k(\tau_i^n, \cdot) \right\|_{L^2 \otimes L^2} \leq \pi_n$, pour n suffisamment grand,

où

$$\|g(\cdot, \cdot)\|_{L^2 \otimes L^2}^2 = \int_0^1 \int_0^1 |g(s, t)|^2 ds dt.$$

Exemple 2.1.1. Soit $\tau_i^n = \frac{i-1}{n-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, les points de collocation de la formule du trapèze, le poids $\omega_1^n = \omega_n^n = \frac{1}{2(n-1)}$ et $\omega_i^n = \frac{1}{n-1}$, $i = 2, 3, \dots, n-1$.

Il est bien connu (cf. [?]) que, pour une fonction $f \in C^2([0, 1]; \mathbb{R})$, et pour $n \geq 2$, on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\left| \int_0^1 f(\tau) d\tau - \sum_{i=1}^n \omega_i^n f(\tau_i^n) \right| \leq \frac{\sup_{t \in [0, 1]} |f^{(2)}(t)|}{32(n-1)^2}. \quad (\alpha)$$

Si $k(s, t)$ est deux fois continûment différentiable par rapport à s , et si $\gamma > 0$ telle que :

$$\sup \left\{ \left| \frac{\partial^i}{\partial s^i} k(s, t) \right|, s, t \in [0, 1]; i = 0, 1, 2 \right\} \leq \gamma,$$

alors il est facile de vérifier que la formule de trapèze mentionnée ci-dessus satisfait la condition (i) de l'hypothèse (H1), avec $\omega = 1$ et $\pi_n = \frac{(n-1)^{-2}}{8} \gamma^2$.

On remarque que la suite π_n décroissante, $\pi_n > 0$ pour $n \geq 2$ et $\lim \pi_n = 0$ quand $n \rightarrow \infty$, de plus, de la définition des poids $\omega_i^n = \frac{1}{n-1}$, $i = 2, 3, \dots, n-1$, $\omega_1^n = \omega_n^n = \frac{1}{2(n-1)}$, on a

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^n = 1 = \omega.$$

Il nous reste qu'à montrer le point (iii). Notons $k(\tau, s) k(\tau, t) = f_{s,t}(\tau) \forall s, t, \tau \in [0, 1]$. D'après l'estimation (α), on peut écrire

$$\left| \int_0^1 f_{s,t}(\tau) d\tau - \sum_{i=1}^n \omega_i^n f_{s,t}(\tau_i^n) \right| \leq \frac{\|f_{s,t}^{(2)}\|_\infty}{32(n-1)^2},$$

ce qui implique

$$\left| \int_0^1 k(\tau, s) k(\tau, t) d\tau - \sum_{i=1}^n \omega_i^n k(\tau_i^n, s) k(\tau_i^n, t) \right| \leq \frac{\sup \left| \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} k(\tau, s) k(\tau, t) \right|}{32(n-1)^2}, \quad \forall \tau, s, t \in [0, 1],$$

et de la condition

$$\sup \left\{ \left| \frac{\partial^i}{\partial s^i} k(s, t) \right| ; s, t \in [0, 1] ; i = 0, 1, 2 \right\} \leq \gamma,$$

il s'en suit que

$$\sup \left| \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} k(\tau, s) k(\tau, t) \right| \leq 4\gamma^2,$$

d'où

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 k(\tau, s) k(\tau, t) d\tau - \sum_{i=1}^n \omega_i^n k(\tau_i^n, s) k(\tau_i^n, t) \right| \leq \frac{(n-1)^{-2}}{8} \gamma^2 = \pi_n, \\ & \int_0^1 \int_0^1 \left| \int_0^1 k(\tau, s) k(\tau, t) d\tau - \sum_{i=1}^n \omega_i^n k(\tau_i^n, s) k(\tau_i^n, t) \right|^2 ds dt \leq \pi_n, \\ & \left\| \int_0^1 k(\tau, \cdot) k(\tau, \cdot) d\tau - \sum_{i=1}^n \omega_i^n k(\tau_i^n, \cdot) k(\tau_i^n, \cdot) \right\|_{L^2 \otimes L^2} \leq \pi_n. \end{aligned}$$

► Cet exemple montre que l'hypothèse **(H1)** est non vide.

On définit le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\omega, n}$ sur \mathbb{R}^n par :

$$\langle u, v \rangle_{\omega, n} := \sum_{i=1}^n \omega_i^n u_i v_i, \quad u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Dans la suite, on note \mathbb{R}_ω^n l'espace \mathbb{R}^n muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\omega, n}$ et de la norme correspondante $\|\cdot\|_\omega$.

Proposition 2.1.1. Soit $K_n = \Gamma_{\Delta_n} K : L^2(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_\omega^n$ l'opérateur de collocation défini comme dans le schéma (2.1.3). Alors sous les conditions de l'hypothèse (H1), on a

- (a) $\|K^* K - K_n^* K_n\| \leq \pi_n$, où K_n^* est l'adjoint de l'opérateur K_n , tel qu $K_n^* : \mathbb{R}_\omega^n \rightarrow L^2(0, 1)$ est donné par :
- (b) $(K_n^* u)(\cdot) = \sum_{i=1}^n \omega_i^n k(\tau_i^n, \cdot) u_i, \quad u \in \mathbb{R}^n.$

Preuve. (b) Pour tout $x \in L^2(0, 1)$, $u \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire

$$\langle K_n x, u \rangle_{\omega, n} = \sum_{i=1}^n \omega_i^n u_i \int_0^1 k(\tau_i^n, t) x(t) dt,$$

et de

$$K_n x = \Gamma_{\Delta_n}(Kx) = \left(\int_0^1 k(\tau_1^n, t) x(t) dt, \dots, \int_0^1 k(\tau_n^n, t) x(t) dt \right)$$

on a

$$\langle K_n x, u \rangle_{\omega, n} = \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n \omega_i^n u_i k(\tau_i^n, s) \right] x(s) ds$$

$$= \left\langle x, \sum_{i=1}^n \omega_i^n u_i k(\tau_i^n, s) \right\rangle_{L^2(0,1)} = \langle x, K_n^* u \rangle_{L^2(0,1)},$$

et par identification en utilisant l'unicité de l'opérateur adjoint, on trouve

$$(K_n^* u)(\cdot) = \sum_{i=1}^n \omega_i^n k(\tau_i^n, \cdot) u_i.$$

(a) En utilisant la formule de l'adjoint de l'opérateur K qui est donné par la formule

$$(K^* y)(s) = \int_0^1 k(\tau, s) y(\tau) d\tau,$$

on peut écrire

$$(K^* K x)(s) = \int_0^1 k(\tau, s) \left[\int_0^1 k(\tau, t) x(t) dt \right] d\tau = \int_0^1 \int_0^1 k(\tau, s) k(\tau, t) d\tau x(t) dt.$$

De même, on a

$$(K_n^* K_n x)(s) = \sum_{i=1}^n \omega_i^n k(\tau_i^n, s) \int_0^1 k(\tau_i^n, t) x(t) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i^n k(\tau_i^n, s) k(\tau_i^n, t) x(t) dt,$$

ce qui implique

$$(K^* K x - K_n^* K_n x)(s) = \int_0^1 \left[\int_0^1 k(\tau, s) k(\tau, t) d\tau - \sum_{i=1}^n \omega_i^n k(\tau_i^n, s) k(\tau_i^n, t) \right] x(t) dt,$$

$$|(K^* K x - K_n^* K_n x)(s)| \leq \int_0^1 \left| \int_0^1 k(\tau, s) k(\tau, t) d\tau - \sum_{i=1}^n \omega_i^n k(\tau_i^n, s) k(\tau_i^n, t) \right| |x(t)| dt.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et en utilisant la condition (ii) de l'hypothèse **(H1)**, on obtient

$$\|(K^* K x - K_n^* K_n x)(\cdot)\|_{L^2(0,1)} \leq \left\| \int_0^1 k(\tau, \cdot) k(\tau, \cdot) d\tau - \sum_{i=1}^n \omega_i^n k(\tau_i^n, \cdot) k(\tau_i^n, \cdot) \right\|_{L^2 \otimes L^2} \|x\|_{L^2(0,1)} \leq \pi_n \|x\|_{L^2(0,1)},$$

et donc

$$\|K^* K - K_n^* K_n\| \leq \pi_n.$$

Ce qui achève la démonstration de la Proposition 2.1.1 ■

Comme on l'a déjà mentionné, notre stratégie consiste à stabiliser le problème inverse (2.1.3) en utilisant une filtre de Tikhonov. On suppose donc, que les données aux points de collocation $\{\tau_i^n\}$ sont entachées du bruit. Soient les mesures de $y(s)$ effectuées aux points s_i , pour $i = 1, 2, \dots, m$, qui ne coïncident pas avec $\tau_i^n, i = 1, 2, \dots, n$. On note ici, que dans la pratique, ces mesures sont effectuées généralement en présence d'un petit bruit, que l'on suppose bruit additif, i.e., les mesures observées sont :

$$y_j^\xi = y(s_j) + \xi_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.1.6)$$

où ξ_j désigne l'erreur de la $j^{\text{ème}}$ mesure au point s_j . On se limite dans notre étude au cadre déterministe dans lequel les erreurs ξ_j sont bornées de sorte que $|\xi_j| \leq \xi$ pour tout $j = 1, 2, \dots, m$ et $\xi > 0$.

Pour qu'on puisse utiliser les données de mesure aux niveau des point de la collocation, il faut qu'on dispose un jeu d'approximation, pour pouvoir calculer les valeurs $y_i^\delta \approx y(\tau_i^n)$ de (2.1.6). Dans ce but, on suppose qu' il existe un système de fonctions :

$$\{g_j^m\}_{j=1}^m \subset \mathcal{C}([0, 1]), \quad m = 1, 2, \dots$$

telle que

$$\left| y(s) - \sum_{j=1}^m y(s_j) g_j^m(s) \right| \leq \varepsilon_m \|y\|, \quad s \in [0, 1], \quad (2.1.7)$$

pour tout $y \in R(K)$, où $\|\cdot\|$ est une semi-norme définie sur $R(K)$ et $\{\varepsilon_m\}$ est une suite de nombres réels positifs, telle que $\varepsilon_m \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$. On suppose de plus, qu'il existe une constante $\kappa \geq 0$ tel que

$$\sum_{j=1}^m |g_j^m(s)| \leq \kappa, \quad (2.1.8)$$

pour tout $s \in [0, 1]$ et $m = 1, 2, \dots$

Exemple 2.1.2. Considérons l'opérateur intégral K avec le noyau $k(s, t)$ comme dans l'exemple (2.1.1), et soit la semi-norme

$$\|y\| = \sup \{|y^{(2)}(s)|, s \in [0, 1]\}, \quad y \in R(K).$$

Pour tout $m = 2, 3, \dots$, posons $s_j = \frac{j-1}{m-1}$, $j = 1, 2, \dots, m$, et soit $\beta_m(t)$ une fonction définie comme suit :

$$\begin{cases} \beta_m(t) = 0, & \text{pour } t \notin \left[\frac{-1}{m-1}, \frac{1}{m-1} \right], \\ \beta_m(t) = \beta_m(-t), \\ \beta_m(t) = 1 + (m-1)t, & \text{pour } t \in \left[\frac{-1}{m-1}, 0 \right]. \end{cases}$$

On vérifie aisément que

$$\sum_{j=1}^m |\beta_m(s - s_j)| = 1.$$

En effet, on a

$$\begin{cases} \beta_m(s) = 1 + (m-1)s, & \text{pour } s \in \left[\frac{-1}{m-1}, 0 \right], \\ \beta_m(s) = 1 - (m-1)s, & \text{pour } s \in \left[0, \frac{1}{m-1} \right], \\ \beta_m(s) = 0, & \text{pour } s \notin \left[\frac{-1}{m-1}, \frac{1}{m-1} \right], \end{cases}$$

et pour tout $j = 2, 3, \dots, m$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_m(s - s_j) = 1 + (m-1)(s - s_j), \quad s - s_j \in \left[\frac{j-2}{m-1}, \frac{j-1}{m-1} \right] \\ \beta_m(s - s_j) = 1 - (m-1)(s - s_j), \quad s - s_j \in \left[\frac{j-1}{m-1}, \frac{j}{m-1} \right] \\ \beta_m(s - s_j) = 0, \quad s - s_j \notin \left[\frac{j-2}{m-1}, \frac{j}{m-1} \right] \end{array} \right.$$

donc, pour tout $s \in [s_i, s_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, m-1$, on obtient :

$$\sum_{j=1}^m |\beta_m(s - s_j)| = |\beta_m(s - s_i)| + |\beta_m(s - s_{i+1})| = 2 + (m-1)(s_i - s_{i+1}) = 1.$$

Maintenant, pour une fonction y possédant une dérivée bornée, alors on a l'estimation suivante :

$$\left| y(s) - \sum_{j=1}^m y(s_j) \beta_m(s - s_j) \right| \leq \frac{\|y\|}{8(m-1)^2}.$$

En effet, pour tout $s \in [s_i, s_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, m-1$, on peut toujours approcher la fonction $y(s)$ par un polynôme $p(s)$ vérifiant :

$$\begin{cases} p(s) = as + b, \\ p(s_i) = y(s_i), \quad p(s_{i+1}) = y(s_{i+1}). \end{cases}$$

Dans ce cas, pour tout $s \in [s_i, s_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, m-1$, on peut écrire

$$\sum_{j=1}^m y(s_j) \beta_m(s - s_j) = (m-1) [y(s_i) - y(s_{i+1})] s + (m-1) [y(s_{i+1}) s_{i+1} - y(s_i) s_i] + y(s_i) + y(s_{i+1}),$$

et

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m y(s_j) \beta_m(s_i - s_j) = y(s_i), \\ \sum_{j=1}^m y(s_j) \beta_m(s_{i+1} - s_j) = y(s_{i+1}), \end{cases}$$

d'où

$$\sum_{j=1}^m y(s_j) \beta_m(s - s_j) = p(s).$$

En utilisant un développement de Taylor, on obtient

$$\begin{cases} p(s + \zeta) \approx y(s) + \zeta y^{(1)}(s) + \frac{\zeta^2}{2} y^{(2)}(s_\nu), \\ p(s - \zeta) \approx y(s) - \zeta y^{(1)}(s) + \frac{\zeta^2}{2} y^{(2)}(s_\omega), \end{cases}$$

pour tout (s, ζ) tel que $s + \zeta, s - \zeta \in \mathcal{D} \subset [s_i, s_{i+1}]$, $\zeta > 0$ et $\zeta \leq \frac{1}{2(m-1)}$.

Ce qui entraîne

$$|y(s) - p(s)| \leq \frac{\zeta^2}{2} \sup_{s \in [s_i, s_{i+1}]} |y^{(2)}(s)|,$$

donc

$$\left| y(s) - \sum_{j=1}^m y(s_j) \beta_m(s - s_j) \right| \leq \frac{\|y\|}{8(m-1)^2}, \quad \forall s \in [0, 1].$$

► Les conditions (2.1.7) et (2.1.8) sont donc satisfaites, avec $\varepsilon_m = \frac{1}{8(m-1)^2}$, $\kappa = 1$ et $g_j^m(s) = \beta_m(s - s_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$.

► Notons que le système de fonctions $\{g_j^m\}$ avec les propriétés (2.1.7) et (2.1.8) peut être employé pour produire une quantité arbitraire de données de collocation perturbées à partir d'un packet de mesures bruitées (2.1.6).

En effet, on peut calculer $\{y_i^\delta\}_{i=1}^n$ à partir de $\{y_j^\xi\}_{j=1}^m$ en posant :

$$y_i^\delta = \sum_{j=1}^m y_j^\xi g_j^m(\tau_i^n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

D'après ce qui précède, la quantité

$$\left| y(\tau_i^n) - y_i^\delta \right| = \left| y(\tau_i^n) - \sum_{j=1}^m y_j^\xi g_j^m(\tau_i^n) \right|,$$

peut être estimée comme suit

$$\begin{aligned} \left| y(\tau_i^n) - y_i^\delta \right| &= \left| y(\tau_i^n) - \sum_{j=1}^m \left[y(s_j) + (y_j^\xi - y(s_j)) \right] g_j^m(\tau_i^n) \right| \\ &\leq \left| y(\tau_i^n) - \sum_{j=1}^m y(s_j) g_j^m(\tau_i^n) \right| + \left| \sum_{j=1}^m \left[(y_j^\xi - y(s_j)) \right] g_j^m(\tau_i^n) \right| \\ &\leq \left| y(\tau_i^n) - \sum_{j=1}^m y(s_j) g_j^m(\tau_i^n) \right| + \sum_{j=1}^m |y_j^\xi - y(s_j)| |g_j^m(\tau_i^n)| \\ &\leq \varepsilon_m \|y\| + \xi \kappa. \end{aligned}$$

On obtient donc l'estimation

$$\left| y(\tau_i^n) - y_i^\delta \right| \leq \varepsilon_m \|y\| + \xi \kappa. \quad (2.1.9)$$

► Cette estimation montre que dans cadre déterministe, il est très raisonnable de choisir le nombre d'observations $m = m(\xi)$, de façon que $\varepsilon_m \asymp \xi$ (l'expression $a \asymp b$ signifie qu'il existe deux constantes positive c_- et c_+ telles que $c_- a \leq b \leq c_+ a$).

► De l'estimation (2.1.9), on voit également que dans un cadre déterministe, le niveau du bruit

$$\delta = \max \left\{ \left| y(\tau_i^n) - y_i^\delta \right|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \right\}$$

dépend du niveau du bruit ξ produit par les m mesures bruitées, mais il ne dépend pas du nombre de points de collocation.

• Pour poursuivre l'analyse de notre méthode de calcul, on aura besoin aussi à hypothèse suivante :

(H2) On suppose que, pour tout $n = 1, 2, \dots$, et pour $\delta \in (0, 1)$ suffisamment petit, les données de collocation perturbées $y_1^\delta, y_2^\delta, \dots, y_n^\delta$ sont telles que

$$|y(\tau_i^n) - y_i^\delta| \leq \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

En tenant compte de l'hypothèse **(H2)** et la condition $\sum_{i=1}^n \omega_i^n \leq \omega$ (voir **(H2)**), le niveau du bruit du vecteur perturbé $\vec{y}_n^\delta := (y_1^\delta, y_2^\delta, \dots, y_n^\delta)$ de $\vec{y}_n := (y(\tau_1^n), y(\tau_2^n), \dots, y(\tau_n^n))$ par rapport à la norme de \mathbb{R}_ω^n est donné par :

$$\left\| \vec{y}_n - \vec{y}_n^\delta \right\|_{\omega, n} = \left(\sum_{i=1}^n \omega_i^n |y(\tau_i^n) - y_i^\delta|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\omega} \delta. \quad (2.1.10)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \left\| \vec{y}_n - \vec{y}_n^\delta \right\|_{\omega, n}^2 &= \langle \vec{y}_n - \vec{y}_n^\delta, \vec{y}_n - \vec{y}_n^\delta \rangle_{\omega, n} = \sum_{i=1}^n \omega_i^n |y(\tau_i^n) - y_i^\delta|^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^n |(K\hat{x})(\tau_i^n) - y_i^\delta|^2 \\ &\leq \left[\max |y(\tau_i^n) - y_i^\delta| \right]^2 \sum_{i=1}^n \omega_i^n \leq \omega \delta^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\left\| \vec{y}_n - \vec{y}_n^\delta \right\|_{\omega, n} = \left(\sum_{i=1}^n \omega_i^n |(K\hat{x})(\tau_i^n) - y_i^\delta|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\omega} \delta.$$

On sait que la solution (analytique) de l'équation intégrale (2.1.1) est fournie par le Théorème de Picard via la décomposition en valeurs singulières de l'opérateur K . Soit

$$(Kx)(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle v_k, x \rangle_{L^2} u_k(s)$$

où $\{v_k\}$ et $\{u_k\}$ sont deux systèmes orthonormés engendrés par les de fonctions propres des opérateurs K^*K et KK^* respectivement, et $a_1^2, a_2^2, \dots, a_k^2$ sont les valeurs propres correspondantes.

La solution exacte (instable) \hat{x} de (2.1.1) est donnée par :

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle u_k, y \rangle_{L^2}}{a_k} v_k(t), \quad (2.1.11)$$

sous la condition du critère de Picard soit satisfait : $\hat{x} \in L^2(0, 1)$ si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle u_k, y \rangle_{L^2}|^2}{a_k^2} < \infty.$$

Le Théorème de Picard nous fournit un critère théorique et pratique, dans le cas où on connaît explicitement le système singulier de l'opérateur K .

Remarque 2.1.1. On remarque que le terme général de la série (2.1.11) est un produit de deux quantités avec des vitesses opposées :

- le coefficient $\frac{|\langle u_k, y \rangle_{L^2}|^2}{a_k^2} \rightarrow 0$ (terme général d'une série convergente, il tend donc vers 0),
- les hautes fréquences $1/a_k \rightarrow +\infty$.

A partir de cette remarque, il est clair que la convergence de la série (2.1.11) ne pourrait être garantie sauf si le coefficient de Fourier $\langle u_k, y \rangle_{L^2}$ posséderait une certaine vitesse de décroissance qui peut contrôler la vitesse des hautes fréquences.

Par conséquent il semble naturel de mesurer la régularité de \hat{x} par la vitesse de décroissance des coefficients de Fourier $\langle u_k, y \rangle_{L^2}$, plus précisément, on a besoin d'une condition forte de type :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle u_k, y \rangle_{L^2}^2}{a_k^2 \varphi^2(a_k^2)} < \infty$$

où φ est une fonction continue croissante, définie sur l'intervalle $[0, a] \supset \{a_k^2\}$ avec $\varphi(0) = 0$. Pour se référer à ces propriétés, on note : conditions **(VHS)**¹.

D'après (2.1.11), on a

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(a_k^2) \langle v, v_k \rangle_{L^2} v_k(t) = (\varphi(K^*K)v)(t), \quad (2.1.12)$$

où

$$v := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle y, u_k \rangle_{L^2}}{a_k \varphi(a_k^2)} v_k \in L^2(0, 1).$$

La condition

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle u_k, y \rangle_{L^2}^2}{a_k^2 \varphi^2(a_k^2)} < \infty,$$

exprime donc une certaine régularité en terme d'une fonction d'indexation φ .

Pour une famille de fonctions $\Phi = \{\varphi\}$ vérifiant les propriétés **(VHS)**, on introduit la famille de sous-espaces, notée $H_\Phi = \{H_\varphi \subseteq H, \varphi \in \Phi\}$.

Notation. Si la solution exacte \hat{x} possède la régularité donnée par (2.1.5) :

$$\hat{x}(t) = (\varphi(K^*K)v)(t),$$

où

$$v := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle y, u_k \rangle_{L^2}}{a_k \varphi(a_k^2)} v_k \in L^2(0, 1),$$

on dit alors que \hat{x} est de type H_φ .

Puisque l'image $\mathbf{R}(K) \subset L^2(0, 1)$, tandis que l'image $\mathbf{R}(K_n) \subset \mathbb{R}^n$, alors la théorie des perturbations présentée dans le livre de Vainikko [34, Chap.4] ne peut pas être appliquée pour les méthodes de collocation régularisée,

1. VHS signifie en anglais : **Variable Hilbert Scales**

du fait qu'on peut pas estimer la norme de $\varphi(K^*K) - \varphi(K_n^*K_n)$ en s'appuyant sur les arguments de perturbation. Pour contourner cette difficulté, on fait appel à la théorie des fonctions monotones d'opérateurs.

Notation. On note par $\mathcal{A}(H)$ l'ensemble des opérateurs auto-adjoints sur H , i.e.,

$$\mathcal{A}(H) = \{A \in \mathcal{L}(H) : A = A^*\}.$$

L'ordre partiel $A \leq B$ sur $\mathcal{A}(H)$ signifie que $\langle Ax, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle$ pour tout $x \in H$.

Définition 2.1.1. Soit $\varphi : J = [0, a] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que φ est une fonction monotone d'opérateurs, si pour toute paire d'opérateurs bornés $A, B \in \mathcal{L}(H)$ avec $\sigma(A), \sigma(B) \subset J$, on ait

$$\varphi(A) \leq \varphi(B), \quad \text{pour } A \leq B.$$

On note par $\mathcal{M}_{[0,a]}(H)$ l'ensemble des fonctions monotones d'opérateurs :

$$\mathcal{M}_{[0,a]}(H) = \left\{ \varphi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R} : \varphi(A) \leq \varphi(B) \text{ si } A \leq B, A, B \in \mathcal{A}(H) \text{ et } \sigma(A), \sigma(B) \subseteq [0, a] \right\}.$$

Théorème 2.1.1. (Mathé & Pereverzer [24]) soient A, B deux opérateurs auto-adjoints positifs, et soit b une constante positive telle que $\max\{\|A\|, \|B\|\} \leq b$. Supposons que φ est une fonction monotone sur $[0, a]$, où $b \leq a$, alors il existe une constante $c_\varphi = c_\varphi(a, b)$ telle que

$$\|\varphi(A) - \varphi(B)\| \leq c_\varphi \varphi(\|A - B\|). \quad (2.1.13)$$

De plus, il existe $d_\varphi > 0$ telle que

$$d_\varphi \frac{t}{\varphi(t)} \leq \frac{\tau}{\varphi(\tau)} \quad (2.1.14)$$

pour tout $t, 0 < t < \tau \leq a$.

Ainsi, la fonction φ (fonction monotone d'opérateurs) nous permet d'estimer la norme de $\varphi(K^*K) - \varphi(K_n^*K_n)$.

Pour cela, on introduit l'hypothèse suivante.

(H3) On suppose que la solution exacte \hat{x} de l'équation (2.1.1) satisfait la conditions de régularité (2.1.5), i.e.,

$$\hat{x}(t) = (\varphi(K^*K)v)(t), \quad (2.1.15)$$

pour une certaine fonction monotone d'opérateurs φ sur l'intervalle $[0, a]$ tel que :

$$\max\{\|K^*K\|, \|K_n^*K_n\|\} \leq b < a, \quad \forall n = 1, 2, \dots, \quad (2.1.16)$$

où les opérateurs K, K_n sont donnés par les expressions (2.1.1), (2.1.3) respectivement.

Remarque 2.1.2. Considérons l'opérateur intégrale K avec le noyau $k(s, t)$ comme dans l'exemple 2.1.1. Alors, on a

$$\|K^*K\| = \|K\|^2 \leq \sup\{|k(s, t)|^2, \quad s, t \in [0, 1]\} \leq \gamma^2$$

et de la preuve de la proposition 2.1.1, il s'ensuit que

$$\|K_n^*K_n\| \leq \sup_{i=1}^n \omega_i^n |k(\tau_i^n, s) k(\tau_i^n, t)| \leq \gamma^2 \omega, \quad s, t \in [0, 1]$$

où ω est définie dans l'énoncé de l'hypothèse **(H1)**.

En effet, la première estimation découle immédiatement de l'inégalité de Cauchy-Schwartz et de la bornitude du noyau $k(., .)$. Pour la deuxième estimation, on peut écrire

$$(K_n^*K_n)x(s) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i^n k(\tau_i^n, s) k(\tau_i^n, t) x(t) dt,$$

et de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il découle

$$\begin{aligned} |(K_n^*K_n)x(s)| &\leq \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n \omega_i^n k(\tau_i^n, s) k(\tau_i^n, t) x(t) \right| dt \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i^n |k(\tau_i^n, s) k(\tau_i^n, t)| |x(t)| dt \leq \\ &\sup_{s, t \in [0, 1]} \sum_{i=1}^n \omega_i^n |k(\tau_i^n, s) k(\tau_i^n, t)| \int_0^1 |x(t)| dt \leq \sup_{i=1}^n \omega_i^n |k(\tau_i^n, s) k(\tau_i^n, t)| \|x\|_{L^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^1 |(K_n^*K_n)x(s) ds|^2 \leq \int_0^1 \left[\sup_{s, t \in [0, 1]} \sum_{i=1}^n \omega_i^n |k(\tau_i^n, s) k(\tau_i^n, t)| \|x\|_{L^2} \right]^2 ds.$$

On obtient donc

$$\|(K_n^*K_n)x\| \leq \sup_{s, t \in [0, 1]} \sum_{i=1}^n \omega_i^n |k(\tau_i^n, s) k(\tau_i^n, t)| \|x\|_{L^2},$$

ce qui donne

$$\|K_n^*K_n\| \leq \sup_{s, t \in [0, 1]} \sum_{i=1}^n \omega_i^n |k(\tau_i^n, s) k(\tau_i^n, t)|, \quad (2.1.17)$$

et le côté droit de (2.1.17) peut être estimé comme suit

$$\|K_n^*K_n\| \leq \sup_{s, t \in [0, 1]} |k(\tau_i^n, s) k(\tau_i^n, t)| \sum_{i=1}^n \omega_i^n \leq \gamma^2 \omega. \quad (2.1.18)$$

► On voit donc, que si l'opérateur K satisfait les conditions **(H1)** et **(H2)**, alors la condition (2.1.16) dans l'hypothèse **(H3)** est satisfaite si on choisit une fonction $\varphi \in \mathcal{M}_{[0, a]}(H)$ avec $\max\{\gamma^2, \gamma^2 \omega\} < a$.

Exemple 2.1.3. (i) Les fonctions $\varphi(t) = t^\mu$, $0 \leq \mu \leq 1$ sont des fonctions monotones d'opérateurs sur $[0, \infty[$.

(ii) Les fonctions $\varphi(t) = \log^{-\mu}\left(\frac{1}{t}\right)$ ou $\varphi(t) = \log^{-\mu}\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)$, $0 < \mu \leq 1$, sont des fonctions monotones d'opérateur sur $[0, 1[$.²

Remarque 2.1.3. Sous la condition (2.1.15), ces classes de fonctions peuvent être exploitées dans notre cadre d'étude. Pour se faire, il suffit de modifier l'opérateur K par un $K_\theta = \theta K$, $\theta > 0$ de façon que $\sigma(K_\theta^* K_\theta) \subset [0, 1[$.

2.2 Procédure de Régularisation

Dans ce qui suit, on suppose que l'équation (2.1.1) admet une solution \hat{x} dans L^2 , soit alors

$$y(t) = (K\hat{x})(t).$$

D'après l'hypothèse (H2), les données de collocation qu'on dispose sont en nombre fini, de plus elles sont entachées d'erreurs : $\vec{y}_n^\delta := (y_1^\delta, y_2^\delta, \dots, y_n^\delta) \in \mathbb{R}^n$, de plus, d'après (2.1.10) on a

$$\left\| \vec{y}_n - \vec{y}_n^\delta \right\|_{\omega, n} \leq \sqrt{\omega} \delta, \quad \left\| \Gamma_{\Delta_n} K \hat{x} - \vec{y}_n^\delta \right\|_{\omega, n} \leq \sqrt{\omega} \delta, \quad (2.2.1)$$

où ω est la constante indiquée dans l'hypothèse (H1).

Notre but ici est de reconstruire \hat{x} à partir de \vec{y}_n^δ . Considérons donc le problème matriciel suivant :

$$K_n x = \vec{y}_n^\delta. \quad (2.2.2)$$

Puisque le problème (2.2.2) est mal conditionné, on ne peut pas donc le résoudre directement. Pour pallier cette pathologie, on considère alors le problème approché (régularisé) suivant :

$$\alpha x + K_n^* K_n x = K_n^* \vec{y}_n^\delta \quad (\text{Régularisation de Tikhonov}) \quad (2.2.3)$$

où $\alpha > 0$ est le paramètre de régularisation.

Pour tout $\alpha > 0$, l'unique solution $x_{\alpha, n}^\delta$ de (2.2.3) est considérée comme une approximation de collocation régularisée pour \hat{x} .

Avant d'analyser cette procédure, il est important de connaître la représentation de

$$x_{\alpha, n}^\delta = \left(\alpha x + K_n^* K_n \right)^{-1} K_n^* \vec{y}_n^\delta.$$

2. Dans la littérature des problèmes mal posés, ces classes de fonctions ont été largement exploitées dans la régularisation de Tikhonov. Pour plus de détails, on peut consulter les références :

■ H.W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer, Regularization of Inverse Problems, Kluwer, Dordrecht, 1996

■ T. Hohage, Regularization of exponentially ill-posed problems, Numer. Funct. Anal. Optimiz. 21 (2000) 439-464. Applications, vol. 517, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, pp. 67-98.

■ S.V. Pereverzev, E. Schock, Morozov's discrepancy principle for Tikhonov regularization of severely ill-posed problems in finite-dimensional subspaces, Numer. Funct. Anal. Optim. 21 (7-8) (2000) 901-916.

Il est clair que $x_{\alpha,n}^\delta \in R(K_n^*)$. D'autre part, de la proposition 2.1.1, on sait que $R(K_n^*)$ est engendrée par

$$\{\omega_i^n k(\tau_i^n, \cdot)\}_{i=1}^n,$$

$$(K_n^* u)(\cdot) = \sum_{i=1}^n \omega_i^n k(\tau_i^n, \cdot) u_i, \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Par conséquent

$$x_{\alpha,n}^\delta = \sum_{j=1}^n c_j \omega_j^n k(\tau_j^n, \cdot). \quad (2.2.4)$$

En remplaçant (2.2.4) dans l'équation (2.2.3), on obtient

$$\alpha x_{\alpha,n}^\delta + K_n^* K_n x_{\alpha,n}^\delta = K_n^* \vec{y}_n^\delta,$$

$$\alpha \sum_{j=1}^n c_j \omega_j^n k(\tau_j^n, \cdot) + K_n^* K_n \sum_{j=1}^n c_j \omega_j^n k(\tau_j^n, \cdot) = K_n^* \vec{y}_n^\delta,$$

$$\alpha \sum_{j=1}^n c_j \omega_j^n k(\tau_j^n, \cdot) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i^n k(\tau_i^n, \cdot) k(\tau_i^n, t) \sum_{j=1}^n c_j \omega_j^n k(\tau_j^n, \cdot) dt = \sum_{j=1}^n \omega_j^n k(\tau_j^n, \cdot) y_j^\delta,$$

$$\alpha \sum_{j=1}^n c_j \omega_j^n k(\tau_j^n, \cdot) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \omega_j^n \int_0^1 k(\tau_j^n, t) k(\tau_i^n, t) dt c_j \right) \omega_i^n k(\tau_i^n, \cdot) = \sum_{j=1}^n \omega_j^n k(\tau_j^n, \cdot) y_j^\delta,$$

on arrive enfin à l'écriture

$$\alpha \sum_{i=1}^n c_i \omega_i^n k(\tau_i^n, \cdot) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \omega_j^n \int_0^1 k(\tau_j^n, t) k(\tau_i^n, t) dt c_j \right) \omega_i^n k(\tau_i^n, \cdot) = \sum_{i=1}^n \omega_i^n k(\tau_i^n, \cdot) y_i^\delta,$$

où les coefficients c_j sont calculés à partir du système d'équations linéaires :

$$\alpha c_i + \sum_{j=1}^n \omega_j^n \int_0^1 k(\tau_j^n, t) k(\tau_i^n, t) dt c_j = y_i^\delta,$$

$$\alpha c_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j = y_i^\delta, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

où

$$a_{ij} = \omega_j^n \int_0^1 k(\tau_j^n, t) k(\tau_i^n, t) dt, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Ce système s'écrit sous la forme matricielle

$$\alpha \vec{c} + A \vec{c} = \vec{y}_n^\delta, \quad \vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n), \quad (2.2.5)$$

où

$$A = [a_{ij}], \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

$$A = \left[\omega_j^n \int_0^1 k(\tau_j^n, t) k(\tau_i^n, t) dt \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

$$A = [\omega_j^n m_{ij}], \quad m_{ij} = \int_0^1 k(\tau_j^n, t) k(\tau_i^n, t) dt$$

On remarque que

$$A = \begin{pmatrix} \omega_1^n m_{11} & \omega_2^n m_{12} & \cdots & \omega_n^n m_{1n} \\ \omega_1^n m_{21} & \omega_2^n m_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^n m_{n1} & \cdots & \cdots & \omega_n^n m_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^n & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_n^n \end{pmatrix},$$

donc on peut écrire la matrice A sous la forme $A = MW$, $M = [m_{ij}]$ et $W = \text{diag}(\omega_1^n, \omega_2^n, \dots, \omega_n^n)$.

De la définition de $\langle u, v \rangle_{\omega, n} = \sum_{i=1}^n \omega_i^n u_i v_i = \langle Wu, v \rangle_{\mathbb{R}^n}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle_{\omega, n} &= \langle WAu, v \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle WMWu, v \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle u, (WMW)^* v \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \langle u, W^* M^* W^* v \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle u, WMWv \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle Wu, MWv \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle Wu, Av \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle u, Av \rangle_{\omega, n}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\langle Au, v \rangle_{\omega, n} = \langle u, Av \rangle_{\omega, n}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}_\omega^n.$$

On voit que A est auto-adjoint pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\omega, n}$, de plus $\langle Au, u \rangle_{\omega, n} = \langle MWu, Wu \rangle_{\mathbb{R}^n} \geq 0$. En effet,

soit $\varphi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)]$ tel que $\varphi_i(t) = k(\tau_i^n, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, on a

$$\begin{aligned} \langle MWu, Wu \rangle_{\mathbb{R}^n} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^1 \varphi_i(t) \varphi_j(t) \omega_i^n \omega_j^n u_i u_j dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_i(t) \varphi_j(t) \omega_i^n \omega_j^n u_i u_j dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \omega_i^n \varphi_i(t) u_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \omega_j^n \varphi_j(t) u_j \right) dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \omega_i^n \varphi_i(t) u_i \right)^2 dt \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour toute valeur du paramètre de régularisation $\alpha > 0$, la matrice $\alpha I + A$ du système (2.2.5) est un opérateur strictement positif et auto-adjoint sur \mathbb{R}_ω^n . En conséquence, le système (2.2.5) est uniquement résoluble.

Lemme 2.2.1. *Sous les conditions (H_i) , $i = 1, 2, 3$, on a l'estimation*

$$\left\| \hat{x} - x_{\alpha, n}^\delta \right\|_{L^2} \leq \hat{c} [\varphi(\alpha) + \varphi(\pi_n)] + \frac{\sqrt{\omega}}{2\sqrt{\alpha}} \delta$$

où la constante \hat{c} est indépendante de α et n . En particulier, pour $\alpha > 0$ appartenant au domaine de φ , et si $n := n(\alpha)$ est le plus petit entier positif tel que $\pi_{n(\alpha)} \leq \alpha$, alors

$$\left\| \hat{x} - x_{\alpha, n}^\delta \right\|_{L^2} \leq 2 \hat{c} \varphi(\alpha) + \frac{\sqrt{\omega}}{2\sqrt{\alpha}} \delta.$$

Preuve. Soit $g_\alpha(t) = (\alpha + t)^{-1}$. En utilisant cette notation, on peut écrire $x_{n, \alpha}^\delta$ sous la forme

$$x_{n, \alpha}^\delta = (\alpha I + K_n^* K_n)^{-1} K_n^* \vec{y}_n^\delta = g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^* \vec{y}_n^\delta.$$

En vertu de la proposition 3 (cf. [25]), on a pour toute fonction φ satisfaisant (2.1.14),

$$\sup_{t \in [0, a]} |(1 - g_\alpha(t)) \varphi(t)| \leq \frac{\varphi(\alpha)}{d_\alpha}, \quad (2.2.6)$$

où d_α est la constante indiquée dans le théorème 2.1.1.

On a

$$\begin{aligned} \hat{x} - x_{n,\alpha}^\delta &= \hat{x} - g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^* \vec{y}_n^\delta + g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^* K_n \hat{x} - g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^* K_n \hat{x}, \\ K_n \hat{x} &= \Gamma_{\Delta_n} K \hat{x}, \end{aligned}$$

d'où

$$\hat{x} - x_{n,\alpha}^\delta = g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^* \left(\Gamma_{\Delta_n} K \hat{x} - \vec{y}_n^\delta \right) + (I - g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^* K_n) \hat{x}. \quad (2.2.7)$$

En utilisant (2.2.1) et le calcul fonctionnel des opérateurs auto-adjoints, on peut estimer le premier terme du côté droit comme suit

$$\begin{aligned} \left\| g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^* \left(\Gamma_{\Delta_n} K \hat{x} - \vec{y}_n^\delta \right) \right\| &\leq \|g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^*\|_{\mathbb{R}_\omega^n \rightarrow L^2} \left\| \Gamma_{\Delta_n} K \hat{x} - \vec{y}_n^\delta \right\|_{\omega, n} \\ &\leq \sup_{t \geq 0} |\sqrt{t}(\alpha + t)^{-1}| \sqrt{\omega} \delta, \end{aligned}$$

et de l'inégalité $\sup_{t \geq 0} \sqrt{t}(\alpha + t)^{-1} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$, on obtient

$$\left\| g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^* \left(\Gamma_{\Delta_n} K \hat{x} - \vec{y}_n^\delta \right) \right\| \leq \frac{\sqrt{\omega}}{2\sqrt{\alpha}} \delta. \quad (2.2.8)$$

D'autre part, en tenant compte de (2.1.5) ($\hat{x} = \varphi(K^* K) v$), on peut décomposer le deuxième terme de (2.2.7) comme suit

$$\begin{aligned} (I - g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^* K_n) \hat{x} &= (I - g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^* K_n) \varphi(K_n^* K_n) v \\ &- (I - g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^* K_n) \varphi(K_n^* K_n) v + (I - g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^* K_n) \varphi(K^* K) v, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (I - g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^* K_n) \hat{x} &= (I - g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^* K_n) \varphi(K_n^* K_n) v \\ &+ (I - g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^* K_n) (\varphi(K^* K) - \varphi(K_n^* K_n)) v. \end{aligned}$$

En utilisant la condition (2.2.6) ainsi que le calcul fonctionnel des opérateurs auto-adjoints, on obtient les estimations suivantes :

$$\left\| (I - g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^* K_n) \varphi(K_n^* K_n) v \right\| \leq \left\| (I - g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^* K_n) \varphi(K_n^* K_n) \right\| \|v\|$$

$$\leq \sup_{t \geq 0} |(1 - g_\alpha(t)) \varphi(t)| \|v\| \leq \frac{\|v\|}{d_\varphi} \varphi(\alpha).$$

Puisque

$$\|(I - g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^* K_n)\| \leq \sup_t |(1 - g_\alpha(t))| \leq 1,$$

le théorème 2.1.1 et la proposition 2.1.1, nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \|(I - g_\alpha(K_n^* K_n) K_n^* K_n) (\varphi(K^* K) - \varphi(K_n^* K_n)) v\| &\leq \|v\| \|(\varphi(K^* K) - \varphi(K_n^* K_n))\| \\ &\leq c_\varphi \|v\| \varphi(\|K^* K - K_n^* K_n\|) \leq c \|v\| \varphi(\pi_n) \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

En combinant les estimations (2.2.8) et (2.2.9), on trouve

$$\|\hat{x} - x_{\alpha,n}^\delta\|_{L^2} \leq \frac{\sqrt{\omega}}{2\sqrt{\alpha}} \delta + \frac{\|v\|}{d_\varphi} \varphi(\alpha) + c \|v\| \varphi(\pi_n) \leq \hat{c} [\varphi(\alpha) + \varphi(\pi_n)] + \frac{\sqrt{\omega}}{2\sqrt{\alpha}} \delta,$$

où $\hat{c} = \max \left\{ \frac{\|v\|}{d_\varphi}, c \|v\| \right\}$. Si $\alpha \in \mathcal{D}_\varphi$ tel que $\pi_n \leq \alpha$, alors $\varphi(\alpha) \geq \varphi(\pi_n)$ entraîne

$$\|\hat{x} - x_{\alpha,n}^\delta\|_{L^2} \leq 2\hat{c}\varphi(\alpha) + \frac{\sqrt{\omega}}{2\sqrt{\alpha}} \delta.$$

Ce qui achève la preuve du lemme 2.2.1. ■

Soit la fonction $\Theta(t)$ définie par : $\Theta(t) = \sqrt{t}\varphi(t)$, $t \in [0, \|K\|^2]$. Cette fonction peut nous servir au choix a priori du paramètre de régularisation. Notons que pour $\alpha > 0$, $\alpha = \Theta^{-1}(\delta)$ si et seulement si $\varphi(\alpha) = \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}$.

On note ici, que pour $\alpha \geq 0$, $n(\alpha)$ désigne le plus petit entier positif satisfaisant $\pi_{n(\alpha)} \leq \alpha$, où $\{\pi_n\}$ est la suite introduite dans l'hypothèse (H1).

Théorème 2.2.1. *On suppose que les conditions (H_i) , $i = 1, 2, 3$ sont satisfaites. Soient $\delta > 0$ tel que $\delta \in R(\Theta)$ et $\alpha = \Theta^{-1}(\delta)$. si $n = n(\alpha)$ est le plus petit entier positif tel que $\pi_{n(\alpha)} \leq \alpha$, alors*

$$\|\hat{x} - x_{\alpha,n(\alpha)}^\delta\|_{L^2} \leq c\varphi(\Theta^{-1}(\delta)), \quad (2.2.10)$$

où la constant c ne depend pas de δ .

Preuve. D'après le lemme 2.2.1, on a

$$\|\hat{x} - x_{\alpha,n(\alpha)}^\delta\|_{L^2} \leq 2\hat{c}\varphi(\alpha) + \frac{\sqrt{\omega}}{2\sqrt{\alpha}} \delta.$$

De plus, de la définition du paramètre α :

$$\alpha = \Theta^{-1}(\delta) \iff \varphi(\alpha) = \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}},$$

il vient

$$\varphi(\Theta^{-1}(\delta)) = \frac{\delta}{\sqrt{\Theta^{-1}(\delta)}}, \quad \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} = \varphi(\Theta^{-1}(\delta))$$

ce qui donne

$$\|\hat{x} - x_{\alpha, n(\alpha)}^\delta\|_{L^2} \leq 2\hat{c}\varphi(\Theta^{-1}(\delta)) + \frac{\sqrt{\omega}}{2}\varphi(\Theta^{-1}(\delta)) \leq \left(2\hat{c} + \frac{\sqrt{\omega}}{2}\right)\varphi(\Theta^{-1}(\delta)) = c\varphi(\Theta^{-1}(\delta)),$$

où $c = 2\hat{c} + \frac{\sqrt{\omega}}{2}$. ■

On voit donc, si la condition de régularité est exprimée en fonction d'une fonction monotone d'opérateur φ (voir (2.1.5)), alors on peut utiliser le théorème 2.2.1 pour établir un bon ordre de précision. Pour cela, il suffit de choisir $\alpha = \Theta^{-1}(\delta)$ et $n = n(\alpha)$ comme dans la théorème 2.2.1.

Remarque 2.2.1. Notons que dans le travail [25], il a été démontré, que l'ordre de la précision $\varphi(\Theta^{-1}(\delta))$ ne peut être amélioré en général sous la condition (2.1.5). Par conséquent, ce taux peut servir comme étant un de repère d'évaluation d'erreur.

Plusieurs auteurs ont étudié des schémas d'approximation K^*K de $K_n^*K_n$ dépendant de α .

- Dans [9], il a été montré que la condition $\|K^*K - K_n^*K_n\| \asymp \alpha^2$ donne un ordre optimal si la condition de régularité est exprimée en fonction de $\varphi(t) = t^\mu$, $0 < \mu \leq 1$.
- Il est important de noter que l'estimation (2.2.10) est un résultat général. Elle englobe tous les types de régularité³ qui ont été étudiés dans les procédures de régularisation. De plus, l'ordre de précision obtenu sous la condition (2.1.15) est optimal.

2.3 Choix du paramètre de régularisation

Dans la pratique, il est très difficile et parfois impossible de choisir de manière optimale le paramètre α . Ce constat est dû au fait que la solution qu'on cherche est inconnue, et les information a priori dont on dispose sont limitées, ce qui rend certains résultats théoriques inapplicables, notamment dans les problèmes d'aspect expérimental.⁴

■ La question est donc comment faire un choix de façon à obtenir ordre quasi-optimal relativement acceptable vis-à-vis l'objectif souhaité.

Dans ce but, on suit la méthode développée dans [25] et qui a été généralisée dans [28].

3. Type Höldérien : $\varphi(t) = t^\mu$, $0 < \mu \leq 1$.

Type logarithmique : $\varphi(t) = \log^{-\mu}\left(\frac{1}{t}\right)$ ou $\varphi(t) = \log^{-\mu}\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)$, $0 < \mu \leq 1$.

4. Les problèmes pratiques sont de nature très complexe et leurs traitement ne se fait pas par des méthodes standards. On doit penser donc à d'autres méthodes sophistiquées qui peuvent traiter cette complexité.

Pour poursuivre les calculs, on aura besoin d'un résultat crucial démontré dans [27, lemme 3]. Ce résultat se résume comme suit :

soient φ est une fonction monotone d'opérateurs et η un réel strictement positif. Alors il existe deux constantes positives $c_-(\eta, \varphi)$, $c_+(\eta, \varphi)$ ne dépendent que de φ et η telles que

$$c_-(\eta, \varphi)\varphi(t) \leq \varphi(\eta t) \leq c_+(\eta, \varphi)\varphi(t), \quad (2.3.1)$$

pour tout t tel que t et ηt appartiennent au domaine de φ .

Dans la pratique, les valeurs du paramètre de régularisation α sont souvent choisis parmi certaines suites géométriques :

$$G_q^M = \{\alpha_i = \alpha_0 q^i, \quad i = 0, 1, \dots, M\},$$

où $\alpha_0 = \delta^2$, $q > 1$ et M est déterminé selon le critère $q^{M-1}\alpha_0 \leq 1 < q^M\alpha_0$.

En vertu du lemme 2.2.1, on peut proposer une stratégie adaptative pour choisir le nombre n de collocation en fonction de $\alpha \in G_q^M$, telle que l'influence de l'erreur de discrétisation n'amplifie pas de manière brutale le bilan d'erreur global.

D'après le lemme 2.2.1, on a

$$\|\hat{x} - x_{\alpha, n(\alpha)}^\delta\|_{L^2} \leq 2\hat{c}\varphi(\alpha) + \frac{\sqrt{\omega}}{2\sqrt{\alpha}}\delta \quad (2.3.2)$$

Notons que si $n > n(\alpha)$ l'erreur $\|\hat{x} - x_{\alpha, n}^\delta\|_{L^2}$ demeure valable, mais la taille du système linéaire algébrique qui donne la solution $x_{\alpha, n}^\delta$ augmente.

Dans la suite, on suppose que $\hat{c}\varphi(\delta^2) < \frac{\sqrt{\omega}}{4}$. Ce cas n'est pas une restriction, car dans le cas contraire, le côté droit de (2.3.2) est supérieur à la constante $\frac{\sqrt{\omega}}{4}$ pour tout $\alpha \in G_q^M$.

En vertu de l'estimation (2.3.2) et le [28, théorème 1.7.1], on montre que si

$$\alpha_+ = \max \left\{ \alpha_j \in G_q^M : \left\| x_{\alpha_j, n(\alpha_j)}^\delta - x_{\alpha_i, n(\alpha_i)}^\delta \right\| \leq \frac{2\sqrt{\omega}}{\sqrt{\alpha_i}}\delta, \quad i = 0, 1, \dots, j \right\}, \quad (2.3.3)$$

alors

$$\|\hat{x} - x_{\alpha_+, n(\alpha_+)}^\delta\|_{L^2} \leq 12\hat{c}\sqrt{q}\varphi(\bar{\alpha}), \quad (2.3.4)$$

où $\bar{\alpha}$ est la solution de l'équation $2\hat{c}\varphi(\alpha) = \frac{\sqrt{\omega}}{2\sqrt{\alpha}}\delta$.

Preuve. On a

$$\|\hat{x} - x_{\alpha_+, n(\bar{\alpha})}^\delta\|_{L^2} \leq 2\hat{c}\varphi(\bar{\alpha}) + \frac{\sqrt{\omega}}{2\sqrt{\bar{\alpha}}}\delta,$$

donc

$$\left\| \hat{x} - x_{\alpha, n(\bar{\alpha})}^{\delta} \right\|_{L^2} \leq 4\hat{c}\varphi(\bar{\alpha}).$$

D'autre part, on a

$$\left\| x_{\alpha, n(\bar{\alpha})}^{\delta} - x_{\alpha_+, n(\alpha_+)}^{\delta} \right\|_{L^2} \leq \frac{2\sqrt{\omega}}{\sqrt{\bar{\alpha}}} \delta = 8\hat{c}\varphi(\bar{\alpha}),$$

et

$$\begin{aligned} \left\| \hat{x} - x_{\alpha_+, n(\alpha_+)}^{\delta} \right\|_{L^2} &= \left\| \hat{x} - x_{\alpha, n(\bar{\alpha})}^{\delta} + x_{\alpha, n(\bar{\alpha})}^{\delta} - x_{\alpha_+, n(\alpha_+)}^{\delta} \right\|_{L^2} \\ &\leq \left\| \hat{x} - x_{\alpha, n(\bar{\alpha})}^{\delta} \right\|_{L^2} + \left\| x_{\alpha, n(\bar{\alpha})}^{\delta} - x_{\alpha_+, n(\alpha_+)}^{\delta} \right\|_{L^2} \leq 4\hat{c}\varphi(\bar{\alpha}) + 8\hat{c}\varphi(\bar{\alpha}), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left\| x^c - x_{\alpha_+, n(\alpha_+)}^{\delta} \right\|_{L^2} \leq 12\hat{c}\varphi(\bar{\alpha}),$$

Il résulte enfin

$$\left\| \hat{x} - x_{\alpha_+, n(\alpha_+)}^{\delta} \right\|_{L^2} \leq 12\hat{c}\sqrt{q}\varphi(\bar{\alpha}). \quad (2.3.5)$$

■

Théorème 2.3.1. *Sous les conditions (H_i) , $i = 1, 2, 3$, on a*

$$\left\| \hat{x} - x_{\alpha_+, n(\alpha_+)}^{\delta} \right\|_{L^2} \leq c\varphi(\Theta^{-1}(\delta)),$$

où la constante c ne dépend pas de δ .

Preuve. Remarquons que $\bar{\alpha}$ dans (2.3.5) peut être représentée comme suit

$$\bar{\alpha} = \Theta^{-1}(c_{\omega}\delta), \text{ où } c_{\omega} = \frac{\sqrt{\omega}}{4\hat{c}}.$$

En effet, $\Theta(t) = \sqrt{t}\varphi(t)$, et on a $2\hat{c}\varphi(\bar{\alpha}) = \frac{\sqrt{\omega}}{2\sqrt{\bar{\alpha}}}\delta$, donc $\sqrt{\bar{\alpha}}\varphi(\bar{\alpha}) = \frac{\sqrt{\omega}}{4\hat{c}}\delta = \Theta(\bar{\alpha})$, soit $\Theta^{-1}\left(\frac{\sqrt{\omega}}{4\hat{c}}\delta\right) = \bar{\alpha} = \Theta^{-1}(c_{\omega}\delta)$.

Si $c_{\omega} \leq 1$, alors la preuve du théorème découle immédiatement de (2.3.4). Supposons que $c_{\omega} > 1$, i.e.,

$$\bar{\alpha} > \alpha_{opt} = \Theta^{-1}(\delta).$$

De $c_{\omega} = \frac{\sqrt{\omega}}{4\hat{c}} = \frac{\Theta(\bar{\alpha})}{\delta}$ (car $\Theta(\bar{\alpha}) = \frac{\sqrt{\omega}}{4\hat{c}}\delta$), et $\delta = \Theta(\alpha_{opt}) = \sqrt{\alpha_{opt}}\varphi(\alpha_{opt})$, on a

$$c_{\omega} = \frac{\Theta(\bar{\alpha})}{\Theta(\alpha_{opt})} = \frac{\sqrt{\bar{\alpha}}\varphi(\bar{\alpha})}{\sqrt{\alpha_{opt}}\varphi(\alpha_{opt})} \geq \frac{\sqrt{\bar{\alpha}}}{\sqrt{\alpha_{opt}}}, \quad (\bar{\alpha} > \alpha_{opt} \implies \varphi(\bar{\alpha}) > \varphi(\alpha_{opt})).$$

En utilisant (2.3.1) et (2.3.4), on obtient

$$\left\| \hat{x} - x_{\alpha_+, n(\alpha_+)}^\delta \right\|_{L^2} \leq 12\hat{c}\sqrt{q}\varphi(c_\omega^2 \alpha_{opt}), \quad (\bar{\alpha} \leq c_\omega^2 \alpha_{opt} \implies \varphi(\bar{\alpha}) \leq \varphi(c_\omega^2 \alpha_{opt})),$$

et de (2.3.1), on a

$$\varphi(c_\omega^2 \alpha_{opt}) \leq \bar{c}_\omega^2 \varphi(\alpha_{opt}),$$

donc

$$\left\| \hat{x} - x_{\alpha_+, n(\alpha_+)}^\delta \right\|_{L^2} \leq 12\hat{c}\sqrt{q}\bar{c}_\omega^2 \varphi(\alpha_{opt}).$$

Or

$$\varphi(\alpha_{opt}) = \varphi(\Theta^{-1}(\delta)) \implies \left\| \hat{x} - x_{\alpha_+, n(\alpha_+)}^\delta \right\|_{L^2} \leq 12\hat{c}\sqrt{q}\bar{c}_\omega^2 \varphi(\Theta^{-1}(\delta)),$$

donc, si $c = 12\hat{c}\sqrt{q}\bar{c}_\omega^2$, il résulte alors

$$\left\| \hat{x} - x_{\alpha_+, n(\alpha_+)}^\delta \right\|_{L^2} \leq c\varphi(\Theta^{-1}(\delta)).$$

■

Remarque 2.3.1. A partir du théorème 2.3.1, on voit que cette stratégie adaptative de choix du paramètre de régularisation α , donne une erreur optimale de l'ordre $\varphi(\Theta^{-1}(\delta))$. De plus, elle n'exige aucune connaissance sur la régularité de la solution exacte.

Méthode de Sinc-Collocation régularisée pour une équation intégrale de Fredholm de première espèce

3.1 Position du problème

Le but de cette étude est de développer une méthode numérique d'ordre de précision très élevé, pour une classe d'équations intégrales de Fredholm de première espèce :

$$\int_a^b k(s, t)x(s)ds = y(t), \quad t \in [a, b], \quad (3.1.1)$$

3.1.1 Approximation de Sinc sur la droite réelle

L'approximation de Sinc d'une fonction $x(t)$ définie sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$ est donnée par :

$$x(t) \approx \sum_{k=-N}^N x(kh)S(k, h)(t). \quad (3.1.2)$$

Il faut mentionner ici que cette approximation est formelle.

Définition 3.1.1. On note par D_d la bande infinie de largeur $2d$ ($d > 0$) du plan complexe :

$$D_d := \{z \in \mathbb{C} : |z| < d\}.$$

Pour $0 < \varepsilon < 1$, soit

$$D_d(\varepsilon) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| < d(1 - \varepsilon), |\operatorname{Re}(z)| < \frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

On note par $H^1(D_d)$ l'espace de Hardy sur D_d , i.e., l'ensemble des fonctions analytiques sur D_d , telles que

$$N(f, D_d) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial D_d} |f(z)| |dz| \right) < \infty.$$

Le théorème qui suit, démontré par Stenger¹, précise le taux de convergence de l'approximation de Sinc, qui est de type exponentiel si la fonction qu'on veut l'approcher appartenant à l'espace de Hardy $H^1(D_d)$ et décroît exponentiellement sur la droite réelle. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur aux références

1. F. Stenger, Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions, Springer, Berlin, New York, 1993.

Théorème 3.1.1. Soient γ, β et d des constantes positives, et soit f une fonction vérifiant les conditions suivantes

(i) $f \in H^1(D_d)$,

(ii) $|f(t)| \leq \gamma \exp(-\beta|t|), \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Alors on a

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \left| f(t) - \sum_{k=-N}^N f(kh)S(k, h)(t) \right| \leq cN^{\frac{1}{2}} \exp \left[-(\pi d \beta N)^{\frac{1}{2}} \right],$$

où c une constante positive, et $h = \left(\frac{\pi d}{\beta N} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Soit $t = \varphi(z)$ une application conforme qui transforme le domaine D (de frontière ∂D) vers une bande D_d telle que

$$\varphi((a, b)) = (-\infty, \infty), \quad \lim_{t \rightarrow a} \varphi(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow b} \varphi(t) = \infty$$

Maintenant, pour appliquer l'approximation de Sinc sur un intervalle fini (a, b) , on choisit la fonction $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \ln \left[\frac{t-a}{b-t} \right].$$

Cette fonction transforme le domaine complexe

$$\left\{ z = x + iy : \left| \arg \left(\frac{z-a}{b-z} \right) \right| < d \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

vers la bande infinie

$$D_d = \left\{ \mu = \gamma + i\beta : |\beta| < d < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Les fonctions de base sur l'intervalle fini (a, b) deviennent :

$$\begin{aligned} S(k, h) \circ \varphi(t) &= \begin{cases} \frac{\sin [\pi(\varphi(t) - kh)/h]}{\pi(\varphi(t) - kh)/h}, & \varphi(t) \neq kh, \\ 1, & \varphi(t) = kh, \end{cases} \\ &= \text{Sinc} [(\varphi(t) - kh)/h]. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$S(k, h)(jh) = \delta_{kj}^{(0)} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Donc, les noeuds de la fonction $S(k, h) \circ \varphi(t)$ seront :

$$t_k = \varphi^{-1}(kh) = \frac{a + be^{kh}}{1 + e^{kh}},$$

et les formules d'interpolation et de quadrature pour une fonction $x(t)$ sur $[a, b]$ seront données par les expressions :

$$x(t) \approx \sum_{k=-N}^N x(t_k) S(k, h) \circ \varphi(t) = \sum_{k=-N}^N x(\varphi^{-1}(kh)) S(k, h) \circ \varphi(t), \quad (3.1.3)$$

$$\int_a^b x(t) dt \approx h \sum_{k=-N}^N \frac{x(t_k)}{\varphi'(t_k)}. \quad (3.1.4)$$

Théorème 3.1.2. *Supposons que, pour un changement de variable $x = \varphi^{-1}(t)$, la fonction $f(\varphi^{-1}(t))$ satisfait les hypothèses (i) – (ii) du théorème 3.1.1, pour certaines constantes positives γ , β et d . Alors on a*

$$\sup_{a < x < b} \left| f(x) - \sum_{k=-N}^N f(\varphi^{-1}(kh)) S(k, h) \circ \varphi(x) \right| \leq c N^{\frac{1}{2}} \exp\left(-(\pi d \beta N)^{\frac{1}{2}}\right), \quad (3.1.5)$$

où c est une constante positive, et $h = \left(\frac{\pi d}{\beta N}\right)^{\frac{1}{2}}$.

3.2 Méthode de Sinc-Collocation régularisée

Dans cette partie, on considère le problème régularisé suivant :

$$\left[(\alpha I + K^* K) x_\alpha^\delta \right] (s) = (K^* y^\delta)(s), \quad s \in [a, b], \quad (3.2.1)$$

En utilisant l'approximation de Sinc, on transforme le problème continu (3.2.1) en un problème discret en dimension finie. Cette étape intervient les opérations suivantes :

On commence tout d'abord par une approximation de la solution régularisée $x_\alpha^\delta(t)$ comme suit :

$$x_\alpha^\delta(t) \approx P_N(x_\alpha^\delta)(t) = \sum_{k=-N}^N x_\alpha^\delta(\varphi^{-1}(kh)) S(k, h) \circ \varphi(t) \quad (3.2.2)$$

Remarque 3.2.1. Pour $t_k = \varphi^{-1}(kh) \in [a, b]$, on a

$$x_\alpha^\delta(t_j) = P_N(x_\alpha^\delta)(t_j), \quad j \in [-N, N].$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} P_N(x_\alpha^\delta)(t_j) &= \sum_{k=-N}^N x_\alpha^\delta(\varphi^{-1}(kh)) S(k, h) \circ \varphi(t_j) = \sum_{k=-N}^N x_\alpha^\delta(\varphi^{-1}(kh)) S(k, h) \circ \varphi(\varphi^{-1}(jh)) \\ &= \sum_{k=-N}^N x_\alpha^\delta(\varphi^{-1}(kh)) S(k, h)(jh) \\ &= \sum_{k=-N}^N x_\alpha^\delta(\varphi^{-1}(kh)) \delta_{jk}^{(0)} = x_\alpha^\delta(t_j). \end{aligned}$$

En substituant l'expression (3.2.2) dans l'équation (3.2.1), on obtient deux expressions

$$\left((\alpha I + K^* K) \sum_{k=-N}^N x_\alpha^\delta(\varphi^{-1}(kh)) S(k, h) \circ \varphi \right) (s) = (K^* y^\delta)(s), \quad s \in [a, b], \quad (3.2.3)$$

et

$$R_\alpha^{N, \delta}(s) = \left((\alpha I + K^* K) \sum_{k=-N}^N x_\alpha^\delta(\varphi^{-1}(kh)) S(k, h) \circ \varphi(s) \right) - g^\delta(s), \quad s \in [a, b]$$

où $R_\alpha^{N, \delta}(\cdot)$ est la fonction résiduelle.

Pour résoudre l'équation intégrale (3.2.3), on emploie une méthode de collocation standard, comme dans le calcul des intégrales. On fixe donc un ensemble de points de collocations $\{s_i\} \subset [a, b]$, et puis on calcule les valeurs de la fonction recherchée aux points de collocation.

Pour

$$s_i = \varphi^{-1}(ih) = \frac{a + be^{ih}}{1 + e^{ih}}, \quad i \in [-N, N],$$

on a

$$\left((\alpha I + K^* K) \sum_{k=-N}^N x_\alpha^\delta(\varphi^{-1}(kh)) S(k, h) \circ \varphi(t) \right) (s_i) = (K^* y^\delta)(s_i), \quad i \in S_N,$$

et

$$R_\alpha^{N, \delta}(s_i) = 0, \quad i \in S_N.$$

Ainsi, l'équation (3.2.3) prend une nouvelle écriture matricielle :

$$A_N X_N = b_N, \quad (3.2.4)$$

où

$$A_N = \left[\alpha S(k, h) \circ \varphi(s_i) + \int_a^b \int_a^b k(\tau, s_i) k(\tau, t) S(k, h) \circ \varphi(t) dt d\tau \right]_{k=-N}^N,$$

$$X^T = \left[x_\alpha^\delta(\varphi^{-1}(kh)) \right]_{k=-N}^N,$$

et

$$b_N = \left[g^\delta(s_i) \right], \quad i \in S_N.$$

En utilisant la formule de quadrature (3.1.4), on peut évaluer les élément de la matrice A_N comme suit : On a

$$\alpha S(k, h) \circ \varphi(s_i) = \alpha S(k, h) \circ \varphi(\varphi^{-1}(ih)) = \alpha S(k, h)(ih) = \alpha \delta_{ik}^{(0)},$$

et

$$\int_a^b \int_a^b k(\tau, s_i) k(\tau, t) S(k, h) \circ \varphi(t) dt d\tau = \int_a^b k(\tau, s_i) \left[\int_a^b k(\tau, t) S(k, h) \circ \varphi(t) dt \right] d\tau.$$

$$\approx \int_a^b k(\tau, s_i) \left[h \sum_{j=-N}^N \frac{k(\tau, t_j) S(k, h) \circ \varphi(t_j)}{\varphi'(t_j)} \right] d\tau, \quad t_j = \varphi^{-1}(jh) = \frac{a + be^{jh}}{1 + e^{jh}}, \quad j \in [-N, N].$$

De

$$h \sum_{j=-N}^N \frac{k(\tau, t_j) S(k, h) \circ \varphi(t_j)}{\varphi'(t_j)} = h \sum_{j=-N}^N \frac{k(\tau, t_j) \delta_{jk}^{(0)}}{\varphi'(t_j)} = h \frac{k(\tau, t_k)}{\varphi'(t_k)},$$

il vient

$$\int_a^b k(\tau, s_i) h \frac{k(\tau, t_k)}{\varphi'(t_k)} d\tau \approx h^2 \sum_{n=-N}^N \frac{k(\tau_n, s_i)}{\varphi'(\tau_n)} \frac{k(\tau_n, t_k)}{\varphi'(t_k)}, \quad \tau_n = \varphi^{-1}(nh) = \frac{a + be^{nh}}{1 + e^{nh}}, \quad i \in [-N, N].$$

On trouve donc

$$A_N \approx \left[\alpha \delta_{ik}^{(0)} + h^2 \sum_{n=-N}^N \frac{k(\tau_n, s_i)}{\varphi'(\tau_n)} \frac{k(\tau_n, t_k)}{\varphi'(t_k)} \right]_{i,k=-N}^N$$

De même, pour le vecteur b_N , on trouve

$$\begin{aligned} g^\delta(s_i) &= (K^* y^\delta)(s_i) = \int_a^b k(\tau, s_i) y^\delta(\tau) d\tau \\ &\approx h \sum_{n=-N}^N \frac{k(\tau_n, s_i) y^\delta(\tau_n)}{\varphi'(\tau_n)}, \quad i \in [-N, N], \end{aligned}$$

i.e.,

$$b_N \approx \left[h \sum_{n=-N}^N \frac{k(\tau_n, s_i) y^\delta(\tau_n)}{\varphi'(\tau_n)} \right], \quad i \in [-N, N].$$

3.3 Analyse de convergence

Cette partie est consacrée à l'analyse de convergence de la méthode Sinc-collocation, appliquée à notre équation intégrale de première espèce (3.1.1).

Pour établir le résultat de convergence, on commence tout d'abord par le résultat préparatoire suivant :

Proposition 3.3.1. *On suppose que $k(.,.) \in \mathcal{C}([a, b] \times [a, b]; \mathbb{R})$, et soit $\varphi^{-1}(\zeta) = \frac{a + be^\zeta}{1 + e^\zeta}$ telle que $x_\alpha^\delta(\varphi^{-1}(\zeta))$ satisfait les hypothèses (i) et (ii) du théorème 3.1.1, où x_α^δ est la solution de l'équation régularisée (3.2.1). Soit*

$$P_N^{num}(x_\alpha^\delta)(t) = \sum_{k=-N}^N x_\alpha^{num,\delta}(\varphi^{-1}(kh)) S(k, h) \circ \varphi(t),$$

l'approximation de Sinc de x_α^δ , pour un pas de taille h , où les coefficient $x_\alpha^{num,\delta}(\varphi^{-1}(kh))$ sont la solution de l'équation matricielle $A_N X = b_N$. Alors sous ses conditions, on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|x_\alpha^\delta - P_N^{num}(x_\alpha^\delta)\|_\infty \leq \sqrt{N} [c_1 + c_\alpha \|A_N^{-1}\|_\infty N] \exp(-c_2 \sqrt{N}), \quad (3.3.1)$$

où c_1, c_2 et $c_\alpha = c(\alpha)$ sont des constantes positives.

Preuve. Soit

$$x_\alpha^\delta(t) \approx P_N^{num}(x_\alpha^\delta)(t) = \sum_{k=-N}^N x_\alpha^{num,\delta}(\varphi^{-1}(kh)) S(k, h) \circ \varphi(t)$$

où $x_\alpha^{num,\delta}(\varphi^{-1}(kh))$ sont les coefficients de l'approximation de Sinc de la solution régularisée x_α^δ , évalués numériquement en résolvant l'équation matricielle (3.2.4). Notons aussi

$$P_N(x_\alpha^\delta)(t) = \sum_{k=-N}^N x_\alpha^\delta(\varphi^{-1}(kh)) S(k, h) \circ \varphi(t),$$

l'approximation de Sinc de la solution régularisée x_α^δ , où $x_\alpha^{num,\delta}(\varphi^{-1}(kh))$ sont les coefficients de l'approximation en valeurs exactes aux points $\varphi^{-1}(kh)$.

En substituant $P_N^{num}(x_\alpha^\delta)$ (resp. $P_N(x_\alpha^\delta)$) dans l'équation (3.2.1), on peut écrire

$$g^\delta(s) = \left[(\alpha I + K^* K) P_N^{num}(x_\alpha^\delta) \right] (s), \quad s \in [a, b], \quad (3.3.2)$$

$$\hat{g}^\delta(s) = \left[(\alpha I + K^* K) P_N(x_\alpha^\delta)(t) \right] (s), \quad s \in [a, b]. \quad (3.3.3)$$

En donnant à la variable s les valeurs $\{s_i\}_{i=-N}^N$, on convertit les (3.3.2) et (3.3.3) sous forme de systèmes linéaires, à partir desquels, on calcule les coefficients :

$$\left[x_\alpha^{num,\delta}(\varphi^{-1}(kh)) \right]_{k=-N}^N = A_N^{-1} \left[g^\delta(s_i) \right]_{i=-N}^N,$$

$$\left[x_\alpha^\delta(\varphi^{-1}(kh)) \right]_{k=-N}^N = A_N^{-1} \left[\hat{g}^\delta(s_i) \right]_{i=-N}^N.$$

D'où

$$\sup_{k \in S_N} \left| x_\alpha^{num,\delta}(\varphi^{-1}(kh)) - x_\alpha^\delta(\varphi^{-1}(kh)) \right| \leq \|A_N^{-1}\| \sup_{i \in [-N, N]} \left| g^\delta(s_i) - \hat{g}^\delta(s_i) \right| \quad (3.3.4)$$

D'autre part, on a

$$\left[(\alpha I + K^* K) P_N(x_\alpha^\delta) \right] (s) = g^\delta(s) - \left[(\alpha I + K^* K) \left(x_\alpha^\delta(t) - P_N(x_\alpha^\delta) \right) \right] (s),$$

ce qui donne

$$\hat{g}^\delta(s) = g^\delta(s) - \left[(\alpha I + K^* K) \left(x_\alpha^\delta(t) - P_N(x_\alpha^\delta) \right) \right] (s).$$

Puisque la fonction $k(.,.)$ est continue sur $[a, b] \times [a, b]$, soit alors $M = \sup_{a \leq t, s \leq b} |k(t, s)|$. Une estimation directe en utilisant l'inégalité triangulaire donne

$$\sup_{i \in [-N, N]} \left| g^\delta(s_i) - \hat{g}^\delta(s_i) \right| \leq \alpha \left\| x_\alpha^\delta - P_N(x_\alpha^\delta) \right\| + (b-a)^2 \sup_{t, s, \tau \in [0, 1]} |k(\tau, s) k(t, s)| \left\| x_\alpha^\delta - P_N(x_\alpha^\delta) \right\|,$$

ou encore

$$\sup_{i \in [-N, N]} \left| g^\delta(s_i) - \hat{g}^\delta(s_i) \right| \leq (\alpha + (b-a)^2 M^2) \left\| x_\alpha^\delta - P_N(x_\alpha^\delta) \right\|$$

En vertu du théorème 3.1.1, on a

$$\left\| x_\alpha^\delta - P_N(x_\alpha^\delta) \right\| \leq c_1 \sqrt{N} \exp(-c_2 \sqrt{N})$$

et donc

$$\sup_{i \in [-N, N]} \left| g^\delta(s_i) - \hat{g}^\delta(s_i) \right| \leq (\alpha + (b-a)^2 M^2) c_1 \sqrt{N} \exp(-c_2 \sqrt{N}) \quad (3.3.5)$$

Enfin, en substituant l'estimation (3.3.5) dans l'estimation (3.3.4), on obtient

$$\sup_{k \in [-N, N]} \left| x_\alpha^{num,\delta}(\varphi^{-1}(kh)) - x_\alpha^\delta(\varphi^{-1}(kh)) \right| \leq (\alpha + (b-a)^2 M^2) \|A_N^{-1}\| c_1 \sqrt{N} \exp(-c_2 \sqrt{N}).$$

Maintenant, en faisant une estimation uniforme, la quantité $\|P_N(x_\alpha^\delta) - P_N^{num}(x_\alpha^\delta)\|$ peut être estimée comme suit :

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [a,b]} \left| \left(P_N(x_\alpha^\delta) - P_N^{num}(x_\alpha^\delta) \right) (t) \right| &= \sup_{t \in [a,b]} \left| \sum_{k=-N}^N \left[x_\alpha^\delta(\varphi^{-1}(kh)) - x_\alpha^{num,\delta}(\varphi^{-1}(kh)) \right] S(k, h) \circ \varphi(t) \right| \\ &\leq \left\| x_\alpha^{num,\delta}(\varphi^{-1}(kh)) - x_\alpha^\delta(\varphi^{-1}(kh)) \right\| \sup_{t \in [a,b]} \sum_{k=-N}^N |S(k, h) \circ \varphi(t)| \\ &\leq (\alpha + (b-a)^2 M^2) \|A_N^{-1}\| c_1 \sqrt{N} \exp(-c_2 \sqrt{N}) \sup_{t \in [a,b]} \sum_{k=-N}^N |S(k, h) \circ \varphi(t)|, \end{aligned}$$

et de $\sup_{t \in [a,b]} \sum_{k=-N}^N |S(k, h) \circ \varphi(t)| \leq \frac{2}{\pi} \{3 + \log(N)\}$ (cf. Stinger [29], pour N assez grand, on peut remplacer $\frac{2}{\pi} \{3 + \log(N)\}$ par N de façon que

$$\sup_{t \in [a,b]} \left| P_N(x_\alpha^\delta) - P_N^{num}(x_\alpha^\delta) \right| \leq (\alpha + (b-a)^2 M^2) \|A_N^{-1}\| c_1 N^{\frac{3}{2}} \exp(-c_2 \sqrt{N}).$$

De

$$\left\| x_\alpha^\delta - P_N^{num}(x_\alpha^\delta) \right\|_\infty \leq \left\| x_\alpha^\delta - P_N(x_\alpha^\delta) \right\| + \left\| P_N(x_\alpha^\delta) - P_N^{num}(x_\alpha^\delta) \right\|,$$

on a

$$\left\| x_\alpha^\delta - P_N^{num}(x_\alpha^\delta) \right\|_\infty \leq c_1 \sqrt{N} \exp(-c_2 \sqrt{N}) + (\alpha + M^2) \|A_N^{-1}\| c_1 N^{\frac{3}{2}} \exp(-c_2 \sqrt{N})$$

donc

$$\left\| x_\alpha^\delta - P_N^{num}(x_\alpha^\delta) \right\|_\infty \leq \sqrt{N} [c_1 + c_\alpha \|A_N^{-1}\|_\infty N] \exp(-c_2 \sqrt{N}),$$

où $c_\alpha = [\alpha + (b-a)^2 M^2] c_1$. ■

Proposition 3.3.2. Soit K un opérateur linéaire bornée et $\alpha > 0$, alors

$$\left\| (\alpha I + K^* K)^{-1} K^* \right\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

Preuve. Posons $R_\alpha = (\alpha I + K^* K)^{-1} K^*$, alors l'opérateur

$$R_\alpha R_\alpha^* = (\alpha I + K^* K)^{-1} K^* K (\alpha I + K^* K)^{-1} = (\alpha I + K^* K)^{-2} K^* K$$

est un opérateur auto-adjoint positif. D'après la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints, on a

$$\|R_\alpha\|^2 = \|R_\alpha R_\alpha^*\| = \sup \{ \lambda (\lambda + \alpha)^{-2} : \lambda \in \sigma(K^* K) \},$$

et donc

$$\|R_\alpha\| = \sup \left\{ \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + \alpha} : \lambda \in \sigma(K^* K) \right\} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

■

Proposition 3.3.3. Pour tout $\alpha > 0$, $\delta > 0$, on a

$$\|x_\alpha - x_\alpha^\delta\| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}},$$

où x_α (resp. x_α^δ) est la solution régularisée de l'équation 3.1.1 pour les données exactes y (resp. les données bruitées y^δ), avec $\|y - y^\delta\| \leq \delta$.

Preuve. On a

$$\|x_\alpha - x_\alpha^\delta\| = \|(\alpha I + K^* K)^{-1} K^* (y - y^\delta)\| \leq \|(\alpha I + K^* K)^{-1} K^*\| \|y - y^\delta\| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}}.$$

■

Théorème 3.3.1. Soit \hat{x} la solution exacte de l'équation 3.1.1. On suppose que $\hat{x} \in R((K^* K)^\nu)$, pour un certain $\nu \in]0, 1]$. Alors

$$\|\hat{x} - x_\alpha^\delta\| \leq c_0 \max\left\{\alpha^\nu, \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}\right\},$$

où $c_0 > 0$ est une constante positive.

Preuve. On a

$$\hat{x} := (K^* K)^{-1} K^* y, \quad x_\alpha := (\alpha I + K^* K)^{-1} K^* y,$$

ce qui implique

$$(\alpha I + K^* K)\hat{x} = \alpha \hat{x} + K^* y,$$

et donc

$$\hat{x} - x_\alpha = \alpha(\alpha I + K^* K)^{-1} \hat{x}.$$

Comme par hypothèse $\hat{x} \in R((K^* K)^\nu)$, il existe donc $u \in L^2(a, b)$ tel que $\hat{x} = (K^* K)^\nu u$, ce qui nous permet d'écrire

$$\|\hat{x} - x_\alpha\| \leq \alpha \|(\alpha I + K^* K)^{-1} (K^* K)^\nu\| \|u\|. \quad (3.3.6)$$

Or, l'opérateur $K^* K$ est auto-adjoint positif, donc d'après la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints, on a

$$\|(\alpha I + K^* K)^{-1} (K^* K)^\nu\| = \sup\left\{\frac{\lambda^\nu}{\lambda + \alpha} : \lambda \in \sigma(K^* K)\right\}. \quad (3.3.7)$$

On remarque que, pour $\lambda > 0$ et $\nu \in]0, 1]$, on a

$$\frac{\lambda^\nu}{\lambda + \alpha} = \alpha^{\nu-1} \frac{(\frac{\lambda}{\alpha})^\nu}{1 + \frac{\lambda}{\alpha}} \leq \alpha^{\nu-1}, \quad (3.3.8)$$

et de (3.3.6), (3.3.7) et (3.3.8), il résulte

$$\|\hat{x} - x_\alpha\| \leq \|u\| \alpha^\nu \quad (3.3.9)$$

D'après la proposition 3.3.2 et l'inégalité (3.3.9), il découle

$$\|\hat{x} - x_\alpha^\delta\| \leq \|\hat{x} - x_\alpha\| + \|x_\alpha - x_\alpha^\delta\| \leq \|u\| \alpha^\nu + \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}},$$

donc

$$\|\hat{x} - x_\alpha^\delta\| \leq c_0 \max\left\{\alpha^\nu, \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}\right\},$$

où $c_0 = 2 \max\{\|u\|, 1\}$ ■

Remarque 3.3.1. Le théorème 1.4.3 montre qu'on peut choisir α en fonction de δ de façon que

$$\|\hat{x} - x_\alpha^\delta\| \leq \|\hat{x} - x_\alpha\| + \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} \longrightarrow 0, \alpha \longrightarrow 0.$$

Ceci est réalisable, si on choisit $\alpha := \alpha(\delta)$ telle que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} = 0.$$

Théorème 3.3.2. *Sous les conditions de la proposition 3.3.1 et la condition $\hat{x} \in R((K^*K)^\nu)$, pour certain $\nu \in]0, 1]$, alors on a*

$$\|\hat{x} - x_\alpha^{num,\delta}\| \leq c_0 \max\left\{\alpha^\nu, \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}\right\} + \sqrt{N} [2c_1 + c_\alpha \|A_N^{-1}\|_\infty N] \exp(-c_2 \sqrt{N}),$$

où c_0, c_1, c_2 et $c_\alpha = c(\alpha) > 0$ sont des constantes positives.

Preuve. La preuve repose sur la proposition 3.3.1 et le théorème 3.3.1. En effet, on a

$$\|x_\alpha^\delta - x_\alpha^{num,\delta}\| \leq \sqrt{N} [2c_1 + c_\alpha \|A_N^{-1}\|_\infty N] \exp(-c_2 \sqrt{N}),$$

et

$$\|\hat{x} - x_\alpha^\delta\| \leq c_0 \max\left\{\alpha^\nu, \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}\right\},$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \|\hat{x} - x_\alpha^{num,\delta}\| &\leq \|\hat{x} - x_\alpha^\delta\| + \|x_\alpha^\delta - x_\alpha^{num,\delta}\| \\ &\leq c_0 \max\left\{\alpha^\nu, \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}\right\} + \sqrt{N} [2c_1 + c_\alpha \|A_N^{-1}\|_\infty N] \exp(-c_2 \sqrt{N}) \end{aligned}$$

■

Programme MATLAB

```
% PROGRAMME COLLOCATION

clc;clear all;close all;
k=input('k=');          % le noyau k
a=input('a=');          % la borne inférieure de l'intervalle d'intégration
b=input('b=');          % la borne supérieure de l'intervalle d'intégration
y=input('y=');          % la donnée exacte
N=input('N=');          % le nombre de discrétisation
exacte=input('exacte='); % la solution exacte
epsilon=input('epsilon=');% le niveau du bruit
W(1)=(b-a)/(2*(N-1));
W(N)=(b-a)/(2*(N-1));

for i=1:N
    taux(i)=(((i-1)*(b-a))/(N-1))+a;
end
taux
for i=2:N-1
    W(i)=(b-a)/(N-1);
end
W

%calcul la matrice A_N

for j=1:N
for i=1:N
    S0=0;
for n=1:N
```

```

    S2(i,j)=S0+W(j)*W(n)*k(taux(j),taux(n))*k(taux(i),taux(n));
    S0=S2(i,j);
end
end
end
S2

                %calcul y_delta

for i=1:N
    f(i)=y(taux(i));
end
f
ydelta=f+epsilon*randn(size(f));
                %calcul delta
delta=norm(f-ydelta)
                %calcul de alphamax et alphamin et alpha (MOROZOV)

L=0;
E2=1;
while E2 > delta2
    L=L+1;

    B=0.75^L*delta*eye(length(S2))+S2;
    C=inv(B)*ydelta';

for i=1:N
    D0=0;
for j=1:N
    X2(i)=D0+C(j)*W(j)*k(taux(j),taux(i));
    D0=X2(i);

```



```

end
end
X2;
for i=1:N
    D20=0;
    for n=1:N
        D2(i)=D20+W(n)*(k(taux(i),taux(n))*X2(n));
        D20=D2(i);
    end
end
D2;
E2=max(abs(ydelta-D2))
end
L
alphamax=0.75^L*delta2

l=L;
V2=alphamax;
while V2 < delta
    l=l+1;

    B=0.75^l*delta*eye(length(S2))+S2;
    C=inv(B)*ydelta';

for i=1:N
    D0=0;
for j=1:N
    X2(i)=D0+C(j)*W(j)*k(taux(j),taux(i));
    D0=X2(i);

```

```

end
end
X2;
for i=1:N
    D20=0;
    for n=1:N
        D2(i)=D20+W(n)*(k(taux(i),taux(n))*X2(n));
        D20=D2(i);
    end
end
D2;
V2=max(abs(ydelta-D2))
end
l-1
alphamin=0.75^(l-1)*delta2
alpha=(alphamin+alphamax)/2
                                %calcul de la solution approchée par la méthode de collocation

B=alpha*eye(length(S2))+S2;
    C=inv(B)*ydelta';

for i=1:N
    D0=0;
for j=1:N
    X2(i)=D0+C(j)*W(j)*k(taux(j),taux(i));
    D0=X2(i);
end
end
X2;
                                %calcul de la solution exacte

for i=1:N

```

```

    EX(i)=exacte(taux(i));
end
EX;
ERRcollocation=max(abs(X2-EX))
figure(1),
plot(taux,X2,'g'),
hold on
plot(taux,EX,'r'),
figure(2),
plot(taux,abs(X2-EX),'r'),

                                % PROGRAMME SINC

clc;clear all;close all;
k=input('k=');                % le noyau k
a=input('a=');                % la borne inférieure de l'intervalle d'intégration
b=input('b=');                % la borne supérieure de l'intervalle d'intégration
psi=@(T) (b-a)/((T-a)*(b-T));
y=input('y=');                % la donnée exacte
N=input('N=');                %le nombre de discrétisation
exacte=input('exacte=');     % la solution exacte
epsilon=input('epsilon=');   % le niveau du bruit
h=pi/(N^0.5);

                                %les points de collocation
for i=-N:N
    t(i+N+1)=(a+b*exp(i*h))/(1+exp(i*h));
end
t

                                %calcul de la matrice S
for i=1:2*N+1
    R(i)=psi(t(i));

```

```

end
R
for j=1:2*N+1
for i=1:2*N+1
    s0=0;
for n=1:2*N+1
    s(i,j)=s0+(k(t(n),t(i))/R(n))*(k(t(n),t(j))/R(j));
    s0=s(i,j);
end
end
end
s
                                %calcul de ydelta

for i=1:2*N+1
    H(i)=y(t(i));
end
H
ydelta=H+epsilon*randn(size(H))
                                %calcul de delta
delta=norm(H-ydelta)

                                %calcule le vecteur Bn

for i=1:2*N+1
    b0=0;
for n=1:2*N+1
    b(i)=b0+(k(t(n),t(i))*ydelta(n))/R(n);
    b0=b(i);
end
end
b

```

```
B=h*b'
```

```
%calcul de alphamin et alphamax et alpha (MOROZOV)
```

```
e=0;
```

```
E=1;
```

```
while E > delta
```

```
    e=e+1;
```

```
A=0.7^e*(delta*10)*eye(length(s))+h^2*s ;
```

```
X=inv(A)*B ;
```

```
    for i=1:2*N+1
```

```
        D0=0;
```

```
        for n=1:2*N+1
```

```
            D(i)=D0+(k(t(i),t(n))*X(n))/R(n);
```

```
            D0=D(i);
```

```
        end
```

```
    end
```

```
F=h*D;
```

```
E=max(abs(ydelta-F))
```

```
end
```

```
e;
```

```
alphamax=0.7^e*(delta*10)
```

```
K=e;
```

```
V=alphamax;
```

```
while V < delta
```

```
    K=K+1;
```

```

A=0.7^K*(delta*10)*eye(length(s))+h^2*s ;
X=inv(A)*B ;

for i=1:2*N+1
    D0=0;
for n=1:2*N+1
    D(i)=D0+(k(t(i),t(n))*X(n))/R(n);
    D0=D(i);
end
end
F=h*D;
V=max(abs(ydelta-F))
end
K-1;
alphamin=0.7^(K-1)*alphamax
alpha=(alphamax+alphamin)/2

                                %calcul de la solution approchée par la méthode de Sinc

A=alpha*eye(length(s))+h^2*s ;
X=inv(A)*B

                                %la solution exacte

for i=1:2*N+1
    EX(i)=exacte(t(i));
end
EX
Z=max(abs(X-EX'))

                                %les figures

figure(1),
plot(t,X,'g'),

```

```
hold on  
plot(t,EX', 'r'),  
figure(2),  
plot(t,abs(X-EX'), 'g'),
```


Tests numériques

On considère les deux exemples suivants :

Exemple1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [4s + 1] \sin(3s^3 + 2t - 1)x(t)dt = \frac{\pi}{4} [4s + 1] \sin(3s^3),$$

où la solution exacte est $x(t) = \cos(2t - 1)$.

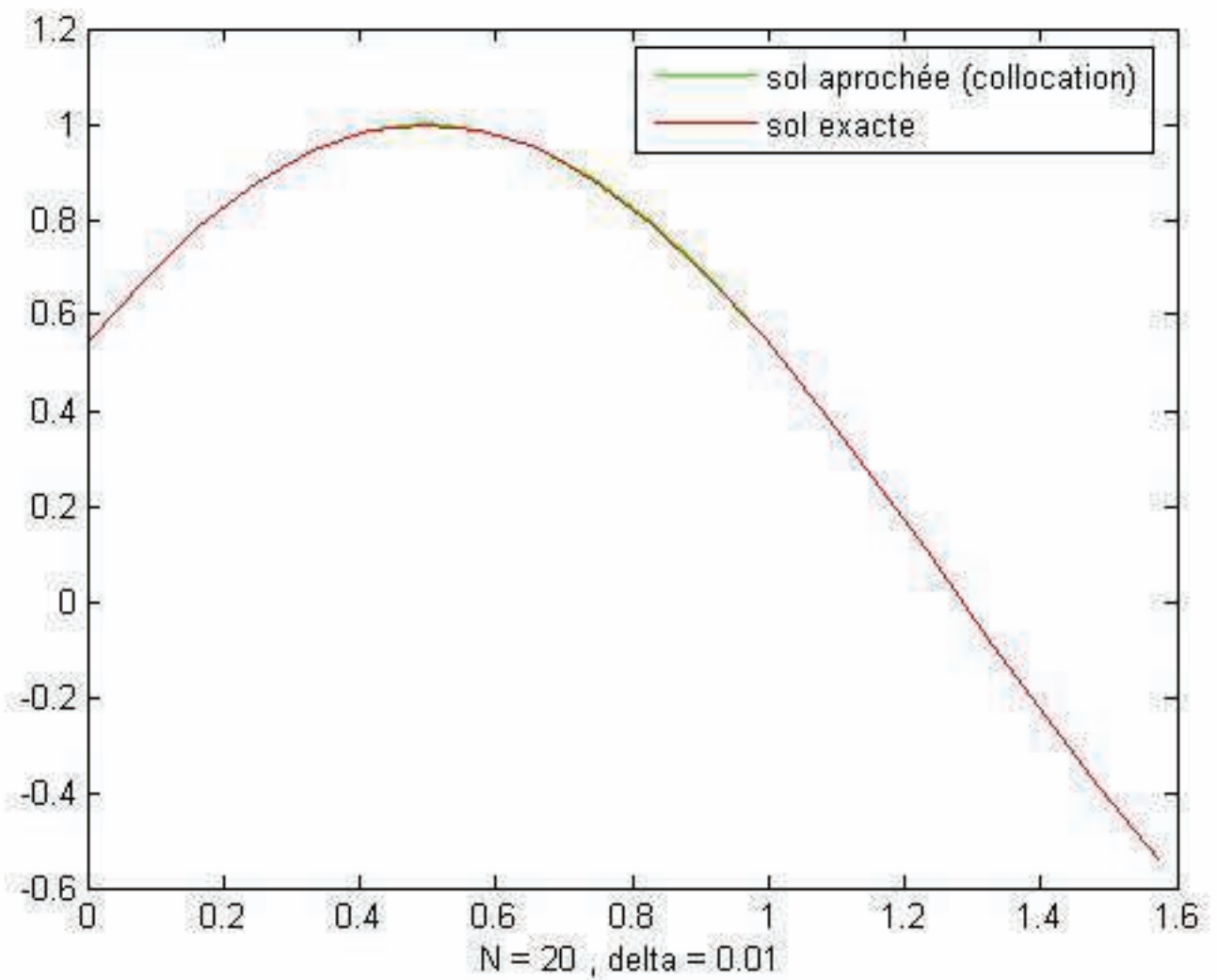
Exemple2

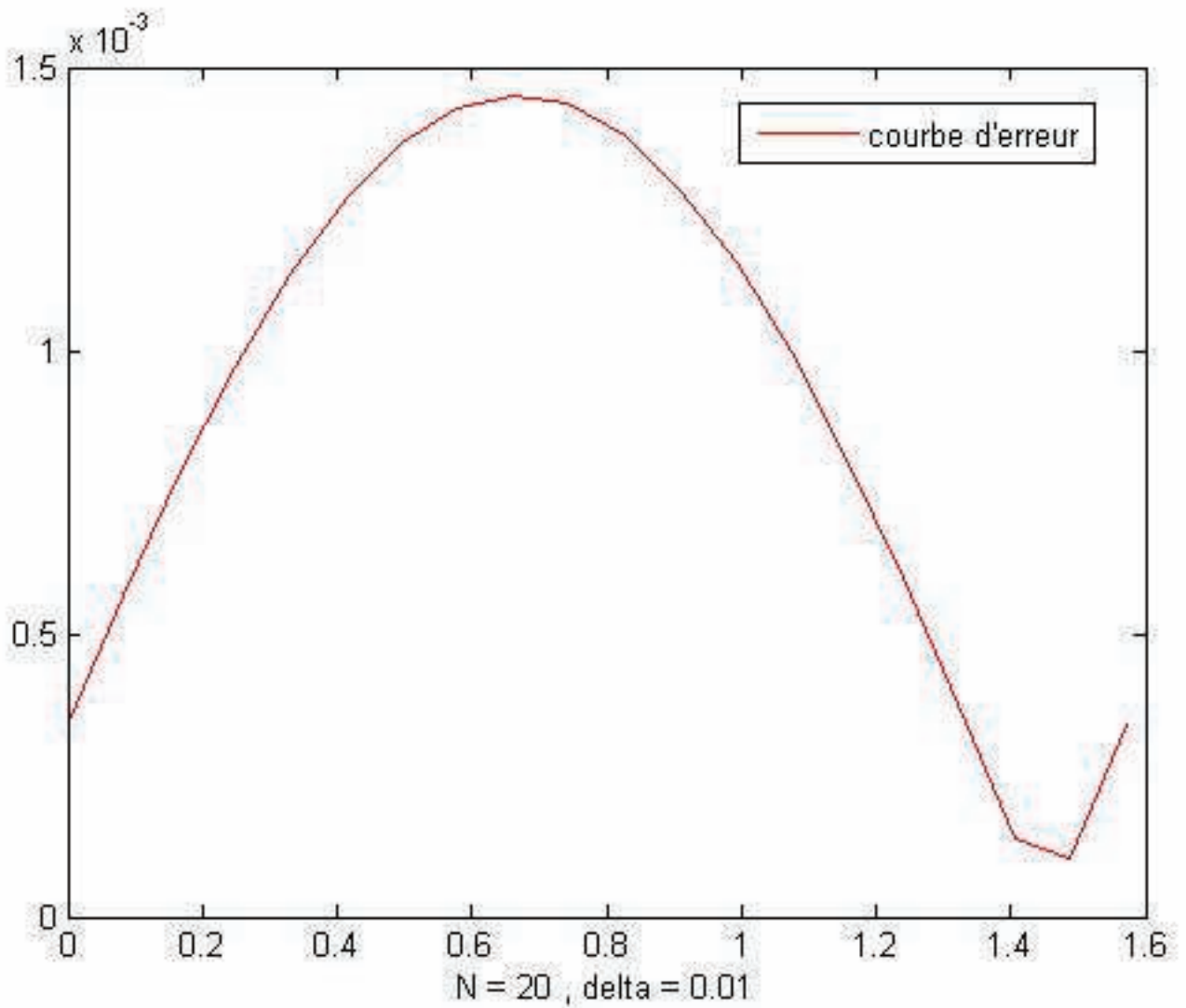
$$\int_0^1 (s - 1)e^{s^2+t-1}x(t)dt = -\frac{1}{2}(e^{-2} - 1)(s - 1)e^{s^2},$$

où la solution exacte est $x(t) = e^{t-1}$.

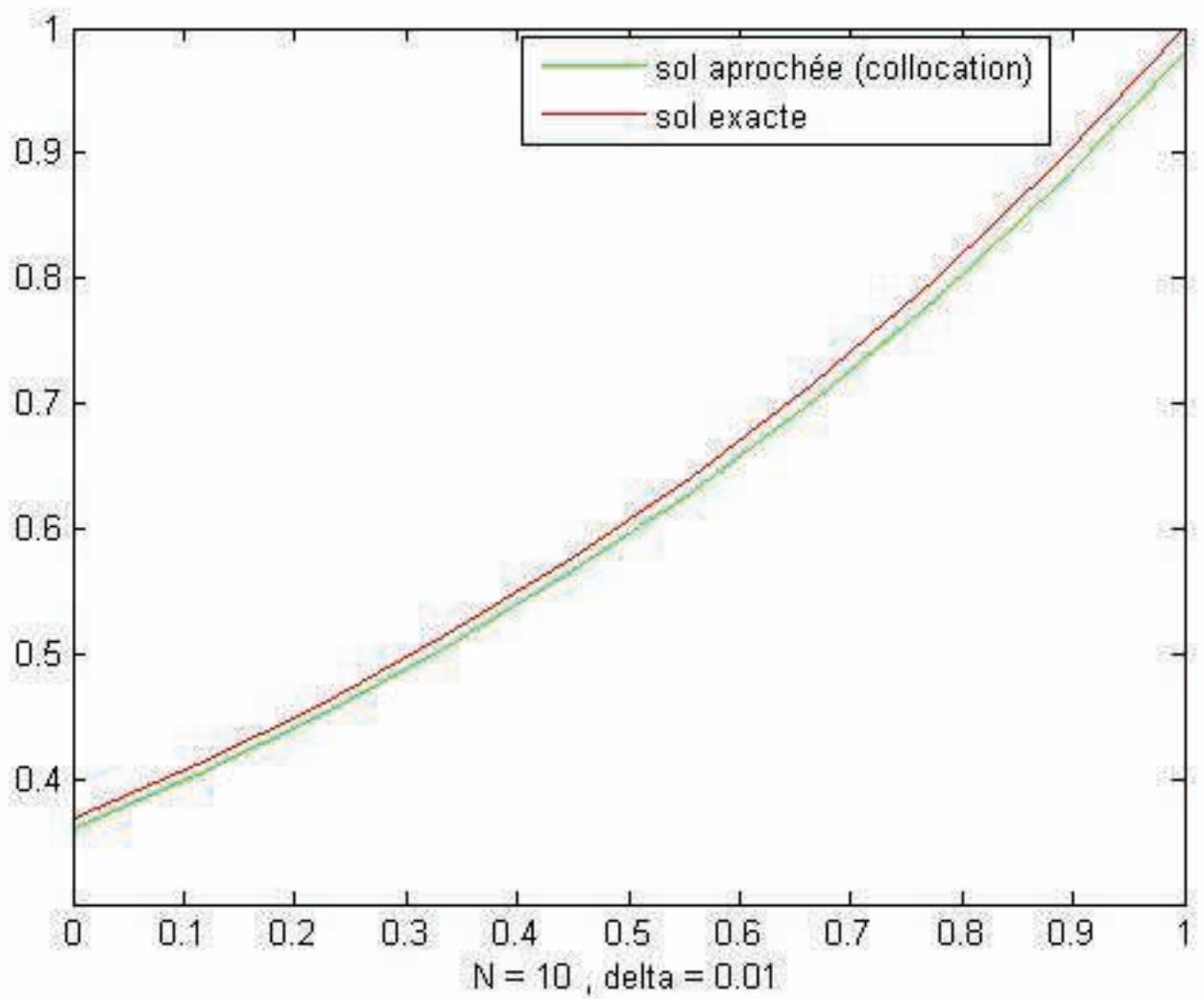
B.1 Méthode de Collocation

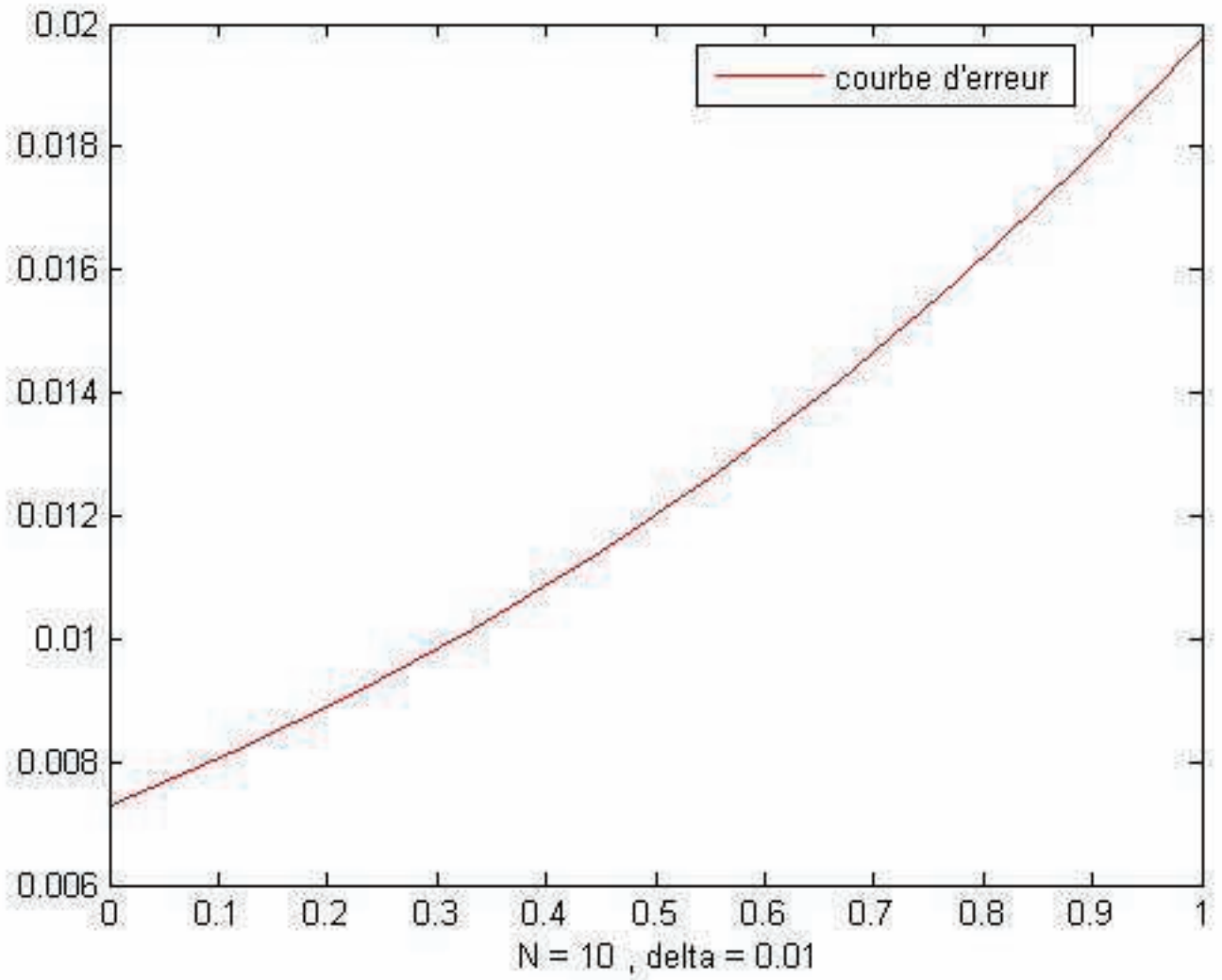
Exemple1



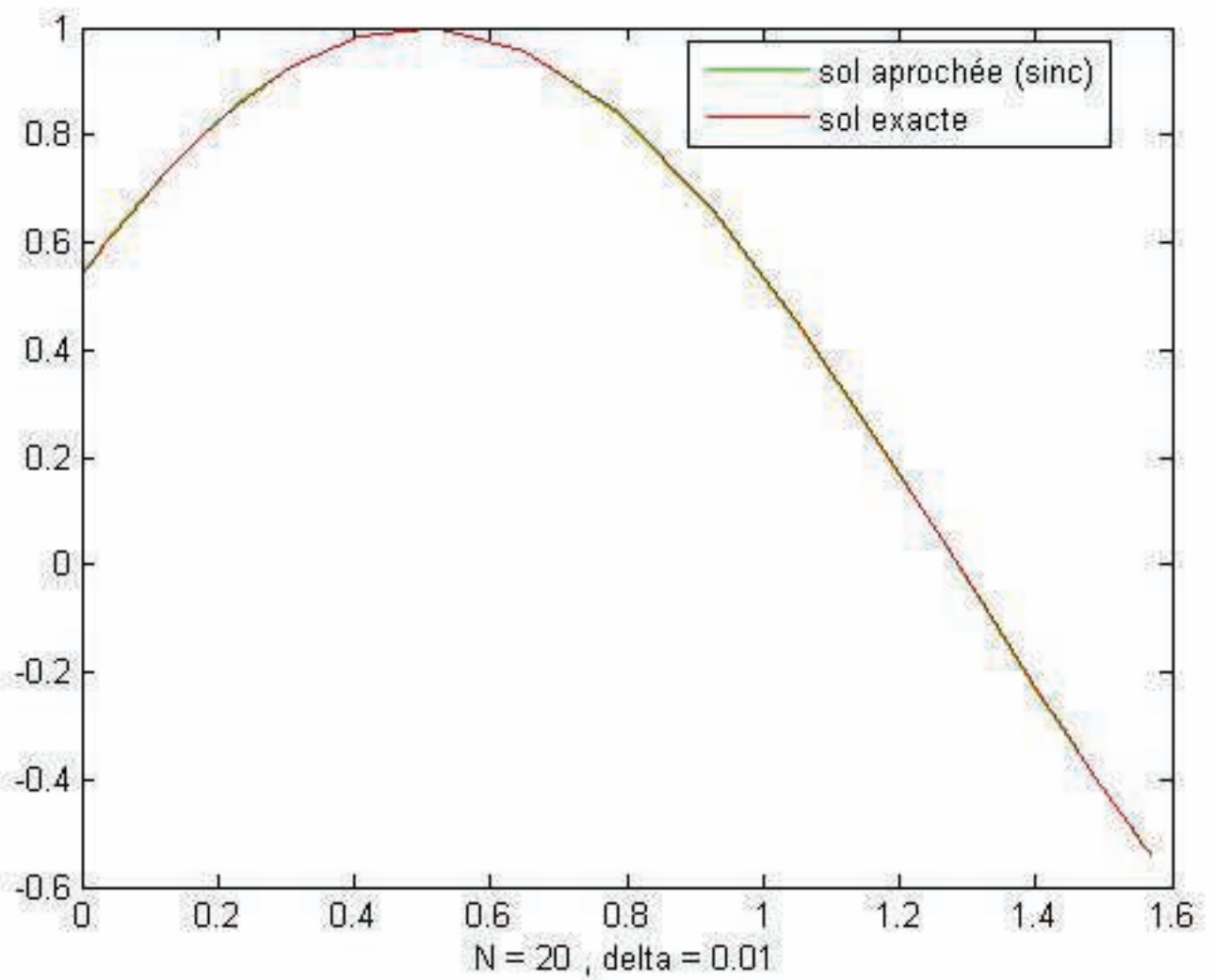


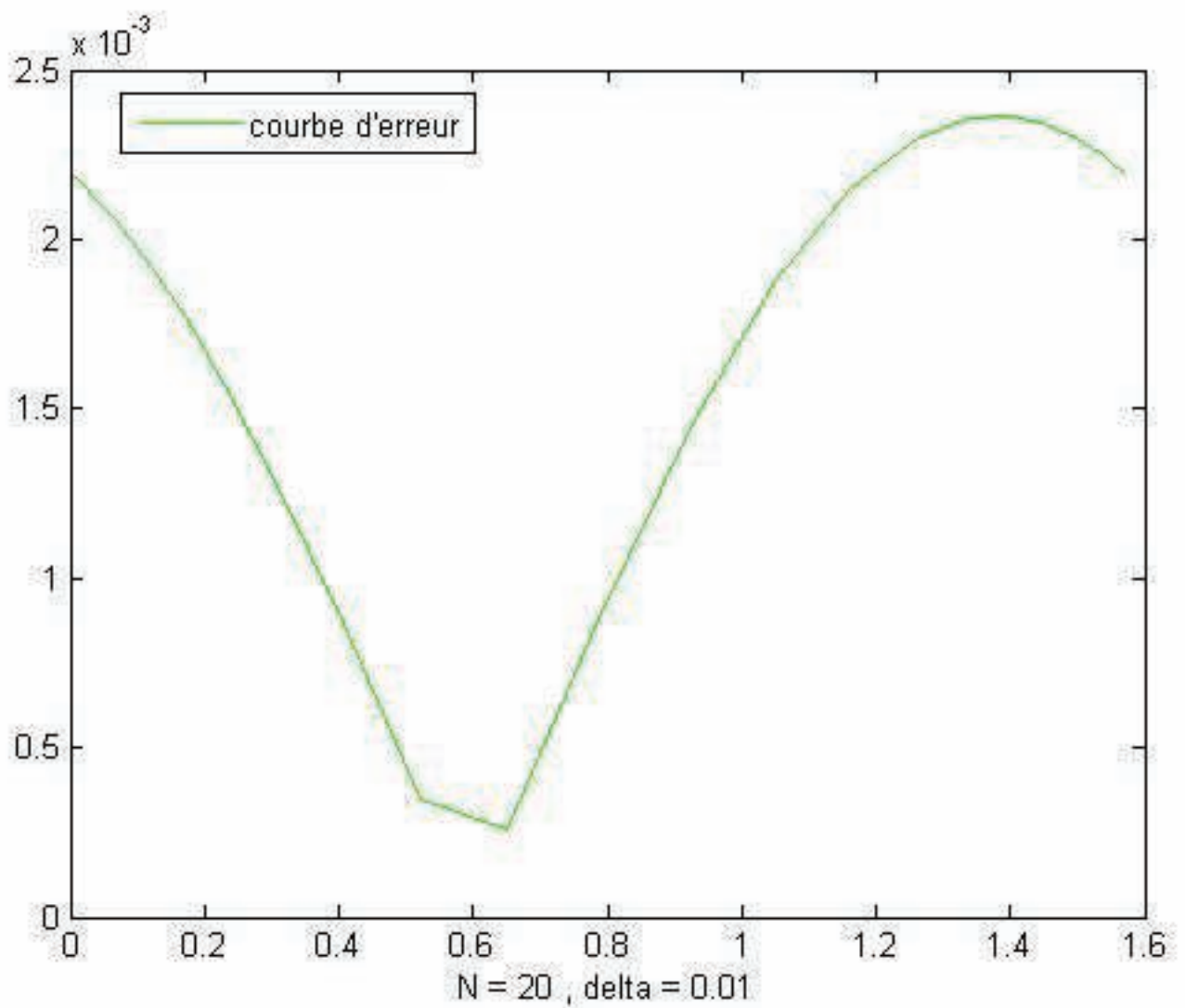
Exemple2



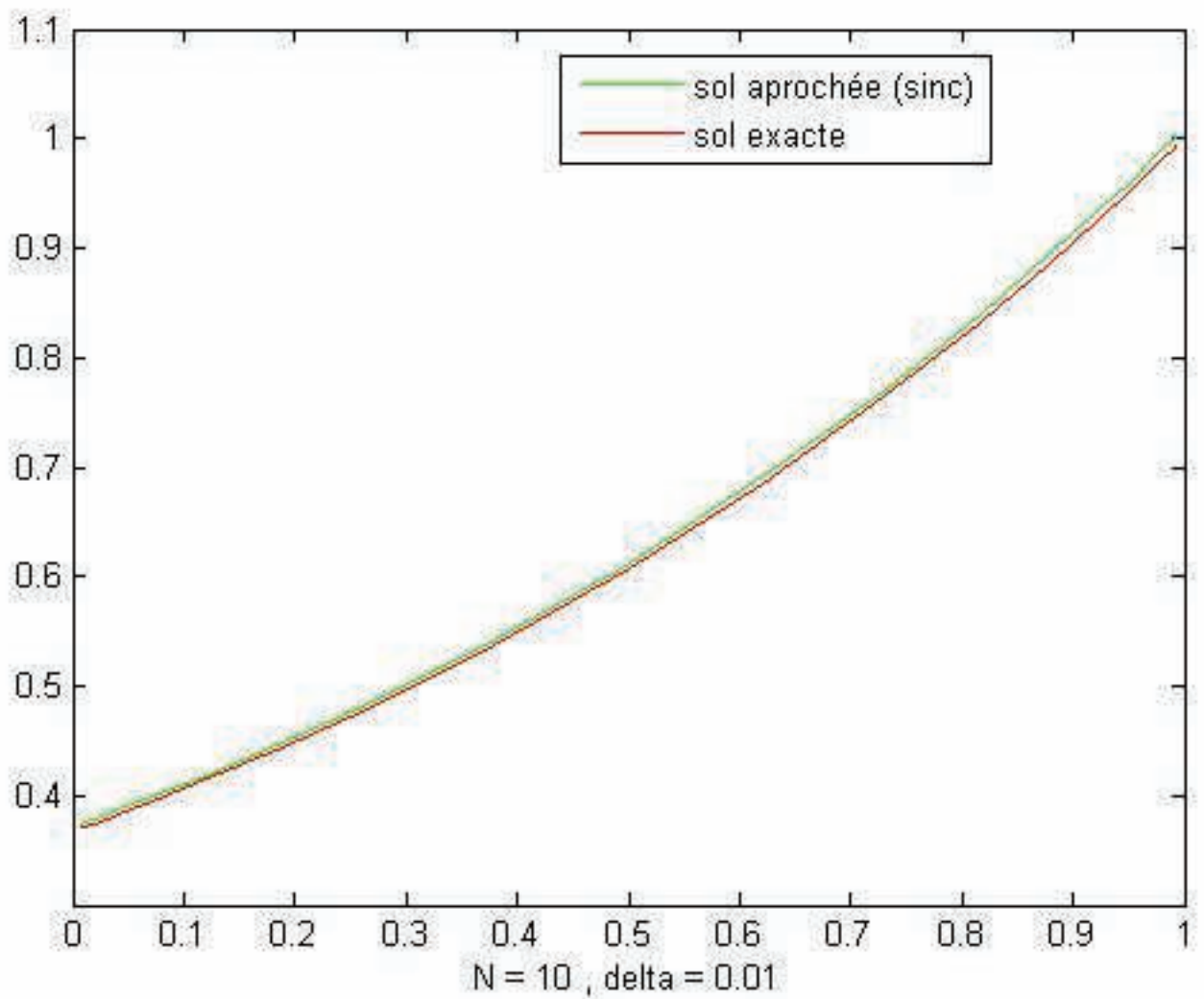


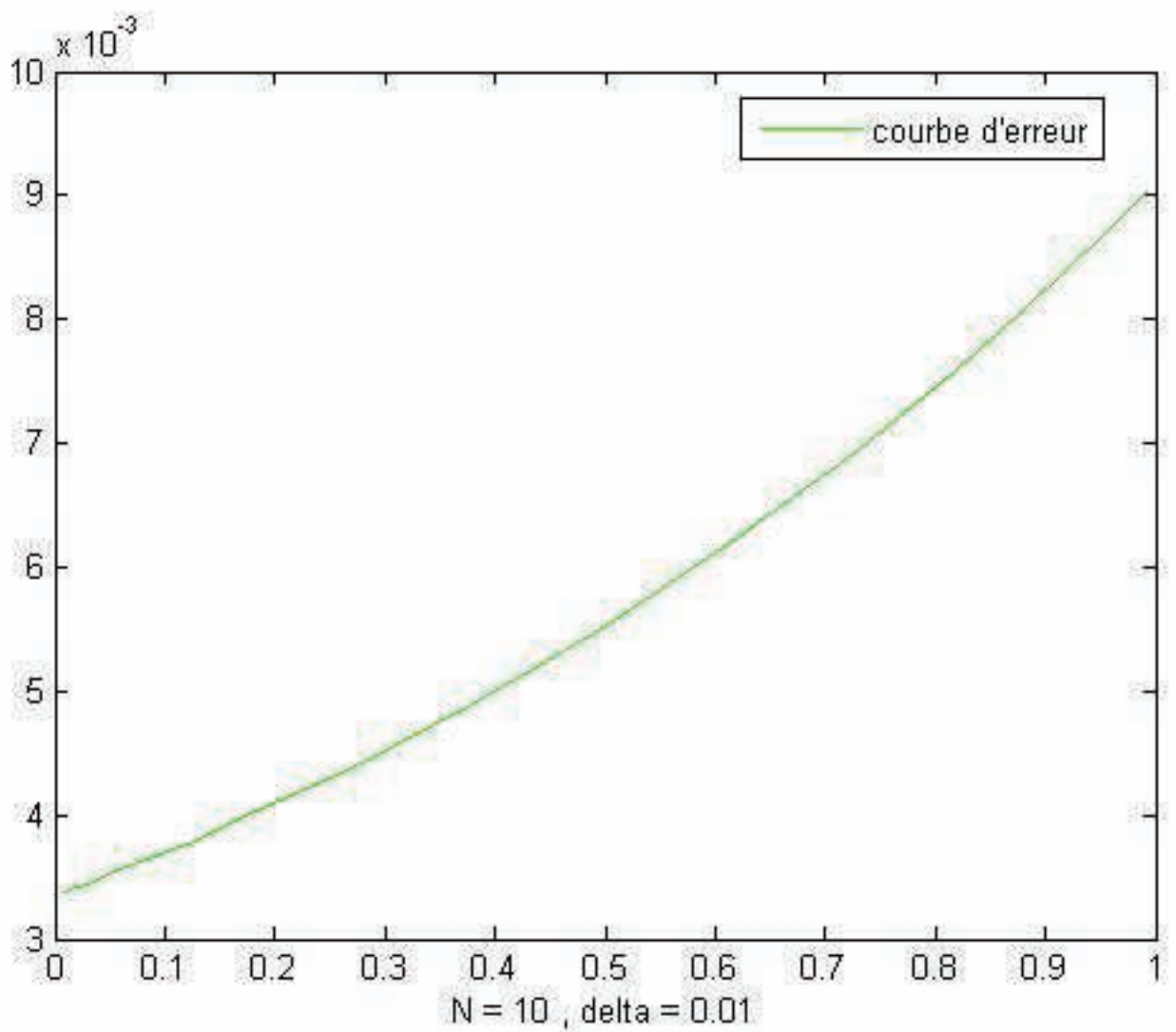
B.2 Méthode de Sinc





Exemple2





Commentaire. On remarque d'après l'expérimentation numérique que la méthode de Sinc est meilleure par rapport à la méthode de collocation standard.

RÉFÉRENCES

- [1] K.E. Atkinson, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge University Press (1997).
- [2] H. Ben Aouicha, *Computation of the spectra of some integral operators and application to the numerical solution of some linear integral equations*, *Applied Mathematics and Computation* **218** (2011), 3217-3229.
- [3] A. Ben-Israel and N.E. Greville Thomas ; **Generalized inverses**, Springer-Verlag (2003).
- [4] E. Babolian, T. Lotfi, M. Paripour, *Wavelet moment method for solving Fredholm integral equations of the first kind*, *Applied Mathematics and Computation* **186** (2007) 1467-1471.
- [5] Z. Chen, Y. Xu, and H. Yang, *Fast collocation methods for solving ill-posed integral equations of the first kind*, *Inverse Problems* 24 (2008) 065007 (21pp).
- [6] V. I. Dmitriev and Zh. Ingtem, *Solving an Integral Equation of the First Kind by Spline Approximation*, *Computational Mathematics and Modeling*, Vol. **15**, No. 2, (2004), 99-104.
- [7] C. W. Groetsch ; *STABLE APPROXIMATE EVALUATION OF UNBOUNDED OPERATORS*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2007).
- [8] H.W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1996).
- [9] C.W. Groetsch, *Tikhonov regularization for integral equations of the first kind*, Pitman (1984).
- [10] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag, New York (1989).
- [11] S.H. Kulkarni and M. T. Nair, *A characterization of closed range operators*, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **31**(4) (2000), 353-361.
- [12] S.H. Kulkarni, M.T. Nair and G. Ramesh, *Some properties of unbounded operators with closed range*, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* Vol. **118**, No. 4, (2008), 613-625.
- [13] J. Lund, K.L. Bowers, *Sinc Method for Quadrature and Differential equations*, SIAM (1992).
- [14] M.A. Lukas, *Comparisons of parameter choice methods for regularization with discrete noisy data*, *Inverse Problems* **14** (1) (1998), 161-184.

- [15] Y. Lingyun, Numerical Quadrature : Theory and Computation, Master.C.Sc, Dalhousie University (2006).
- [16] S. Lin, F. Cao and Z. Xu, *A convergence rate for approximate solutions of Fredholm integral equations of the first kind*, Positivity (2011), DOI 10.1007/s11117-011-0137-5.
- [17] M. Mori, *Discovery of the Double Exponential Transformation and Its Developments*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **41** (2005), 897-935.
- [18] K. Maleknejad, S. Sohrabi, Numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by using Legendre wavelets, Appl. Math. Comput. (2006), doi :10.1016/j.amc.2006.08.023.
- [19] K. Maleknejad, R. Mollapourasl, P. Torabi and M. Alizadeh, *Solution of First kind Fredholm Integral Equation by Sinc Function*, World Academy of Science, Engineering and Technology, (2010), **66**, 884-888.
- [20] K. Maleknejad, R. Mollapourasl and M. Alizadeh, *Convergence analysis for numerical solution of Fredholm integral equation by Sinc approximation*, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat **16** (2011), 2478-2485.
- [21] M.T. Nair, S. Pereverzev, *Regularized collocation method for Fredholm integral equations of the first kind*, J. Complex., (2007) **23**(4-6), 454-467.
- [22] M.T. Nair; LINEAR OPERATOR EQUATIONS : APPROXIMATION AND REGULARIZATION, World Scientific (2009).
- [23] M.T. Nair, *Quadrature based collocation methods for integral equations of the first kind*, Adv Comput Math (2012) 36 :315-329.
- [24] P. Mathé, S.V. Pereverzev, *Moduli of continuity for operator valued functions*, Numer. Funct. Anal. Optim. **23** (5-6) (2002), 623-631.
- [25] P. Mathé, S.V. Pereverzev, *Geometry of linear ill-posed problems in variable Hilbert scales*, Inverse Problems **19** (3) (2003), 789-803.
- [26] P. Mathé, S.V. Pereverzev, *Discretization strategy for linear ill-posed problems in variable Hilbert scales*, Inverse Problems **19** (6) (2003), 1263-1277.
- [27] P. Mathé, S.V. Pereverzev, *Regularization of some linear inverse problems with discretized random noisy data*, Math. Comput. **75** (2006), 1913-1929.
- [28] S.V. Pereverzev, E. Schock, *On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems*, SIAM J. Numer. Anal. **43** (2005), 2060-2076.

-
- [29] E. Stenger, *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions*, Springer, New York, 1993.
- [30] E. Stenger, *Handbook of Sinc Numerical Methods*, CRC Press/ Taylor & Francis Group (2011).
- [31] E. Stenger, *Matrices of Sinc methods*, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **86** (1997), 297-310.
- [32] X. Shang, D. Han, *Numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by using linear Legendre multi-wavelets*, *Applied Mathematics and Computation* **191**, (2007) 440-444.
- [33] A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin ; **Solutions to ill-posed problems**, Winston-Wiley, New York (1977).
- [34] G.M. Vainikko, A.Y. Veretennikov, *Iteration procedures in Ill-posed problems* (in Russian), Nauka, Moscow (1986).