République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP et Analyse numérique**

Par :

Boukhedenna Ibtissam

Intitulé

Analyse Numérique par Eléments Finis du Problème variationnel de friction

Dirigé par : Mehri Allaoua

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr:** Tabouche Noura	**MCB Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr:** Mehri Allaoua	**MCB Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr:** Fernane Khairddine	**MCA Univ-Guelma**

Session Juin 2018

Dédication

Je dédie ce travail :

Pour mes chers parents.

Merci beaucoup pour chaque minute offret pour m'aider, m'encouragée , merci pour votre sacrifices, vous êtes la source de mon succès. Vous êtes ma vie.

À mes chers frères et les plus proche à mon cœur :
Issam, Hamza, Faras, Aymen.

A mon cher mari qui m'a encouragé tout le temps :
Abde el Rahim.

Aux chers femmes de mes frères : Imen, Farida.

Pour mes oncles et mes tantes.

A tous mes chers amis.

A tous mes chers professeurs.

Pour toute ma famille aimable.

À tous ceux qui m'aidé dans ce mémoire.

Remerciement

Premièrement je remercie le bonne Dieu qui ma donné la force, le courage, et l'espoir nécessaire Pour arriver a ce modeste travail et surmonter tout les obstacles rencontrées.

je remercie particulièrement mon encadreur Dr.Mehri Allaoua qui m'a proposé le sujet et me diriger honnêtement pour donner un travail mieux possible Je le remercie beaucoup pour ses efforts, sa patience, son aide, ses encouragements et son soutien continu sans le quelle ce travail n'aurait pas pu être mené.

Je remercie aussi messieurs Tabouche Noura et Fernane Khairddine d'avoir été membre du jury et d'avoir examiné ce travail.

Enfin, merci beaucoup à tous ceux qui m'aide et à me encouragée dans ce mémoire.

Merci.

Table des matières

Résumé

Ce mémoire est une analyse numérique du problème variationnel de friction simplifié. Nous avons prouvé l'existence, l'unicité, la régularité de la solution puis nous avons approximé le problème par la méthode des éléments finis de degré un. L'objectif principal de ce travail est d'étudier la convergence de la solution exacte vers la solution approchée en combinant un lemme de densité. En conclusion une estimation d'erreur de la solution d'ordre O(h) est obtenue.

Introduction

Dans les soixante dernières années, les inéquations variationnelles sont devenues un outil redoutable dans l'étude mathématique de nombreux problèmes non linéaires en physique et en mécanique, la compléxité des conditions aux limites et la diversité des équations constitutives conduisant aux formulations variationnelles de type inéquations [7,8,9].

Un problème d'inéquation variationnelle englobe en les généralisant un certain nombre de problèmes classiques tels que la recherche d'un zéro d'une fonction, la recherche d'un point stationnaire d'un problème d'optimisation, le problème de complémentarité linéaire, etc [13,14,18]. Les inéquations variationnelles permettent souvent par une résolution approchée de proposer une modélisation des courants océaniques et des mouvements des masses d'air de l'atmosphère pour les météorologistes, la simulation numérique du comportement des gratte-ciel ou des ponts sous l'action du vent pour les architectes et ingénieurs et des plusieurs problèmes non linéaires en physique et en mécanique [6,10,11].

En 1972, Duvaut et Lions [4] ont écrit un livre modélisant des phénomènes importants de la physique et de l'ingénierie en termes d'inéquations variationnelles qui sont devenues la principale source de future recherche appliquée dans ce domaine.

En 1933, A. Signorini [17] a formulé un problème de contact sans frottement entre un corps linéairement élastique et une fondation rigide. Ce n'est qu'en 1964, que G. Fichera [5] a pu résoudre ce problème en utilisant quelques propriétés des inéquations variationnelles elliptique. L'étude mathématique des problèmes de contact a commencé en 1972, avec l'ouvrage de Duvaut et Lions, où on trouve des résultats d'existence et d'unicité de plusieurs problèmes de contact, mais dans le cas linéaire.

Stampacchia [9,18] a présenté une théorie des inéquations variationnelles impliquant une forme bilinéaire non symétrique et a publié le document pionnier conjointement avec Lions en 1967.

Dans [12,16] les auteurs ont établi une analyse numérique par éléments finis d' une inéquation variationnelle appelé problème d'obstacle et une analyse du problème variationnel de la torsion elasto-plastique.

Nous présentons dans ce mémoire un problème souvent rencontré dans la théorie de l'élasticité avec frottement (voir Signorini [17], Fichera [5]), dans lequel nous considérons le déplacement d'un corps solide avec frottement sur sa frontière ou une partie de sa frontière.

Ce mémoire est divisé en deux chapitres. On commence notre travail par des généralités sur l'inéquation variationnelle elliptique, dans la deuxième section du premier chapitre nous définissons le problème continu et nous démontrons un théorème d'existence et d'unicité de la solution. Dans la troixième section nous présentons une approximation de l'inéquation variationnelle elliptique et un théorème de convergence.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du problème variationnel de friction, par analogie du chapitre un nous commençons par une définition du problème et nous donnons une propriété de régularité de la solution. Dans la troisième et quatrième sections nous introduisons un résultat de dualité puis nous prouvons la propriété de Lipschitzianité de la solution. Les sections cinq, six et sept sont consacrées à l'approximation par éléments finis du problème où nous démontrons un théorème de convergence et nous établissons une estimation d'erreur basée sur les estimations standards de Ciarlet [3], en précisant l'ordre de convergence optimal O(h). Finalement nous terminons ce travail par une preuve du point selle d'un multiplicateur de Lagrange pour le problème continue et un algorithme de type Uzawa où nous proposons une solution itérative du problème continu et discret.

Chapitre 1

Généralités sur l'inéquation variationnelle elliptique (I.V.E) et son approximation

1.1 Introduction et contexte fonctionnel

1.1.1 Notations et hypothèses

Soient :

Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière $\Gamma = \partial\Omega$ suffisamment régulière.

V un espace de Hilbert réel, avec un produit scalaire $(.,.)$ et une norme associée $\|.\|$.

V^* le dual de V.

$a(.,.) : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et V-elliptique (coercive) sur $V \times V$, i.e

$$\exists\ M > 0 \quad \text{tel que} \quad a(u,v) \leq M\ \|u\|\|v\|, \qquad \forall u, v \in V.$$

$$\exists\ \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2, \qquad \forall u \in V.$$

$L : V \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle linéaire continue.

K un sous-ensemble convexe fermé non vide de V.

$j(.) : V \to \overline{R} = R \cup \pm\infty$ une fonctionnelle convexe semi continue inférieurement (s.c.i) et propre, i.e (vérifiant $j(v) > -\infty, \forall v \in V,\ j \neq +\infty$).

1.1.2 IVE du premier genre

$$\begin{cases} \textit{trouver} \quad u \in K \quad \textit{solution du problème} \\ \quad a(u, v-u) \geq L(v-u)\ , \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{P1}$$

1.1.3 IVE du second genre

$$\begin{cases} \quad \textit{trouver} \quad u \in V \quad \textit{solution du problème} \\ a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq L(v-u)\ , \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{P2}$$

Remarque 1.1. *Si* $K = V$ *et* $j \equiv 0$, *les problèmes* $(P1)$ *et* $(P2)$ *se réduisent à une équation variationnelle classique*

$$\begin{cases} \textit{trouver} \quad u \in K \quad \textit{tel que} \\ a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in K \end{cases}$$

Remarque 1.2. $(P1)$ *est un cas particulier de* $(P2)$. *Il suffit de poser* $j(v) = I_K(v)$ *où* I_K *est une fonctionnelle sur* K *définie par*

$$I_K(v) = \begin{cases} 0 \quad si \ \ v \in K \\ +\infty \quad si \ \ v \notin K \end{cases}$$

1.2 Résultats d'existence et d'unicité de l'IVE du second genre

Théorème 1.1. [7] *Soit* $a(.,.)$ *une forme bilinéaire continue V-elliptique,* $L(.)$ *une forme linéaire continue,* $j : V \to \overline{R}$ *une fonctionnelle convexe semie continue inférieurement (s.c.i) et propre, i.e vérifiant* $j(v) > -\infty$, $\forall v \in V$, $j \neq \infty$. *alors le problème* $(P2)$ *a une unique solution.*

Démonstration. 1) **Unicité :**

Soient u_1 et u_2 deux solutions de $(P2)$, alors

$$a(u_1, v - u_1) + j(v) - j(u_1) \geq L(v - u_1) , \qquad \forall v \in V, \quad u_1 \in V, \tag{1.1}$$

$$a(u_2, v - u_2) + j(v) - j(u_2) \geq L(v - u_2), \qquad \forall v \in V, \quad u_2 \in V, \tag{1.2}$$

comme $j(.)$ est une fonctionnelle propre, il existe alors $v_0 \in V$ tel que

$$-\infty < j(v_0) < +\infty.$$

Ainsi on a pour $i = 1, 2$

$$-\infty < j(u_i) \leq j(v_0) - L(v_0 - u_i) + a(u_i, v_0 - u_i) < +\infty.$$

Cela montre que $j(u_i)$ est finie pour $i = 1, 2$.

Posons $v = u_2$ dans (1.1) et $v = u_1$ dans (1.2) et en additionnant les deux inéquations, nous obtenons

$$\alpha||u_1 - u_2||^2 \leq a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0.$$

D'où

$$u_1 = u_2.$$

2) Existence :

Considérons le cas ou $a(.,.)$ est symétrique, alors le problème $(P2)$ est équivalent à un problème de minimisation

$$\begin{cases} trouver \quad u \in V \quad tel\ que \\ E(u) \leq E(v), \quad \forall\, v \in V \end{cases} \tag{P3}$$

avec

$$E(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - j(v) - L(v), \tag{1.3}$$

comme $j(.)$ est propre, convexe, s.c.i, donc elle est bornée inférieurement par une fonctionnelle affine.

$$j(v) \geq L_j(v) + c_0\ , \qquad \forall v \in V. \tag{1.4}$$

Où L_j est une forme linéaire continue sur V et $c_0 \in R$ (voir l'ouvrage de Atkinson-Theoretical Numerical Analysis, page 326). ainsi d'aprés les hypothèses sur $a(.,.)$, $j(.)$ et $L(.)$, on voit que $E(.)$ est propre, strictement convexe, s.c.i, Gâteaux différentiable et vérifie la propriété

$$E(v) \to \infty \quad quand \quad ||v|| \to \infty.$$

Donc le problème $(P3)$ possède une solution unique, ainsi le problème $(P2)$ possède une solution .

Considérons ensuite le cas général sans l'hypothèse de symétrie.

L'idée est de transformer le problème variationnel à un problème de point fixe .Pour $\theta > 0$ le problème $(P2)$ est équivalent à

$$u \in V \qquad (u, v-u) + \theta j(v) - \theta j(u) \geq (u, v-u) - \theta a(u, v-u) + \theta L(v-u), \qquad \forall v \in V.$$

Pour $u \in V$ considérez le problème

$$\begin{cases} trouver \quad w \in V \quad tel\ que \\ (w, v-w) + \theta j(v) - \theta j(w) \geq (u, v-w) - \theta a(u, v-w) + \theta L(v-w), \quad \forall v \in V\ ,\ w \in V \end{cases} \tag{1.5}$$

Le problème (1.5) a une unique solution pour tout $u \in V$, $\theta > 0$, (voir l'ouvrage de Glowinsky page 67).

Pour $\theta > 0$ définissons l'application $P_\theta : V \to V$ par $P_\theta u = w$ où w est unique solution de (1.5).

montrons maintenant que P_θ est une contraction pour θ convenablement choisi : pour tout $u_1, u_2 \in V$ soit $w_1 = P_\theta u_1$ et $w_2 = P_\theta u_2$, alors on a

$$(w_1, w_2 - w_1) + \theta j(w_2) - \theta j(w_1) \geq (u_1, w_2 - w_1) - \theta a(u_1, w_2 - w_1) + \theta L(w_2 - w_1),$$

$$(w_2, w_1 - w_2) + \theta j(w_1) - \theta j(w_2) \geq (u_2, w_1 - w_2) - \theta a(u_2, w_1 - w_2) + \theta L(w_1 - w_2),$$

additionnant les deux inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} ||w_1 - w_2||^2 &= (w_1 - w_2, w_1 - w_2) \leq (u_1 - u_2, w_1 - w_2) - \theta a(u_1 - u_2, w_1 - w_2) \\ &\leq (u_1 - u_2, w_1 - w_2) - \theta(A(u_1 - u_2), w_1 - w_2) \\ &\leq ((I - \theta A)(u_1 - u_2), w_1 - w_2). \end{aligned}$$

Où l'opérateur A est défini par la relation $a(u, v) = (Au, v)$ pour tout $u, v \in V$, alors

$$||w_1 - w_2|| \leq ||(I - \theta A)(u_1 - u_2)||.$$

Maintenant pour tout $u \in V$, on a

$$\begin{aligned} ||(I - \theta A)u||^2 &= ||u - \theta Au||^2 = ||u||^2 - 2\theta(Au, u) + \theta^2||Au||^2 \\ &= ||u||^2 - 2\theta a(u, u) + \theta^2||Au||^2 \leq (1 - 2\theta\alpha + \theta^2 M^2)||u||^2, \end{aligned}$$

avec M et α sont les constantes de continuité et V-ellipticité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ par conséquent, en choisissent θ tel que $1 - 2\theta\alpha + \theta^2 M^2 < 1$ l'application P_θ est une contraction sur l'espace de Hilbert V, donc P_θ a un unique point fixe $u \in V$ tel que

$$P_\theta u = u.$$

Cela implique

$$(u, v-u) + \theta j(v) - \theta j(u) \geq (u, v-u) - \theta a(u, v-u) + \theta L(v-u) \ , \qquad \forall v \in V.$$

Par conséquent, il existe un unique $u \in V$ tel que

$$a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq L(v-u), \quad \forall v \in V.$$

Alors le problème $(P2)$ a une unique solution $u \in V$. □

1.3 Approximation interne de l'I.V.E du second genre - Théorème de convergence

1.3.1 Problème continu

Considérons encore le problème $(P2)$

$$\begin{cases} \textit{trouver} \quad u \in V \quad \textit{solution de} \\ a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq L(v-u), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

1.3.2 Problème approché (discret)

Approximation de V

Soient données un paramètre $h \to 0$ et une famille $\{V_h\}_h$ de sous-espace de dimensions finies dans V. Nous supposons que $\{V_h\}_h$ satisfait :

(i) $\exists\, U \subset V$ tel que $\overline{U} = V$ et $\forall h > 0$, $\exists\, r_h : U \to V_h$ tel que $\lim\limits_{h \to 0} r_h v = v$ fortement dans V.

Approximation de (P2)

Le problème $(P2)$ est approximé par

$$\begin{cases} \textit{trouver} \quad u_h \in V_h \quad \textit{tel que} \\ a(u_h, v_h - u_h) + j(v_h) - j(u_h) \geq L(v_h - u_h), \qquad \forall v_h \in V_h \end{cases} \tag{P2h}$$

Théorème 1.2. *Le problème $(P2h)$ a une unique solution.*

Démonstration. Même démonstration du théorème 1.1, en remplaçant V par V_h . □

1.4 Résultat de convergence

Théorème 1.3. *Sous l'hypothèse ci_dessus de $\{V_h\}_h$ on a :*

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h\|_V = 0.$$

Démonstration. Comme dans la preuve du théorème 1.2, on divise la démonstration en trois parties :

1. estimation à priori de $\{u_h\}_h$.
2. convergence faible de $\{u_h\}_h$.
3. convergence forte de $\{u_h\}_h$.

Pour plus de détails voir l'ouvrage de R.Glowinsky[7] . □

Chapitre 2

Le problème variationnel de friction simplifié

2.1 Le problème continu : Existence et unicité

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ avec une frontière suffisamment régulière $\Gamma = \partial\Omega$. en utilisant les mêmes notations que dans chapitre1, nous définissons

$$V = H^1(\Omega), \tag{2.1}$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v \; dx \; + \int_\Omega uv \; dx, \tag{2.2}$$

$$L(v) = \langle f, v\rangle, \quad f \in V^\star, \tag{2.3}$$

$$j(v) = g\int_\Gamma |\gamma v| \; d\Gamma, \quad où \quad g > 0. \tag{2.4}$$

Nous avons ensuite :

Théorème 2.1. *Il existe une et une seule solution* $u \in V$ *de l'inéquation*

$$a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq L(v-u), \qquad \forall v \in V, \;\; u \in V. \tag{2.5}$$

Démonstration. Pour appliquer le théorème 1.1 du chapitre 1, il suffit de vérifier que $j(.)$ est convexe, propre, et s.c.i :

- Convexité de j(.) :

$$\begin{aligned}
j(\alpha u+(1-\alpha)v) &= g\int_\Gamma |\gamma(\alpha u+(1-\alpha)v)|\ d\Gamma \\
&\leq g[\alpha\int_\Gamma |\gamma u|\ d\Gamma]+g[(1-\alpha)\int_\Gamma |\gamma v|\ d\Gamma] \\
&\leq \alpha[g\int_\Gamma |\gamma u|\ d\Gamma]+(1-\alpha)[g\int_\Gamma |\gamma v|\ d\Gamma] \\
&\leq \alpha j(u)+(1-\alpha)j(v).
\end{aligned}$$

-j(.) est propre :

$$j(v)>-\infty\ ,\quad \forall v\in V.$$

$$j(v)\neq\infty\ ,\quad \forall v\in V.$$

- Semi continuité inférieure de j(.) :

En fait $j(.)$ est une semi-norme sur V. Donc en utilisant l'inégalité de schwarz dans $L^2(\Gamma)$ et le fait que $\gamma\in\mathcal{L}\left(H^1(\Omega),L^2(\Gamma)\right)$, nous avons

$$\begin{aligned}
|j(u)-j(v)| &= |g\int_\Gamma |\gamma u|\,d\Gamma-g\int_\Gamma|\gamma v|\,d\Gamma| \\
&= |g\int_\Gamma(|\gamma u|-|\gamma v|)d\Gamma| \\
&\leq g\int_\Gamma |\gamma u-\gamma v|\ d\Gamma \\
&\leq g(\int_\Gamma 1\ d\Gamma)^{1/2}(\int_\Gamma|\gamma(u-v)|^2\ d\Gamma)^{1/2} \\
&\leq g\,|\Gamma|\,\|\gamma(u-v)\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\leq g\,|\Gamma|\ \ \|u-v\|_V \\
&\leq C\|u-v\|_V,\qquad \forall v\in D(\Omega),
\end{aligned}\tag{2.6}$$

pour C constant.

Donc $j(.)$ est Lipschitzienne continue sur V, par conséquent $j(.)$ est s.c.i sur V, ainsi toutes les conditions du théorème 1.1 sont vérifiés, Donc il existe une et une seule solution $u\in V$ du problème (2.5). □

Remarque 2.1. *Si $g = 0$, l'inéquation (2.5) se réduit à une équation variationnel, en effet , on a*

$$a(u, v-u) \geq L(v-u), \qquad \forall v \in V, \quad u \in V, \tag{2.7}$$

en posant $v = 0 \in V$, on a

$$a(u, -u) \geq L(-u) \Longrightarrow a(u, u) \leq L(u), \qquad u \in V. \tag{2.8}$$

De plus ,en posant $v = 2u \in V$,on a

$$a(u, u) \geq L(u), \qquad u \in V. \tag{2.9}$$

De (2.8) et (2.9) , on obtient

$$a(u, u) = L(u), \qquad u \in V. \tag{2.10}$$

De (2.7) et en utilisant (2.10), on a

$$a(u, v) - a(u, u) \geq L(v) - L(u), \qquad \forall v \in V, \quad u \in V,$$

ce qui donne

$$a(u, v) \geq L(v), \qquad \forall v \in V, \tag{2.11}$$

en remplaçant v par $(-v) \in V$, on obtient

$$a(u, -v) \geq L(-v), \quad \forall v \in V,$$

ce qui donne

$$a(u, v) \leq L(v), \quad \forall v \in V. \tag{2.12}$$

De (2.11) et (2.12) , on conclent qui

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V.$$

Remarque 2.2. *Puisque* $a(.,.)$ *est symétrique, la solution de* (2.5) *est caractérisée, comme la solution unique du problème de minimisation*

$$E(u) \leq E(v), \quad \forall v \in V, \qquad u \in V, \tag{2.13}$$

où

$$E(v) = \frac{1}{2}a(v,v) + j(v) - L(v).$$

Remarque 2.3. *Le problème* (2.5) *(resp* (2.13)*) est la version simplifiée du problème de contact se produisant dans la théorie de l'élasticité* [4, 6] .

2.2 Régularité de la solution

Théorème 2.2. *(H.Brezis* [1]*) . Soit* Ω *un domaine polygonal bornée convexe de* $\mathbb{R}^2$ *à frontieré* Γ *suffisamment réguliére si*

$$L(v) = \int_\Omega fvdx \qquad avec \qquad f \in L^2(\Omega),$$

alors la solution u *de problème* (2.5) *est dans* $H^2(\Omega)$.

Démonstration. Démontrons par pénalisation.
D'après le théorème 2.1 le problème (2.5) admet une unique solution $u \in V$. Soit $\epsilon > 0$, considérons le problème de Dirichlet suivant

$$\epsilon A u_\epsilon + u_\epsilon = u \quad \text{dans } \Omega. \tag{2.14}$$

Où A est un opérateur différentiel linéaire définit par

$$Au = -\Delta u + u \quad \text{tel que}$$

$$(Au, v) = a(u, v).$$

Le problème (2.14) a une seule solution

$$u_\epsilon \in H^1(\Omega),$$

et par la régularité de Γ, nous avons

$$u_\epsilon \in H^2(\Omega).$$

L'inéquation (2.5) s'écrit aussi

$$(Au - f, v - u) + j(v) - j(u) \geq 0, \qquad \forall v \in V. \tag{2.5bis}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}(Av - f, v - u) + j(v) - j(u) &= (A(v - u) - f, v - u) \\ &\quad + (Au - f, v - u) + j(v) - j(u) \\ &\geq (Au - f, v - u) + j(v) - j(u) \geq 0, \qquad \forall v \in V,\end{aligned}$$

implique

$$(Av - f, v - u) + j(v) - j(u) \geq 0, \qquad \forall v \in V. \tag{2.15}$$

Et réciproquement (2.15) implique (2.5 bis). En posant $v = u_\epsilon \in V$ dans (2.15), il vient

$$(Au_\epsilon - f, u_\epsilon - u) + j(u_\varepsilon) - j(u) \geq 0.$$

Comme $u_\epsilon - u = -\epsilon A u_\epsilon$, alors

$$-\epsilon (Au_\epsilon - f, Au_\epsilon) + j(u_\varepsilon) - j(u) \geq 0,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}-\varepsilon(Au_\varepsilon - f, Au_\varepsilon) + g\int_\Gamma |u_\varepsilon - u|\, d\Gamma &\geq 0, \\ -\varepsilon(Au_\varepsilon - f, Au_\varepsilon) + \varepsilon g\int_\Gamma |Au_\varepsilon|\, d\Gamma &\geq 0,\end{aligned}$$

$$(Au_\varepsilon - f, Au_\varepsilon) \leq g \int_\Gamma |Au_\varepsilon| \, d\Gamma,$$

et par conséquent

$$\|Au_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|Au_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} + g \, |\Gamma|^{1/2} \, \|Au_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)},$$

donc

$$\begin{aligned} \|Au_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + g \, |\Gamma|^{1/2}, \\ \|Au_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq C. \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $\epsilon \to 0$, on obtient

$$\|Au\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

□

2.3 Résultat de dualité

Proposition 2.1. *Soit*

$$L(v) = \int_\Omega fv \, dx, \qquad f \in V^*.$$

La solution u du problème (2.5) est caractérisée par

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \quad dans \ \ \Omega \\ \left|\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right| \leq g \qquad p.p.\Gamma \\ u\dfrac{\partial u}{\partial \eta} + g\,|u| = 0 \qquad p.p.\Gamma \end{cases}$$

Démonstration. On a

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (v-u) + u\,(v-u)\,dx + g\int_\Gamma |\gamma v| \, d\Gamma - g\int_\Gamma |\gamma u| \, d\Gamma \geq \int_\Omega f\,(v-u)\,dx, \qquad \forall v \in V.$$

Soit $w \in V$ tel que $v = u + w \in V$, alors

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla w + uw)\, dx + g \int_{\Gamma} |\gamma u + \gamma w|\, d\Gamma - g \int_{\Gamma} |\gamma u|\, d\Gamma \geq \int_{\Omega} fw dx, \qquad \forall w \in V, \quad (2.16)$$

ce qui donne

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla w + uw) dx + g \int_{\Gamma} |\gamma w|\, d\Gamma \geq \int_{\Omega} fw dx, \qquad \forall w \in V,$$

donc

$$a(u, w) + j(w) \geq L(w), \quad \forall w \in V. \quad (2.17)$$

Posons $v = 0 \in V$ dans (2.5), alors

$$a(u, -u) + j(-u) \geq L(-u),$$

$$a(u, u) + j(u) \leq L(u). \quad (2.18)$$

Posons $v = 2u \in V$ dans (2.5), alors

$$a(u, u) + j(u) \geq L(u). \quad (2.19)$$

De (2.18) et (2.19), il s'en suit

$$a(u, u) + j(u) = L(u). \quad (2.20)$$

Déterminons l'équation différentielle

Soit $v \in D(\Omega)$, $u \in H^2(\Omega)$ de (2.15), on a

$$\begin{aligned} a(u, v) + j(v) &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx + g \int_{\Gamma} |\gamma v|\, d\Gamma \\ &= -\int_{\Omega} \Delta u.v dx + \int_{\Omega} uv dx \\ &\geq \int_{\Omega} fv dx, \quad \forall v \in D(\Omega). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Remplaçons v par $(-v) \in D(\Omega)$ dans (2.21), on obtient

$$\int_{\Omega} \Delta uv dx - \int_{\Omega} uv dx \geq -\int_{\Omega} fv dx, \quad \forall v \in D(\Omega),$$

De (2.21) et (2.22), on dèduit

$$-\int_{\Omega} \Delta uvdx + \int_{\Omega} uvdx = \int_{\Omega} fvdx, \qquad \forall v \in D(\Omega),$$

donc

$$-\Delta u + u = f \qquad p.p \quad \text{dans } \Omega. \tag{2.23}$$

Déterminons les conditions au bord

Soit $v \in V$, en multipliant (2.23) par v et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} uvdx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} \gamma v d\Gamma = \int_{\Omega} fvdx, \qquad \forall v \in V,$$

il s'ensuit que

$$a(u,v) = \int_{\Omega} fvdx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} \gamma v d\Gamma, \qquad \forall v \in V. \tag{2.24}$$

De (2.17) et (2.24), on obtient

$$\int_{\Gamma} (\frac{\partial u}{\partial \eta} \gamma v + g\,|\gamma v|) d\Gamma \geq 0, \qquad \forall v \in V,$$

d'où

$$v\frac{\partial u}{\partial \eta} + g\,|v| \geq 0 \qquad p.p.sur \ \ \Gamma, \tag{2.25}$$

en remplaçent v par $(-v) \in D(\Omega)$ dans (2.25), on obtient

$$-v\frac{\partial u}{\partial \eta} + g\,|v| \geq 0 \quad p.p.sur \ \Gamma. \tag{2.26}$$

De (2.25) et (2.26), on déduit

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right| \leq g \qquad p.p.sur \ \Gamma. \tag{2.27}$$

En prenant $v = u$ dans (2.24), et en utilisant (2.20), on obtient

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} \gamma u d\Gamma + g\int_{\Gamma} |\gamma u|) d\Gamma = 0, \tag{2.28}$$

en appliquant (2.25) à (2.28), on déduit

$$u\frac{\partial u}{\partial \eta} + g\,|u| = 0 \quad p.p.sur \ \Gamma. \tag{2.29}$$

en appliquant (2.25) à (2.28) , on déduit

$$u\frac{\partial u}{\partial \eta}+g\left|u\right|=0 \quad p.p.sur\ \Gamma. \tag{2.29}$$

De (2.23) ,(2.27) et (2.29) , on définit le problème différentiel

$$\begin{cases} -\Delta u+u=f \quad dans\ \Omega \\ \left|\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right|\leq g \qquad \text{p.p.sur } \Gamma \\ u\dfrac{\partial u}{\partial \eta}+g\left|u\right|=0 \quad \text{p.p.sur } \Gamma \end{cases}$$

□

2.4 Lipschitzianité de la solution

Proposition 2.2. *Soient f_1, f_2 deux fonctions dérivables dans $V^{\star}$, u_1 et u_2 les deux solutions correspondantes respectivement du problème variationnel (2.5). Alors l'application $f\rightarrow u$ est lipschitzienne, i.e*

$$\left\|u_1-u_2\right\|_V\leq\frac{1}{\alpha}\left\|f_1-f_2\right\|_{V^{\star}}.$$

Où α est la constante de coersivité.

Démonstration. Soient

$$a(u_1,v-u_1)+j\left(v\right)-j\left(u_1\right)\geq(f_1,v-u_1), \qquad \forall v\in V, \tag{2.30}$$

$$a(u_2,v-u_2)+j\left(v\right)-j\left(u_2\right)\geq(f_2,v-u_2), \qquad \forall v\in V, \tag{2.31}$$

en posant $v=u_2$ dans (2.30) et $v=u_1$ dans (2.31), et par sommation, on obtient

$$a\left(u_2-u_1,u_2-u_1\right)\leq\left(f_2-f_1,u_2-u_1\right),$$

Comme $a\left(.,.\right)$ est coercive, on obtient alors

$$\alpha\left\|u_2-u_1\right\|_V^2\leq\left\|f_2-f_1\right\|_{V^{*}}\left\|u_2-u_1\right\|_V,$$

2.5 Approximation par éléments finis

Dans cette section, nous considérons l'approximation de (2.5) par éléments finis linéaires par morçeaux.

2.5.1 Approximation du domaine Ω

Supposons que Ω est un domaine polygonal borné de $\mathbb{R}^2$. Considérons une famille de triangulation classique τ_h de Ω, i.e τ_h est un ensemble fini de triangles T tel que

$$T \subset \overline{\Omega}, \qquad \forall T \in \tau_h, \quad \underset{T\in\tau_h}{U} = \overline{\Omega}. \tag{2.32}$$

$$\overset{\circ}{T_1} \cap \overset{\circ}{T_2} = \emptyset, \qquad \forall T_1, T_2 \in \tau_h \ \ et \ T_1 \neq T_2. \tag{2.33}$$

De plus $\forall$ $T_1, T_2 \in \tau_h$ et $T_1 \neq T_2$ l'une des conditions suivantes doit être vraie

(1) $T_1 \cap T_2 = \emptyset$.

(2) T_1 et T_2 ont au moins un seule sommet en commun. (2.34)

(3) T_1 et T_2 ont une seule arrête en commun.

h désigne la longueur de la plus grande arrête de ces triangles, h est destiné à tendre vers zéro. Pour le moment nous considérons les approximations par éléments finis linéaires.

2.5.2 Approximation de l'espace V

L'espace $V = H^1(\Omega)$ peut être approché par les espaces V_h, où

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0\left(\overline{\Omega}\right), \ v_{h|T} \in P_1, \ \ \forall T \in \tau_h \right\}.$$

Où P_1 est l'ensemble des polynômes de Lagrange de degré infèrieur ou égale à 1.

2.5.3 Le problème approché (discret)

L'analogue discret du problème (2.5) est

$$\begin{cases} \text{trouver } \; u_h \in V_h \quad \text{tel que} \\ a(u_h, v_h - u_h) + j(v_h) - j(u_h) \geq L(v_h - u_h), \qquad \forall v_h \in V_h \end{cases} \tag{2.35}$$

On peut facilement prouver que

Proposition 2.3. *Le problème* (2.35) *admet une solution unique* $u_h \in V_h$.

Démonstration. Même démonstration du théorème 1.1 de chapiter1 en remplaçant V par V_h . □

Remarque 2.4. *Puisque* $a(.,.)$ *est symétrique,* (2.35) *est équivalent à un problème de programmation quadratique*

$$\begin{cases} \textit{trouver } \; u_h \in V_h \quad \textit{tel que} \\ E(u_h) = \min\limits_{v_h \in V_h} E(v_h) \end{cases} \tag{2.36}$$

Où

$$E(v_h) = \frac{1}{2} a(v_h, v_h) + j(v_h) - L(v_h). \tag{2.37}$$

2.6 Résultat de convergence

Avant de démontrer le théorème de convergence, considérons un lemme de densité dont la démonstration se trouve dans l'ouvrage de R.Glowinsky [6, 7] .

Lemme 2.1. *Sous les hypothèses données sur* Ω *, on a*

$$\overline{C^{\infty}(\overline{\Omega})} = H^1(\Omega).$$

Démonstration. Soit $v \in H^1(\Omega)$, $\widetilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tel que $\widetilde{v}_{|\Omega} = v$, i.e $\widetilde{v}$ est le prolongent de v nulle en dehors de Ω. et soit une suite régularisante

$$\rho_n \in D(\mathbb{R}^2), \quad \rho_n \geq 0, \quad \int_{\Re^2} \rho_n(x)\, dx = 1, \bigcap_{n \in N} supp(\rho_n) = \{0\}.$$

Où $\{supp(\rho_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de sous ensembles. Définissons $\widetilde{v}_n$ par

$$\widetilde{v}_n = \widetilde{v} * \rho_n. \tag{2.38}$$

tel que

$$\widetilde{v}_n(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{v}(y)\, \rho_n(x-y)\, dy.$$

Alors

$$\widetilde{v}_n \in D\left(\mathbb{R}^2\right) \quad \text{et} \lim_{n\to\infty} \widetilde{v}_n = \widetilde{v} \quad \text{fortement} \quad \text{dans} \quad H^1\left(\mathbb{R}^2\right). \tag{2.39}$$

Définissons v_n par

$$v_n = \widetilde{v}_{n|\Omega}. \tag{2.40}$$

De (2.39) et (2.40), il s'ensuit que

$$v_n \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right), \qquad \lim_{n\to\infty} v_n = v \quad \text{fortement} \quad \text{dans} \quad H^1(\Omega).$$

Donc et le lemme est démontré. □

Théorème 2.3. *Supposons que les angles de tous les triangles de τ_h sont bornés inférieurement par $\theta_0 > 0$ quand $h \to 0$ (i.e τ_h est une famille de triangulation régulière), alors*

$$\lim_{h\to 0} \|u_h - u\|_V = 0\ . \tag{2.41}$$

Où u et u_h sont respectivement les solutions de (2.5) et (2.35).

Démonstration. Pour prouver ce théorème nous suivons la même démarche appliqueè dans la démonstration du théorème 1.3 du chapitre 1. Ceci implique qu'on doit vérifier les trois propriétes suivantes :

(*i*) $\exists\, U \subset V,\ \overline{U} = V$ et $r_h : U \to V_h$, tel que

$$\lim_{h\to 0}\ r_h v = v \quad fortement \quad dans\ V, \quad \forall v \in U.$$

(*ii*) si $v_h \to v$ faiblement dans V, alors

$$\lim_{h\to 0}\ inf\ j(v_h) \geq j(v).$$

(*iii*)

$$\lim_{h\to 0} j(r_h v) = j(v), \quad \forall v \in U.$$

Vérification de (i) :

Posons $U = C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$, du lemme 2.1, il résulte que $\overline{U} = V$. Définissons ensuite

$$r_h : H^1(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right) \longrightarrow V_h.$$

Pour

$$\begin{aligned} r_h v &\in V_h, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right), \\ r_h v(M) &= v(M), \quad \forall M \in \sum_h \, ; \end{aligned}$$

alors $r_h v$ est l'interpolation linéaire de v sur τ_h. D'après les hypothèses données sur τ_h, nous avons (voir Ciarlet [3])

$$\|r_h v - v\|_V \leq Ch \|v\|_{H^2(\Omega)}, \qquad \forall v \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right). \tag{2.42}$$

Où C est une constante indépendante de h et v, cela implique que

$$\lim_{h\to 0} \|r_h v - v\|_V = 0, \qquad \forall v \in U. \tag{2.43}$$

et par densité on a

$$\lim_{h\to 0} \|r_h v - v\|_V = 0, \qquad \forall v \in V. \tag{2.44}$$

D'ou (i) est vérifiée.

La vérification de (ii) est triviale puisque $j(.)$ est s.c.i.

Vérification de (iii) $\forall v \in U$, on a

$$\begin{aligned} |j(r_h v) - j(v)| &= \left| g \int_\Gamma |\gamma r_h v| \, d\Gamma - g \int_\Gamma |\gamma v| \, d\Gamma \right| \\ &\leq g \int_\Gamma |\gamma(r_h v - v)| d\Gamma \\ &\leq g|\Gamma|^{\frac{1}{2}} \|r_h v - v\|_V, \quad \forall v \in U, \end{aligned}$$

qui tend vers zéro quand $h \to 0$.

En appliquant le théorème 1.3 on déduit que u_h converge fortement vers u dans V. □

2.7 Estimation d'erreur

Nous allons maintenant estimer la quantité $\|u - u_h\|_V$.

Théorème 2.4. *Soit Ω un domaine polygonal et $u \in H^2(\Omega)$. Supposons que tous les angles de τ_h sont bornés inférieurement par $\theta_0 > 0$ quand $h \to 0$ (i.e τ_h est une famille de triangulation régulière),alors*

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \left\{ \|u - v_h\|_V + |a(u, v_h - u) + j(v_h) - j(u) - L(v_h - u)|^{\frac{1}{2}} \right\}. \tag{2.45}$$

Démonstration. Posons $v = u_h$ dans (2.5) , il vient

$$a(u, u_h - u) + j(u_h) - j(u) \geq L(u_h - u), \tag{2.46}$$

en additionnant (2.35) et (2.46) , on obtient

$$a(u, u_h - u) + a(u_h, v_h - u_h) + j(v_h) - j(u) \geq L(v_h - u), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{2.47}$$

Comme $a(.,.)$ est coercive ,il s'ensuite

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \qquad (2.48)\\ &= a(u_h - u, v_h - u) + a(u, v_h - u) - a(u, u_h - u) - a(u_h, v_h - u), \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

En appliquons (2.47) et (2.48) , on obtient

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq a(v_h - u, v_h - u) + a(u, v_h - u) + j(v_h) - j(u) - L(v_h - u), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{2.49}$$

Comme $a(.,.)$ est continue, on a

$$\begin{aligned}
\alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq M \|u_h - u\|_V \|v_h - u\|_V \\
&\quad + a(u, v_h - u) + j(v_h) - j(u) - L(v_h - u) \\
&\leq \frac{\alpha}{2} \|u_h - u\|_V^2 + \frac{M^2}{2\alpha} \|v_h - u\|_V^2 \\
&\quad + a(u, v_h - u) + j(v_h) - j(u) - L(v_h - u), \quad \forall v_h \in V_h,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|u - u_h\|_V^2 \leq \frac{M^2}{\alpha^2} \|v_h - u\|_V^2 + \frac{2}{\alpha} |a(u, v_h - u) + j(v_h) - j(u) - L(v_h - u)| , \quad \forall v_h \in V_h.$$

Donc

$$\|u - u_h\|_V \leq C' \inf_{v_h \in V_h} \left\{ \|u - v_h\|_V + |a(u, v_h - u) + j(v_h) - j(u) - L(v_h - u)|^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

□

Nous donnons maintenant un ordre optimal de l'erreur.

Théorème 2.5. *Soit Ω un domaine polygonal et $u \in H^2(\Omega)$. Supposons que tous les angles de τ_h sont bornés infèrieurement par $\theta_0 > 0$ quand $h \to 0$ (i.e τ_h est une famille de triangulation régulière), alors*

$$\|u - u_h\|_V \leq C(u)\, h. \tag{2.50}$$

Démonstration. On a , $\forall v_h \in V_h$

$$\begin{aligned}
a(u, v_h - u) + j(v_h) - j(u) - L(v_h - u) &= b\int_\Omega \nabla u \nabla (v_h - u)\, dx + \int_\Omega u(v_h - u)\, dx \\
&\quad + g\int_\Gamma |\gamma v_h|\, d\Gamma - g\int_\Gamma |\gamma u|\, d\Gamma - \int_\Omega f(v_h - u)\, dx \\
&= -\int_\Omega \Delta u (v_h - u)\, dx + \int_\Omega u(v_h - u)\, dx \\
&\quad + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}(v_h - u)\, d\Gamma + g\int_\Gamma |\gamma v_h|\, d\Gamma \\
&\quad - g\int_\Gamma |\gamma u|\, d\Gamma - \int_\Omega f(v_h - u)\, dx \\
&= \int_\Gamma \left[\frac{\partial u}{\partial \eta}(v_h - u) + g|\gamma v_h| - g|\gamma u|\right] d\Gamma \\
&\quad + \int_\Omega [-\Delta u + u - f](v_h - u)\, dx \\
&\le \left(\left\|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right\|_{L^2(\Gamma)} + g|\Gamma|^{\frac{1}{2}}\right)\|v_h - u\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\quad + \|-\Delta u + u - f\|_{L^2(\Omega)}\|v_h - u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le C(u)\left(\|v_h - u\|_{L^2(\Gamma)} + \|v_h - u\|_{L^2(\Omega)}\right), \quad \forall v_h \in V_h.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.50) , on aura

$$\|u - u_h\|_V \le C(u) \inf_{v_h \in V_h}\left\{\|v_h - u\|_V + \|v_h - u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Gamma)} + \|v_h - u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\right\}.$$

Posons $v_h = \sqrt{h}u$, et d'aprés les estimations de ciarlet [3]

$$\|u - u_h\|_V \le C(u)(C_1(u)h + C_2(u)h + C_3(u)h) \le C(u)h.$$

D'ou l'ordre optimal de convergence. □

2.8 Méthode de dualité pour le problème continu

2.8.1 Existence d'un multiplicateur de Lagrange

Soit l'ensemble Λ définit par

$$\Lambda = \left\{\mu \in L^2(\Gamma) \quad | \quad |\mu| \leq 1 \quad \text{p.p. sur } \Gamma\right\}.$$

On a le théorème suivant

Théorème 2.6. *La solution* u *du problème de fonction* (2.5) *est équivalente au problème de trouver* $u \in V$ *et* $\lambda \in \Lambda$ *tel que*

$$a(u,v) + g\int_\Gamma \lambda\gamma v d\Gamma = L(v) \quad , \quad \forall v \in V, \tag{2.51}$$

$$\lambda\gamma u = |\gamma u|, \tag{2.52}$$

λ *est appelè multiplicateur de Lagrange.*

Démonstration. Montrons que (2.5) implique (2.51) et (2.52) prevons $v = 0$ et $v = 2u$ dans (2.5),il vient

$$a(u,u) + j(u) = L(u), \tag{2.53}$$

il suit alors de (2.5) et (2.53) que

$$L(v) - a(u,v) \leq j(v), \quad \forall v \in V,$$

remplaçons v par $-v$, nous obtenons

$$a(u,v) - L(v) \leq j(-v) = j(v),$$

ce qui implique

$$|L(v) - a(u,v)| \leq j(v) = g\int_\Gamma |\gamma v| \, d\Gamma \;, \qquad \forall v \in V. \tag{2.54}$$

On a $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus [H_0^1(\Omega)]^\perp$, où $[H_0^1(\Omega)]^\perp$ est le complèment orthogonal de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Comme $\gamma : [H_0^1(\Omega)]^\perp \to H^{1/2}(\Gamma)$ est un isomorphisme, il suit de (2.54) que

$$L(v) - a(u,v) = l(\gamma v), \quad \forall v \in V, \tag{2.55}$$

où $l(.)$ est une fonctionnelle linéaire continue sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Il suite alors de (2.54) et (2.55) que

$$|l(\mu)| \leq g \|\mu\|_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall \mu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma). \tag{2.56}$$

Comme $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$, il suit de (2.56) qu'on peut appliquer à $l(.)$ le théorème de Hahn-Banach ,il existe alors $\lambda \in L^\infty(\Gamma)$, $|\lambda(x)| < 1$ p.p. Γ tel que

$$l(\mu) = g \int_\Gamma \lambda\mu \, d\Gamma, \quad \forall \mu \in L^2(\Gamma). \tag{2.57}$$

Par conséquenc il suit de (2.55) et (2.57) que

$$a(u,v) + g \int_\Gamma \lambda\gamma v d\Gamma = L(v), \quad \forall v \in V.$$

Ce qui preuve (2.51).

Posons $v = u$ dans (2.51) , on obtient

$$a(u,u) + g \int_\Gamma \lambda\gamma u d\Gamma = L(u),$$

utilisant (2.53) et les èquations aux _dessus , on obtient

$$\int_\Gamma (|\gamma u| - \lambda\gamma u) \, d\Gamma = 0. \tag{2.58}$$

Puisque $|\lambda| \leq 1$ p.p, on a

$$\lambda\gamma u \leq |\lambda\gamma u| \leq |\lambda| \, |\gamma u| \leq |\gamma u|,$$

$$|\gamma u| - \lambda\gamma u \geq 0 \quad \text{p.p}, \tag{2.59}$$

de (2.58) et (2.59), on déduit que

$$|\gamma u| = \lambda\gamma u \quad \text{p.p.}$$

Cela termine la démonstrations de (2.51) et (2.52).

Inversement : Supposons que (2.51) et (2.52) sont vrai et montrons (2.5).

Soit $\{u, \lambda\}$ une solution de (2.51)_(2.52). De (2.51) il suit que

$$a(u, v-u) + g\int_{\Gamma} \lambda\gamma(v-u)\, d\Gamma = L(v-u), \qquad \forall v \in V,$$

qu'on peut ècrit aussi sous la forme

$$a(u, v-u) + g\int_{\Gamma} \lambda\gamma v d\Gamma - g\int_{\Gamma} \lambda\gamma u d\Gamma = L(v-u), \quad \forall v \in V. \tag{2.60}$$

De (2.52) et (2.60), on obtient

$$a(u, v-u) + g\int_{\Gamma} \lambda\gamma v d\Gamma - g\int_{\Gamma} |\gamma u| d\Gamma = L(v-u), \quad \forall v \in V. \tag{2.61}$$

Mais puisque $\lambda\gamma v \leq |\gamma v|$ p.p, on dèduit de (2.61) que

$$a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq L(v-u), \qquad \forall v \in V.$$

Cela prouve la caractèrisation du théorème.

Considèrons la fonctionnelle Lagrangienne $\mathcal{L} : H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$, définie pour

$$\mathcal{L}(v, \mu) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) + g\int_{\Gamma} \mu\gamma v d\Gamma. \tag{2.62}$$

□

Le théorème suivant provient du théorème 2.6.

Théorème 2.7. *Soit* $\{u, \lambda\}$ *une solution de* (2.51)_(2.52) *alors* $\{u, \lambda\}$ *est l'unique point selle de* $\mathcal{L}$ *sur* $H^1(\Omega) \times \Lambda$.

2.9 Algorithme de Uzawa pour la résolution itérative du problème continu

Dans cette section nous allons introduire les travaux de Céa [2] pour itérer un algorithme de type Uzawa qui va être appliqué à la résolution numérique du problème de friction.

Soit

$$\lambda^0 \in \Lambda \quad \text{arbitrairement choisi (par exemple } \lambda^0 = 0), \tag{2.63}$$

par induction, en supposant que λ^n connu, on calcule u^n et λ^{n+1} par

$$\mathcal{L}(u^n, \lambda^n) \leq \mathcal{L}(v, \lambda^n), \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad u^n \in V. \tag{2.64}$$

$$\lambda^{n+1} = p_\Lambda(\lambda^n + \rho g \gamma u^n), \qquad \rho > 0, \tag{2.65}$$

où p_Λ est l'opérateur de projection de $L^2(\Gamma)$ sur Λ pour la norme de $L^2(\Gamma)$.

En effet

$$\mathcal{L}(u^n, p^n) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u^n|^2 + |u^n|^2)dx - \int_\Omega f u^n dx + g\int_\Gamma \lambda^n \gamma u^n d\Gamma,$$

pour $n = 0$, λ^0 donnée.

Calculons u^0 et λ^1

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u^0, \lambda^0) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (\left|\nabla u^0\right|^2 + |u^0|^2)dx - \int_\Omega f u^0 dx + g\int_\Gamma \lambda^0 \gamma u^0 d\Gamma, \\ \lambda^1 &= p_\Lambda(\lambda^0 + \rho g \gamma u^0), \qquad \rho > 0. \end{aligned}$$

Calculons u^1 et λ^2

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u^1, \lambda^1) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (\left|\nabla u^1\right|^2 + |u^1|^2)dx - \int_\Omega f u^1 dx + g\int_\Gamma \lambda^1 \gamma u^1 d\Gamma, \\ \lambda^2 &= p_\Lambda(\lambda^1 + \rho g \gamma u^1), \qquad \rho > 0. \end{aligned}$$

Calculons u^n et λ^{n+1}

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u^n, \lambda^n) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u^n|^2 + |u^n|^2)dx - \int_\Omega f u^n dx + g\int_\Gamma \lambda^n \gamma u^n d\Gamma. \\ \lambda^{n+1} &= p_\Lambda(\lambda^n + \rho g \gamma u^n), \qquad \rho > 0. \end{aligned}$$

Le problème de minimisation (2.64) est équivalent au problème de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u^n + u^n = f \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u^n}{\partial \eta} + g\lambda^n = 0 \qquad \text{p.p sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.66}$$

p_Λ est l'opérateur de projection de $L^2(\Gamma)$ sur Λ dèfini par

$$p_\Lambda(\mu) = \sup(-1, \inf(1, \mu)), \qquad \forall \mu \in L^2(\Gamma). \tag{2.67}$$

Proposition 2.4. *Sous les hypothèses du théorème 2.7, et supposons que* $0 < \rho < \frac{2}{g^2}\|\gamma\|^2$, *alors on a*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u^n &= u \quad \textit{fortement dans } H^1(\Omega).\\ \lim_{n\to\infty} \lambda^n &= \lambda \quad \textit{fortement dans } L^2(\Gamma).\end{aligned}$$

Démonstration. Du théorème (2.6), on a

$$a(u,v) = L(v) - g\int_\Gamma \lambda\gamma v d\Gamma, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega), \quad \lambda \in \Lambda, \tag{2.68}$$

$$a(u^n,v) = L(v) - g\int_\Gamma \lambda^n\gamma v d\Gamma, \forall v \in H^1(\Omega), \quad u^n \in H^1(\Omega), \quad \lambda^n \in \Lambda. \tag{2.69}$$

Au théorème 2.7, on a

$$\mathcal{L}(u,\mu) \leq \mathcal{L}(u,\lambda) \leq \mathcal{L}(v,\lambda), \quad \forall\{v,\mu\} \in V\times\Lambda, \ \{v,\lambda\} \in V\times\Lambda.$$

Il suit alors que

$$g\int_\Gamma (\lambda-\mu)\gamma u d\Gamma \geq 0, \quad \forall\mu \in \Lambda, \quad \lambda \in \Lambda \tag{2.70}$$

La relation (2.70) peut s'écrire aussi comme

$$\int_\Gamma (\mu-\lambda)(\lambda-(\lambda+\rho g\gamma u))\,d\Gamma \geq 0, \quad \forall\mu \in \Lambda, \ \rho \succ 0, \ \lambda \in \Lambda.$$

Laquelle est classiquement équivalente à

$$\lambda = p_\Lambda(\lambda + \rho g\gamma u). \tag{2.71}$$

Considérons

$$\overline{u}^n = u^n - u, \quad \overline{\lambda}^n = \lambda^n - \lambda.$$

Comme p_Λ est une contraction si $0 < \rho < \frac{2}{g}\|\gamma\|^2$, alors on a

$$\begin{aligned}\left\|\overline{\lambda}^{n+1}\right\|_{L^2(\Gamma)} &= \|p_\Lambda(\lambda^n+\rho g\gamma u^n) - p_\Lambda(\lambda+\rho g\gamma u)\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|(\lambda^n+\rho g\gamma u^n) - (\lambda+\rho g\gamma u)\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \left\|\overline{\lambda}^n + \rho g\gamma\overline{u}^n\right\|_{L^2(\Gamma)},\end{aligned} \tag{2.72}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\left\|\overline{\lambda}^{n+1}\right\|^2_{L^2(\Gamma)} &\leq \int_\Gamma \left(\overline{\lambda}^n + \rho g \gamma \overline{u}^n\right)^2 d\Gamma \\ &= \int_\Gamma \left((\overline{\lambda}^n)^2 + 2\rho\overline{\lambda}^n g\gamma\overline{u}^n + \rho^2 g^2 (\gamma\overline{u}^n)^2\right) d\Gamma,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left\|\overline{\lambda}^n\right\|^2_{L^2(\Gamma)} - \left\|\overline{\lambda}^{n+1}\right\|^2_{L^2(\Gamma)} \geq -2\rho g \int_\Gamma \gamma\overline{u}^n\overline{\lambda}^n d\Gamma - \rho^2 g^2 \int_\Gamma (\gamma\overline{u}^n)^2 d\Gamma . \tag{2.73}$$

Prenons $v = \overline{u}^n$ dans (2.68) et (2.69), et en soustrayant les deux expressions, nous obtenons

$$a(\overline{u}^n, \overline{u}^n) = -g \int_\Gamma \overline{\lambda}^n \gamma \overline{u}^n d\sigma. \tag{2.74}$$

En substituant dans (2.73), on obtient

$$\begin{aligned}\left\|\overline{\lambda}^n\right\|^2_{L^2(\Gamma)} - \left\|\overline{\lambda p}^{n+1}\right\|^2_{L^2(\Gamma)} &\geq 2\rho a(\overline{u}^n, \overline{u}^n) - \rho^2 g^2 \left\|\gamma\overline{u}^n\right\|^2_{L^2(\Gamma)} \\ &\geq 2\rho \left\|\overline{u}^n\right\|^2_V - \rho^2 g^2 \left\|\gamma\overline{u}^n\right\|^2_{L^2(\Gamma)} \\ &\geq 2\rho \left\|\overline{u}^n\right\|^2_V - \rho^2 g^2 \left\|\gamma\right\|^2 \left\|\overline{u}^n\right\|^2_{L^2(\Gamma)} \qquad (2.1) \\ &\geq \rho\left(2 - \rho g^2 \left\|\gamma\right\|^2\right) \left\|\overline{u}^n\right\|^2_V .\end{aligned}$$

Si $0 < \rho < \frac{2}{g^2}\left\|\gamma\right\|^2$, la suite $\left\{\left\|\overline{\lambda}^n\right\|_{L^2(\Gamma)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc convergente, par conséquent

$$\lim_{n\to\infty}(\left\|\overline{\lambda}^n\right\|^2_{L^2(\Gamma)} - \left\|\overline{\lambda}^{n+1}\right\|^2_{L^2(\Gamma)}) = 0,$$

ce qui montre que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\overline{u}^n\right\|_V = 0.$$

D'où la convergence. □

2.10 Algorithme de Uzawa pour le problème discret

Par analogie, considérons

$$\Lambda_h = \left\{\mu_h \in \sum_h \cap\Gamma \mid |\mu_h(x)| \leq 1 \ \text{ p.p sur } \Gamma\right\}.$$

Soit

$$\lambda_h^0 \in \Lambda_h \text{ arbitrairement choisi (par exemple } \lambda_h^0 = 0) \; .$$

Par induction , en supposant que λ_h^n connue, on calcule u_h^n et λ_h^{n+1} par

$$\mathcal{L}_h\left(u_h^n, \lambda_h^n\right) \leq \mathcal{L}_h\left(v_h, \lambda_h^n\right), \;\; \forall v_h \in V_h, \; u_h^n \in V_h, \tag{2.76}$$

$$\lambda_h^{n+1} = p_\Lambda\left[\lambda_h^n - \rho g \gamma u_h^n\right], \;\; \rho > 0. \tag{2.77}$$

On prouve que si $0 < \rho < \beta$, avec β assez petit [2], alors on a

$$\lim_{n \to \infty} u_h^n = u_h.$$

Où u_h est la solution du problème discret .

Conclusion

Dans ce travail, on a prouvé la convergence de la solution discrète de l'inéquation variationnelle elliptique du second genre, et on a montré que l'erreur de la convergence par éléments finis de degré un est optimale d'ordre O(h). En perspective nous souhaitons approximé ce problème par les éléments finis quadratiques.

Bibliographie

[1] H.Brezis, G.Stampacchia, Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. Bull. Soc. Math. Fr.96, 159-180 (1968).

[2] J.Céa, Optimization Theory and Algorithms.Lecture Notes, vol.53 (Tata Institute of Fundamental Research,Bombay,1978).

[3] P.G.Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems (North-Holand Amesterdam 1978).

[4] G.Duvant and J.L.Lions, Les inéquations en mécanique et en physique (Dunod,Paris 1972).

[5] G.Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali : ilproblema di signorini con ambigue condizioni al contorno, Mem. Accad. Naz. Lincei Ser., VIII(7), 91-140 (1964).

[6] R.Glowinsky, J.L.Lions , R.Tremolieres : Numerical Analysis of Variational Inequalities, studies in mathematics and its applications, volume 8,(North-holand, Amsterdam, 1981).

[7] R.Glowinsky : Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems (springer,1984).

[8] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An introduction to Variational Inequalities an their Applications, Academic Press, New York, 1980.

[9] J. L. Lions, G. Stampacchia, Variational inequalities, Comm. Pure Appl. Math., XX, 1967.

[10] J.L.Lions, E.Magense, Problèmes aux limites nonhomogènes,Vo.l, Dunod, Paris1968.

[11] J. L. Lions, Quelques methodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[12] A. Mehri, Polycopié du cours, Inéquations Variationnelles Elliptiques et leurs Approximations, Cours et Exercices, Niveau : Master2 Mathématiques Appliquées, Université 08 Mai 1945 Guelma (2016/2017).

[13] U. Mosco, An introduction to the approximate solution of variational inequalities, Constructive aspects of functional analysis, Erice 1971, 497-684, Ed. Cremonese, 1973.

[14] U. Mosco, Implicit variational problems and quasi-variational inequalities, Lect. Notes in Math., 543, 83-156, 1975.

[15] Mrabti Wafa, Analyse Numérique par Eléments Finis du Problème variationnel de Signorini, mémoire de Master2 mathématiques appliquées, Université 08 Mai 1945 Guelma (2017).

[16] Oumeddour Azzeddine, Analyse Numérique par Eléments Finis du Problème variationnel de la Torsion Elasto-Plastique, mémoire de Master2 mathématiques appliquées, Université 08 Mai 1945 Guelma (2016).

[17] A. Signorini, Sopra alcune questioni di elastostatica, Atti Societa Italiana per il Progresso della Scienze, 1933.

[18] G. Stampacchia, Variational inequalities, Theory and application of monotone operators, Proceedings of a NATO Advanced Study Institute, Venice, Italy, 1968.