République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP Et Analyse numérique**

Par : **HAOUAM Loubna**

Intitulé

Méthode Spectrale Itérative Pour les Opérateurs Bornés

Dirigé par :

GUEBBAI HAMZA

Devant les jurés

PRESIDENT	Dr.	LARIBI Naima	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.	GUEBBAI Hamza	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.	DEBBAR Rabah	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Table des matières

Je dédie ce mémoire

avec un énorme plaisir, et une immense joies à mes chéres parents, pour leurs patience, leurs encouragements, à mon grand pére et ma grand mére, à mes fŕres, à ma soeur, et à toute ma famille.

Remerciements

*En préambule à ce mémoire nous remercions **ALLAH** qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces longues années d'étude.*

*Je tiens à remercier sincérement, **Dr. Hamza Guebbai** et **Dr. LEMITA SAMIR** et **Monsieur KHELAF AMMAR** qui, en tant que Directeurs de mémoire, ce sont toujours montrés à l'écoute et trés disponibles tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'ils ont bien voulu me consacrer.*

Enfin, j'adresse mes plus sincéres remerciements à tous mes proches amies, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de mes étude.

Merci à tous et à toutes.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions la méthode directe et puis on applique la méthode itérative pour l'approximation du spectre d'un operateur compacte sur un Banach. Les tests numérique sont développés pour montrer l'efficacité de ces méthodes.

Introduction

La théorie spectrale des opérateurs bornés représente un grand intéret mathématiques. Elle est la généralisation naturelle des notions des valeurs propres, vecteurs propre et de la diagonalisation des matrices.
Mais, la difficulté de ce problème augmente, puisque la dimension devient infinie lorsqu'on remplace une matrice par un opérateur.
La Première approche consiste á remplacer l'operateur par un opérateur approché de rang fini. Ce dernier est construit par une discrétisation ou en appliquant des opérateurs de projections sur des sous-espaces de dimention finis.
Néanmoins, ces méthodes directes sont très limitées, car pour obtient des erreurs acceptables il faut augmenter la Dimension du rang de l'opérateur approché.
La méthodes itérative est une bonne solution pour ce dernier problème. Elles permettent à partir d'une valeur propre et un vecteur propre calculés à un rang donné, de raffiner ces valeurs pour obtenir une meilleur approximation.
Ce mémoire est divisé en 4 chapitres :
Dans le premier chapitre, on rappelle les théorèmes d'analyse fonctionnelle, et on présente la décomposition spectrale et quelques propriétés. De plus, on démontre des résultats qui seront utilisés dans les chapitres suivants.

Le deuxième chapitre, est consacré pour la convergence du spectre approché d'un opérateur borné. On démontre la propriété U et L au sens de la convergence en norme. Puis on étude les estimations d'erreurs.

Dans le troisième chapitre, on définit une méthode itérative oú on raffine les résultat de chapitre précédent sans agrandir la dimension de l'opérateur approché.

Dans le chapitre quatre on montre les résultats numériques obtenus.

Chapitre 1

Décomposition spéctrale

1.1 Notions générales

Cette section est présentée sous forme d'un rappel des notions de base utilisée par la suite pour construire nos résultats. Les notions sont mentionnées sans leurs démonstrations.
On commence cette partie par définir les concepts les plus importants autour un opérateur borné. Premièrement, on note par $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et par $BL(X)$, l'espace de tous les opérateurs linéaires et bornés, on le munit de la norme :

$$\|T\|_{BL(X)} = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\| x \|}: \quad x \in X\backslash\{0\}\right\}.$$

S'il y aurait pas d'ambguité, on note $\|.\|$ au lieu de $\|.\|_{BL(X)}$.
On rappelle que le spectre d'un opérateur T est l'ensemble $\lambda \in \mathrm{Sp}(T) \subset \mathbb{C}$ dont l'opérateur $(T - \lambda I)$ n'est pas inversible. Le complémentaire de $\mathrm{Sp}(T)$ dans $\mathbb{C}$ s'appelle l'ensemble résolvant, et on la note par $\mathrm{re}(T)$. La résolvante de l'opérateur T est définit par $R(\lambda, T) = (T - \lambda I)^{-1}$. En outre, on rappelle que l'ensemble $\mathrm{Sp}(T)$ est une partie compacte dans $\mathbb{C}$, et la fonction

$\lambda \mapsto (T - \lambda I)^{-1}$ est holomorphe sur re(T) d'image dans BL(X).

On s'intéresse maintenant à étendre les théorèmes fondamentaux de l'analyse complexe au cas vectoriel, spécifiquement, la formule de l'intégrabilité autour d'un contour de Cauchy Γ

$$\int_\Gamma g(z)dz, \tag{1.1}$$

Où, ici g est une fonction continue prenant ses valeures dans un espase de Banach Y. Précisons, on dit que Γ est un contour de Cauchy, si Γ est la frontière orientée d'un domaine de Cauchy dans $\mathbb{C}$.

On définit un domaine de Cauchy Δ, comme l'ensemble de la réunion disjointe d'un nombre fini des domaines élémentaires $(\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_l(\Delta i \cap \Delta_j = \emptyset))$, où ceux-ci sont ouverts et connexes et la frontiére $\partial\Delta_j$ est une interséction finie de courbes de Jordan.

Si σ est une partie compacte dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors on peut toujours trouver un contour de Cauchy Γ dans Ω tel que $\sigma \subset \int(\Gamma)$, c'est-à-dire Γ sépare σ à Ω. Retournons de l'intégrale (1.1), on dit qu'une fonction continue est intégrable sur une courbe de Jordan dans un espace de Banach Y, si la limite de la somme de Riemann-Stieltjes est finie. Pour cela, la quantité $\int_\Gamma g(z)dz$ est définie comme la somme d'intégrale de g sur toutes les restrictions des courbes qui constituent Γ.

On rappelle qu'une fonction g de $\Omega \subset \mathbb{C}$ vers un espace de Banach Y est dite analytique au point z_0 si

$$g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z - z_0)^k,$$

dans un voisinage de z_0. Bien entendu, et sans susciter la discussion, la plus part des théorèmes qui font la plate forme de l'analyse complexe sont lien étendus au cas vectoriel, cependant, nous allons suggérer seulement les théorèmes qu' on va utiliser dans la suite. Soient Ω un domaine dans $\mathbb{C}$, et $g : \Omega \mapsto Y$ une fonction analytique.

Théorème 1.1.1 *:[Théorème de Cauchy]*

Si Ω est simplement connexe, alors

$$\int_\gamma g(z)dz = 0,$$

pour toute courbe γ de Jordan dans Ω. De plus, si $z_0 \in \int(\gamma)$

$$g^k(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz \qquad \forall k \geq 0.$$

Cette formule est connue sous le nom de la formule d'Intégrale de Cauchy.

Preuve : voir [9]

Théorème 1.1.2 *: [Théorème de Taylor]*

Soit $z_0 \in \Omega$, alors il existe $r > 0$ tel que

$$g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k \text{ quand } |z-z_0| < r,$$

où

$$a_k = \frac{g^k(z_0)}{k!}.$$

Preuve : Voir [6].

Théorème 1.1.3 *: [Théorème de Laurent]*

Si $z_0 \in \Omega$ *tel qu'il existe* $0 < r_1 < r_2$ *dont* $\{z \in \mathbb{C} \ : \ r_1 < |z - z_0| < r_2\} \subset \Omega$, *et que* γ *est une courbe de Jordan tel que*

$$\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| = r_1\} \in \mathrm{int}(\gamma) \ , \ \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| = r_2\} \in \mathrm{ext}(\gamma) \ .$$

Alors, on a :

$$g(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k \ \textit{quand} \ r_1 < |z - z_0| < r_2,$$

où

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Preuve : Voir [6].

Théorème 1.1.4 *: [Théorème de Liouville]*

Si $g : \mathbb{C} \mapsto Y$ *est une fonction analytique et bornée, alors* g *est constante.*

Preuve : Voir [6].

Considérons maintenant l'exemple où $Y = \mathrm{BL}(X)$. Soient $T(z) \in \mathrm{BL}(X)$ une famille d'opérateur dans $\mathbb{C}$, si celle-ci est analytique dans un domaine Ω, alors on a

$$\int_\gamma T(z) dz x = \int_\gamma T(z) x dz, \ \forall x \in X,$$

pour toute courbe γ de Jordan dans Ω. En outre, si A est un opérateur dans $\mathrm{BL}(X)$, alors

$$A \int_\gamma T(z) dz = \int_\gamma A T(z) dz. \quad \square$$

1.1.1 La méthode de Nyström

La méthode de Nystrom a été initialement introduite pour traiter des approximations basé sur l'intégration numérique de l'opérateur intégral dans l'équation de Fredholm suivante :

$$\lambda u(x) = \int_a^b K(t,s)u(s)ds + f(t). \tag{1.2}$$

La solution résultante se trouve d'abord sur l'ensemble des points de noeud de la quadrature, ensuite il est étendu á tous les points de D au moyen d'une commande spéciale, et généralement assez précise : Formule d'interpolation. La méthode numérique est beaucoup plus simple à mettre en oeuvre sur un ordinateur, mais l'analyse des erreurs est plus sophistiquée compare aux méthodes de projection. La théorie résultante a pris une forme abstraite qui comprend également une analyse d'erreur des méthodes de projection. Bien que ces derniéres soient probablement encore mieux comprises comme des méthodes distinctes d'intérêt à part entiére. Soit le systeme d'intégration donnée par :

$$\int_a^b g(y)dy \simeq \sum_{j=1}^{n} w_j g(x_j), g \in C(a,b) \tag{1.3}$$

Nous supposons que pour tout $g \in C(a,b)$. les intégrales numériques convergent vers la valeur exacte de l'intégrale lorsque $n \to +\infty$ En utilisant la quadrature ci-dessus, on obtient une nouvelle équation :

$$\lambda u_n(x) - \sum_{j=1}^{n} w_j K(x,x_j)u_n(x_j) = f(x) \quad x \in [a,b] \tag{1.4}$$

Nous écrivons ceci comme une équation exacte avec une nouvelle fonction inconnue $U_n(x)$. Pour trouver la solution aux points de noeud, on remplace x par les noeuds x_i. Cela produit

$$\lambda u_n(x_i) - \sum_{j=1}^{q_n} w_j K(x_i, x_j) u_n(x_j) = f(x_i) \quad i = 1, ..., n \tag{1.5}$$

Qui est un système linéaire de la forme :

$$\lambda X - AX = b, X_i = u_n x_i, b_i = f(x_i), A_{i,j} = K(x_i, x_j)$$

La solution u_n sera calculée par la formule suivante :

$$u_n(x_i) = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{j=1}^{n} w_j K(x_i, x_j) x_j + f(x)\right] \quad x \in [a, b]$$

1.2 Décomposition spéctrale

Soient M et N deux sous espaces fermés dans X et $T \in \mathrm{BL}(X)$.

Définition 1.2.1 *On dit que (M, N) décompose T si, M et N décomposent X et ils sont invariants sous T c-á-d $T(M) \subset M$ et $T(N) \subset N$.*

Alors, la manière la plus pratique d'avoir une décomposition de T est par la constrction d'une projection P c-á-d un operateur $P : X \mapsto X$ qui vérifie $P^2 = P$. Si on note par $M = \mathrm{Im}(P)$ et $N = \mathrm{Ker}(P)$.

Proposition 1.2.1 *Le couple (M, N) décompose $T \Longleftrightarrow T$ commute avec P.*

Preuve

Supposans que le couple (M, N) decompose T

$$\begin{aligned} TPx &= Tx_M \\ PTx &= P(Tx_M + Tx_N) = Tx_M \end{aligned}$$

supposans que T commute avec P
Soit $x \in M; \exists y \in X$ telle que : $x = Py$.

Donc : $Tx = TPy = P(Ty) = Py_0 \in M$

Soit $x \in N$,

$Px = 0 \Rightarrow PTx = 0 = TPx = T0 = 0 \Rightarrow Tx \in N \quad \square$

Voyons maintenant le théorème qui établit la décomposition spéctrale d'un opérateur borné.

Théorème 1.2.1 *Si (M, N) decompose T, alors*

$$Sp(T) = Sp(T_{|M}) \cup Sp(T_{|N}) \ .$$

Preuve

Soit $z \in \mathrm{re}(T)$, si $y \in M$ tel que : $y = (T_{|M} - zI)x$, alors on peut voir que $x \in M$, donc $z \in \mathrm{re}(T_{|M})$. D'autre part, si on remplace M par N on outient que $z \in \mathrm{re}(T_{|M}) \cap \mathrm{re}(T_{|N})$, de plus

$$(T_{|M} - zI)^{-1} = (T - zI)^{-1}_{|M},$$

et

$$(T_{|N} - zI)^{-1} = (T - zI)^{-1}_{|N}.$$

Inversement, définissons la projection $P : X \mapsto M$. Pour $z \in \mathrm{re}(T_{|M}) \cap (T_{|N})$ et $x \in X$, on peut voir facilement que :

$$(T - zI)[(T_{|M} - zI)^{-1}P + (T_{|N} - zI)^{-1}(I - P)]x = x,$$

et

$$[(T_{|M} - zI)^{-1}P + (T_{|N} - zI)^{-1}(I - P)](T - zI)x = x.$$

D'où, $(T - zI)^{-1} = (T_{|M} - zI)^{-1}P + (T_{|N} - zI)^{-1}(P - I)$. Cela implique que $z \in \mathrm{re}(T)$. $\square$

Proposition 1.2.2 *L'opérateur $P_{\{\sigma\}}$ définit une projection.*

Preuve

Soient Γ_1 et Γ_2 deux contours de Cauchy séparent $\{\sigma\}$. On suppose que $\text{int}(\Gamma_1) \subset \text{int}(\Gamma_2)$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} P^2_{\{\sigma\}} &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_1} R(z,T)dz \int_{\Gamma_2} R(\lambda,T)d\lambda \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} R(z,\ T)R(\lambda,\ T)dzd\lambda. \end{aligned}$$

D'une part, on utilise la première identitée de la résolvante,
$R(z,\ T) - R(\lambda_0,\ T) = (z-\lambda_0)R(z,\ T)R(\lambda_0,\ T)$, $\forall z, \lambda_0 \in \text{re}(T)$.

Donc,

$$P^2_{\{\sigma\}} = Q + L.$$

Où,

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} \frac{1}{(z-\lambda)} R(\lambda,\ T)dzd\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} R(\lambda,\ T)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{(z-\lambda)}dz\right)d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} R(\lambda,T)d\lambda = P_{\{\sigma\}}. \end{aligned}$$

Et de l'autre part,

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} \frac{1}{(z-\lambda_0)} R(z,\ T)dzd\lambda_0 \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} R(z,T)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{1}{(z-\lambda_0)}d\lambda_0\right)dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ici, on a utilisé

$$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{z-\lambda} dz = 2\pi i \ \lambda \in \Gamma_2, \ \int_{\Gamma_2} \frac{1}{z-\lambda} dz = 0 \ z \in \Gamma_1.$$

Ces identitées sont vraies, du fait que int $(\Gamma_1) \subset \text{int}(\Gamma_2)$. De plus, le changement de l'ordre d'intégration est justifié par le fait que les intégrants sont des fonctions continues en $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. $\square$

On va construir maintenant nôtre théorèms principal.

Théorème 1.2.2 *Soit* $\{\sigma\}$ *une partie spéctrale dans* $Sp(T)$, *on met* $M = Im(P_{\{\sigma\}})$ *et* $N = Ker(P_{\{\sigma\}})$. *Alors,* $M \oplus N = X$, *et que les sous-espaces* $MetN$ *sont invariants sous* T, *en outre*

$$\sigma = Sp(T_{|M}), \ Sp(T) \backslash \sigma = Sp(T_{|N}).$$

Preuve

La première partie du théorème est facile à conclure. En effet, on sait que $P_{\{\sigma\}}$ est une projection, donc d'après la proposition 1.2.1 il nous suffit de montrer que $P_{\{\sigma\}}$ commute avec T,

$$\begin{aligned} TP_{\{\sigma\}} &= T\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(z,\ T)dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} TR(z,T)dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(z,T)Tdz \\ &= P_{\{\sigma\}}T, \end{aligned}$$

Mais, d'aprés la proposition 1.2.1 T commute avec R

Pour la deuxième partie, soit Γ un contour de Cauchy separant a $\{\sigma\}$. Pour $\lambda \notin \Gamma$ on définit,

$$S(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda - z} R(z,\ T)dz.$$

Néanmoins, on savait que $P_{\{\sigma\}}$ commute avec T, donc $P_{\{\sigma\}}$ commute avec $R(z,T)$, ce qui implique que, $P_{\{\sigma\}}$ commute avec $S(\lambda)$, d'où, d'après la proposition 1.2.1, on verra que M et N sont invariants sous $S(\lambda)$.

Calculons $S(\lambda)(T-\lambda I)$:

$$\begin{aligned}
S(\lambda)(T-\lambda I) &= (T-\lambda I)S(\lambda) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{R(z,T)(T-\lambda I)}{\lambda - z}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{1}{z-\lambda}\ I\ dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}R(z,\ T)dz \\
&= \begin{cases} -P_{\{\sigma\}} & \text{si } \lambda \in \text{ext}(\Gamma) \\ I - P_{\{\sigma\}} & \text{si } \lambda \in \text{int}(\Gamma)\ . \end{cases}
\end{aligned}$$

Prenons $\lambda \in \sigma$ alors, sans perte de généralité on suppose que Γ soit choisé de telle facon où λ est dans l'extérieur de Γ. D'après le calcul ci-dessus, on peut voir que

$$S(\lambda)(T-\lambda I)x = -x,\ \forall x \in M.$$

Or, $S(\lambda)M \subset M$ cela implique que $(T_{|M}-\lambda I)^{-1} = -S(\lambda)$. Donc, on obtient $\text{Sp}(T)\backslash\{\sigma\} \subset \text{re}(T_{|M})$. Si $\lambda = \{\sigma\}$, par le même raisonement on conclut que $\{\sigma\} \subset \text{re}(T_{|N})$ où

$$S(\lambda)(T-\lambda I)x = x,\ \forall x \in N.$$

D'après le théorème 1.2. 1

$$\text{Sp}(T) = \text{Sp}(T_{|M})\text{USp}(T_{|N})\ ,$$

on a alors,

$$\begin{aligned}
\{\sigma\} \subset \text{re}(T_{|N}) &\Rightarrow \text{Sp}(T_{|M}) \subset \text{re}(T) \\
&\Rightarrow \text{Sp}(T_{|M}) = \{\sigma\},
\end{aligned}$$

et $\mathrm{Sp}(T_{|N}) \subset \mathrm{Sp}(T)\backslash\{\sigma\}$. Finalement, afin de voir l'inclusion dans l'autre sens, on va faire le complémentaire de $\mathrm{Sp}(T)\backslash\{\sigma\} \subset \mathrm{re}(T_{|M})$ et $\lambda_0 \subset \mathrm{re}(T_{|N})$ dans $\mathrm{Sp}(T)$. $\square$

Chapitre 2

Approximation Spectrale Propriétés U & L

La difficulté numérique qui apparait en premier lieu lorsqu'on veut approcher le spectre d'un opérateur est l'impossiblité de bien construire la convergence d'une suite d'ensembles.

Pour cela, nous allons définir au sens précis adopté sous la propriétés U et L pour montrer la convergence spectrale.

Soient $T \in BL(X), \text{et}(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset BL(X)$, une suite d'opérateur, tel que :

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n - T \|_{BL(X)} = 0.$$

Dans cette section, nous allons montrer :

Propriétée U : Si $T_n \xrightarrow{n} T$ et $\lambda_n \in Sp(T_n)$ et $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ alors $\lambda \in Sp(T)$,

Propriétée L : Si $T_n \xrightarrow{n} T$ et $\lambda \in Sp(T)$, alors il existe $\lambda_n \in Sp(T)$ pour n assez grand tel que $\lambda_n \longrightarrow \lambda$.

2.1 Propriétée U

Pour démontrer la Propriété U on a besoin de démontrer le lemme et la proposition suivante :

Lemme 2.1.1 *de Neumann Soit X est un espace de Banach, $L \in BL(x)$, supposons que :*

$$\|L\| < 1$$

alors $(I - L)$ est une bijection sur X, et son inverse est un opérateur linéaire borné avec,

$$\|(I - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|}. \tag{2.1}$$

Preuve

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $BL(X)$, définie par :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} L^i, \quad n \geq 0,$$

avec, $L^0 = I$. Or,

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|\sum_{n+1}^{n+p} L^i\| \leq \sum_{n+1}^{n+p} \|L^i\| \leq \sum_{n+1}^{n+p} \|L\|^i.$$

D'oú

$$\|S_{n+p} - S_n\| \leq \frac{\|L\|^{n+1}}{1 - \|L\|}.$$

Par conséquent, on a :

$$\sup_{p\geq 1} \|S_{n+p} - S_n\| \longrightarrow 0, \quad quand \quad n \longrightarrow \infty.$$

Donc la suite (S_n) est une suite de Cauchy dans l'espace complet $BL(X)$. Alors il existe $S \in BL(X)$ tel que

$$\|S_n - S\| \longrightarrow 0, \quad quand \quad n \longrightarrow \infty.$$

On remarque aussi que,

$$(I-L)S_n = S_n(I-L) = I - L^{n+1},$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n(I-L) = \lim_{n\longrightarrow\infty}(I-L)S_n = \lim_{n\longrightarrow\infty}(I-L^{n+1}),$$

$$\|(I-L^{n+1}) - I\| = \|L^{n+1}\| \leq \|L\|^{n+1} \longrightarrow 0 \quad quand \quad n \longrightarrow \infty.$$

Ce qui nous donne,

$$(I-L)S = S(I-L) = I.$$

Ce qui nous permet de dire que l'opérateur $(I-L)$ est inversible et on a

$$S = (I-L)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} L^i.$$

Il reste à montrer (2.1). Or,

$$\|S_n\| = \|\sum_{i=0}^{n} L^n\| \leq \sum_{i=0}^{n} \|L\|^n \leq \frac{1}{1-\|L\|}.$$

Donc,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|S_n\| = \|S\| \leq \frac{1}{1-\|L\|},$$

$$\|(I-L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|L\|}. \qquad \square$$

Proposition 2.1.1 *Soit $z \in re(T)$ alors $z \in re(T_n)$, pour n assez grand.*

Preuve

Soient $z \in \mathrm{re}(T)$, et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}(T_n - zI) &= (T_n - T) + (T - zI) \\ &= [(T_n - T)(T - zI)^{-1} + I](T - zI).\end{aligned}$$

Comme pour n assez grand,

$$\|(T_n - T)(T - zI)^{-1}\| < 1.$$

En utilisant le lemme précédent, $((T_n - T)(T - zI)^{-1} + I)^{-1}$ existe et borné. Alors, $(T_n - zI)^{-1} = (T - zI)^{-1}[T_n - T)(T - zI)^{-1} + I]$, ce qui implique que $z \in \mathrm{re}(T_n)$ pour n assez grand. $\square$

Maintenat, nous allons démontrer la propriété U.

Théorème 2.1.1 *Soit $\lambda_n \in sp(T_n)$, tel que $\lambda_n \longrightarrow \lambda$, alors $\lambda \in sp(T)$.*

Preuve

Supposons que $\lambda \in re(T)$. Comme l'ensemble $re(T)$ est ouvert dans $\mathbb{C}$, alors on peut trouver une boule B de rayon ξ tel que $\exists B(\lambda, \xi) \subset re(T)$. Comme aussi, $\lambda_k \longrightarrow \lambda$ alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$|\lambda_n - \lambda| < \xi, \quad \forall n \geq n_0,\ \lambda_k \in B(\lambda, \xi) \subset re(T).$

D'apres la proposition 2.1.1 on a : $\lambda_n \in re(T_n)$ pour $n \geq n_0$, d'oú la contradiction, donc $\lambda \in sp(T)$. $\square$

2.2 Propritée L

Pour démontrér la propritée L on va montrer d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.2.1 *Soient P_1 et P_2 deux projections dans X.*

Si $\| (P_1 - P_2)P_1 \| \leq 1$ alors

$$dimIm(P_2) \leq dimIm(P_1)$$

En particulier, si

$$max\Big\{ \| (P_1 - P_2)P_1 \|, \| (P_1 - P_2)P_2 \| \Big\} \leq 1 \text{ alors}$$

$$dimIm(P_1) = dimIm(P_2)$$

Preuve

On considére $Q : P_1X \longrightarrow P_2X$, défini par :

$$\forall x \in P_1X, \ Qx = P_2x.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in P_1X, Qx &= P_2P_1x \\ &= P_1x - (P_1 - P_2)P_1x \\ &= x - (P_1 - P_2)P_1x. \end{aligned}$$

Montrons que Q est injective ; En effet, si $Qx = 0$ et $x \neq 0$ alors on a :

$$\begin{aligned} \| x \| &= \| (P_1 - P_2)P_1x \| \\ &\leq \| (P_1 - P_2)P_1 \| \| x \| \\ &< \| x \| . \end{aligned}$$

Contradiction, donc Q est injective, ce qui implique que

$$dim\mathrm{Im}(P_1) = dimIm(P_2). \quad \square$$

Les valeurs propres spectrale importantes sont les valeurs isolés dans Sp(T) qui sont multiplicitée algébrique finie.

Proposition 2.2.1 *soient Γ une courbe de jordan. $T_n \xrightarrow{n} T$ et $\lambda \in sp(T)$, une valeur isolée dans $Sp(T)$ de multiplicité algébrique finie, alors il existe une suite $(\lambda_n)_{n \geq n_0}$ telles que $\lambda_n \in int(\Gamma) \cap Sp(T_n)$ et $\lambda_n \longrightarrow \lambda$. De plus $dim(ImP_\lambda) = dim(ImP_{\lambda_n})$.*

Preuve
Soit λ une valeur isolée dans Sp(T), notons par Γ courbe de Jordan. Soit $z \in \Gamma$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$(T_n - zI)(I - \frac{1}{z}(T - T_n)) = (T - zI)(I - \frac{1}{z}R(z)(T - T_n)T_n)$,

$(I - \frac{1}{z}(T - T_n))(T_n - zI) = (T - zI)(I - \frac{1}{z}R(z)(T - T_n)T_n)$.

On definit l'opérateur :

$R_n(z) = (I - \frac{1}{z}R(z)(T - T_n)T_n)^{-1}R(z)(I - \frac{1}{z}R(z)(T_n - T))$.

Donc,

$$\begin{aligned} \| (P_n - P)P_n \| &= \| \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_n(z)(T_n - T)R(z)P_n dz \| \\ &\leq c \| (T_n - T)P_n \| . \end{aligned}$$

Car, on utilisé $R_n(z) = \frac{1}{z}(R_n(z) - I)$, et $\int_\Gamma \frac{1}{z}dz = 0$.

De plus on a

$\| (T_n - T)P_n) \| \leq c' \| (T_n - T)T_n) \|$.

On applique le lemme 2.2.1 et on a :

$$dim M_n \leq dim M.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \| (P_n - P)x \| &= \| \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_n(z)(T - T_n)R(z)x dz \| \\ &\leq C \| (T_n - T)R(z_0)x \| . \end{aligned}$$

Comme $\| P_n - P \| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$
Donc :

$$dim M_n \geq dim M \qquad \Box$$

2.3 Estimation de l'Erreur

On définit

$$\begin{aligned}
\alpha_1(C) &= sup\{\| R(z) \|: z \in C\} < \infty \\
\alpha_2(C) &= sup\{\| R_n(z) \|: z \in C, n \geq n_0\} < \infty \\
\tilde{\alpha}_1(C) &= sup\{\| R(z)_{|M} \|: z \in C\} \\
\tilde{\alpha}_2(C) &= sup\{\| R_n(z)_{|M_n} \|: z \in C, n \geq n_0\} \\
\beta_1(C) &= sup\{\| R(\theta, z) \|: z \in C\} \\
\beta_{2,n}(C) &= sup\{\| R(\theta_n, z) \|: z \in C\}
\end{aligned}$$

Lemme 2.3.1 *Soit P et $\tilde{P}$ sont deux brojection telle que $P, \tilde{P} \in BL(x)$ Si :*

$\rho(P - \tilde{P}) < 1, Y = R(P) \quad \tilde{Y} = R(\tilde{P})$

$\tilde{P}_{|Y,\tilde{Y}}$ *sont bijective et* $ran(P) = ran(\tilde{P})$

Preuve :

. Soit $y \in Y$ avec $\tilde{P}y = 0$ puisque $\rho(P - \tilde{P}) < 1$ alors $1 \in re(P - \tilde{P})$

Comme $[I - (P - \tilde{P})]y$ est inversible alors :

$$\begin{aligned}
[I - (P - \tilde{P})]y &= [y - Py + \tilde{P}y] * P \\
&= py - py + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Avec $P^2 = P$

Donc $\tilde{P}_{|Y,\tilde{Y}}$ est injective.

. Soit $\tilde{y} \in \tilde{Y}, \rho(P - \tilde{P}) < 1$ $[I - (P - \tilde{P})]y$ est inversible sur BL(X).

$$\tilde{y} = [I - (\tilde{p} - P)]x$$

Mais

$$\begin{aligned}
\tilde{y} &= \tilde{P}\tilde{y} \\
&= \tilde{P}[I - (\tilde{P} - P)]x \\
&= \tilde{P}x - \tilde{P}x + \tilde{P}Px \\
&= \tilde{P}_{|Y,\tilde{Y}}Px
\end{aligned}$$

Donc $\tilde{P}_{|Y,\tilde{Y}}$ est surjective.

$ran(P) = dim\mathrm{Im}(P) = dim\mathrm{Im}(\tilde{P}) = ran(\tilde{P})$ $\square$

Proposition 2.3.1 *soit* $T_n \xrightarrow{n} T$ *alors*

$\| (T_n - T)_M \| \longrightarrow 0$ *pour tout* n

$\| (P_n - P)_M \| \leq \frac{l(C)}{2\pi}\alpha_1(C)\alpha_2(C) \| (T_n - T)_{|M} \|$

de plus si rang(P) est nul , alors

$\| (P_n - P)\varphi \|_\infty \leq \frac{l(C)}{2\pi}\beta_1(C)\alpha_2(C) \| (T_n - T)\varphi \|$

Preuve

si $T_n \xrightarrow{n} T$ alors $\| T(T_n - T)_{|M} \| \leq \| T(T_n - T) \| \longrightarrow 0$ et $\| T(T_n - T)_{|M_n} \| \leq \| T(T_n - T) \| \longrightarrow 0$

Si $0 \in ext(C)$, on voit :

$$\begin{aligned}
\| (T_n - T)_{|M} \| &\leq \| (T_n - T)P \| \longrightarrow 0 \\
\| (T_n - T)_{|M_n} \| &\leq \| (T_n - T)P_n \| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Pour tout n assez grand, on a :

$$\begin{aligned}(P_n - P)_{|M} &= (\frac{1}{2\pi i}\int_C R_n(z)(T_n - T)R(z)dz)_{|M} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C R_n(z)(T_n - T)_{|M}R(z)_{|M}dz\end{aligned}$$

Puisque $R(z)(M) \subset M$, $\forall z \in C$.

d'oú :

$$\| (P_n - P)_{|M} \| \leq \frac{l(C)}{2\pi}\alpha_2(C) \| (T_n - T)_{|M} \| \tilde{\alpha_1}(C).$$

De même comme $R_n(z)(M_n) \subset M_n$, $\forall z \in C$. On obtient :

$$(P_n - P)_{|M_n} = \frac{1}{2\pi i}\int_C R(z)(T_n - T)_{|M_n}R_n(z)_{|M_n}dz$$

Pour que :

$$\| (P_n - P)_{|M_n} \| \leq \frac{l(C)}{2\pi}\alpha_1(C) \| (T_n - T)_{|M_n} \| \tilde{\alpha_2}(C).$$

Ensuite, $z \in C$, nous avons $R(z)\varphi = \varphi R(\theta, z)$ et $R_n(z)\varphi_n = \varphi_n R(\theta_n, z)$, de sorte que :

$$\begin{aligned}(P_n - P)\varphi &= \frac{1}{2\pi i}\int_C R_n(z)(T_n - T)\varphi R(\theta, z)dz \\ (P_n - P)\varphi_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_C R(z)(T_n - T)\varphi_n R(\theta_n, z)dz\end{aligned}$$

D'oú les estimations voulus $\| (P_n - P)\varphi \|_\infty$ et $\| (P_n - P)\varphi_n \|_\infty$ suivez. $\square$

D'abord nous considérons le cas quand λ consiste en une seule valeur propre simple de T.

Théorème 2.3.1 *Soit λ valeur propre de T, telle que $0 < \epsilon < dist(\lambda, Sp(T)\backslash 0)$ et C_ϵ le cercle orienté positivement avec le centre λ et rayon ϵ Suppose que :*

$$T_n \xrightarrow{n} T$$

Soit φ un vecteur propre de T correspondant á λ pour tout $n \geq n_0$ et soit φ_n un vecteur propre de T_n correspondant á λ_n. Puis, à chaque n assez grand, $P\varphi_n$ est un vecteur propre de T correspondant á λ, $P_n\varphi$est un vecteur propre de T_n correspondant á λ_n, et

$| \lambda_n - \lambda |\leq 2\epsilon min\left\{ \alpha_1(C_\epsilon)\frac{\|(T_n-T)\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|}, \alpha_2(C_\epsilon)\frac{\|(T_n-T)\varphi\|}{\|\varphi\|} \right\}$ *qui tends vers 0.*

Aussi, pour tout n assez grand

$$\| \varphi_n - P\varphi_n \|\leq \frac{\epsilon\alpha_1(C_\epsilon)}{dist(\lambda_n, C_\epsilon)} \| (T_n - T)\varphi_n \| .$$

Si $(\| \varphi_n \|)$ est bornée, alors $\| (T_n - T)\varphi_n \|\longrightarrow 0$. Pour n assez grand, soit c_n non complexe telle que $P_n\varphi = c_n\varphi_n$, alors :

$$\| c_n\varphi_n - \varphi \|\longrightarrow 0.$$

Aussi, si $\varphi_n = \varphi/c_n$, alors $\varphi_{(n)}$ est un vecteur propre de T correspondant á λ telle que $P_n\varphi_{(n)}$. On a $\| \varphi_{(n)} \|\leq 2 \| \varphi_n \|$ pour tout n assez grand

$$\frac{\| \varphi_n - \varphi_{(n)} \|}{\| \varphi_{(n)} \|} \leq \alpha_2(C_\epsilon)\frac{\| (T_n - T)\varphi \|}{\| \varphi \|}.$$

En effet, si φ_n^* de T_n^* correspondant λ_n telle que $\langle\varphi, \varphi_n^*\rangle = 1$ alors $c_n = \langle\varphi, \varphi_n^*\rangle$

Preuve

$\forall n \in \mathbb{N}$, dim $M = 1 = dimM_n$ on a, d'aprés proposition 2.3.1 :

$M = N(T - \lambda I)$ et $M_n = N(T_n - \lambda_n I)$ et d'aprés le lemme 2.3.1 on a :

$\forall n$, $Q_n = P|_{M_n,M}$ et bijective, $P\varphi_n$ est non nul de $N(T-\lambda I)$, i.e $P\varphi_n$ vecteur propre de T correspondant á λ.

En outre, $\| (P_n - P)P_n \| \leq \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc $x \in M_n$, et

$$\begin{aligned} \| x \| - \| Px \| &\leq \| x - Px \| \\ &= \| (P_n - P)P_n x \| \\ &\leq \frac{\| x \|}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\|Q_n^{-1}\| \leq 2$ pour tout n assez grand.

Notons que $Q^{-1}P\varphi_n = \varphi_n$, $P_2 = P$ et $PT = \lambda P$, on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda_n\varphi_n - \lambda\varphi_n &= Q_n^{-1}p(T_n\varphi_n - pT\varphi_n) \\ &= Q_n^{-1}p(T_n - pT)\varphi_n \end{aligned}$$

Donc pour tout n assez grand

$$\|\lambda_n\varphi_n - \lambda\varphi_n\| \leq 2\,\|p\|\,\|(T_n - T)\varphi_n\|$$

Et pour que :

$$|\lambda_n - \lambda| \leq 2\epsilon\alpha_1(C_\epsilon)\frac{\|(T_n - T)\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|_{1\times 1}}$$

Alors, on considérant $\theta_n = [\lambda_n] \in C_\epsilon$

On voit que :

$$\beta_{2,n}(C_\epsilon) = \sup\left|\frac{1}{\lambda_n - Z}\right|$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - P\varphi\| &= \|(P_n - P)\varphi_n\| \\ &\leq \frac{l(C_\epsilon)}{2\pi}\alpha_1(C_\epsilon)\sup\frac{1}{|\lambda_n - z|}\,\|(T_n - T)\varphi_n\| \\ &= \frac{\epsilon\alpha_1(C_\epsilon)}{dist(\lambda_n, C_\epsilon)}\,\|(T_n - T)\varphi_n\| \end{aligned}$$

Tant que : $\lambda_n \to \lambda$, on a $dist(\lambda_n, C_\epsilon) \geq \frac{\epsilon}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si $\|\varphi_n\| \leq C$ alors :

$$\|(T_n - T)\varphi_n\| \leq \|(T_n - T)|_M\| \to 0 \text{ et donc } \quad \|\varphi_n - P\varphi_n\| \to 0$$

En changeant les rôles de T et T_n nous voyons que pour tout n assez grands $P_n|_{M,M_n} : M \to M_n$ est bijective $P_n\varphi$ est vecteur propres de T_n corespondont à λ_n

$\left\|\left(P_{n|_{M,M_n}}\right)^{-1}\right\| \leq 2,$

et

$$|\lambda_n - \lambda| \leq 2\epsilon\alpha_2(C_\zeta)\frac{\|(T_n - T)\varphi\|}{\|\varphi\|},$$

puisque $dim\, M_n = 1$, on a

$$P_n\varphi = C_n\varphi_n.$$

Aussi

$$\|C_n\varphi_n\| = \|P_n\varphi - P\varphi\| = \|(P_n - P)P\varphi\| \leq \|(P_n - P)P\| \, \|\varphi\| \to 0.$$

Puisque $\varphi_n = \varphi/C_n$, on voit que :

$$P_n\varphi_{(n)} = P_n\varphi/C_n = \varphi_n$$

Comme $P_{n|M,M_n}$ est injective, $\varphi_{(n)}$ est unique de T, tel que : $P_n\varphi_{(n)} = \varphi_n$ et on a : $\| \varphi_{(n)} \| \leq 2 \| \varphi_n \|$.

Aussi, en considérant $\theta = [\lambda] \in \mathbb{C}$, on a :

$$\beta_1(C_\epsilon) = \sup_{z\in C_\epsilon} \frac{1}{|\lambda - z|}$$

Et donc par la proposition 2.3.1 on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi_n - \varphi_{(n)}\right\| &= \frac{1}{|C_n|}\left\|(p_n - p)\varphi\right\| \\
&= \frac{l(C_\epsilon)}{2\pi\,|C_n|}\alpha_2(C_\epsilon)\sup\frac{1}{|\lambda - z|}\left\|(T_n - T)\varphi\right\| \\
&= \frac{\alpha_2(C_\epsilon)}{|n|}\left\|(T_n - T)\varphi\right\| \\
&= \alpha_2(C_\epsilon)\frac{\|(T_n - T)\varphi\|}{\|\varphi\|}
\end{aligned}$$

Avec $l = 2\pi r, r \in \mathbb{Z}$, donc

$\|\varphi_n\| \leq C\beta_1(C_\epsilon)\,\|\varphi_n\| \leq C\frac{l(C_\epsilon)}{2\pi} = 1$, pour que :

$$\frac{\left\|\varphi_n - \varphi_{(n)}\right\|}{\|\varphi\|} \leq \alpha_2(C_\epsilon)\frac{\|(T_n - T)\varphi\|}{\|\varphi\|}$$

$0 \neq \varphi \in M\,, 0 \neq \varphi \in M_n$ on a :

$$\begin{aligned}
\|(T_n - T)|_M\| &= \frac{\|(T_n - T)\varphi\|}{\|\varphi\|} \\
\|(T_n - T)|_{M_n}\| &= \frac{\|(T_n - T)\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|}
\end{aligned}$$

Par la proposition 3.2.1 λ_n est une valeur propre de T_n^* et P_n^* est une projection

φ_n^* vecteur propre de T_n^* corespondant à λ_n tq $< \varphi_n, \varphi_n^* >= 1$ alors :

$$C_n = \langle C_n\varphi_n, \varphi_n^*\rangle = \langle P_n\varphi_n, \varphi_n^*\rangle = \langle \varphi, P_n^*\varphi_n^*\rangle = \langle \varphi, \varphi_n^*\rangle \quad \square$$

Chapitre 3

La Méthode Itérative

Les méthodes directe développées pour le calcule spectrale donnent des résultats limités. Puisque ces résultats sont toujours liées á la taille de la matrice construite à partir de la discrétisation ce qui génère des problèmes techniques d'ordre numérique causé par la dimension de cette matrice. Donc, on utilise les méthodes itératives pour résoudre ces difficultés oú on fixe la taille(oú la dimension) de la matrice discrétisée puis on construit une suite itérative qui nous permet la diminution de l'erreur obtenue par la méthode directe.

3.1 Présentation de la méthode

La méthode itérative spectrale est donnée par :

$$\text{Soit} \begin{cases} \varphi_n^0 = \varphi_n \\ \\ \lambda_n^k = < T\varphi_n^{k-1}, \varphi_n^* > \\ \\ \varphi_n^k = \varphi_n^{k-1} + S_n(\lambda_n^k \varphi_n^{k-1} - T\varphi_n^{k-1}) \end{cases}$$

On a :

$< S_n x, \varphi_n^* >=< S_n x, P_n^* \varphi_*^n >=< P_n S_n x, \varphi_n^* >=< 0, \varphi_n^* >= 0.$

En plus,

$$\begin{aligned} < \varphi_n^{(0)}, \varphi_n^* > &= < \varphi_n, \varphi_n^* = 0. \quad \forall \quad k = 1.2... \\ < \varphi_n^{(k)}, \varphi_n^* > &= < \varphi_n^{(k-1)}, \varphi_n^* > + < S_n(\lambda_n^k \varphi_n^{k-1} - T\varphi_n^{k-1}) > \\ &= < \varphi_n^{(k-1)}, \varphi_n^* > \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc :

$$< \varphi_n^{(k)}, \varphi_n^* >= 1 \qquad \forall k = 0.1.2....... \tag{3.1}$$

$$\lambda_n^k - \lambda =< (T - T_n)(\varphi_n^{(k-1)} - \varphi_{(n)}, \varphi_n^* > k = 0.1.2....... \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} \forall k = 1.2..... \\ \varphi_n^{(k)} - \varphi_{(n)} = S_n[(T - T_n)(\varphi_n^{(k-1)} - \varphi_{(n)}) + (\lambda_n^k - \lambda)\varphi_n^{(k-1)} - (\lambda_n - \lambda)\varphi_{(n)} \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\{ \ \alpha_2 = sup \| \ R_n(z) \ \|, z \in C, \forall n \geq n_0 < \infty \tag{3.4}$$

Pour demontré, le théoreme de la convergence on demontré le lemme suivant :

Lemme 3.1.1 *On supose que* $T_n \xrightarrow{n} T$, *alors*

a) P_n *et* S_n *sont bornée, en plus*

$$\| \ (T_n - T)S_n T_n \ \| \leq \tilde{c} \ \| \ (T_n - T)T_n \ \|, \quad \forall \tilde{c} = cte$$

b) i) $(\| \ \varphi_{(n)} \ \|)$ *est une suite bornée* $\Longleftrightarrow$ $(\| \ \varphi_n \ \|)$ *est une suite bornée*

ii)$(\| \ \varphi_n^* \ \|)$ *est une suite bornée* $\Longleftrightarrow$ $(\| \ \varphi_n \ \|)$ *est une suite bornée*

preuve

Soit C le cercle avec le centre λ et le rayon ϵ, oú

$0 < \epsilon < dist(\lambda, Sp(T)\backslash 0)$

$\lambda_n \longrightarrow \lambda, \exists n_0$ telle que $\mid \lambda_n - \lambda \mid \leq \frac{\epsilon}{2}, \forall n \geq n_0$

puis :

$$\begin{aligned}
\| S_n \| &= \| \frac{-1}{2\pi i} \int_C R_n(z) \frac{dz}{\lambda_n - z} \| \\
&\leq \frac{l(C)}{2\pi} \frac{\alpha_2(C)}{dist(\lambda_n, C)} \\
&\leq \epsilon \frac{\alpha_2(C)}{\varepsilon/2} \\
&= 2\alpha_2(C)
\end{aligned}$$

Avec $\alpha_2 = sup \| R_n(z) \|, z \in C, \forall n \geq n_0 < \infty$

$(\| S_n \|)$ est bornée, alors $S_n T_n = T_n S_n$

Ce qui implique :

$$\| (T_n - T) S_n T_n \| \leq \| (T_n - T) T_n \| \| S_n \|$$

Donc, on peut suposons que le cercle C ne passe pas par l'origine, si $\epsilon \neq \mid \lambda \mid$

$$\begin{aligned}
T_n R_n(z) &= I + z R_n(z) \\
S_n &= -\frac{1}{2\pi i} \int_C R_n(z) \frac{dz}{\lambda_n - z} \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_C [T_n R_n(z) - I] \frac{dz}{z(\lambda_n - z)} \\
&= -\frac{1}{2\pi i} [T_n \int_C R_n(z) \frac{dz}{z(\lambda_n - z)} - I \int_C \frac{dz}{z(\lambda_n - z)}]
\end{aligned}$$

On voit la resultat si $\tilde{c} \geq \| S_n \|, \forall n \geq n_0$

b) i) $\forall n$

$$P_n \varphi_{(n)} = \langle \varphi_{(n)}, \varphi_n^* \rangle \varphi_n = \varphi_n$$

on a :

$$\| \varphi_n \| = \| P_n \varphi_{(n)} \| \leq \| P_n \| \| \varphi_{(n)} \|$$

Car (P_n) est une suite bornée,

d'autre part

$$\begin{aligned} \| P_n \varphi - \varphi \| &= \| (P_n - P) P \varphi \| \\ &\leq \| (P_n - P) P \| \| \varphi \| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Et aussi

$$\| \langle \varphi, \varphi_n^* \rangle \varphi_n \| = \| P_n \varphi \| \longrightarrow \| \varphi \| \neq 0$$

D'oú

$$\frac{\| \varphi \|}{2} \leq | \langle \varphi, \varphi_n^* \rangle | \| \varphi_n \|$$

Et,

$$\begin{aligned} \| \varphi_{(n)} \| &= \| \frac{\varphi}{\langle \varphi, \varphi_n^* \rangle} \| \\ &\leq 2 \| \varphi_n \| \end{aligned}$$

$\forall n$ assez grands, la suite $(\| \varphi_{(n)} \|)$ est bornée ssi la suite $(\| \varphi_n \|)$ est bornée

ii) Noter que pour tout n assez grand

$$\begin{aligned} \| P_n \| &= sup \| P_n x \| ; x \in X, \| x \| \leq 1 \\ &= sup \| \langle x, \varphi_n^* \rangle \varphi_n \| ; x \in X, \| x \|, \| x \| \leq 1 \\ &= \| \varphi_n^0 \| \| \varphi_n \| \end{aligned}$$

Puisque chaque P_n est une projection.

Nous avons $\| P_n \| < 1$ pour tout n assez grand, la suite $(\| P_n \|)$ est bornée.

$(\| \varphi_n^* \|)$ est bornée ssi la suite $(\| \varphi_n \|)$ est bornée.$\square$

3.2 Convergence de la méthode

Théorème 3.2.1 *Si* $T \xrightarrow{n} T$ *alors* $\exists\ n_1$ *tel que pour tout* $n \geq n_1$ *et* $k = 0, 1, 2....$

$$\max\left\{ \mid \lambda^{(k)} - \lambda \mid + \parallel \varphi_n^{(k)} - \varphi_n \parallel \right\} \leq (\beta \parallel T_n - T \parallel)^{k+1}.$$

preuve

D'aprés le lemme 3.1.1 $\parallel S_n \parallel$ est bornée, $\parallel \varphi_n \parallel$ est bornée et les zéros sont bornée

on note $\parallel \varphi_n \parallel \leq \gamma$, $\parallel \varphi_n^{\alpha} \leq p$, $\parallel \varphi_{(n)} \leq q \parallel$, $\parallel S_n \parallel \leq s$ et $\parallel T_n - T \parallel \leq t$

soit $p_1 = max\{1, \gamma\}$

D'aprés le lemme 3.1.1, on a

$$\begin{cases} T \xrightarrow{n} T, & \forall n \geq n_0 \\ \max\{\mid \lambda_n - \lambda \mid, \parallel \varphi_n - \varphi_{(n)} \parallel\} \leq c\gamma_1 \parallel T_n - T \parallel \end{cases}$$

soit $\beta = \max\{c\gamma_1, p, s(1 + p + q + pq + c\gamma_1)\}$,

on choissi $n \leq n_1$ tel que :

$$\parallel T_n - T \parallel \leq \frac{1}{\beta} \quad \forall n \geq n_1.$$

Fixons $n \geq n_1$ nous montrons par l'absured sur k que :

$max\{\mid \lambda_n^k - \lambda \mid, \parallel \varphi_n^k - \varphi_{(n)} \parallel\} \leq (\beta \parallel T_n - T \parallel)^{k+1}$

Depuis $\lambda_n^{(0)} = \lambda_n \quad \varphi_n^{(0)} = \varphi_n$

$$\begin{aligned} max\{1, \gamma\} &= c\gamma_1 \\ &\leq \beta \quad \text{et} \quad n_1 \leq n_0 \end{aligned}$$

Par équation (2), on a :

$$\begin{aligned}
\mid \lambda_n^{(k+1)} - \lambda \mid &\leq \| \varphi_n^* \| \| T_n - T \| \| c\varphi_n^{(k)} - \varphi_{(n)} \| \\
&\leq p \| T_n - T \| (\beta \| T_n - T \|)^{k+1} \\
&\leq (\beta \| T_n - T \|)^{k+2}
\end{aligned}$$

Pour $p \leq \beta$, Ensuite par l'eq (3) :

$$\begin{aligned}
\| \varphi_n^{(k)} - \varphi_{(n)} \| &= \| S_n[(T_n - T)(\varphi_n^{(k)} - \varphi_{(n)}) + (\lambda_n^{(k+1)} - \lambda)\varphi_n^{(k)} \\
&+ (\lambda - \lambda_n)(\varphi_n^{(k)} - \varphi_{(n)})] \| \\
&\leq \| S_n \| (\| T_n - T \| \| \varphi_n^{(k)} - \varphi_{(n)} \| + \mid \lambda_n^{(k+1)} - \lambda \| \| \varphi_n^{(k)} \| \\
&+ \mid \lambda - \lambda_n \| \| \varphi_n^{(k)} - \varphi_{(n)} \|)
\end{aligned}$$

Noter que

$\mid \lambda_n^{(k+1)} - \lambda \mid \leq \| T_n - T \| \| \varphi_n^{(k)} - \varphi_{(n)} \| \| \varphi_n^* \|$

$\mid \lambda_n - \lambda \mid \leq c\gamma_1 \| T_n - T \|$

Pour

$\beta \| T_n - T \| \leq 1 \quad \forall n \geq n_1.$

On a :

$$\begin{aligned}
\| \varphi_n^{(k)} - \varphi_{(n)} \| &\leq (\beta \| T_n - T \|)^{k+1} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\| \varphi_n^{(k)} \| &\leq \| \varphi_n^{(k)} - \varphi_{(n)} \| + \| \varphi_{(n)} \| \\
&\leq 1 + q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\| \varphi_n^{(k+1)} - \varphi_{(n)} \| &\leq s(1+p+q+pq+c\gamma_1) \| T_n - T \| \| \varphi_n^{(k)} - \varphi_{(n)} \| \\ &\leq \beta \| T_n - T \| (\beta \| T_n - T \|)^{k+1} \\ &\leq (\beta \| T_n - T \|)^{k+2}\end{aligned}$$

Puisque $s(1+p+q+pq+c\gamma_1) \leq \beta$

Ainsi l'inégalité désirée est vraie pour $k+1$ l'absured est complet.

Ensuite, si $\lambda \neq 0$ alors par le lemme 3.1.1 on a : $\forall n \geq n_0$

$max\{| \lambda_n - \lambda |, \| \varphi_n - \varphi_{(n)} \|\} \leq c\gamma_1 \| T_n - T \|$

D'ou, si on prend

$\alpha = c\gamma_1 \quad \beta = max\{p, s(1+p+qp+\alpha \| T \|)\} \quad \forall n_1 \geq n_0$

$\| T_n - T \| \leq \frac{1}{\alpha}, \quad \| T_n - T \| \leq \frac{1}{\beta} \quad \forall n \geq n_0$

Donc

$$max\{| \lambda_n^{(k)} - \lambda |, \| \varphi_n^{(k)} - \varphi_{(n)} \|\} \leq \alpha \| (T_n - T)T \| (\beta \| T_n - T \|)^k, \forall k = 0, 1, .. \square$$

Chapitre 4

Méthode Numérique

Dans ce chapitre nous allons présenter les resultats numeriques appliquées á cet opérateur intgrale. Nous considerons l'opérateur compact T definit par :

$$\forall u \in X = \mathcal{C}[0,1], t \in \mathcal{C}[0,1], \forall s \quad Tu(s) = \int_a^b k(s,t)u(t)dt \qquad (4.1)$$

4.1 Exemple 1 :

Nous allons reprendre l'exemple presenté dans l'article [2], oú

$$k(t,s) = 2\sqrt{\mid \sin 10\pi t - \sin 10\pi s \mid}, 0 \leq t, s \leq 1.$$

Remarque 4.1.1 *Tout les concepts développés peuvent parfaitement fonctionner sous la notion de ν-convergence définit par :*
$\sup \| T_n \| < \infty, \quad \| (T - T_n)T \| \to 0, \quad \| (T - T_n)T_n \| \to 0.$

Pour cela, nous allons utiliser la méthode de Nyström qui converge au sens ν seulement (i.e. la ν -convergence ne nous donne pas la convegence en norme), puisqu'elle est facile à developper comparer aux autres méthodes qu'on a pas eu suffisament du temps de programmer.

Pour construire une approximation numérique du vecteur propre $u(t)$ de l'équation (3.1), on construit une subdivision $\{t_i\}_{0\leq i\leq n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;$t_i = a + ih$; $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Dans le but que $u_i \simeq u(t_i)$, On applique la méthode de Nyström, en utilisant la quadrature donnée dans le chapitre 1. On va approcher l'opérateur T par l'opérateur T_n, ce qui donne :

$$T_n u(s) = \sum_{j=0}^{n} w_j k(s, t_j) u(t_j).$$

En remplaçant dans (4.1), s par t_i pour $0 \leq i \leq n$, on récupère le système suivant :

$$\sum_{j=0}^{n} w_j k(t_i, t_j) u_j = \lambda u_i, \quad pour 0 \leq i \leq n,$$

est equivalent á :

$$AU = \lambda U,$$

oú

$$A = (a_{ij})_{i,j=0\ldots n} = w_j k(t_i, t_j),$$

et U est le vecteur propre de la matrice A associe á la valeur propre λ qui sera elle même valeur propre λ qui sera de T_n.
Le vecteur propre de T_n correspondant λ_n est calculer par :

$$\varphi(s) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{n} w_j k(s, t_j) u_j, \quad \lambda \neq 0.$$

Sauf pour $\lambda = 0$, dans ce cas le calcule du vecteur propre est imposible.

Les résultat de la méthode direct :

n	$\max\lambda$	φ
5	$3.6362e-07$	-0.4800 -0.3838 -0.3497 -0.3497 -0.3838 -0.4800

Les résultats de la méthode itérative :

n ep	λ^*	φ^*	Nombre d'itération
5 10^{-6}	$7.7935e-07$	-0.4821 -0.3839 -0.3489 -0.3485 -0.3827 -0.4802	6

4.2 Exemple 2 :

Soit l'operateur compact définit par :

$$T_1 u(s) = \int_0^1 (s+t)u(t)dt = \lambda u(s)$$

cela implique que :
$s\int_0^1 u(t)dt + \int_0^1 tu(t)dt = \lambda u(s)$ avec $s\int_0^1 u(t)dt = \alpha, \int_0^1 tu(t)dt = \beta,$
on intégre sur $[0,1]$, et on obtient : $\frac{1}{2}\alpha + \beta = \lambda\alpha$

On multiplé par s et on intégre sur $[0,1]$, on a

$$\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \lambda\beta.$$

Ce qui équivalant à : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

On calcule les valeurs propres exactes et on obtient :
$\lambda_{ex1} = 1.0774, \quad \lambda_{ex2} = -0.0774.$

Dans cet exemple nous allons étudier le spectre de T qui a poue nouyau :
$k(t,s) = t + s + \exp(-1000ts)$. On a :

$$\begin{aligned} \| T - T_1 \| &= \sup_{s\in[01]} \int_0^1 \exp^{-1000st} dt \\ &= \sup_{s\in[01]} \frac{-\exp^{-1000st}}{1000s} \Big|_0^1 \\ &= \sup_{s\in[01]} \frac{1-\exp^{-1000s}}{1000s} \\ &\leq 0.1 \end{aligned}$$

Le spectre de T n'est pas connu mais il est composé de valeurs propres prochent de celle de T_1.

n ep	λ_{dir}	λ^* nbr d'itération
5 10^{-6}	1.2478	1.1003 7
10 10^{-6}	1.1661	1.1004 7
50 10^{-6}	1.0958	1.1004 7

Bibliographie

[1] Ahues, Mario, Alain Largillier, and Balmohan Limaye. *Spectral computations for bounded operators. CRC Press, 2001.*

[2] Ahues, Mario, Filomena d'Almeida, and Mauricio Telias. *"Iterative refinement for approximate eigenelements of compact operators." RAIRO. Analyse numérique 18.2 (1984) : 125-135.*

[3] Ahues, Mario, Mauricio Telias, and Centre National de la Recherche Scientifique, LA 7, Laboratoire d'Informatique et de Mathematique Appliquees de Grenoble Grenoble (FRANCE), Universite de Grenoble 1, Institut National Polytechnique de Grenoble Grenoble (FRANCE),. *"Quasi-Newton iterative refinement techniques for the eigenvalue problem of compact linear operators." Rapport de Recherche IMAG 325 (1982).*

[4] Atkinson, K., and W. Han. *" Theoretical Numerical Analysis. A Functional Analysis Framework Springer, New York, 2001." Numerical Algorithms 27.1 (2001) : 116.*

[5] Atkinson, Kendall E. *"The numerical solution of boundary integral equations." INSTITUTE OF MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS CONFERENCE SERIES. Vol. 63. Oxford University Press, 1997.*

[6] Audin, Michéle. *"Suites de l'itération." Fatou, Julia, Montel,. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. 105-123.*

[7] Chatelin, Françoise. *Spectral approximation of linear operators. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011.*

[8] Kato, Tosio. *"A short introduction to perturbation theory for linear operators." (1982).*

[9] Rudin, W. *"Real and Complex Analysis McGraw-Hill (1987)." Analyse réelle et complexe : cours et exercices (1998).*