République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

MKW. 244

جامعة 08 ماي 45 قالمة
مصلحة الإعارة الخارجية
كلية الرياضيات، الإعلام الآلي و علوم المادة

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP et Analyse numérique**

Par : **NACER Nedjla**

Intitulé

Etude de certains problèmes fractionnaires relative à la dérivée de Hadamard

Dirigé par : Dr. Boulares Hamid

Devant le jury

PRESIDENT	Dr:	TABOUCHE Noura	MCB	Uni-Guelma
RAPPORTEUR	Dr:	BOULARES Hamid	MCA	Uni-Guelma
EXAMINATEUR	Dr:	MELLAL Remaissa	MCB	Uni-Guelma

Session Juin 2018

Table des matières

REMERCEMENTS

Toute mes gratitude et remerciements avant tout vont à Allah qui mes a donné la santé, la force, la patience, le courage et la volonté de finir ce travail.

Mesvifs remerciements vont à mes encadreur madameAISSAOUI FATIMA pour son encadrement et ses conseils scientifiques tout le long de ce travail.

Aussi

Mes remerciements vont aux membres du jury d'avoir honoré notre soutenance et pour l'effort fourni afin de juger ce modeste travail.

Mes remerciements vont également à tous mes enseignants qui ont, contribués à mes formation.

Sans oublier mes remerciements vont également à mes parents, mes frères de tous les sacrifices qu'ils ont consentis pour mes permettre de suivre mes études dans les meilleures conditions possibles et n'avoir jamais cessez de m'encourager tout au long de mes années d'étude.

……

DIDECACE

Je dédie ce mémoire

À toute ma famille, je le dédie à mes cher parents mon pèreLakhdar, ma mère Fatima, pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs

Encouragements.

À mon frèreABD ERRAHMANE

À mes frères les filles, leurs maris et leurs enfants

À mes amies et mes camarades.

Sans oublier tout les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignementsupérieur.

0.1 Introduction

La théorie des inégalités a emergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années, celle ci constitue également un important sujet de recherche où plusieurs situations mathématiques font appels à ces inégalités. En revanche les inégalités intégrales ont connues un grand développement et de nouvelles techniques voire de nouvelles méthodes sont apparues, ce qui a contribué à la résolution de nombreux problèmes importants en théorie de l'approximation et en analyse numérique où l'estimation des erreurs est exigée. Par ailleurs l'importance de ces inégalités intégrales intervient en grande partie dans l'étude de quelques équations différentielles et intégro-différentielle non linéaire, notamment dans l'étude de l'existence, l'unicité, la dépendance continue de la solution par rapport au données initiales, la stabilité, et l'erreur d'estimation dans les problèmes d'approximation. Ainsi l'intérêt porté à l'étude de ces inégalités intégrales n'a cessé de croitre et une abondante litérature a été développée sur ce sujet et pour d'amples détails voir les traveaux de Pachpatte [8], Pečarić [9] , S.S Dragomir [4].

Il convient de rappeler qu'en théorie de l'intégration la relation entre l'intégrale du produit de deux fonctions et le produit de leurs intégrales est l'un des problèmes fascinants de l'analyse, parmi les inégalités intégrales bien connues, nous citons à titre d'exemple celles de Grüss, et Čebyšev. Cependant, il existe une vaste littérature, et à ce propos nous citons les livres les plus célèbres de D.S. Mitrinovic, et A.M. Fink [10], dans les quels nous trouvons une bonne description de l'évolution historique des inégalités en question.

Dans notre mémoire on s'intéresse à quelques inégalités célèbres de type Čebyšev, Ostrawski et Hermite Hadamard qui ont été appliquées presque à tous les types de fonctions et applicables dans plusieurs domaines telsque en statistique dans l'intégration numérique et en analyse non linéaire et dans l'etude de la stabilité.

Pour l'établissement et la généralisations de nouvelles inégalités intégrales de type Čebyšev et Ostrawski on a besoin d'une technique qui s'appelle l'identité de Montgomery qui est une technique trés efficace. Et pour les inégalités de Hermite Hadamard nous avons introduit les fonctions convexes dont le but de donner des inégalités de ce dernier type avec quelques applications.

L'objectif de ce projet est d'exposer quelques extentions des inégalités célèbres de types Čebyšev, Ostrawski et Hermite Hadamard pour les intégrales normales et les intégrales fractionnaires [11].

Ce projet est structurée comme suit :

Le chapitre 1 est dédié à un rappel de quelques notions mathématiques sur les espaces et les normes de L_p et quelques définitions de l'analyse fonctionnelles avec quelques exemples. En terminant ce chapitre nous allons aborder l'intégration fractionnaire en présentent quelques notions préliminaires, qui seront par la suite utilisées dans les démonstrations.

Dans le deuxième chapitre, on donne dans la première partie quelques versions de l'identité de Montgomery pour les fonctions à une et à deux variables avec différent type de noyaux [3, 5]. Puis en se basant sur les identités trouvées on donne de nouvelles inégalités de type Čebyšev. Dans la deuxième partie de ce même chapitre en se basant sur les travaux d'Annastassiou en 2009 [1, 2] et Guezane-Lakoud et Aissaoui en 2011, 2013 et 2014 [6, 7] nous donnons une identité de Montgomery fractionnaire puis dans un second temps une inégalité intégrale de type Čebyšev fractionnaire.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des inégalités intégrales de type Ostrawski pour les intégrales normales suivi de quelques applications.

Le dernier chapitre est dédié aux inégalité de Hermite Hadamard faisant intervenire les fonctions convexes, Au départ nous commençons par des inégalités de ce type et nous déterminans par quelques applications à certaines moyennes spéciales[12].

On termine cette mémoire par une petite bibliographie.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre se compose de deux sections :

On commencera dans la première section par présenter un rappel de quelques notions mathématiques sur les espaces et les normes de L_p et quelques définitions de l'analyse fonctionnelles et de la théorie de probabilité avec quelques exemples.

La deuxième section est consacrée aux calcul fractionnaire ou nous rappelons quelques définitions utiles pour ce calcul qui seront par la suite utilisées dans les démonstrations.

1.1 Généralités sur la théorie fonctionnelle

Espaces des fonctions intégrables :

Définition 1.1 *Soient* $\Omega = (a, b)$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ *un intervalle fini ou infinie de* $\mathbb{R}$ *et* $1 \leq p \leq \infty$

1.Pour $1 \leq p \leq \infty$*, l'espace* $L_p(\Omega)$ *est l'espace des fonctions* f *réelles sur* Ω *telles que* f *est mésurables et*

$$\int_a^b |f(x)|\, dx < +\infty$$

2.Si $p = \infty$*,* $L_\infty(\Omega)$ *est l'éspace des fonctions mésurables bornées prèsque partout sur* Ω*.*

Théorème 1.1 *Soit* $\Omega = (a, b)$ *un intervalle fini ou infini de* $\mathbb{R}$

1.pour $1 \leq p \leq \infty$*, l'éspace* $L_p(\Omega)$ *est un éspace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

2.L'éspace $L_\infty(\Omega)$ *est un éspace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{t\in[a,b]} | f(t) |$$

Les fonctions absolument continues

Définition 1.2 *Soit* $I = [a, b]$ *un intervalle on dit que la fonction* f *est absolument continue sur* I *si pour tout réel* $\epsilon > 0$*, il existe un* $\delta > 0$*, tel que pour toute suite* $[(a_k, b_k)]_{1\leq k\leq n}$ *de sous intervales de* I *d'intérieurs disjoints*

$$\sum (b_n - a_n) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\sum_{n\geq 0}(f(b_n) - f(a_n))\right| < \epsilon.$$

Remarque 1.1 *Une fonction de :*$R \to R$ *est dite absolument continue si elle est absolument continue sur tout sous-intervalle compact de* R*.*

Remarque 1.2 *En particulier,en prenant* $n = 1$*, on note qu'une fonction absolument continue est continue.*

Théorème de Fubini

En énonce à présent un des résultats utiles dans le calcul des intégrales doubles c'est celui de Fubini.

Théorème 1.2 *Soient* $\varnothing_1$ *et* $\varnothing_2$ *deux fonctions à valeurs réelles, définies et continues sur un même intervalle* $[a, b]$ *telles que :*

$$\forall t \in [a, b] \cdot \qquad \varnothing_1(t) \leq \varnothing_2(t)$$

Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ a \leq x \leq b \quad \varnothing_1(x) \leq y \leq \varnothing_2(x)\}$, *Alors* Ω *est un fermé régulier et pour toute fonction* f *intégrable sur* Ω *on a :*

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varnothing_{1(x)}}^{\varnothing_{2(x)}} f(x, y)\, dy \right) dx$$

cas particulier *Si* $\Omega = [a, b] \times [c, d]$, *dans ce cas :*

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Inégalité de Hôlder :

Soit L_p l'spaces des fonctions dont la puissance $p^{ème}$ est intégrable au sens de Lebesgue. Parmi les inégalités importantes dans L_p, on a l'inégalité de Hôlder donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.3 *Soient* $1 < p, q < \infty$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L_p([a, b])$ *et* $g \in L_q([a, b])$ *alors* $f \ g \in L_1([a, b])$ *et on a :*

$$\|f.g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Les fonctions convexes :

Définition 1.3 *Soit* $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ *une fonction,* f *est dite convexe sur* I *si :*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \ \ ; \ \forall \lambda \in [0.1] \ ; \forall x_1, x_2 \in I.$$

Exemple 1.1 *La foction* $f(x) = \ln(1 + e^x)$ *est une fonction convexe.*

1.2 Généralités sur la théorie fractionnaire

La fonction Gamma : L'une des fonctions de base du calcul fractionnel est la fonction Gamma qui prolonge la factoriel aux valeurs reéles et complexes. Rappelons quelques définitions de base concernant cette fonction :

Définition 1.4 *La fonction Gamma d'Euler, notée* $\Gamma(\alpha)$ *est définie pour* $Re(\alpha) > 0$ *par :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt \tag{1.1}$$

Quelques proprietés de la fonction Gamma : a/ Une propriété importante de la fonction $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z).$$

b/ La fonction Gamma d'Euler généralise la factoriel

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La fonction Bêta Parmi les fonctions de base de calcule fractionnaire la fonction Bêta. Cette fonction jouc un rôlc trés important spécialement dans une ceratines combinaisons avec la fonction Gamma.

Définition 1.5 *La fonction Bêta qui est un type d'intégrale d'Euler est une fonction définie par :*

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt \qquad Re(p) > 0 \quad et \quad Re(q) > 0. \tag{1.2}$$

Lien entre la fonction Gamma et Bêta

Proposition 1.1 *La fonction Bêta est relié aux fonctions Gamma par la relation suivante :*

$$\forall p, q > 0, ona: \quad \beta(p,q) = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad . \tag{1.3}$$

Preuve. On a :

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \left(\int_0^{+\infty} \exp(-x)x^{p-1}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} \exp(-y)y^{q-1}dy\right)$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \exp(-x-y)x^{p-1}y^{q-1}dxdy$$

effectuons le changement de variable $y = \mu - x$ pour $0 \leq x \leq \mu$, et conservons la variable x, comme $\frac{dy}{dx} = 1$ on a : $dx.dy = dxd\mu$, on obtient :

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty}\int_0^{\mu} \exp(-\mu)x^{p-1}(\mu - x)^{q-1}dxdy.$$

$$= \int_0^{+\infty} \exp(-\mu)(\int_0^{\mu} x^{p-1}(\mu - x)^{q-1}dx)d\mu.$$

Pour evaluer l'intégrale relative à dx, effectuons le changement de variable $x = t.\mu$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}(\mu - x)^{q-1}dx = \int_0^{+\infty} (t\ \mu)^{p-1}(\mu - t\ \mu)^{q-1}dt$$

$$= \mu^{p+q-1}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \mu^{p+q-1}\beta(p,q).$$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \beta(p,q)\int_0^{+\infty} \exp(-\mu)\mu^{\ p+q-1}d\mu = \beta(p,q)\Gamma(p+q)$$

ce qui donne le résultat désiré. ■

Exemple 1.2 *La fonction Bêta possède un grand nombre d'expression intégrale*

$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1} d\theta \tag{1.4}$$

cas particulier : $\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi$ *et par suite* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Preuve. Dans la formule (1.2) on pose $t = \sin^2\theta$, $1 - t = \cos^2\theta$, $dt = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$

$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{p-1}(\cos^2\theta)^{q-1} 2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1} d\theta$$

d'ou (1.4). Cherchons $\Gamma(\frac{1}{2})$, comme

$$\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \Gamma^2(\frac{1}{2})$$

alors

$$\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^0(\cos\theta)^0 d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\,\theta = 2[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

donc $\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \pi \quad \Longrightarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ∎

Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville :

Définition 1.6 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}_+$, *l'operateur* J^α *définit sur* $L_1[a,b]$ *par :*

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \qquad x \in [a,b] \tag{1.5}$$

est appelé opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α *et* $\Gamma(\alpha)$ *désigne la fonction Gamma.*

Quelques propriétés de l'intégrale fractionnaire :

Proposition 1.2 *Pour toute fonction* $f \in L_1([a,b])$, *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ *on a :*

$$J_a^{\alpha}(I_{\alpha}^{\beta} f) = J_a^{\alpha+\beta} f = J_a^{\beta}(I_{\alpha}^{\alpha} f)$$

de plus

$$J_{a+}^{1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x (x-t)^{1-1} f(t)dt \quad = \int_a^x f(t)dt \ .$$

Preuve. Supposons d'abord que $f \in L^1([a,b])$, on a :

$$[J_a^{\alpha}(I_a^{\beta} f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} (J_a^{\beta} f)(s) ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \int_a^s (s-t)^{\beta-1} \ f(t) dt ds$$

le théorème de Fubini permet d'écrire :

$$[J_a^{\alpha}(J_a^{\beta} f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \ f(t) \ [\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1} ds] dt$$

en effectuant le changement de variable $s = t + (x-t)y, \ 0 \leq y \ \leq 1$ on obtient

$$[J_a^{\alpha}(J_a^{\beta} f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \ f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy dt$$

Enfin, d'aprés la relation (1.2) et (1.3), on obtient :

$$[J_a^{\alpha}(J_a^{\beta} f)](x) = \frac{\beta(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \ f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \ (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt$$

$$= (J_a^{\alpha+\beta} f)(x)$$

∎

Exemple 1.3 *Considérons la fonction* $f(x) = (x-a)^m$ *pour* $\alpha > 0$ *et* $m > -1$ *alors :*

$$J^{(\alpha)}(x-a)^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^m dt$$

En effectuant le changement de variable $t = a + (x-a)\tau$, $0 \leq \tau \leq 1$ *alors :*

$$J^{(\alpha)}(x-a)^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+m} \int_0^1 (x-\tau)^{\alpha-1}\tau^m d\tau$$

En tenant compte de la fonction Bêta et la relation (1.3) *on arrive à :*

$$J^{(\alpha)}(x-a)^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+m}\beta(m+1,\alpha)$$

$$J^{(\alpha)}(x-a)^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}(x-a)^{\alpha+m}$$

Pour $\alpha = 0.5$, $m = 1$, $a = 0$, *on aura :*

$$J^{(0.5)}(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)}(x)^{1.5} = \frac{\sqrt{x^3}}{\Gamma(2.5)}.$$

Fonction de densité de probabilité

Définition 1.7 *Une fonction* f *définie sur* $[a, b]$ *est dite une fonction de densité de probabilité si elle est continue, positive et :*

$$\int_a^b f(x)dx = 1. \tag{1.6}$$

Exemple 1.4 *La fonction* $f(x) = \frac{1}{2x}$ *sur* $[e^{-1}, e]$ *est une fonction de densité de probabilité.*

Chapitre 2

Inégalités intégrales de type ČebyŠev

2.1 Les identités de Montgomery

L'indentité de montgomery est une technique trés efficace dans l'établissement de nouvelles généralisation d'intégrale de type ČebyŠev. Dans la section suivante on évoque quelques extensions de cette identité pour les fonctions à une et à deux variables puis une généralisation de quelques identités avec des noyaux poids .

Lemme 2.1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonction dérivable sur $[a, b]$, on suppose f' est intégrable sur $[a, b]$ alors l'identité de Montgomery :*

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t)dt + \int_a^b P(x,t)f'(t)dt \tag{2.1}$$

est satisfaite où le noyeau de Peano définie par :

$$p(x,t) = \begin{cases} \frac{(t-a)}{(b-a)} & a \leq t \leq x \\ \frac{(t-b)}{(b-a)} & x \leq t \leq b \end{cases}\Bigg\}. \tag{2.2}$$

Preuve. Calculons $\int_a^b p(x,t)f'(t)dt$, en tenant compte de (2.2)

$$\int_a^b p(x,t)f'(t)dt = \int_a^x \frac{t-a}{b-a}f'(t)dt + \int_x^b \frac{t-b}{b-a}f'(t)dt$$

$$= f(x) - \frac{1}{b-a}\int_x^b f(t)dt$$

d'où (2.1), Ce qui achève la démonstration. ∎

On présente maintenant une identité de Montgomery pour les fonctions à deux variables établit en 2011 par Guezane Lakoud-Aissaoui dans leur travail, ont établit une nouvelle généralisation de l'identité de Montgomery donné ci-dessous, le lemme suivant montre ce résultat

Lemme 2.2 *Soit* $f : I \quad [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *est différentiable, la dérivée* $\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\, \partial s}$ *est intégrable sur* I, *Alors l'identité de Montgomery est donnée par :*

$$f(x,y) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t,y)dt + \frac{1}{d-c}\int_c^d f(x,s)ds \tag{2.3}$$

$$-\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt + \int_a^b\int_c^d p(x,t)q(y,s)\frac{\partial^2\ f(t,s)}{\partial t\ \partial s}dsdt$$

où le noyau $p(x,t)$ *est définit dans le lemme précedent et* $q(y,s)$ *est tel que :*

$$q(y,s) = \left\{\begin{matrix} \frac{(s-c)}{(d-c)} & c \le s \le y \\ \frac{(s-d)}{(d-c)} & y \le s \le d \end{matrix}\right\}. \tag{ 2.4}$$

Lemme 2.3 *Sous les même hypothèses du lemme précedent et si* $w : [a,b] \to [0,+\infty[$ *est une fonction de densité de probabilité, alors on a une généralisation de l'identité de Montgomery* (2.1)

$$f(x) = \int_a^b w(t)f(t)dt + \int_a^b p_w(x,t)f'(t)dt \tag{2.5}$$

où le noyau de Peano $p_w(x,t)$ *est définie par :*

$$p_w(x,t) \ = \begin{Bmatrix} w(t) & a \leq t \leq x \\ w(t)-1 & x \leq t \leq b \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

Preuve. Calculons : $\int_a^b p_w(x,t)f'(t)dt$, d'aprés (2.6) on a :

$$\int_a^b p_w(x,t)f'(t)dt = \int_a^x p_w(x,t)f'(t)dt + \int_x^b p_w(x,t)f'(t)dt$$

$$= \int_a^x w(t)f'(t)dt + \int_x^b (w(t)-1)f'(t)dt$$

$$= \int_a^b w(t)f'(t)dt \ - \int_x^b f'(t)dt$$

intégrant par partie et en tenant quante que w est une densité de probabilité c.à.d $w(a) = 0$ et $w(b) = 1$:

$$= w(t)f(t) \mid_a^b - \int_a^b w'(t)f(t)dt - \int_a^b f'(t)dt$$

$$= w(b)f(b) - w(a)f(a) - f(b) + f(x) - \int_a^b w'(t)f(t)dt$$

$$\int_a^b p_w(x,t)f'(t)dt = f(x)\int_a^b w(t)f(t)dt$$

d'où (2.5), ce qui achève la démonstration . ■

En 2007 Boukerrioua et Guezane Lakoud dans leur travail, ont établit une nouvelle généralisation de l'identité de Montgomery donné ci-dessous.

Lemme 2.4 *Soit* $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable de dérivée* f' *intégrale et soit* $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable sur* $[0,1]$ *avec* $\varphi\ (0) = 0,\ \varphi\ (1) \neq 0$ *et* φ' *est intégrable sur* $[0,1]$*, alors une généralisation de l'indentité de Montgomery* (2.5) *est donnée par :*

$$f(x) = \frac{1}{\varphi(1)}\int_a^b w(t)\varphi'(\int_a^t w(s)ds\ )f(t)dt + \frac{1}{\varphi(1)}\int_a^b p_{w,\varphi}(x,t)f'(t)dt \tag{2.7}$$

où $P_{\omega,\alpha}$ est la généralisation du noyau (2.6) défini ci-dessous

$$p_{w,\varphi}(x,t) = \begin{Bmatrix} \varphi(w(t)) & a \leq t \leq x \\ \varphi(w(t)) - \varphi(1) & x \leq t \leq b \end{Bmatrix} \tag{2.8}$$

2.2 Les inégalités intégrales de type Čebyšev

Parmi les inégalités intégrales les plus connue sont celle de Čebyšev qui ont été appliquées presque à tous les types des fonctions c.à.d aux fonctions absolument continues, lipschitzienne, monotones et aux fonctions bornée. Elles sont applicables dans plusieurs domaines tels que en statistique dans l'intégration numérique et en analyse non linéaire.

Le lemme suivant présente une première version remarquable et célèbre de l'inégalité intégrale de Čebyšev la plus classique.

Lemme 2.5 *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions absolument continues, si de plus f' et $g' \in L_\infty[a,b]$, alors :*

$$| T(f,g) | \leq \frac{1}{12}(b-a)^2 \parallel f' \parallel_\infty \parallel g' \parallel_\infty$$

oū

$$T(f,g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - (\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx)(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx)$$

Motivé par cette inégalité, des nouvelles généralisations ont été établies en utilisant différentes techniques. l'indentité de Montgomery est l'une de ces techniques différentes pour l'établissement des inégalités intégrales de type Čebyšev.

On 2014 Guezane-Lakoud et Aissaoui ont établit la première inégalité avec l'extension de l'identité de Montgomrey (2.1) avec le noyau (2.2) donnée dans le corollaire suivant :

Corollaire 2.1 *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables sur$[a,b]$, f'et g' sont intégrables. Alors :*

$$| T\ (f,g) | \leq \frac{7}{60}(b-a)^2 \parallel f' \parallel_\infty \parallel g' \parallel_\infty \tag{2.9}$$

où

$$T(f,g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - (\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx)(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx) \qquad (2.10)$$

On présente maintenant sons preuve une nouvelle inégalité intégrale de type Čebyšev pour les fonctions à deux variables en se basant sur l'identité de Montgomery (2.3) à deux variables.

Théorème 2.1 *Soient $f, g : I \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables telles que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s\, \partial t}$ et $\frac{\partial^2 g(s,t)}{\partial s\, \partial t}$ sont intégrables sur I, Alors :*

$$\mid T(f,g) \mid \leq \frac{49}{3600}(b-a)^2(d-c)^2 \parallel \frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\, \partial s} \parallel_\infty \parallel \frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial t\, \partial s} \parallel_\infty \qquad (2.11)$$

oū l'opérateur $T(f,g)$ est défini par :

$$\begin{aligned} T(f,g) \;=\; & \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)g(x,y)dxdy \\ & -\frac{1}{(b-a)^2(d-c)}\int_a^b\int_c^d g(x,y)\int_a^b f(t,y)dtdxdy \\ & -\frac{1}{(b-a)(d-c)^2}\int_a^b\int_c^d g(x,y)\int_c^d f(x,s)dsdxdy \qquad (2.12) \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{(b-a)^2(d-c)^2}\int_a^b\int_c^d f(x,s)dsdx\int_c^d\int_a^b g(x,y)dtdy.$$

Remarque 2.1 *La constante $\frac{49}{3600}$ trouvée dans l'inégalité (2.11) est le carée de la constante trouvée dans l'inégalité (2.9).*

On présente maintenant l'inégalité intégrale de type Čebyšev avec le noyau (2.6).

Théorème 2.2 *Soient $f, g\ [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiable sur $[a,b]$et $f\ '$ et g' intégrables sur $[a,b]$ et w une fonction de densité de probabilité alors on a l'inégalité* *suivante :*

$$| T(w,f,g) | \leq \| f' \|_\infty \| g\prime \|_\infty \int_a^b w(x) H^{\ 2}(x) dx \tag{2.13}$$

oū

$$H(x) = \int_a^b | p_w(x,t) | dt$$

et

$$T(w,f,g) = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dt - \int_a^b w(x) f(x) dx \int_a^b w(x) g(x) dx$$

On présente maintenant l'inégalité intégrale de type Čebyšev avec le noyau (2.8).

Théorème 2.3 *Soient* $f, g\ [a,b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions différentiables sur* $[a,b]$, *et* f', g' *intégrables sur* $[a,b]$ *et soient* w *et* φ *les deux fonctions définies dans* (2.4) *alors on a :*

$$| T(w,f,g,\varphi') | \leq \frac{1}{\varphi^2(1)} \| f' \|_\infty \| g' \|_\infty \| \varphi' \|_\infty \int_a^b w(x) H^{\ 2}(x) dx \tag{2.14}$$

oū

$$H(x) = \int_a^b | p_{w,\varphi}(x,t) | dt$$

$$\| \varphi' \|_\infty = \underset{t \in [0,1]}{ess} \sup | \varphi'(t\ ) |$$

et

$$T(w,f,g,\varphi') = \int_a^b w(x) \varphi'(\int_a^b w(t) dt) f(x) g(x) dx$$

$$-\frac{1}{\varphi(1)} [\int_a^b w(x) \varphi'(\int_a^b w(t) dt) f(x) dx][\int_a^b w(x) \varphi'(\int_a^b w(t) dt) g(x) dx] \tag{2.15}$$

Preuve. Comme les fonctions f et g satisfait l'identité (2.7) alors :

$$f(x) = \frac{1}{\varphi(1)} \int_a^b w(t) \varphi'(\int_a^t w(s) ds) f(t) dt + \frac{1}{\varphi(1)} \int_a^b p_{w,\varphi}(x,t) f'(t) dt$$

$$g(x) = \frac{1}{\varphi(1)} \int_a^b w(t) \varphi'(\int_a^t w(s) ds) g(t) dt + \frac{1}{\varphi(1)} \int_a^b p_{w,\varphi}(x,t) g'(t) dt$$

donc

$$[f(x)-\frac{1}{\varphi(1)}\int_a^b w(t)\varphi'(\int_a^t w(s)ds)f(t)dt][g(x)-\frac{1}{\varphi(1)}\int_a^b w(t)\varphi'(\int_a^t w(s)ds)g(t)dt]$$

$$=\frac{1}{\varphi^2(1)}[\int_a^b p_{w,\varphi}(x,t)f'(t)dt][\int_a^b p_{w,\varphi}(x,t)g'(t)dt]$$

$$\begin{aligned}&f(x)g(x)-\frac{1}{\varphi(1)}f(x)\int_a^b w(t)\varphi'(\int_a^t w(s)ds)g(t)dt\\&-\frac{1}{\varphi(1)}g(x)\int_a^b w(t)\varphi'(\int_a^t w(s)ds)f(t)dt\\&+\frac{1}{\varphi^2(1)}(\int_a^b w(t)\varphi'(\int_a^t w(s)ds)f(t)dt)(\int_a^b w(t)\varphi'(\int_a^t w(s)ds)g(t)dt)\\&=\frac{1}{\varphi^2(1)}[\int_a^b p_{w,\varphi}(x,t)f'(t)dt][\int_a^b p_{w,\varphi}(x,t)g'(t)dt] \qquad (2.16)\end{aligned}$$

multiplions (2.16) par $w(x)\varphi'(\int_a^t w(s)ds)$, et intégrant l'identité obtenue par rapport à x de a à b on obtient :

$$T(w,f,g,\varphi')=\frac{1}{\varphi^2(1)}\int_a^b w(x)\varphi'(\int_a^x w(t)dt)[\int_a^b p_{w,\varphi}(x,t)f'(t)dt][\int_a^b p_{w,\varphi}(x,t)g'(t)dt]dx$$

finallemant

$$|\, T(w,f,g,\varphi')\, |\leq \frac{1}{\varphi^2(1)}\parallel f'\parallel_\infty \parallel g'\parallel_\infty \parallel \varphi'\parallel_\infty \int_a^b w(x)H^{\,2}(x)dx\ .$$

■

2.3 Les identités de Montgomery fractionnaires

La théorie du calcul fractionaire a connu un dévelopement intense durant ces dernières décennies, en revanche, les intégrales et les dérivées de type fractionnaire apparaissent aujourd'hui, comme une voie prometteuse pour mieux décrire quelques modèles mathématiques par ailleurs l'étude des équations différentielles fractionnelles nécessite un grand dévellopement des inégalités intégrales de type fractionnaire. l'objectif de cette partie est d'exposé quelques nouvelles identités de Montgomery pour les intégrales fractionnaires avec noyaux poids puis en se basant sur les identités trouvées nous déterminons d'autres inégalités intégrales avec noyaux poids fractionnaire de type Čebyšev. La première identité de Montgomery fractionnaire elle a était donnée par G.Anastassiou en 2009, il a changée le noyau $p(x,t)$ donné par (2.2) par un noyau fractionnaire donnée dans le théorème suivant :

Théorème 2.4 *Soit : $f[a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, alors l'identités de Montgomery pour les intégrales fractionnaires est donnée par :*

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{b-a}(b-x)^{1-\alpha} J_a^\alpha\, f(b) - J_a^{\alpha-1}(p_1(x,b)f(b) + J_a^\alpha(p_1(x,b)f'(b)) \quad \alpha \geq 1 \quad (2.17)$$

où $p_1(x,t)$ est le noyau de peano fractionnaire défini par :

$$p_1(x,t) = \begin{Bmatrix} \frac{t-a}{b-a}(b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha) & a \leq t \leq x \\ \frac{t-b}{b-a}(b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha) & x \leq t \leq b \end{Bmatrix}. \quad (2.18)$$

Remarque 2.2 *En remplace α par 1 dans l'identité (2.17) on trouve l'identité de Montgomery classique (2.1).*

La deuxième identité de Montgomery fractionnaire elle a était aussi donnée par G.Anastassiou en 2009, il a changée le noyau fractionnaire $p_1(x,t)$ donné par(2.18) par un noyau fractionnaire avec poids $q_w(x,t)$ donnée dans le théoreme suivant :

Théorème 2.5 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, alors l'identité de Montgomery pour les intégrales fractionnaires est donnée par :*

$$f(x) = (b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha) J_a^\alpha(w(b)f(b)) - J_a^{\alpha-1}(q_w(x,b)f(b)) + J_a^\alpha(q_w(x,b)f'(b)) \quad (2.19)$$

où $q_w(x,t)$ est le noyau de peano fractionnaire défini par :

$$q_w(x,t) = \begin{Bmatrix} (b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)w(t) & a \leq t \leq x \\ (b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)(w(t)-1) & x \leq t \leq b \end{Bmatrix}. \quad (2.20)$$

Remarque 2.3 *En remplace α par 1 dans l'identité* (2.19) *on trouve l'identité de Montgomery avec poids* (2.6).

La troisième identité de Montgomery fractionnaire elle a était établit par Guezane -Aissaoui en 2013, elle ont changées le noyau fractionnaire $q_w(x,t)$ donnée par (2.20) par un noyau fractionnaire avec poids composée avec une fonction φ donnée dans le théoreme suivant :

Théorème 2.6 *Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) \neq 0$ et $\varphi' \in L^1[0,1]$, alors l'identité de Montgomery avec noyau poids les intégrales fractionnaires est donnée par :*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\varphi(1)}(b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)J_a^\alpha(w(b)\varphi'(1)f(b)) \\ &\quad -\frac{1}{\varphi(1)}J_a^{\alpha-1}(q_{w,\varphi}(x,b)f(b)) \\ &\quad +\frac{1}{\varphi(1)}J_a^\alpha(q_{w,\varphi}(x,b)f'(b)) \qquad (2.21) \end{aligned}$$

où $q_{w,\varphi}(x,t)$ est le noyau de peano fractionnaire avec poids défini par :

$$q_{w,\varphi}(x,t) = \begin{Bmatrix} (b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\varphi(w(t)\ ) & a \leq t \leq x \\ (b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)(\varphi(w(t)) - \varphi(1)) & x \leq t \leq b \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Remarque 2.4 *En remplace α par 1 dans l'identité* (2.21)*on trouve l'identité de Montgomery avec poids* (2.8).

2.4 Les inégalités fractionnaire de type Čebyšev :

Dans cette partie on donnera des résultats importants sur les inégalités fractionnaires de type Čebyšev. Le théorème suivant représente la première inégalité fractionnaire de type cité ci dessus en utilisant l'identité de Montgomery fractionnaire (2.17)

Théorème 2.7 *Soient f , g : $[a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables $[a,b]$, f' g' sont intégrables sur $[a,b]$ alors :*

$$\mid T_\alpha(f,g) \mid \leq \frac{(b-a)^{2\alpha}(2\alpha^2+11\alpha+8)}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)(2\alpha+1)(2\alpha+3)} \parallel f' \parallel_\infty \parallel g' \parallel_\infty \tag{2.23}$$

où $\alpha \geq 1$ *et* $\parallel . \parallel_\infty$ $L_\infty[a,b]$, $\parallel f \parallel_\infty = \underset{t\in[a,b]}{ess\ sup} \mid f(t) \mid$, *et* $T_\alpha(f,g)$ *est défini par :*

$$T_\alpha(f,g) = \frac{1}{b-a}\Gamma(2\alpha-1)J_a^{2\alpha-1}((fg)(b)) - \frac{\Gamma^2(\alpha)}{(b-a)^2}J_a^\alpha g(b) J_a^\alpha f\ (b) \tag{2.24}$$

Remarque 2.5 *En remplace α par 1 dans l'inégalité fractionnaires de Čebyšev* (2.23), *celle ci se réduit à l' inégalité de Čebyšev pour l'intégrale simple* (2.9)

Chapitre 3

Inégalités intégrales de type Ostrowski

Les inégalités intégrales de type Ostrowski sont les inégalités qui donnent la bornitude de la variation d'une fonction par rapport à sa valeur moyenne où cette fonction est soit différentiable, absolument continue, Hölder continue, à variation bornée où à dérivée convexe. Ces inégalités s'avèrent d'une grande importance notamment dans les applications des formules spéciales, les formes quadratiques d'une intégrale, et dans la théorie des probabilités.

3.1 Quelques inégalités intégrales de type Ostrowski :

Le théorème suivant présente une première version remarquable de l'inégalités intégrale d'Ostrowski la plus classique établi en 1938.

Théorème 3.1 *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* $[a,b]$ *qui vérifie* $\mid f'(t) \mid \leq M \quad \forall t \in [a,b]$ *alors :*

$$\mid f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \mid \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)M \tag{3.1}$$

pour tout $x \in [a, b]$.

Preuve. La démonstration de ce théorème est basée sur l'utilisation de l'identité de Montgomery (2.1) donc

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| = \left| \int_a^b p(x,t) f'(t) dt \right|$$

$$\leq \int_a^b |p(x,t)| \, |f'(t)| \, dt \leq M \int_a^b |p(x,t)| \, dt$$

$$\leq M \left[\int_a^x \left| \frac{t-a}{b-a} \right| dt + \int_x^b \left| \frac{t-b}{b-a} \right| dt \right]$$

$$\leq M \frac{1}{b-a} \left[\int_a^x (t-a) \, dt + \int_x^b (b-t) \, dt \right]$$

$$\leq \frac{M}{b-a} \left[\left[\frac{t^2}{2} - at \right]_a^x + \left[-\frac{t^2}{2} + bt \right]_x^b \right]$$

$$\leq \frac{M}{b-a} \left[\left(\frac{x^2}{2} - ax - \frac{a^2}{2} + a^2 \right) + \left(-\frac{b^2}{2} + b^2 + \frac{x^2}{2} - bx \right) \right]$$

$$\leq \frac{M}{b-a} \left[\left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{(b-a)^2}{4} \right]$$

$$\leq M \, (b-a) \left[\frac{\left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2}{(b-a)^2} + \frac{1}{4} \right]$$

Ce qui achève la preuve. ■

3.2 Inégalités de type Ostrowski pour les fonctions à variations bornées :

De nouvelles versions de l'inégalités intégrales de type Ostrowski d'une part pour les fonctions à variation bornées suivi d'une application, et d'autre part pour les fonctions de type Hölder.

Théorème 3.2 *Soit* $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est une fonction à variation bornée sur* $[a, b]$*.alors pour tout* $x \in [a, b]$ *nous avons l'inégalité :*

$$\left| \int_a^b u(t)dt - u(x)(b-a) \right| \leq [\frac{1}{2}(b-a) + \mid x - \frac{a+b}{2} \mid] V_a^b(u) \tag{3.2}$$

où $V_a^b(u)$ *désigne la variation totale de* u*.*

La proposition suivante présente une application du théorème (3.2) pour la fonction Bêta

Proposition 3.1 *Soient* $p, q > 1$ *et* $x \in [0, 1]$*. Alors nous avons l'inégalité*

$$\left| B(p, q) - x^{p-1}(1-x)^{q-1} \right| \leq \max(p-1, q-1) B(p-1, q-1) [\frac{1}{2} + \mid x - \frac{1}{2} \mid]$$

3.3 Inégalité de type Ostrowski pour les fonctions de type Hölder

En 1999 S.S Dragomir, Cerone, Roumeliotis et Wang ont établit de nouvelle version sur les inégalités intégrales d'Ostrowski avec poids et à titre d'exemple on présente une de ces inégalités pour les fonctions r-H- Hölder donnée dans le théorème suivant :

Théorème 3.3 *Soient* $f, w : [a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions telles que* $w(s) > 0$*, intégrable et* $\int_a^b w(s)ds > 0$*,* $\forall s \in [a, b]$*, et* f *une fonction r-H- Hölder, i.e,*

$$\mid f(x) - f(y) \mid \leq H \mid x - y \mid^r \quad \forall x, y \in [a, b], \ r \in]0, 1], \ H > 0 \tag{3.3}$$

si $w.f \in L_1[a,b]$ *alors*

$$| f(x) - \frac{1}{\int_a^b w(s)ds} \int_a^b w(s)f(s)ds |\leq \frac{H}{\int_a^b w(s)ds} \int_a^b |x-s|^r w(s)ds \tag{3.4}$$

si $r=1$ *dans l'inégalité* (3.3) *alors*

$$| f(x) - \frac{1}{\int_a^b w(s)ds} \int_a^b w(s)f(s)ds |\leq \frac{L}{\int_a^b w(s)ds} \int_a^b | x-s | w(s)ds \tag{3.5}$$

Preuve. Comme f est de type r-H- Hölder, alors :

$$| f(x) - f(s) |\leq H \mid x-s \mid^r$$

$$\int_a^b | f(x) - f(s) | w(s)ds \leq H \int_a^b | x-s |^r w(s)ds$$

et on a aussi

$$| \int_a^b (f(x) - f(s))w(s)ds |\leq \int_a^b | f(x) - f(s) | w(s)ds$$

$$| f(x) \int_a^b w(s)ds - \int_a^b f(s)w(s)ds |\leq \int_a^b | f(x) - f(s) | w(s)ds$$

donc

$$| f(x) \int_a^b w(s)ds - \int_a^b f(s)w(s)ds |\leq \int_a^b | f(x) - f(s) | w(s)ds \leq H \int_a^b | x-s |^r w(s)ds$$

comme $\int_a^b w(s)ds > 0$

$$| f(x) - \frac{1}{\int_a^b w(s)ds} \int_a^b w(s)f(s)ds |\leq \frac{H}{\int_a^b w(s)ds} \int_a^b | x-s |^r w(s)ds$$

ce qui achève la démonstration . ■

3.4 Application

pour ullistrer l'inégalité (3.5), voici à présent quelques exemples des fonctions poids les plus célèbres.

Corollaire 3.1 *[Logarithme] Soit $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable dont la dérivée est bornée et pour laquelle l'intégrale $\int_0^1 \ln(\frac{1}{t})f(t)dt$ est finie. Alors :*

$$\mid f(x) - \int_0^1 \ln(\frac{1}{t})f(t)dt \mid\leq [\frac{1}{4} - x + x^2(\frac{3}{2} - \ln x)] \parallel f' \parallel_\infty \tag{3.6}$$

Remarque 3.1 *Si on pose $I(x) = x^2(\frac{3}{2} - \ln x) - x + \frac{1}{4}$, alors $I'(x) = 2x(1 - \ln x) - 1$, ce qui montre que I atteint son minimum sur $(0,1)$ au point $x_{\min} \approx 0.1866823$. $I(x_{\min}) \approx 0.1740840$. Par conséquent, la meilleure inégalité que nous pouvons obtenir de (3.6) est :*

$$\mid f(0.1866823) - \int_0^1 \ln(\frac{1}{t})f(t)dt \mid\leq 0.1740840 \parallel f' \parallel_\infty$$

Corollaire 3.2 *[Jacobi] Soit $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable dont la dérivée est bornée et pour lesquels l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}dt$ est finie. Alors*

$$\mid f(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}dt \mid\leq \frac{1}{6}(8x^{\frac{3}{2}} - 6x + 2) \parallel f' \parallel_\infty \tag{3.7}$$

pour tout $x \in (0,1)$

Remarque 3.2 *Si $J(x) = \frac{1}{6}(8x^{\frac{3}{2}} - 6x + 2)$, alors $J'(x) = 2\sqrt{x} - 1$, ce qui montre que J atteint son minimum sur $(0,1)$ au point $x_{\min} \approx \frac{1}{4}$, $J(x_{\min}) \approx \frac{1}{4}$,Donc la meilleure inégalité que nous pouvons obtenir de(3.7) est*

$$\mid f(\frac{1}{4}) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}dt \mid\leq \frac{1}{4} \parallel f' \parallel_\infty .$$

Chapitre 4

Inégalité intégrale de type Hermite-Hadamard

Le premier résultat fondamentale conçernent les fonctions convexes sur les inégalités d'Hermite-Hadamard. Dans cette section, nous présentons des résultats de base liées à Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes et des applications pour certaines moyennes spésciales.

4.1 Quelques inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard

Théorème 4.1 *Soit* $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe sur* I, $a,b \in I$ *telle que* $a < b$ *alors :*

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{4.1}$$

Lemme 4.1 *Soit* $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* I, $a, b \in I$ *telle que* $a < b$, *si* $f' \in [a, b]$ *on a :*

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt \tag{4.2}$$

Preuve. On pose :

$$I=\int_0^1(1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt=\frac{1}{a-b}\int_0^1(1-2t)(a-b)\ f'(ta+(1-t)b)dt$$

On intégrons I par partie

$$I=\frac{1}{a-b}\ f(ta+(1-t)b)(1-2t)]_0^1-\frac{1}{a-b}\int_0^1(-2)\ f(ta+(1-t)b)dt$$

$$=\frac{f(a)+f(b)}{b-a}+\frac{2}{a-b}\int_0^1\ f(ta+(1-t)b)dt$$

En éffectuant le changement de variable $x=ta+(1-t)b$ on obtient

$$I=\frac{f(a)+f(b)}{b-a}+\frac{2}{a-b}\int_b^a\ f(x)\frac{dx}{a-b}$$

$$=\frac{f(a)+f(b)}{b-a}-\frac{2}{(b-a)}\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$$

$$\frac{b-a}{2}I=\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_b^a\ f(x)dx$$

■

Théorème 4.2 *Soit $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I. $a,b\in I$ telle que $a<b$, si $\mid f'\mid$ est convexe sur $[a,b]$ alors on a l'inégalité suivante :*

$$\mid\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b\ f(x)dx\mid\leq\frac{(b-a)(\mid f'(a)\mid+\mid f'(b)\mid)}{8}\tag{4.3}$$

Preuve. D'aprés (4.2) on a :

$$\mid\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\mid=\mid\frac{b-a}{2}\int_0^1(1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt\mid$$

$$\leq\frac{b-a}{2}\int_0^1\mid 1-2t\mid\mid f'(ta+(1-t)b)\mid dt$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 \mid 1-2t \mid [t \mid f'(a) \mid +(1-t) \mid f'(b) \mid]dt$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 \mid 1-2t \mid t \mid f'(a) \mid dt + \int_0^1 (1-t) \mid 1-2t \mid\mid f'(b) \mid dt$$

et comme

$$\int_0^1 \mid 1-2t \mid t \mid f'(a) \mid dt = \int_0^1 (1-t) \mid 1-2t \mid\mid f'(b) \mid dt$$

$$= \int_0^{1/2} (1-2t)tdt + \int_{1/2}^1 (2t-1)tdt = \frac{1}{4}$$

donc

$$\mid \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \mid \leq \frac{(b-a)[\mid f'(a) \mid + \mid f'(b) \mid]}{2}\frac{1}{4}$$

$$\mid \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \mid \leq \frac{(b-a)[\mid f'(a) \mid + \mid f'(b) \mid]}{8}$$

■

Théorème 4.3 *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différentiable $a, b \in I$ telle que $a < b$ et $p > 1$, si $\mid f' \mid^{\frac{p}{p-1}}$ est convexe sur $[a, b]$ alors :*

$$\mid \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \mid \leq \frac{(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{\mid f'(a) \mid^{\frac{p}{p-1}} + \mid f'(b) \mid^{\frac{p}{p-1}}}{2}\right]^{\frac{p-1}{p}} \qquad (4.4)$$

Preuve. D'après (4.2) on a

$$\mid \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \mid \leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 \mid 1-2t \mid\mid f'(ta+(1-t)b) \mid dt$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 \mid 1-2t \mid^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \mid f'(ta+(1-t)b) \mid^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

et comme $\mid f' \mid^{\frac{p}{p-1}} = \mid f' \mid^q$ est convexe oū $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \to q = \frac{p}{p-1}$, donc

$$\int_0^1 \mid f'(ta+(1-t)b) \mid^q dt \leq \int_0^1 [t \mid f'(a) \mid^q +(1-t) \mid f'(b) \mid^q]dt$$

$$\leq \int_0^1 t \mid f'(a) \mid^q dt + \int_0^1 (1-t) \mid f'(b) \mid^q dt$$

$$\leq \mid f'(a) \mid^q (\frac{1}{2}) + \mid f'(b) \mid^q (\frac{1}{2}) = \frac{\mid f'(a) \mid^q + \mid f'(b) \mid^q}{2} \tag{4.5}$$

$$\int_0^1 \mid 1-2t \mid^p dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)^p dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)^p dt = \frac{1}{p+1} \tag{4.6}$$

de(4.5) et (4.6) on a :

$$\mid \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \mid \leq \frac{b-a}{2} (\frac{1}{p+1})^{\frac{1}{p}} (\frac{\mid f'(a) \mid^q + \mid f'(b) \mid^q}{2})^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq (\frac{b-a}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}) [\frac{\mid f'(a) \mid^{\frac{p}{p-1}} + \mid f'(b) \mid^{\frac{p}{p-1}}}{2}]^{\frac{p-1}{p}}$$

■

4.2 Applications à certaines moyennes spéciales :

On utilisant les inégalités d'Hermite Hadamard, donnant quelques estimations entre certaines moyennes spéciales définies par :

la moyenne arithmétique :

$$A = A(a,b) = \frac{a+b}{2}, \quad a,b \geq 0$$

la moyenne géométrique :

$$G = G(a,b) = \sqrt{ab}, \quad a,b \geq 0$$

la moyenne harmonique :

$$H = H(a,b) = \frac{2}{(\frac{1}{a}) + (\frac{1}{b})}, \quad a,b > 0$$

la moyenne logarithmique :

$$L(a,b) = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}, \quad a,b>0$$

la moyenne p-logarithmique :

$$L_p(a,b) = [\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}]^{\frac{1}{p}}, \quad p \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$$

Appliquant les Théorèmes (4.2) et (4.3) pour deux fonctions pour avoir des inégalités liées aux valeurs moyennes.

Exemple 4.1 *Soit* $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *alors :*

$$\mid A(a^n,b^n) - L_n^n(a,b) \mid \leq \frac{n(b-a)}{4} A(\mid a \mid^{n-1}, \mid b \mid^{n-1})$$

Preuve. Considérons la fonctions $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \geq 2$, alors

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = L_n^n(a,b)$$

et

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = A(a^n,b^n)$$

En appliquant le théorème (4.2) pour cette fonction nous obtenons

$$\mid A(a^n,b^n) - L_n^n(a,b) \mid \leq \frac{n(b-a)}{4} A(\mid a \mid^{n-1}, \mid b \mid^{n-1})$$

■

Exemple 4.2 *Soit* $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *et* $p>1$ *on a :*

$$\mid A(a^n,b^n) - L_n^n(a,b) \mid \leq \frac{n(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} [A(\mid a \mid^{\frac{(n-1)p}{(p-1)}}, \mid b \mid^{\frac{(n-1)p}{(p-1)}})]^{\frac{p-1}{p}}$$

Preuve. Considérons la fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \geq 2$, alors

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = L_n^n(a, b)$$

et

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = A(a^n, b^n)$$

En appliquant le théorème (4.3) pour cette fonction nous obtenons

$$\mid A(a^n, b^n) - L_n^n(a, b) \mid \leq \frac{n(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}[A(\mid a \mid^{\frac{(n-1)p}{(p-1)}}, \mid b \mid^{\frac{(n-1)p}{(p-1)}})]^{\frac{p-1}{p}}$$

■

Exemple 4.3 *Soit* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *et* $0 \notin [a, b]$ *on a :*

$$\mid A(a^{-1}, b^{-1}) - L^{-1}(a, b) \mid \leq \frac{(b-a)}{4} A(\mid a \mid^{-2}, \mid b \mid^{-2})$$

Preuve. Considérons la fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, alors

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = L^{-1}(a, b)$$

et

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = A(a^{-1}, b^{-1})$$

En appliquant le théorème (4.2) pour cette fonction nous obtenons

$$\mid A(a^{-1}, b^{-1}) - L^{-1}(a, b) \mid \leq \frac{(b-a)}{4} A(\mid a \mid^{-2}, \mid b \mid^{-2})$$

■

Exemple 4.4 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $0 \notin [a, b]$ et $p > 1$ on a :*

$$| A(a^{-1}, b^{-1}) - L^{-1}(a, b) | \leq \frac{(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} [A(| a |^{\frac{-2p}{p-1}}, | b |^{\frac{-2p}{p-1}})]^{\frac{p-1}{p}}$$

Preuve. Considérons la fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, alors

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = L^{-1}(a, b)$$

et

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = A(a^{-1}, b^{-1})$$

En appliquant le théorème (4.3) pour cette fonction nous obtenons

$$| A(a^{-1}, b^{-1}) - L^{-1}(a, b) | \leq \frac{(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} [A(| a |^{\frac{-2p}{p-1}}, | b |^{\frac{-2p}{p-1}})]^{\frac{p-1}{p}}$$

■

Bibliographie

[1] G. Anastassiou, M. R. Hooshmandasl, A. Ghasemi, F. Moftakharzadeh, Montgomery identities for fractional integrals and related fractional inequalities, J. Ineq. Pure Appl. Math. 10 (4) (2009) Art. 97.

[2] G.A. Anastassiou Fractional Representation Formulae Under Initial Conditions and Fractional Ostrowski type Inequalities.

[3] Boukerrioua K, Guezane-Lakoud A. On Generalization of Čebyšev Type Inequalities. JIPAM. 2007;8 :Art 55, 4pp.

[4] S. S. Dragomir, A Refinement of Ostrowski's Inequality for Absolutely Continuous Functions and pplications, Acta Mathematica Vietnamica Volume 27 Number 2, 2002,pp.203-217.

[5] A. Guezane Lakoud and F. Aissaoui, New double integrals weighted Čebyšev type inequalities. Journal of Mathematics and System Science 1(2011)1-6.

[6] A. Guezane Lakoud and F. Aissaoui New Fractional Inequalities of Ostrowski type TJMM *5* (*2013*), No. *2*, 103-106.

[7] A. Guezane-Lakoud and F. Aissaoui New Results for Čebyšev type Inequalities Integral Transforms and Special Functions, Vol. *25*, No. 9, 711-720.

[8] B. G. Pachpatte, Inequalities for Differential and Integral Equation, Academic Press, New York, 1998.

[9] Pečarič J. E and T. Pejkovic', On an Integral Inequality, J. Inequal. Pure Appl. Math. *5* (*2*) (*2004*), Art. 47.

[10] A. M. Fink N. S. Barnett, P. Cerone, S. S. Dragomir, , Comparing two Integral Means for Absolutely Continuous Mappings whose Derivatives are in $L_1[a, b]$ and Applications, Computers and Mathematics with Applications, 44 (2002), 241-251.

[11] Kilbas, A. Srivastava, Hari M. and Trujillo, Juan J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies, *204*. Elsevier Science B.V, Amsterdam, *2006*.

[12] S.S Dragomir R.P Agarwal Two Inequalities for Differentiable Mappings and Applications to Special Means of Real Numbers and to Trapezoidal Formula