République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par : HAMAIDIA Hana

Intitulé

Stabilité conditionnelle de la solution zéro d'un problème mixte et non linéaire

Dirigé par :

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. SELLAMI Nabil	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. BAHLOUL Tarek	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. MENACEUR Amor	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Remerciements

Au terme de ce modeste travail, je remercie d'abord Dieu, le tout puissant qui m'a donné la force et le courage pour poursuivre mes études.

Je remercie vivement Mr BAHLOUL Tarek pour son encadrement éclairé et surtout pour la confiance qu'elle a su me témoigner, sans aucun doute garante de l'aboutissement de ce travail.

Enfin mes remerciements s'adressent à tous celles et ceux dont la compétence, le setien ou l'amitié m'ont permis de mener à bien la rédaction de ce modeste travail.

Dédicaces

A mes parents, ma source d'inspiration.

Vous qui avez toujours cru en mois, retrouvez ici, toute mes affections et mes reconnaissances.

Merci pour tout ce que vous avez fait pour moi

A mes frères : Ismail, Salim, Farid, Zaki.

A mes soeurs : Fouzia, Souhila, Houria, Hakima.

A mes neuves et mes nièces : Oussama, Labib, Romaissa, Bouchra, Randa, Amira, Sara, rokaya, rafif, zayd .

A mes amis : Samia, Souhila, Saida, Khadidja, Sara, Meryem, Dounia.

A toute ma famille pour leur soutien moral et leur encouragements tout au long de mon parcours universitaire.

A tous ce ceux qui m'aiment.

Résumé

Dans ce travail, an étudié un problème mixte avec une condition du type mixte.

Ces problèmes peuvent être rencontrés en théorie de la conduction thermique, semi-conducteurs, électrochimie, transmission de chaleur, élasticité, thermo-élasticité, physique de plasmas, mémoire des matériaux et dynamique de populations etc $\cdots$.

Pour cette problème, on examine la stabilité conditionnelle de la solution zéro d'un problème mixte.

La méthode utilisé est la méthode de l'énergie pour étudier la stabilité conditionnelle de la solution.

Nous appliquons aussi la méthode de l'équilibre harmonique, cette méthode fournit une technique générale pour le calcul des approximations des solutions périodiques des équations différentielles.

Mots Clés :
la méthode de l'équilibre harmonique, la méthode de l'énergie, la stabilité de la solution.

Abstract

In this work, we study a mixed problem with a condition of mixed type.

These problems may be encountered in the theory of thermo conduction, semiconductors, electrochemistry, heat transfer, elasticity, thermo-elasticity, plasma physics, memory materials and population dynamics etc $\cdots$.

For this problem, we examines the conditional stability of the zero solution of a mixed problem .

The method used is the energy method to study the stability of the solution.

We also apply the method of harmonic balance, this methode provides a general technique to calculate approximations of periodic solutions of differntial equations.

Key Words :

The method of harmonic balance, the energy method, the stability of the solution.

ملخص

تهدف هذه الأطروحة إلى دراسة حالة خاصة من المسائل الكلاسيكية.
يمكن مصادفة هذه المسائل في نظرية النقل الحراري و المرونة، أنصاف النواقل، الكهروكيمياء، المرونة و المرونة الحرارية، فيزياء البلازما، ذاكرة المعادن و ديناميك المجموعات الخ..
فيما يخص هذه الحالة ندرس الاستقرار المشروط للحل صفر لمسألة غير خطية.
الطريقة المستخدمة هي طريقة الطاقة لدراسة استقرار الحل.
نطبق أيضا طريقة توازن متناسق، هذه الطريقة توفر تقنية عامة لحساب تقريبية الحلول الدورية للمعادلات التفاضلية.

Table des matières

chapitre 0

Introduction

Dans la présente mémoire, nous donnons un développement important de la méthode la méthode d'équilibrage harmonique à des problèmes classiques. Elle comporte des résultats intéressants et originaux.
La mémoire est composée d'une introduction et de trois chapitres. Le premier chapitre est un rappel de certaines notions préliminaires utiles par la suite.

Au second chapitre, nous présentons la méthodologie pour la procédure d'équilibre harmonique directe et démontrons son utilisation en l'appliquant à un exemple d'oscillateurs TNL dans.

En suit en appliquant un exemple sur une formulation raisonnable de mise en équilibre d'harmonie, dans lequel oscillateur TNL est des approximations de leurs solutions périodiques calculées.

Finalement, nous faisons des commentaires généraux et donnons un résumé des caractéristiques principales et des conclusions atteintes dans ce chapitre.

Dans le troisième chapitre, nous examinons la stabilité conditionnelle de la solution zéro d'un problème mixte. Nous appliquons la méthode de l'énergie pour étudier la stabilité de la solution d' un problème aux limites avec condition initiale, et nous appliquons aussi la méthode d'équilibrage harmonique.

La méthode d'équilibrage harmonique a été étudiée par D.W.Jordan, P.Smith [10], E.R.Mickens [12], laquelle a fournit une technique générale pour le calcul des approximations des solutions périodiques des équations différentielles. Elle correspond à une série de Fourier tronquée et permet la détermination systématique des coefficients des différentes harmoniques et la fréquence angulaire.

Chapitre 1

Notion de la stabilité

On considère un système non linéaire non autonome de la forme suivante :

$$u_t = f(t, u(t)) \qquad \star$$

avec

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

une fonction continue en t, localement lipschitzienne en u et telle que

$$f(t, 0) = 0,$$

pour tout $t \geqslant 0$,de sorte que l'origine soit un point d'équilibre. On désigne tout au long de ce mémoire la condition initiale $u(t_0)$ par u_0. Le paragraphe suivant est dédié à la définition de quelques concepts fondamentaux de stabilité.

On dit que u = 0 est un point d'équilibre stable, si

$$\forall \epsilon > 0, \forall t_0 \geqslant 0, \exists \delta = \delta(t_0, \epsilon) > 0,$$

$$telque \, \|u_0\| < \delta \Rightarrow \|u(t)\| < \epsilon, \forall t \geqslant t_0.$$

En d'autres termes, pour tout $t \geqslant t_0$ une petite perturbation de la condition initiale u_0 autour de l'origine donne naissance à une solution u(t) qui reste proche de l'origine. Notons bien que la stabilité du système n'implique pas la convergence des solutions vers l'origine, c'est pourquoi la notion de stabilité toute seule est insuffisante pour l'étude du comportement des solutions.On définit alors la notion d'attractivité.

Définition 1.1

On dit que u = 0 est

- un point d 'équilibre attractif, s 'il existe un voisinage de l'origine U(0), tel que

$$\forall u_0 \in U(0), \lim_{t \to +\infty} u(t) = 0.$$

-un point d'équilibre globalement attractif si :

$$\forall u_0 \in \mathbb{R}^n, \lim_{t \to +\infty} u(t) = 0.$$

Définition 1.2

On dit que l'origine u = 0 est

- un poin d 'équilibre asymptotiquement stable, s'il est stable et attractif.

- un point d 'équilbre globalement asymptotiquement stable, s 'il est stable et globalement attractif.

Définition 1.3

les solutions du systèmes $\star$ sont dites uniformément bornés, si :

$$\exists a \geqslant 0$$

et une fonction croissante :

$$c :]0, a[\to \mathbb{R}$$

telles que

$$\forall \alpha \in]0, a[, \|u_0\| < \alpha \Rightarrow \|u(t)\| < c(\alpha), \forall t \geqslant t_0.$$

les solutions sont dites globalement uniformément bornées, si la propriété précédente est vraie pour $a = +\infty$.

Définition 1.4

On dit que

- l'origine u = 0 est un point d'équilibre uniformément stable si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0,$$

telque

$$\forall t_0 \geqslant 0, \|u_0\| < \delta \Rightarrow \|u(t)\| < \epsilon,$$

$$\forall t \geqslant t_0 \geqslant 0.$$

- l'origine est un point d'équilibre globalement uniformément stable, s'il est uniformément stable et les solutions du système sont globalement uniformément bornées.

Définition 1.5

On dit que

- l 'origine u = 0 est un point d 'équilibre uniformément attractif, si :

$$\exists c \geqslant 0, \forall \|u_0\| < c, \forall \epsilon > 0, \exists T = T(\epsilon, c)$$

tel que,

$$\|u(t)\| < \epsilon, \forall t \geqslant T + t_0.$$

- l 'origine u = 0 est un point d'équilibre globalement uniformément attractif, si :

$$\forall c > 0, \forall \epsilon > 0, \exists T = T(\epsilon, c),$$

tel que

$$\|u(t)\| < \epsilon, \forall t \geqslant T + t_0.$$

Définition 1.6

On dit que

- l 'origine u = 0 est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable s 'il est uniformément stable et uniformément attractif.

- l' origine u = 0 est un point d équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable, s 'il est globalement uniformément stable et globalement uniformément attractif.

Définition 1.7

On dit que

- l 'origine u = 0 est un point d 'équilbre exponentielle stable, s' il existe un voisinage de l 'origine noté U(0),

$$\exists \lambda_1 > 0$$

et

$$\exists \lambda_2 > 0,$$

tels que

$$\|u(t)\| \leq \lambda_1 \|u_0\| \frac{1}{\exp \lambda_2(t-t_2)}, \forall u_0 \in U(0), \forall t \geqslant t_0 \geqslant 0.$$

Dans ce cas, la constante λ_2 est appelée le taux ou aussi la vitesse de convergence.

- l ' origine u = 0 est un point d 'équilibre globalement exponentiellement stable, si

$$U(0) = \mathbb{R}^n.$$

Remarque 1.1

Il est important de remarquer que la propriété de la stabilité exponentielle du système entraine nécessairement la stabilité asymptotique de ce dernier.

Définition 1.8

Une fonction continue

$$\alpha : [0, a[\rightarrow [0, +\infty[$$

est dite de classe K, si elle est strictement croissante et

$$\alpha(0) = 0.$$

Elle est dite de classe K_∞, si de plus, on a $a = +\infty$ et $\alpha(r) \rightarrow +\infty$ quand $r \rightarrow +\infty$.

Définition 1.9

Une fonction continue

$$\beta : [0, a[\times[0, +\infty[\to [0, +\infty[$$

est dite de classe K L, si pour tout s fixé, l 'application $s \to \beta(r, s)$ est de classe K et pour tout r fixé, l 'application est décroissante et $\beta(r, s) \to 0$ quand $s \to +\infty$.

Proposition 1.1

L'origine u = 0 est un point d 'éqilibre - Uniformément stable si et seulement si il existe une fonction $\alpha($. de classe K et une constante positive c indépendante de t_0 telle que,

$$\|u(t)\| \leq \alpha(\|u_0\|), \forall t \geqslant t_0 \geqslant 0, \forall \|u_0\| < c.$$

- Globalement uniformément stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale $u_{0.}$

Proposition 1.2

L ' origine u =0 est un point d 'équilibre

- Uniformément asymptotiquement stable si et seulement s 'il existe une fonction $\beta(.,.)$ de classe K L et une constante positive c indépendante de t_0 telle que,

$$\|u(t)\| \leq \beta(\|u_0\|, t - t_0), \forall t \geqslant t_0 \geqslant 0, \forall \|u_0\| < c.$$

-Globalement uniformément asymptotiquement stable si et seulement si l 'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale u_0.

Proposition 1.3

L ' origine u =0 est un point d ' équilibre

- Exponentiellement stable si et seulement si l 'inégalité précédente est satisfaite avec

$$\beta(r, s) = kr \exp -\gamma s, k > 0, \gamma > 0, \forall \|u_0\| < c.$$

- Globalement exponentiellement stable si et seulement l 'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale u_0.

1.1 inégalité de base

1.1.1 Inégalité de Cauchy :

$$\forall(\alpha,\beta) \in C \times C, |\alpha\beta| \preceq \frac{1}{2}|\alpha|^2 + \frac{1}{2}|\beta|^2.$$

1.1.2 Inégalité de $\epsilon-$ Cauchy :

$$\forall(\alpha,\beta) \in C \times C, |\alpha\beta| \leq \frac{1}{\epsilon 2}|\alpha|^2 + \frac{\epsilon}{2}|\beta|^2.$$

Tel que ϵ certain nombres réels strictement positif.

1.1.3 Inégalité intégrale de Cauchy- schwarz :

$$\forall(\varsigma,\varepsilon) \in (L^2(\Omega))^2, \int_\Omega |\varsigma \times \varepsilon| \leq \int_\Omega (\varsigma^2)^{\frac{1}{2}} \int_\Omega (\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette inégalité est le cas particulier de l'inégalité de Hölder pour p =q=2 .

1.1.4 Inégalité intégrale de Hölder :

soient p et q deux nombres réels $\geqslant 0$

$$\forall(\varsigma,\varepsilon) \in L^p(\Omega) \times L^q(\Omega), \int_\Omega |\varsigma \times \varepsilon| \leq \int_\Omega (|\varsigma|^p)^{\frac{1}{p}} \int_\Omega (|\varepsilon|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Chapitre 2

Equilibre harmonique

La méthode d'équilibrage harmonique fournit une technique générale pour le calcule des approximations des solutions périodiques des équations différentielles. Elle correspond à une série de Fourier tronquée et permet la détermination systimatique des coefficients harmoniques et la fréquence angulaire. La signification de la méthode consiste en ce qu'il peut être appliqué au équation différentiel pour lequel les termes non-linéaires ne sont pas petits.

Il y a un certain nombre de formulation de la méthode d'équilibrage harmonique .Mickens [10, 11], inclut une liste de certaines des publications appropriée sur ce sujet. Une nouvelle approche , utilisant une formulation d'équilibrage harmonique raisonnable a été prentée par Beléndez [2, 3], ils démontrent l'utilité de la procédure en l'appliquant à plusiers systèmes oscillants non linéaires. Les fondations mathématiques de mise en équilibre d'hamonie on été examinées par plusiers individus. Les travaux de Borges [4] ,Miletta [5], et Bobylev [1] fournissent des aperçus à diverses questions concernant la convergence et les limites d'erreur pour les approximations du solutions périodiques.

Dans la section 2.1, nous présentons la méthodologie pour la procédure d'équilibre harmonique directe et démontrons son utilisation en l'appliquant à un exemple d'oscillateurs TNL dans la section 2.2. La section 2.3 en appliquant un exemple sur une formulation raisonnable de mise en équilibre d'harmonie, dans lequel oscillateur TNL est des approximation de leurs solutions périodiques calculées. Finallement, dans la section 2.4, nous faisons des commentaires généraux et donnons un résumé des caractéristiques principales et des conclusions atteintes dans ce chapitre.

2.1 équilibre harmonique directe : Méthodologie

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0, \tag{2.1}$$

Ou $F(.,.,.)$ est de parité impaire, ie,

$$F(-x, -\dot{x}, -\ddot{x}) = -F(x, \dot{x}, \ddot{x}). \tag{2.2}$$

Une conséquence majeure de cette proprieté est que les expansions de Fourier correspondantes des solutions périodiques contient seulement des harmoniques étronges, ie,

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k \cos[(2k-1)\bar{\Omega}_N t] + \bar{B}_k^N \sin[(2k-1)\bar{\Omega}_N t] \right\}. \tag{2.3}$$

L'approximation d'équilibre harmonique d'ordre N à x(t) est l'expression

$$x_N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \bar{A}_k^N \cos[(2k-1)\bar{\Omega}_N t] + \bar{B}_k^N \sin[(2k-1)\bar{\Omega}_N t] \right\}. \tag{2.4}$$

Ou

$$\bar{A}_k^N, \bar{B}_k^N, \bar{\Omega}_N$$

sont des approximations de

$$(A_k, B_k, \Omega)$$

pour

$$k = 1, 2, ..., N.$$

Pour le cas d'un oscillateur conservateur, l'équation prend généralement la forme

$$\ddot{x} + f(x, \lambda) = 0. \tag{2.5}$$

Ou λ désigne les différents paramètres apparaissant dans $f(x, \lambda)$ et $f(-x, \lambda) = -f(x, \lambda)$, les conditions initiales suivantes sont sélectionnées

$$x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = 0, \tag{2.6}$$

et ceci a pour conséquence que seuls les termes cosinus sont nécessaires dans les expansions de Fourier, et donc nous avons

$$x_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \bar{A}_k^N \cos[(2k-1)\Omega_N t]. \tag{2.7}$$

Observe ceci $x_N(t)$ a $(N+1)$ inconnus, les coefficients N, $(\bar{A}_1^N, \bar{A}_2^N, ..., \bar{A}_N^N)$ et Ω_N, la fréquence angulaire. ces quantités peuvent

être calculées en effectuant les étapes suivantes :

1. Remplacer l'éq (2.7) dans l'éq (2.5), et étendre la forme résultante dans une expression qui a la structure

$$\sum_{k=1}^{N} H_k \cos[(2k-1)\Omega_N t] + HOH \simeq 0. \tag{2.8}$$

Ou H_m les sont des fonctions des coefficients, la fréquence angulaire, et les paramètres, ie

$$H_k = H_k(\bar{A}_1^N, \bar{A}_2^N, ..., \bar{A}_N^N, \Omega_N, \lambda).$$

Notez que dans l'éq (2.8), nous ne retenons dans notre expansion autant d'harmoniques que dans l'approximation supposée de la solution périodique.

2. Mettez les fonctions H_k à zéro, ie,

$$H_k = 0, \qquad k = 1, 2, ..., N \tag{2.9}$$

L'action est justifier parce que les fonctions de cosinus sont linéairement indépendent et, en conséquence, n'importe quelle somme linéaire d'entre eux qui est égale à zéro doit avoir pour propriété que les coefficients sont tous nuls. Voir Mickens [11, 12].

3. Résoudre le N équation, voir l'éq (2.9), pour

$$\bar{A}_2^N, \bar{A}_3^N, ..., \bar{A}_N^N \quad et \quad \Omega_N$$

en terme de

$$\bar{A}_1^N.$$

En utilisant les conditions initiales, nous avons pour $\bar{A}_1^N$ la relation

$$x_N(0) - A = \bar{A}_1^N + \sum_{k=2}^{N} \bar{A}_k^N(\bar{A}_1^N, \lambda). \tag{2.10}$$

Un point importante est que l'équation aura de nombreuses solutions distinctes et "celui" choisi pour une équation d'oscillateur particulière et qu'un pour lequel nous avons connu des restrictions a priori du comportement des approximations aux coefficients. Cependant, comme les exemples travaillés dans la section suivante manifestent, en générale, aucune difficulté essentielle se pose.

Pour les oscillateurs non conservateur, ou ẋ apparait à un "puissance étrange", le calcul des approximations des solutions périodiques suit une procédure modifiée pour le cas des oscillateurs conservateurs présentés ci-dessus. Plusiers de ces équations prennent la forme :

$$\ddot{x} + f(x, \lambda_1) = g(x, \dot{x}, \lambda_2)\dot{x}, \tag{2.11}$$

ou

$$f(-x, \lambda_1) = -f(x, \lambda_1), \quad g(-x, -\dot{x}, \lambda_2) = g(x, \dot{x}, \lambda_2), \tag{2.12}$$

et

$$\lambda_1, \lambda_2$$

dénotent les paramètres apparaissant dans f et g. Pour ce type d'équation diffirentielle, un cycle limite peut exister et les conditions initiales ne peuvent pas, en générale, être a priori spésifié.

L'équilibrage harmonique, pour les systèmes ou des cycles limites peuvent exister, utilise les procédures suivantes :

1. Prend l'approximation de l'ordre N à la solution périodique

$$x_N(t) = \bar{A}_1^N \cos(\bar{\Omega}_N t) + \sum_{k=2}^{N} \left\{ \bar{A}_k^N \cos[(2k-1)\bar{\Omega}_N t] + \bar{B}_k^N \sin[(2k-1)\bar{\Omega}_N t] \right\}, \tag{2.13}$$

ou les 2N inconnues

$$A_1^N, A_2^N, \ldots\ldots, A_N^N \; \Omega_N, B_2^N, \ldots\ldots, B_N^N, \tag{2.14}$$

sont à déterminer.

2. Remplacer l'éq (2.12) dans l'éq (2.10), et écrit le résultat comme

$$\sum_{k=1}^{N} \left\{ H_k \cos[(2k-1)\Omega_N t] + L_k \sin[(2k-1)\Omega_N t] \right\} + HOH \simeq 0, \tag{2.15}$$

ou le

$$\{H_k\}$$

et

$$\{L_k\}, k = 1, 2, ..., N,$$

sont des fonctions des inconnues 2N énumérées dans l'éq (2.13).

3. Ensuite assimiler le 2N fonctions

$$\{H_k\}$$

et

$$\{L_k\}$$

à zéro et les résoudres pour les amplitudes (2N-1) et la fréquence angulaire.

Si une solution "valide" existe, alors, il correspond à un limite. En générale, les amplitudes et la fréquence angulaire seront exprimées en termes des paramètres.

Comme indiqué plus haut dans cette chapitre, la méthode d'équilibrage harmonique peut donner des solutions fausse. Donc, il faut obtenir des connaissances préalables de l'utilisation d'autres procédures, telle que l'analyse de plan de phase, pour s'assurer que des solutions correctes sont dérivées de l'application de cette méthode. Un autre critérium doit exiger que les coefficients de Fourier approximatifs satisfassent des limites pertinentes sur leur valeurs comme une fonction de leur étiquette d'indice.

2.2 Exemples travailléés

Nous illustrons l'application et effectivement de la méthode d'équilibrage harmonique directe en utilisant il pour déterminer des approximations des solutions périodiques de cinq oscillateurs TNL. Dans chaque cas, nous calculons la deuxième approimation pour démontrer la technique. Les expressions d'ordre supérieur exigent simplement plus de manipulation algébriques et l'effort.

2.2.1 $\ddot{x} + x^3 = 0$

Nous commençons en calculant l'approximation d'équilibre harmonique de premier ordre des solutions périodiques de

$$\ddot{x} + x^3 = 0, \quad x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = 0, \tag{2.16}$$

Cette approximation prend la forme

$$x_1(t) = A\cos(\Omega_1 t). \tag{2.17}$$

Observez que cette expression satisfait automatiquement les conditions initiales.

Substitition l'éq.(2.15) dans l'éq.(2.14) donne

$$\theta = \Omega_1 t$$

$$(-A\Omega_1^2 \cos\theta) + (A\cos\theta)^3 \simeq 0,$$
$$-(A\Omega_1^2)\cos\theta + A^3[(\frac{3}{4})\cos\theta + (\frac{1}{4})\cos 3\theta] \simeq 0,$$
$$A[-\Omega_1^2 + (\frac{3}{4})A^2]\cos\theta + HOH \simeq 0.$$

Arrangement du coefficients de $\cos\theta$ à zéro donne la première approximation de la fréquence angulaire

$$\Omega_1(A) = (\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}} A, \tag{2.18}$$

et

$$x_1(t) = A\cos[(\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}} At]. \tag{2.19}$$

La solution de la deuxième approximation prend la forme

$$(\theta = \Omega_2 t)$$

$$x_2(t) = A_1\cos\theta + A_2\cos 3\theta \tag{2.20}$$

avec

$$\ddot{x}_2(t) = -\Omega_2^2(A_1\cos\theta + 9A_2\cos 3\theta). \tag{2.21}$$

Substitution l'éq.(2.18) et l'éq.(2.19) dans l'éq.(2.14) donne

$$H_1(A_1, A_2, \Omega_2)\cos\theta + H_2(A_1, A_2, \Omega_2)\cos 3\theta + HOH \simeq 0.$$

Ou

$$H_1 = A_1[\Omega_2^2 - (\frac{3}{4})A_1^2 - (\frac{3}{4})A_1A_2 - (\frac{3}{2})A_2^2], \tag{2.22}$$

$$H_2 = -9A_2\Omega_2^2 + (\frac{1}{4})A_1^3 + (\frac{3}{2})A_1^2A_2 + (\frac{3}{4})A_2^3. \tag{2.23}$$

Mise H_1 à zéro, et définissant z comme

$$z \equiv \frac{A_2}{A1}, \tag{2.24}$$

on obtient

$$\Omega_2 = (\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}}A_1(1 + z + 2z^2)^{\frac{1}{2}} = \Omega_1(1 + z + 2z^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.25}$$

Ou Ω_1 est celui de l'éq.(2.15). inspection de l'éq.(2.22) montre la deuxième approximation pour la fréquence angulaire est une modification du résultat de la première approximation.

Si cette valeur pour Ω_2 est substitué en l'éq.(2.21) et cette expression est mise à zéro, et la définition de z est utilisé, alors l'équation cubique suivante doit être satisfaite par z.

$$51z^3 + 27z^2 + 21z - 1 = 0. \tag{2.26}$$

Il y a trois racines, mais celui d 'intérêt devrait être réelle et avoir une petite ampleur, ie,

$$|z| \ll 1, \tag{2.27}$$

cette racine est

$$z_1 = 0.044818\cdots, \tag{2.28}$$

et implique que l'amplitude A_2 de l'harmonique supérieure, ie, le $\cos 3\theta$ est inférier à 5% de l'amplitude du mode fondamental $\cos\theta$.

donc, l'approximation de la deuxième équilibre harmonique pour l'éq.(2.14) est

$$x_2(t) = A_1[\cos\theta + z_1 \cos 3\theta],$$

pour la condition initiale, $x_2(0) = A$, on trouve

$$A - A_1(1 + x_1)$$

ou

$$A_1 = \frac{A}{1+z_1} = (0.9571)A. \tag{2.29}$$

L'utilisation de ce résultat dans l'éq.(2.23) donne

$$\Omega_2(A) = (\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}} A[\frac{(1+z_1+2z_1^2)^{\frac{1}{2}}}{1+z_1}] = (0.8489)A. \tag{2.30}$$

Les périodes correspondantes ($T = 2\pi/\Omega$) sont

$$T_1 \equiv \frac{2\pi}{\Omega_1} = \frac{7.2554}{A}, \quad T_2 \equiv \frac{2\pi}{\Omega_2} = \frac{7.4016}{A}, \tag{2.31}$$

$$T_{exact} = \frac{7.4163}{A}. \tag{2.32}$$

Ils ont les erreurs de pourcentage suivantes

$$E_1(\%) = 2.2\% \quad E_2(\%) = 0.20\%. \tag{2.33}$$

ou $E \equiv$erreur de pourcentage

$$= \left| \frac{T_{exact} - T}{T_{exact}} \right| \times 100, \tag{2.34}$$

depuis l'équation différentielle (2.14) a la solution exacte

$$x(t) = Acn(At; 1/\sqrt{2}).$$

Ou "**cn**" est **la fonction cosinus de Jacobi** le ratio A_2/A_1 peut être calculé explicitement, sa valeur est 0.045078. Cela devrait comparé à notre valeur de 0.044818.

En résumé, l'équilibre harmonique de la deuxième ordre de l'approximation pour la solution périodique de l'éq.(2.14) est

$$x_2(t) - (\frac{A}{1+z_1})[\cos(\Omega_2 t) + z_1 \cos(3\Omega_2 t)], \tag{2.35}$$

ou z_1 et Ω_2 sont donnés, respectivement dans l'éq.(2.26) et (2.28).

2.2.2 Calculation de ẍ

Dans les calculs impliquant l'approximation d'équilibre harmonique rationnelle, la dérivé seconde doit être évaluée, commençons par

$$x(t) = \frac{A_1 \cos\theta}{1 + B_1 \cos 2\theta}, \quad \theta = \Omega_1 t,$$

il s'ensuit que ẍ est

$$\begin{aligned}(1 + B_1 \cos 2\theta)^3 \ddot{x} &= -(\Omega_1^2 A_1)\times \\ \times\{[1 + B_1 - (\frac{11}{2})B_1^2]\cos\theta &+ 3B_1[\frac{3B_1}{4} - 1]\cos 3\theta + HOH\}.\end{aligned} \tag{2.36}$$

Cette formule sera utile pour les calculs à compléter dans la section suivante.

2.3 Exemples travaillés

Pour illuster l'utilité de la formulation de l'équilibre harmonique rationnel, cette section contient les détails des calculs pour trois équations différentielles de l'oscillateur TNL. Cette tache, dans chaque cas est de déterminer A_1, B_1 et Ω_1 en termes de conditions initiales.

2.3.1 ẍ + x³ =0

Nous commençons en observant que

$$\begin{aligned}(1 + B_1 \cos 2\theta)^3 x^3 &= (A_1 \cos\theta)^3 \\ &= (\frac{3A_1^3}{4})\cos\theta + (\frac{A_1^3}{4})\cos 3\theta.\end{aligned} \tag{2.37}$$

En utilisant ce résultat et l'éq.(2.15), il s'ensuit que

$$\ddot{x} + x^3 = 0. \tag{2.38}$$

peut être écrit comme

$$\begin{aligned}\{-(\Omega_1^2 A_1)[1 + B_1 - (\frac{11}{2})B_1^2] \\ + \frac{3A_1^3}{4}\}\cos\theta + \{-(\Omega_1^2 A_1)(3B_1)[\frac{3B_1}{4} - 1]\cos 3\theta + HOH.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Mettre les coefficients de

$$\cos\theta$$

et

$$\cos 3\theta$$

à zéro donne

$$\Omega_1^2[1 + B_1 - (\frac{11}{2})B_1^2] = (\frac{3}{4})A_1^2, \tag{2.40}$$

$$\Omega_1^2(3B_1)[\frac{3B_1}{4} - 1] = \frac{A_1^2}{4}. \tag{2.41}$$

Une équation distincte impliquant seulement B_1 peut être trouvée en divisant ces équations, ce qui donne le résultat

$$\frac{1 + B_1 - (\frac{11}{2})B_1^2}{3B_1[\frac{3B_1}{4} - 1]} = 3,$$

ou

$$(\frac{49}{4})B_1^2 - 10B_1 - 1 = 0, \tag{2.42}$$

et la racine ayant la plus petite magnitude est

$$B_1 = -0.090064. \tag{2.43}$$

Si l'éq.(2.39) est résolu pour Ω_1^2 alors,

$$\Omega_1^2 = (\frac{3}{4})A_1^2/[1 + B_1 - (\frac{11}{2})B_1^2] = (0.866728)A_1^2, \tag{2.44}$$

ou

$$\Omega_1 = (0.930982)A_1$$

Toutefois, pour $x(0) = A$ et $\dot{x}(0) = 0$, il s'ensuit que

$$A = \frac{A_1}{1 + B_1}$$

ou

$$A_1 = (1 + B_1)A.$$

Donc

$$\Omega_1(A) = (0.930982)(1 + B_1)A = (0.847134)A. \tag{2.45}$$

Et la période correspondante est

$$T_1(A) = \frac{2\pi}{\Omega_1(A)} = \frac{7.4170}{A}. \tag{2.46}$$

Depuis la période exacte est

$$T_{exacte}(A) = \frac{7.4163}{A}.$$

Le pourcentage d'erreur est

$$\left|\frac{T_{exacte} - T_1}{T_{exacte}}\right|.100 = 0.01\% erreur. \tag{2.47}$$

Ce calcul indique que les réprésentations de l'équilibre harmonique rationnel donnent d'excellentes estimations pour la fréquence angulaire et la période. Donc, nous avons pour cette approximation le résultat

$$x(t) = \frac{(0.909936)A\cos[(0.847134)At]}{1 - (0.090064)\cos[(1.694268)At]}. \tag{2.48}$$

2.4 Résumé

Nous finissons ce chapitre en énumérant plusieurs avantages et inconvénients de la méhode d'équilibrage harmoniques, en particulier en ce qui concerne les approximations de calcul des solutions périodiques des équations différentielles de l'oscillateur TNL.

2.4.1 Avantages

a) L'équilibre harmonique peut être appliqué à la fois au standard et aux équations d'oscillateur TNL.

b) Il est facile et simple de formuler les formes fonctionnelles pour l'approximation des solutions périodiques.

c) Pour certaines équations, un calcul du premier ordre peut fournir des résultats très précis, en particulier mesurés en termes d'erreur de pourcentage pour la fréquence angulaire Ω.

d) En générale, les approximations des équilibrages harmoniques du premier et du seconde ordre peuvent être faites à la main, ie, le travail mathématique associé ne nécessite pas l'utilisation de logiciels empaquete.

e) Les méthodes d'équilibrages harmoniques standard sont basé sur des fonctions trigonométriques. Toutes fois, il est possible de formuler ces procédures en utilisant n'importe quel ensemble complet de fonctions périodiques.

2.4.2 Désavantages

a) Equations différentielles de l'oscillateur TNL contenant des termes élevés à une puissance fractionnaire ou des termes qui ont des discontinuités peuvent devoir être réécrits sous une forme appropriée pour l'application de la méthode d'équilibrage harmonique. Actuellement, aucune procédure a priori existe pour déterminer quelle structure d'équation modifiée utiliser pour une équation TNL particulière.

b) Le calcule des amplitudes et la fréquence angulaire peut devenir algébriquement intensif.

c) Il est a priori difficile de prévoir pour une équation TNL donnée si un calcul d'équilibre harmonique du premier ordre fournira une approximation suffisamment précise des solutions périodiques.

d) les formulations existantes de la procédure d'équilibre harmonique ne permettent pas d'être appliquées à des oscillateurs non conservatifs.

Chapitre 3

Stabilité conditionnelle de la solution zéro d'un probleme non linéaire

L'objectif principal de ce chapitre est de résoudre léquation (3.1) en appliquant la méthode de l'équilibre harmonique et la méthode de l'énergie.

La méthode de l'équilibre harmonique fournit une technique générale pour le calcul des approximations des solutions périodiques des équations différentielles. Elle correspond à une série de Fourier tronquée et permet la détermination systématique des coefficients des différentes harmoniques et la fréquence angulaire. L'importance de cette méthode est qu'elle peut ètre appliquée aux équations différentielles pour lesquelles les termes non linéaires ne sont pas petits.

Dans ce chapitre, nous examinons la stabilité conditionnelle de la solution zéro d'un problème non linéaire. Afin d'étudier l'effet d'un terme non linéaire sur la stabilité d'une solution à une équation différentielle partielle (PDE).

3.1 position du problème

Nous appliquons la méthode de l'énergie pour étudier la stabilité de la solution d'un problème,

$$u_t = u_{xx} + au^3 - \frac{1}{2}tu - uu_x, \quad x \in (0,1), \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

ou $a > 0$, supposons maintenant (3.1) détient sur la région spatiale (0,1) avec des conditions aux limites

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{3.2}$$

et supposons que nous souhaitons étudier le comportement des u sous réserve de donnée initiales

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{3.3}$$

Faisons maintenant u une solution de (3.1),(3.3) qui satisfait les conditions initiales .Nous déffinissons une énergie $F(t)$ par

$$F(t) = \frac{1}{2}t\left\|u\right\|^2,$$

ou

$$\left\|\cdot\right\|$$

désigne la norme sur

$$L^2(0,1)$$

plus précisément,

$$\left\|u\right\|^2 = \int_0^1 u^2 dx.$$

Théorème 3.1

Si $\|u\| < \frac{1}{a\pi^2}$ alors $\|u\| \to 0$ pour t $\to +\infty$.

Démonstration

Multiplier l'équation différentielle (3.1) par u et intégrer plus (0,1) pour trouver

$$\int_0^1 u_t u dx = \int_0^1 u u_{xx} dx + a\int_0^1 u^4 dx - \frac{1}{2}t\int_0^1 u^2 dx \tag{3.4}$$

On pose

$$\int_0^1 u_t u dx = I_1 + I_2 + I_3.$$

Ou

$$I_1 = \int_0^1 u u_{xx}, I_2 = a\int_0^1 u^4 dx, I_3 = -\frac{1}{2}t\int_0^1 u^2 dx.$$

Calculons I_1 (on utilisons inégration par parties). On pose

$$U = u \to U' = u_x$$

$$V' = u_{xx} \to V = u_x$$

Donc,

$$I_1 = [u(1)u_x(1) - u(0)u_x(0)] - \int_0^1 u_x u_x dx,$$

alors

$$I_1 = -\int_0^1 u_x^2 dx.$$

Et par l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De l'inégalité intégration Sobolev nous savons que

$$\int_0^1 u^4 dx \leq \frac{1}{4}(\int_0^1 u_x^2 dx)^2. \tag{3.5}$$

Par conséquent, avec

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u\|^2 (= \int_0^1 u^2(x,t)dx).$$

Cette équation devient

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq - \|u_x\|^2 + a \|u_x\|^4 - tE(t).$$

Cette équation devient

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -a \|u_x\|^2 (\frac{1}{a} - \|u_x\|^2). \tag{3.6}$$

Ensuite, à partir de l'inégalité de Poincaré,

$$\pi^2 \|u\|^2 \leq \|u_x\|^2.$$

Maintenant, l'utiliser dans (3.6),

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -a\pi^2 \|u\|^2 (\frac{1}{a} - \pi^2 \|u\|^2). \tag{3.7}$$

Si

$$0 \leq \frac{1}{a} - \pi^2 \|u\|^2 = \eta,$$

ensuite

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq \eta a\pi^2 \|u\|^2, \tag{3.8}$$

donc (3.8) montre

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq 0, \quad for \quad \epsilon < t, \tag{3.9}$$

par conséquent,

$$\|u(t)\| \leq \|u(\epsilon)\|,$$

avec la même considération que nous avons

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -a\pi^2 \|u\|^2 \eta, \tag{3.10}$$

de plus

$$\frac{dF}{F} \leq -c\frac{dt}{t},$$

ou

$$c = 2a\pi^2\eta.$$

Nous trouvons

$$d\ln(F(t)) \leq d\ln(t^{-c}).$$

L'utilisation d 'un facteur d'intégration, nous pouvons obtenir de cette inégalité

$$\ln(\frac{F(t)}{F(\epsilon)}) \leq \ln(\frac{t^{-c}}{\epsilon^{-c}})$$

ensuite

$$F(t) \leq F(\epsilon) \times \frac{\epsilon^c}{t^c} \tag{3.11}$$

qui à son tour intègre à

$$\|u(t)\|^2 \leq 2\frac{\epsilon^\gamma}{t^\gamma} \|u(\epsilon)\|^2, \tag{3.12}$$

telque

$$\gamma = c + 1.$$

Ce que nous avons montré est que si $\|u(\epsilon)\| \leq \frac{1}{2a}$, ensuite $\|u(t)\| \to 0$ quand t$\to +\infty$. Et la solution zéro à (3.1)-(3.3) est stable ce qui achève la démonstration.

3.2 Méthode d'équilibrage harmonique

Encore une fois, en faisant une intégration par parties de l'équation (3.4) on obtient

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -\left\|u_x\right\|^2 + a\left\|u^2\right\|^2 - tE(t).$$

Cette équation devient

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -\left\|u_x\right\|^2 + a\left\|u^2\right\|^2.$$

Donc

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -a\left\|u_x\right\|^2 (\frac{1}{a} - \max_{S_{adm}} \frac{\left\|u^2\right\|^2}{\left\|u_x\right\|^2}),$$

ou S_{adm} est l'espace des fonctions admissibles sur lesquelles nous cherchons un maximum

$$S_{adm} = \left\{u \in C^2 \mid u = 0 \text{ avec } x = 0, 1\right\}.$$

maintenant définir R_F par

$$\frac{1}{R_F} = \max_{S_{adm}} \frac{\left\|u^2\right\|^2}{\left\|u_x\right\|^2},$$

puis l'inégalité d'énergie (1.6) peut être réécrite

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -a\left\|u_x\right\|^2 (\frac{1}{a} - \frac{1}{R_F}).$$

Le problème reste à trouver R_F, rappeler que

$$R_F^{-1} = \max_{S_{adm}} \frac{\left\|u^2\right\|^2}{\left\|u_x\right\|^2}.$$

Laisser

$$\Lambda_1 = \left\|u^2\right\|^2, \quad \Lambda_2 = \left\|u_x\right\|^2.$$

Les équations d'Euler Lagrange sont trouvés par

$$\frac{d}{d\epsilon}\frac{\Lambda_1(u+\epsilon\tau)}{\Lambda_1(u_x+\epsilon\tau_x)} \Big|_{\epsilon=0} = \delta(\frac{\Lambda 1}{\Lambda_2}),$$

$$= \frac{\Lambda_2\delta\Lambda_1 - \Lambda_1\delta\Lambda_2}{\Lambda_2{}^2}$$

$$= \frac{1}{\Lambda_2}(\delta\Lambda_1 \quad \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}\Big|_{max}\delta\Lambda_2)$$

$$= \frac{1}{\Lambda_2}(\delta\Lambda_1 - \frac{1}{R_F}\delta\Lambda_2)$$

(Depuis δ se réfère à la derivative évalué à $\epsilon = 0.\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}$ Est ici entendue comme étant à la valeur stationnaire). Donc,

$$\delta\Lambda_1 - \frac{1}{R_F}\delta\Lambda_2 = 0. \tag{3.13}$$

Ici

$$\delta\Lambda_1 = \frac{d}{d\epsilon}\int_0^1 (u+\epsilon\tau)^4 dx \mid_{\epsilon=0} .$$

Ou τ est arbitraire $C^2(0,1)$ fonction avec $\tau(0) = \tau(1) = 0$, et

$$\delta\Lambda_1 = \frac{d}{d\epsilon}\int_0^1 (u_x+\epsilon\tau_x)^2 dx \mid_{\epsilon=0} .$$

Donc, (2.1) conduit à

$$\int_0^1 2u^3\tau - R_F^{-1}u_x\tau_x dx = 0.$$

L'intégration par parties montre que

$$\int_0^1 (u_{xx} + 2R_F u^3)\tau dx = 0.$$

Depuis T est arbitraire en dehors des exigences de continuité et de conditions aux limites, nous devons avoir

$$u_{xx} + 2R_F u^3 = 0, \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{3.14}$$

Il est difficile de résoudre les équations différentielles non linéaire, et en général, il est souvent plus difficile d'obtenir une approximation analytique qu'un numérique pour un système oscillatoire non linéaire donné. Il y a beaucoup de approches pour l'approximation des solutions aux systèmes oscillants non linéaire. Le plus largement étudié méthodes d'approximations sont les méthodes de perturbation. Le plus simple et peut être un des plus utiles.

Ces méthodes d'approximation est la méthode de perturbation Lindstedt Poincaré, dans lequel la solution est analytiquement détendu dans la série de puissance d'un paramètre petit. Pour contourner cette limitation, de nombreux nouveaux perturbatifs techniques ont été développée .techniques Lindstedt Poincaré modifiés, homotopie méthode de perturbation ou dilatation linéaire delta ne sont que quelques exemples.Une récente détaillée peut être trouvée dans Réf.[A. Beléndez , A. Hernandez, T. beléndez, M.L. Alvarez, S. Gallego, M. Ortuno, C. Neipp].

Nous examinons maintenant l'équation (3.14) dans le cadre d 'un 2-dim espace de phase. la seconde équation pour différentiel , étant donné dans l'équation (3.14), peut être reformulé pour deux systèmes d'équations du premier ordre

$$\frac{du}{dx} = v, \quad \frac{dv}{dx} = -2R_F u^3.$$

Sous réserve des conditions initiales

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Puis

$$\frac{dv}{du} = -2R_F \frac{u^3}{v}.$$

En général,ceci est un premier ordre, une équation différentielle non linéaire, dont les solutions sont les courbes des trajectoires de solutions dans l'espace de phase.

La méthode de l'équilibre harmonique fournit une technique générale pour le calcul des approximations des solutions périodiques des équations différentielles, qui régissent des phénomènes Dynamique [R.E. Mickens].

Elle correspond à une série de Fourier tronquée et permet la détermination systématique des coefficients des différentes harmoniques et la fréquence angulaire. Le n - ième ordre approximation prend une forme telle que

$$u_n(t) = a_1 \cos(\theta) + a_2 \cos(3\theta) + a_3 \cos(7\theta) + \ldots\ldots.. + a_n \cos((2n-1)\theta). \tag{3.15}$$

Ou $\theta = \omega_n t$ et les n - coefficients et ω_n sont à déterminer. Pour un système conservateur avec des conditions initiales, $u(0) = A$, et $u_x(0) = 0$, la stratégie de base consiste à remplacer l'équation (3.1) dans l'équation différentielle et d'élargir l'expression résultat en une série trigonométrique, mais seulement y compris les termes de $\cos(\theta)$ jusqu'à $\cos((2n\text{-}1)\theta)$ faisant cela donne le type de relation suivante

$$\begin{aligned} &H_1(a_1, a_2, \cdots, a_n, \omega_n) \cos(\theta) + H_2(a_1, a_2, \cdots, a_n, \omega_n) \cos(3\theta) + \\ &H_3(a_1, a_2, \cdots, a_n, \omega_n) \cos(7\theta) + H_4(a_1, a_2, \cdots, a_n, \omega_n) \cos(9\theta) + \\ &+ \cdots + H_n(a_1, a_2, \cdots, a_n, w_n) \cos((2n-1)\theta) + HOH \simeq 0, \end{aligned} \tag{3.16}$$

ou HOH signifie ordre supérier - harmoniques, et pour un différentiel donné l 'équation

$$H_i(a_1, a_2, ..., a_n, \omega_n)$$

sont tout à faire déterminé. La procédure d'équilibrage des harmoniques consiste à fixer les coefficients des termes en cosinus à zéro, c'est à dire

$$H_i(a_1, a_2, \cdots, a_n, \omega_n) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Ces n - relations , ainsi que les conditions initiales, peuvent être résolus à donner à tous les coefficients ω_n et en fonction de B, c'est à dire,

$$a_i = a_i(B), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\omega_n = \omega_n B),$$

Nous commençons par le calcul de la première harmonique approximation équilibreur aux solutions périodiques de

$$\frac{dv}{du} = -2R_F\frac{u^3}{v}, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = A, \tag{3.17}$$

Cette approximation prend la forme

$$u_1 = a\sin(w_1 x), \tag{3.18}$$

et cherchons les conditions sur le paramètre a afin d'obtenir la stabilité de la solution nulle de notre problème.

Remarquons que cette expression satisfait automatiquement les conditions initiales. Substituer Eq.(3.19) dans l'équation (2.2) donne

$$(\theta = \omega_1 x - \frac{\pi}{2})$$

$$-a\omega_1^2\cos(\theta) + a^3\alpha\cos^3(\theta) \simeq 0, \quad alpha = 2R_F.$$

$$-a\omega_1^2\cos(\theta) + a^3\alpha(\frac{3}{4}\cos(\theta) + \frac{1}{4}\cos(3\theta)) \simeq 0.$$

$$(\frac{3}{4}a^3\alpha - a\omega_1^2)\cos(\theta) + \quad higher \quad harmonic \simeq 0$$

Réglage du coefficient de $\cos(\theta)$ à zéro donne la première approximation à la fréquence angulaire

$$\omega_1(a) = a\sqrt{\frac{3}{4}\alpha},$$

et

$$u_1 = a\sin(a\sqrt{\frac{3}{4}\alpha x}),$$

ou nous avons pris $a = 1$, puisque nous sommes principalement intéressés par R_F et pas u. La condition $u(1) = 0$ montre que

$$\sqrt{\frac{3}{2}R_F} = n\pi, \quad n = \pm 1, \quad \pm 2 \cdots .$$

Cela donne une suite infinie de valeurs pour R_F (correspondant à des valeurs fixes du quotient $\frac{\|u^2\|^2}{\|u_x\|^2}$),

$$R_F = \frac{2}{3}\pi^2, \frac{8}{3}\pi^2, \cdots .$$

Pour la stabilité, nous avons besoin de la condition $a < R_F(\min)$, d'ou $R_F = \frac{2}{3}\pi^2$. En particulier, par conséquent

$$a < \frac{2}{3}\pi^2.$$

on obtient la stabilité de la solution à zéro du problème (3.1) - (3.3).

Bibliographie

[1] N. A. Bobylev, Y. M. Burman, and S. K. Korovin, Approximation Procedures in Nonlinear Oscillation Theory *Walter deGruyter, Berlin*, 1994.

[2] A.Beléndez, E. Gimeno, M. L. Alvarez, S. Gallego, M. Ortunõ, and D. I.Méndez, *Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10, 13(2009).

[3] A.Beléndez, A.Hernández, T.Beléndez, M.L. Álvarez, S. Gallego, M.Ortuño, C.Neipp, Application of the harmonic balance method to a nonlinear oscillator typified by a mass attached to a stretched wire, *Journal of Sound and Vibration*, 302 (2007) 1018-1029.

[4] C. A. Borges, L. Cesari, and D. A. Sanchez, *Quarterly of Applied Mathematics* 32, 457 (1975).

[5] P. Miletta, in R. Chuagui (editor), *Analysis, Geometry and Probability*(Marcel Dekker, New York, 1985).

[6] H.Brézis, Analyse Fonctionnelle théorie et applications, *Masson*, (1987).

[7] A.A.Dezin, Théorèmes d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels, *Usp Math Naouk*, 14 (1987) 73.

[8] I.Ellouze, Etude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retard et des systèmes impulsifs, *Thèse de doctorat*, (2010).

[9] W.Hahn, Stability of Motion, *Springer Verlag*, (1967).

[10] D.W.Jordan, P.Smith, Nonlinear Ordinary Differential Equations Problems and Solutions , *Oxford New York*, (2007).

[11] E.R.Mickens, Oscillations in Planar Dynamics Systems, *World Scientific, Singapore*, (1996).

[12] E.R.Mickens, Truly Nonlinear Oscillators An Introduction to Harmonic Balance, Parameter Expansion, *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd*, (2010).

[13] B.Straughan, The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection, *SpringerVerlag Berlin Heidelberg New York*, (2004).