République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

M^{elle} : DJABALI Besma

Intitulé

CONTRÔLABILITÉ DES SYSTÈMES DYNAMIQUES D'ORDRE FRACTIONNAIRES

Dirigé par : Dr. KARBOUA Mourad

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. DEBBAR Rabah	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. KARBOUA Mourad	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. DEBBOUCHE Amar	PROF	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Remerciement

Je remercie avant tout Allah, le tout puissant de m'avoir aidé pour réaliser ce travail.

Jetiens à exprimer mes plus vifs remerciements et présenter mon plus profond respect à mon encadreur : Monsieur KARBOUA Mourad.

A mes chers parents secrets de ma force merci pour tous vos sacrifices pour que vos enfants Grandissent prospérent, Merci d'être tout simplement Mes Parents.

Je Veux dédie cette mémoire A mon mari et mon ami Fouad
Je le remercie pour Leur encouragement à compléter ce travail

Je dois cette réussite A mes sœurs :Amina et Houda et je suis fière de vous l'offrir :
Je vous dédie se travail aussi A mes cher frères :Fethiet Mohamed et Belgacem et Diyaeddine

A mes chers amies : Amina ,Rokaya ,Houria…Merci pour vos encouragements

Je tiens également à remercier toutes les personnes qui m'ont enseignées, et toutes les personnes qui m'ont aidée durant ma formation.

Table des matières

Introduction

Le but du calcul fractionnaire est de généraliser les dérivées traditionnelles à des ordres non-entiers. Comme il est bien connu, beaucoup de systèmes dynamiques sont mieux caractérisés par un modèle dynamique d'ordre fractionnaire, basé en général sur la notion de différentiation ou d'intégration de l'ordre non-entier.
Les origines du calcul fractionnaire remontaient à la fin du 17^{eme} siècle, partant de quelques spéculations de G. W. LEIBNIZ concernant la question de l'Hôpital, posée le 30/09/1695, sur la signification de $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$. Depuis, de nombreux mathématiciens ont contribué au développement de cette théorie, nous citons entre autres P. S. LAPLACE, J. B. J. FOURIER, N.H. ABEL, J. LIOUVILLE, A. K. GRUNWALD, A. V. LETNIKOV, O. HEAVISIDE, H. WEYL et M. RIESZ etc.

Récemment, les équations différentielles fractionnaires sont apparues comme une nouvelle branche des mathématiques appliquées qui ont été utilisées pour de nombreux modèles mathématiques en science et en ingénierie. En fait, les équations différentielles fractionnaires sont considérées comme un modèle alternatif aux équations différentielles non linéaires [1]. La théorie des équations différentielles fractionnaires a été largement étudiée par DELBOSCO et RODINO [2] et LAKSHMIKANTHAM et AL. [3 – 6]. Les problèmes de stabilité pour les systèmes différentiels fractionnaires sont discutés dans [7, 8]. En dehors de la stabilité, le comportement qualitatif le plus important d'un système dynamique est la contrôlabilité. Cela signifie qu'il est possible de diriger n'importe quel état initial du système vers n'importe quel état final dans un certain temps fini en utilisant un contrôle admissible. Le concept de la contrôlabilité joue un rôle majeur dans les espaces de dimensions finies et infinies, c'est-à-dire des systèmes représentés par des équations différentielles ordinaires et des équations différentielles partielles respectivement. Il est donc naturel d'étendre ce concept à des systèmes dynamiques représentés par des équations différentielles fractionnaires. De nombreuses équations différentielles fractionnaires partielles et des équations intégro-différentielles peuvent être exprimées en équations différentielles fractionnaires et intégro-differentielles dans certains espaces de Banach [9].

Il existe de nombreux travaux sur la contrôlabilité en dimension finie des systèmes linéaires [10] et des systèmes dimensionnels infinis dans les espaces abstraits [11]. Le problème de la contrôlabilité des systèmes non linéaires et des systèmes intégro-différentiels, y compris les systèmes de retard, a été étudié par de nombreux chercheurs dans des espaces à la fois finis et infinis [12, 13]. La contrôlabilité des systèmes différentiels fractionnaires dans l'espace de dimension finie a été discutée dans [14 – 16].

Ce mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux bases mathématiques du calcul fractionnaire, quelques notions essentielles en calcul

fractionnaire seront introduits comme les deux approches de la dérivée fractionnaire (Riemann-Liouville, Caputo). Quelques éléments de base sur la théorie des semi-groupes sont ensuite considérés, ainsi on fait rappel sur les théorèmes de point fixe qui sont trés utils à la résolution des systèmes dynamiques fractionnaires.
Le deuxième chapitre de ce mémoire est dédié aux systèmes dynamiques décrits par des équations différentielles non linaires d'ordres fractionnaires et au rappel des principaux résultats concernant ces systèmes. Nous nous intéresserons à la question de l'existence et la contrôlabilité d'une classe de système dynamique (linéaire et non linéaire).
Le trosième chapitre est consacré aux systèmes intégro-différentiels non linéaires d'ordres fractionnaires, où on expose les résultats d'exixtence et la contrôlabilité de ces systèmes en utilisant la théorie du semi-groupe et un théorème de point fixe.

Chapitre 1

Bases Mathématiques du Calcul Fractionnaire

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions mathématiques nécessaires pour l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann Liouville, les fonctions spéciales (Gamma, Bêta), les dérivées fractionnaires au sens de Riémann-Liouville et au sens de Caputo, la théorie des semi-groupes.

1.1 Opérateurs fractionnaires

1.1.1 Intégrale d'ordre arbitraire

Soit $f : [a; b) \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou à valeurs vectorielles) une fonction continue. b pouvant être fini ou infini.

Une primitive de f est donnée par l'expression

$$\left(I_a^1 f\right)(t) = \int_a^t f(\tau)\, d\tau$$

pour une primitive seconde on aura

$$\left(I_a^2 f\right)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s f(t)\, dt\right) ds.$$

En utilisant le théoréme de fubini, on peut écrire

$$\left(I_a^2 f\right)(t) = \int_a^t (t-\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

en itérant, on arrive a :

$$\left(I_a^n f\right)(t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\, d\tau$$

1.1.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'approche de Riemann-Liouville relative à la définition de l'intégrale fractionnaire s'appuie sur la formule de Cauchy pour le calcul de l'intégrale répétée n fois qui est donnée par

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)\, ds;\ t > a \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

En généralisant cette formule à un ordre α réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma on aura la définition suivante :

Définition 1.1. *L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, est formellement définie par*

$$I_{0^+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds. \tag{1.1}$$

1.1.3 Exemples pour l'intégrale fractionnaire R-L

a) Soit la fonction $f(t) = t^\beta$ où $\beta > -1$

$$I_{0_+}^\alpha t^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\beta ds$$

pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variables $s = tz$

$$\begin{aligned} I_{0_+}^\alpha t^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-tz)^{\alpha-1} (tz)^\beta t dz \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t z^\beta (1-z)^{\alpha-1} dz \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1,\alpha) \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

b) Soit la fonction : $f(t) = C$

$$\begin{aligned} I_{0_+}^{\alpha} C &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} C ds \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \end{aligned}$$

pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variables $u = t - s$

$$\begin{aligned} I_{0_+}^{\alpha} C &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t u^{\alpha-1} du \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{t^{\alpha}}{\alpha} \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha}. \end{aligned}$$

1.1.4 Propriétés de l'intégrale fractionnaire de R-L

1. L'opérateur d'intégration fractionnaire I_{0+}^{α} est borné dans $L^p(\mathbb{R}_+)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ et on a

$$\|I_{0+}^{\alpha} f\|_p \leq K \|f\|_p,$$

pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$.

2. Soit $\alpha, \beta > 0$, alors pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ on a

$$I_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\beta} f(t) = I_{0+}^{\alpha+\beta} f(t) = I_{0+}^{\beta} I_{0+}^{\alpha} f(t),$$

pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$.

3. Soit $\alpha > 1$, alors pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ on a

$$\frac{d}{dt} \left(I_{0_+}^{\alpha} f \right)(t) = \left(I_{0_+}^{\alpha-1} f \right)(t),$$

4. Soit $\alpha > 0$, alors pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ on a

$$\lim_{\alpha \to 0_+} \left(I_{0_+}^{\alpha} f \right)(t) = f(t).$$

1.1.5 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.2. *Pour $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ est formellement définie par*

$$^{L}D_{0+}^{\alpha} f(t) = D^n I_{0+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}_+ \qquad (1.2)$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$.

1.1.6 Exemples pour la dérivée fractionnaire R-L

a) Soit la fonction $f(t) = t^\beta$, $\beta > -1$, on a :

$$\begin{aligned} {}^{l}D^{\alpha}_{0_+} t^\beta &= \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} t^{n-\alpha+\beta}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n t^{n-\alpha+\beta} \end{aligned}$$

on sait que :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n t^{n-\alpha+\beta} = (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)\, t^{\beta-\alpha}$$

par substitution on obtient :

$$\begin{aligned} {}^{l}D^{\alpha}_{0_+} t^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} t^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)}{(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

b) Pour $\alpha = 1$, la formule de dérivation se réduit a :

$$\begin{aligned} {}^{l}D^{1}_{0_+} t^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)} t^{\beta-1} \\ &= \beta t^{\beta-1} = \frac{d}{dt} t^\beta \end{aligned}$$

c) Si on prend $\beta = 0$ dans l'exemple précédent, on arrive au résultat suivant :

$$ {}^{l}D^{\alpha}_{0_+} 1 = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

c'est-à-dire que la dérivée fractionnaire de Riemann–Liouville d'une constante n'est pas ni nulle ni constante, mais on a :

$$ {}^{l}D^{\alpha}_{0_+} C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}.$$

Remarque

• Pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coincide avec la dérivée ordinaire.

1.1.7 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La définition formelle de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est donnée par

Définition 1.3. *La dérivée fractionnaire à gauche au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ est donnée par*

$$^{C}D_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.3}$$

avec

$$n = [\alpha] + 1 \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N};\ n = \alpha \text{ pour } \alpha \in \mathbb{N}.$$

1.1.8 Exemple pour la dérivée fractionnaire de Caputo

Soit la fonction $f(t) = t^{\beta},\ \beta > n-1$

on a

$$f^{n}(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} t^{\beta-n},$$

donc

$$^{c}D_{0_+}^{t} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} t^{\beta-n} ds,$$

en effectuant le changement de variables $s = tz$ on obtient :

$$\begin{aligned}
^{c}D_{0_+}^{t} t^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^1 (t-tz)^{n-\alpha-1} t^{\beta-n} t dz \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^1 t^{\beta-\alpha}(1-z)^{n-\alpha-1} dz \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1) B(\beta-\alpha+1, n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} t^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} t^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

Conséquence : Contrairement à la dérivée de Riemann-Liouville, la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante $f = K$ est nulle.

1.1.9 Propriétés de la dérivée fractionnaire de Caputo

La relation entre la dérivée fractionnaire de Caputo et celle de Riemann-Liouville sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ est décrite par le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$. Si f possède $n-1$ dérivées en 0 et si ${}^{L}D^{\alpha}_{0+}f$ existe, alors*

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{0+}f(t) = {}^{L}D^{\alpha}_{0+}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^{k}\right], \tag{1.4}$$

presque partout sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque . On constate que la dérivée au sens de Caputo n'est définie que si celle de Riemann-Liouville existe et que la fonction est $(n-1)$ fois dérivable au sens ordinaire.

Corollaire 1.1. *Si ${}^{C}D^{\alpha}_{0+}f$ et ${}^{L}D^{\alpha}_{0+}f$ existent, et si l'on suppose que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo coincide avec celle de Riemann-Liouville, i.e.*

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{0+}f(t) = {}^{L}D^{\alpha}_{0+}f(t), \ p.p. \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.5}$$

Remarque

La dérivée fractionnaire de Caputo est également l'inverse de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

Corollaire 1.2. *Si ${}^{C}D^{\alpha}_{0+}f$ et ${}^{C}D^{\beta}_{0+}f$ existent, on a*

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\alpha}_{0+}\,{}^{C}D^{\beta}_{0+}f(t) &\neq {}^{C}D^{\alpha+\beta}_{0+}f(t)\ 1.6 \\ {}^{C}D^{\alpha}_{0+}\,{}^{C}D^{\beta}_{0+}f(t) &\neq {}^{C}D^{\beta}_{0+}\,{}^{C}D^{\alpha}_{0+}f(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.2 La fonction de Gamma

La fonction Gamma d'Euler est une fonction de base du calcul fractionnaire. Cette fonction généralise le factoriel $n!$.

Définition 1.4. *La fonction Gamma est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt, \quad Re(z) > 0, \quad z \in \mathbb{C} \tag{1.7}$$

avec $\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(0_+) = +\infty$; $\Gamma(z)$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.

1.2.1 Quelques propriétés de la fonction Gamma

Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{(z+1)-1}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z}dt \\
&= \left[-e^{-t}t^{z}\right]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \\
&= z\Gamma(z).
\end{aligned}$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!;\ \forall n \in \mathbb{N}$.

1.2.2 Représentation de la fonction Gamma sous forme d'une limite

La fonction Gamma peut être représentée aussi par la la limite

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^{z}}{z(z+1)\dots(z+n)},$$

où nous supposons que $Re(z) > 0$.

1.3 La fonction Bêta

Parmi les fonctions de base du calcul fractionnaire : la fonction Bêta. Cette fonction joue un rôle important spécialement dans une certaine combinaison avec la fonction Gamma

Définition 1.5. *La fonction Bêta est donnée par*

$$B(z,\omega) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}dt,\ Re(z) > 0,\ Re(\omega) > 0. \tag{1.8}$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma comme suit

$$B(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)},\ \forall z,\omega :\ Re(z) > 0,\ Re(\omega) > 0.$$

1.4 Semi-groupes des opérateurs linéaires

Dans cette section nous présentons les notions de base de la théorie des semi-groupes qui seront utilisées tout au long de ce travail.

Soit X un espace de Banach muni d'une norme noté $\|.\|$ et le produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

$\mathcal{L}(X)$ est l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans lui même dont la norme est

$$\|U\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|},$$

pour tout $U \in \mathcal{L}(X)$, $\mathcal{L}(X)$ est un espace de Banach.

1.4.1 Définitions

Définition 1.6. *Une famille d'opérateurs $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ linéaires bornés définis sur X est dite semi-groupe fortement continu (ou de classe C_0), ou simplement C_0-semi-groupe si on a :*

(i) $\mathcal{S}(0) = I$ *(I est l'opérateur d'identité dans $\mathcal{L}(X)$).*

(ii) $\mathcal{S}(t+s) = \mathcal{S}(t)\mathcal{S}(s)$ *pour tout $s,t \geq 0$. (propriété algébrique)*

(iii) $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \|\mathcal{S}(t)x - x\| = 0$ *pour tout x dans X.(propriété topologique)*

Si en remplace (iii) par :

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \|\mathcal{S}(t) - I\| = 0,\ t \geq 0,$$

il s'agit d'un semi-groupe uniformément continu.

Théorème 1.2. *Pour $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X, alors on a les propriétés suivantes :*

(i) $t \longrightarrow |\mathcal{S}(t)|_{\mathcal{L}(X)}$ *est bornée sur tout intervalle compact $[0,t_1]$;*

(ii) *Pour tout x dans X, la fonction $t \longrightarrow \mathcal{S}(t)x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;*

(iii) *Il existe des constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que :*

$$|\mathcal{S}(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t},\ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Définition 1.7.

L'opérateur A défini par : $D(A) = \left\{ x \in X : \lim\limits_{t\longrightarrow 0} \frac{\mathcal{S}(t)x-x}{t} \text{ existe pour tout } t \geq 0 \right\}$ et

$$Ax = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\mathcal{S}(t)x - x}{t} = \frac{d}{dt}\mathcal{S}(t)x\Big|_{t=0},\ \textit{pour } x \in D(A)$$

est dit générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe.

L'espace $D(A)$ est muni de la norme du graphe $\|x\|_{D(A)} = \|x\| + \|Ax\|$, $x \in D(A)$.

Remarque. Si $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés de générateur infinitésimal A, alors il est unique.

1.5 Représentation de la solution (Solution mild)

Dans cette section on présente la solution de l'équation différentielle linéaire fractionnaire. Le concept de solution mild peut être introduit pour étudier le problème à valeur initiale non homogène suivant

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f(t), & 0 < t < T, \\ x(0) = x_0, & x \in X, \end{cases} \tag{1.9}$$

où $f : [0, T[\to X$.

Nous définissons maintenant le concept d'une solution mild

Définition 1.8. *Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ sur X, $x_0 \in X$, et $f \in L^1([0,T], X)$ l'espace des fonctions Bochner - intégrables sur $[0,T]$ à valeurs dans X. La fonction $x \in C([0,T], X)$ donnée par*

$$x(t) = \mathcal{S}(t)x_0 + \int_0^t \mathcal{S}(t-s) f(s)\, ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

est la solution mild du problème à valeur initiale (1.9) sur $[0,T]$.

1.6 Théorèmes du point fixe

Les théorèmes de points fixes sont des outils très utiles en mathématiques et particulièrement dans la résolution des équations différentielles et intégrales. En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe, ainsi on assure l'existence de la solution d'un problème donné en le transformant en un problème de point fixe, et on détermine éventuellement ces points fixes qui sont les solutions du problème posé.

Définition 1.9. *Soit f une application d'un ensemble E dans lui même. On appelle point fixe de F tout point $x \in E$ tel que*

$$F(x) = x.$$

En 1922 STEFAN BANACH prouva son fameux résultat dit "principe de contraction de Banach", ce théorème est le résultat le plus élémentaire et le plus utilisé puisqu'il n'assure pas seulement l'existence d'un point fixe mais aussi son unicité.

Théorème 1.3. (Banach)

Soit E un espace de Banach sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soit $\|\cdot\|$ la norme sur E. Soit D un sous ensemble fermé de E. Soit F une fonction qui applique D dans D, telle qu'il existe un nombre γ avec $0 \leq \gamma < 1$ et

$$\|Fx - Fy\| \leq \gamma \|x - y\| \text{ pour tout } x, y \in D.$$

Alors il existe un point unique $z \in D$ tel que $Fz = z$.
De plus, si $x_0 \in D$ et $x_n = Fx_{n-1}$ pour $n = 1, 2, ...$ alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = z$$

et on a l'estimation

$$\|x_n - z\| \leq \gamma^n (1 - \gamma)^{-1} \|x_1 - x_0\| \text{ pour } n = 1, 2, ...$$

Chapitre 2

Contrôlabilité des systémes dynamiques non linéaires fractionnaires

Dans ce chapitre, nous étudions la contrôlabilité d'une classe de système dynamique (linéaire et non linéaire) d'ordre fractionnaire.

2.1 Equation différentielle fractionnaire linéaire

Considérons l'équation différentielle linéaire fractionnaire suivante

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\alpha}x(t) &= Ax(t) + f(t), \quad t \in J2.1 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $0 < \alpha < 1$, $x \in X$ et A un générateur infinitésimal d'un C_0−semi-groupe $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ sur X.

La solution mild du système (2.1) est donnée par

$$x(t) = \mathcal{S}(t)x_0 + \int_0^t \mathcal{S}(t-s) f(s) ds$$

Nous remarquons que le système de contrôle déterministe linéaire fractionnaire

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\alpha}x(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad t \in J, 2.2 \qquad (2.2) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

associé à (2.1) est contrôlable sur J si et seulement si le Grammian de contrôlabilité

$$W = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mathcal{S}(T-s) Bds \qquad (2.3)$$

est défini positif, pour tout $T > 0$.

Ici $*$ désigne l'adjoint de l'opérateur.

Similaire au concept de contrôlabilité classique, la contrôlabilité du système dynamique est défini comme suit

Définition 2.1. On dit que le système (2.2) est contrôlable sur J si pour chaque $x_0, x_1 \in X$ il existe une fonction de contrôle $u \in L^2(J, U)$ telle que $x(0) = x_0$ et $x(T) = x_1$.

2.2 Contrôlabilité des systèmes dynamiques fractionnaires non linéaires

Considérons le système dynamique fractionnaire non linéaire représenté par l'équation différentielle fractionnaire de la forme suivante

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\alpha}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) + f(t, x(t)), \quad t \in J = [0, T], 2.4 \qquad (2.3) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

où l'état $x(\cdot)$ prend ses valeurs dans l'espace de Banach X, $0 < \alpha \leq 1$. La fonction de contrôle $u(\cdot)$ est donnée dans $L^2(J, U)$ l'espace des fonctions de contrôles admissibles, U est un espace de Banach. B est un opérateur linéaire borné de U dans X ; $f : J \times X \to X$.

En conséquence, Il convient de réécrire le problème (2.4) selon l'équation intégrale équivalente

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [Ax(s) + Bu(s)] ds 2.5 \qquad (2.4) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds. \end{aligned}$$

La solution mild du problème (2.4) est donnée par

$$x(t) = \mathcal{S}(t)\,x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{S}(t-s)\left[Bu(s) + f(s, x(s))\right] ds.$$

Soit $B_\tau = \{y \in X : \|y\| \leq \tau\}$ pour certains $\tau > 0$. Nous supposons les hypothèses suivantes :

(H_1) A génère un C_0−semi-groupe de l'opérateur linéaire borné $\mathcal{S}(t)$ et il existe une constante $M > 0$ telle que $\|\mathcal{S}(t)\| \leq M$.

(H_2) L'opérateur linéaire W de $L^2(J, U)$ dans X défini par

$$Wu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mathcal{S}(T-s)\,Bu(s)\,ds$$

induit un opérateur inversible $\tilde{W}$ défini sur $L^2(J, U) / \ker W$ et il existe une constante positive $K > 0$ telle que $\left\|B\tilde{W}^{-1}\right\| \leq K$.

(H_3) $f : J \times X \to X$ est continu et il existe une constante $N > 0$ tel que

$$\|f(s, x_1) - f(s, x_2)\| \leq N \|x_1 - x_2\| \text{ pour tout } x_1,\ x_2 \in B_\tau$$

(H_4)

$$M\|x_0\| + \gamma MK\left[\|x_1\| + M\|x_0\| + NM\tau\gamma\right] + NM\tau\gamma \leq \tau$$

où $\gamma = \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$.

(H_5) Soit $p = \gamma MN\left[MK\gamma + 1\right]$ tel que $0 \leq p < 1$.

2.2.1 Résultat de contrôlabilité

Théorème 2.1. *Si les hypothèses $(H_1) - (H_5)$ sont satisfaites, alors le système fractionnaire (2.4) est contrôlable sur J.*

Preuve. Soit $\mathbf{Z} = C(J, B_\tau)$. En utilisant l'hypothèse (H_2), pour une fonction arbitraire $x(\cdot)$. On définit la fonction de contrôle par

$$u(t) = W^{-1}\left[x_1 - \mathcal{S}(T)\,x_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mathcal{S}(T-s)\,f(s, x(s))\,ds\right](t).$$

Nous montrons que l'opérateur $\Phi : Z \to Z$ défini par

$$\begin{aligned}\Phi x(t) &= \mathcal{S}(t)\,x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{S}(t-s)\,B\tilde{W}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - \mathcal{S}(T)\,x_0 \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1} \times \\ \mathcal{S}(T-\theta)\,f(\theta, x(\theta))\,d\theta \end{bmatrix}(s)\,ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{S}(t-s)\,f(s, x(s))\,ds\end{aligned}$$

a un point fixe. Ce point fixe est alors une solution du problème de contrôle (2.4).
Il est clair que, $\Phi x(T) = x_1$, ce qui signifie que le contrôle u dirige le système (2.4) de l'état initial x_0 à x_1 dans le temps T nous fournissons un point fixe de l'opérateur Φ.
Nous montrons en premier, que $\Phi(Z) \subset Z$. D'après les hypothèses précédantes et des calculs standards, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\Phi x(t)\| &\leq M\|x_0\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} MK\left[\|x_1\| + M\|x_0\| + \frac{T^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}NM\tau\right]ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} NM\tau ds \\
&\leq M\|x_0\| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}MK\left[\|x_1\| + M\|x_0\| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}NM\tau\right] \\
&\quad + NM\tau\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&\leq M\|x_0\| + \gamma MK\left[\|x_1\| + M\|x_0\| + NM\tau\gamma\right] + NM\tau\gamma \\
&\leq \tau.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'opérateur Φ applique Z sur lui même. En effet, soit $x, y \in Z$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|\Phi x(t) - \Phi y(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left\|\mathcal{S}(t-s)B\tilde{W}^{-1}\right\| \\
&\quad \times\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1}\|\mathcal{S}(T-\theta)[f(\theta, x(\theta)) - f(\theta, y(\theta))]\| d\theta ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{S}(t-s)[f(s, x(s)) - f(s, y(s))]\| ds \\
&\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[MKMN\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + MN\right]\|x(t) - y(t)\| \\
&\leq \gamma MN[MK\gamma + 1]\|x(t) - y(t)\| \\
&\leq p\|x(t) - y(t)\|.
\end{aligned}$$

Puisque $0 \leq p < 1$, alors Φ est une application de contraction et existe donc un point fixe unique $x \in Z$ tel que $\Phi x(t) = x(t)$.
Tout point fixe de Φ est une solution mild de (2.4) qui satisfait $x(T) = x_1$. Ainsi, le système (2.4) est contrôlable sur J.

Chapitre 3

Contrôlabilité des systèmes intégro-différentiels fractionnaires

Dans ce chapitre, nous étudions la contrôlabilité des systèmes intégro-différentiels fractionnaires dans les espaces de Banach. Les résultats sont obtenus en utilisant le calcul fractionnaire, la théorie des semigroupes et le théorème du point fixe.

3.1 Equation intégro-différentielle fractionnaire non linéaire

Soit $C(J,X)$ espace de Banach des fonctions continues $x(t)$ avec $x(t) \in X$ pour $t \in J$ et $\|x\|_{C(J,X)} = \max_{t\in J} \|x(t)\|$.
Considérons le système suivant représenté par l'équation intégro-différentielle fractionnaire de la forme suivante

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} &= Ax(t) + Bu(t) + f\left(t, x(t), \int_0^t h(t,s,x(s))\,ds\right), \quad t \in J = [0,T], \qquad (3.1) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

où l'état $x(\cdot)$ prend ses valeurs dans l'espace de Banach X, $0 < \alpha \leq 1$. La fonction de contrôle $u(\cdot)$ est donnée dans $L^2(J, U)$ l'espace des fonctions de contrôles admissibles, U est un espace de Banach. B est un opérateur linéaire borné de U dans X et les fonctions $f : J \times X \times X \to X$ et $h : \Delta \times X \to X$ sont continus. Ici $\Delta = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$. Notons la fonction H par

$$Hx(t) = \int_0^t h(t, s, x(s))\, ds$$

Eq. (3.1) est équivalent à l'équation intégrale non linéaire suivante

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Ax(s)\, ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Bu(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), Hx(s))\, ds. \end{aligned}$$

et la solution mild du système (3.1) est donnée par

$$x(t) = \mathcal{S}(t) x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{S}(t-s) [Bu(s) + f(s, x(s), Hx(s))]\, ds. \quad (3.2)$$

Pour le cas où $\alpha \to 1$, la représentation ci-dessus devient

$$x(t) = \mathcal{S}(t) x_0 + \int_0^t \mathcal{S}(t-s) [Bu(s) + f(s, x(s), Hx(s))]\, ds$$

qui est la solution mild de l'équation

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + f(t, x(t), Hx(t)),$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0 \in X$.

Définition 3.1. *Le système fractionnaire (3.1) est dit contrôlable sur l'intervalle J si pour chaque $x_0, x_1 \in X$, il existe un contrôle $u \in L^2(J, U)$ tel que la solution $x(.)$ de (3.1) vérifie $x(T) = x_1$.*

Soit $B_r = \{y \in X : \|y\| \leq r\}$ pour certains $r > 0$. Nous supposons les conditions suivantes :

(H_1) A génère un C_0-semi-groupe de l'opérateur linéaire borné $\mathcal{T}(t)$ et il existe une constante $M > 0$ telle que $\|\mathcal{S}(t)\| \leq M$.

(H_2) L'opérateur linéaire W de $L^2(J,U)$ dans X défini par

$$Wu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mathcal{S}(T-s)\, Bu(s)\, ds$$

induit un opérateur inversible $\tilde{W}$ défini sur $L^2(J,U)/\ker W$ et il existe une constante positive $K > 0$ telle que $\left\| B\tilde{W}^{-1} \right\| \leq K$

(H_3) $f : J \times X \times X \to X$ est continu et il existe des constantes $N_1 > 0$ et $N_2 > 0$ telles que

$$\|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)\| \leq N_1 [\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|] \text{ pour tout } x_1,\ x_2, y_1, y_2 \in B_r$$

et $N_2 = \max_{t \in J} \|f(t,0,0)\|$.

(H_4) $h : \Delta \times X \to X$ est continue et il existe des constantes $H_1 > 0$ et $H_2 > 0$ telles que

$$\|h(t,s,x_1) - h(t,s,x_2)\| \leq H_1 \|x_1 - x_2\| \text{ pour tout } x_1,\ x_2 \in B_r$$

et $H_2 = \max_{(t,s) \in \Delta} \|h(t,s,0)\|$.

(H_5)

$$M\|x_0\| + \gamma Mk [\|x_1\| + M\|x_0\| + N\gamma] + N\gamma \leq r$$

où $N = M(N_1 r + N_1 H_1 T r + N_1 H_2 T + N_2)$ et $\gamma = \frac{T^q}{\Gamma(q+1)}$

(H_6) Soit $p = \gamma [MkN_1\gamma + N_1][M + MH_1T]$ telle que $0 \leq p \leq 1$.

3.1.1 Resultats de contrôlabilité

Théorème 3.1. Si les hypothèses $(H_1) - (H_6)$ sont satisfaites, alors le système intégro-différentiel fractionnaire (3.1) est contrôlable sur J.

Preuve. Soit **Z** $= C(J, B_r)$. En utilisant l'hypothèse (H_2), pour une fonction arbitraire $x(\cdot)$. On définit la fonction de contrôle par

$$u(t) = \tilde{W}^{-1} \left[x_1 - \mathcal{S}(T)x_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mathcal{S}(T-s) f(s, x(s), Hx(s))\, ds \right](t) \tag{3.3}$$

Nous montrerons que l'opérateur ci-dessus $\Phi : Z \to Z$ défini par

$$\begin{aligned} \Phi x(t) &= \mathcal{S}(t)x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{S}(t-s) B\tilde{W}^{-1} \left[\begin{array}{c} x_1 - \mathcal{S}(T)x_0 \\ -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1} \times \\ \mathcal{S}(T-\theta) f(\theta, x(\theta), Hx(\theta))\, d\theta \end{array} \right](s)\, ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{S}(t-s) f(s, x(s), Hx(s))\, ds \end{aligned} \tag{3.4}$$

a un point fixe. Ce point fixe est alors une solution du problème de contrôle (3.1).
Il est clair que, $\Phi x(T) = x_1$, ce qui signifie que le contrôle u dirige le système (3.1) de l'état initial x_0 à x_1 dans le temps T nous fournissons un point fixe de l'opérateur Φ.
Nous montrons en premier, que $\Phi(Z) \subset Z$. D'après les hypothèses précédantes et des calculs standards, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\Phi x(t)\| &\leq M\|x_0\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} MK\left[\|x_1\| + M\|x_0\| + \frac{T^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}N\right]ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \\
&\leq M\|x_0\| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}MK\left[\|x_1\| + M\|x_0\| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right] + N\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&= M\|x_0\| + \gamma MK\left[\|x_1\| + M\|x_0\| + N\gamma\right] + N\gamma \leq r
\end{aligned}$$

Ainsi, l'opérateur Φ applique Z sur lui même. En effet, soit $x, y \in Z$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|\Phi x(t) - \Phi y(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left\|\mathcal{S}(t-s)B\tilde{W}^{-1}\right\| \times \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-\theta)^{\alpha-1} \times \\
&\quad \|\mathcal{S}(T-\theta)\left[f(\theta, x(\theta), Hx(\theta)) - f(\theta, y(\theta), Hy(\theta))\right]\| d\theta ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{S}(t-s)\left[f(s, x(s), Hx(s)) - f(s, y(s), Hy(s))\right]\| ds \\
&\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[MKMN_1\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + MN_1\right]\left[\|x-y\| + \|Hx - Hy\|\right] \\
&\leq \left[\gamma MKN_1\gamma + N_1\right]\left[M + MH_1T\right]\|x(t) - y(t)\| \\
&= p\|x_1(t) - x_2(t)\|
\end{aligned}$$

Puisque $0 \leq p < 1$, alors Φ est une application de contraction et existe donc un point fixe unique $x \in Z$ tel que $\Phi x(t) = x(t)$.
Tout point fixe de Φ est une solution mild de (3.1) qui satisfait $x(T) = x_1$. Ainsi, le système integro-différentiel fractionnaire (3.1) est contrôlable sur J.
Remarque. Si nous prenons $f = 0$, alors le système se réduit au système fractionnaire linéaire de la forme

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in J = [0, T], \tag{3.5}$$

où les opérateurs Aet B sont comme avant. Alors la solution mild du problème (3.5) s'écrit

$$x(t) = \mathcal{S}(t)x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{S}(t-s)Bu(s)\,ds. \tag{3.6}$$

Dans ce cas si (H_2) est satisfait et si on choisit le contrôle
$u(t) = \tilde{W}^{-1}[x_1 - \mathcal{S}(T)x_0](t)$, alors la solution mild $x(t)$ de (3.5) satisfait $x(T) = x_1$ et donc le système (3.5) est contrôlable sur J.

Applications

3.2 Exemple 1

Considérons le système dynamique décrit par l'équation différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire suivante

$$\frac{\partial^q}{\partial t^q} x(t,z) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} x(t,z) = \mu(t,z) + \hat{f}(t, x(t,z)), \tag{4.1}$$

$$x(0,z) = x_0(z), \quad z \in [0,1], \tag{4.2}$$

$$x(0,t) = x(1,t) = 0, \quad t \in J, \tag{4.3}$$

où $0 < q \leq 1$, les fonctions $x(t)(z) = x(z,t)$ et $f(t,x(t))(z) = \hat{f}(t, x(z,t))$. L'opérateur linéaire borné $B : U \to X$ est défini par $Bu(t)(z) = \mu(z,t),\ 0 \leq z \leq 1,\ u \in U.$
Soit $X = U = L^2[0,1]$, $Z = C([0,T], B_r)$, $B_r = \{y \in L^2[0,\pi] : \|y\| \leq r\}$.
On définit l'opérateur $A : D(A) \subset X \to X$ par $Ax = x''$ où le domaine $D(A)$ est donné par

$$\{x \in X : x, x'' \text{ sont absolument continues},\ x'' \in X,\ x(0) = x(1) = 0\}.$$

Alors,

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2(x, x_n)x_n, \quad x \in D(A),$$

où $x_n(z) = \left(\sqrt{2/\pi}\right) \sin nz, \ n = 1, 2, \ldots$ est l'ensemble orthogonal de fonctions propres de A. De plus, pour tout $x \in X$ nous avons

$$S(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}(x, x_n)x_n.$$

Choisissant $B = I$, l'opérateur identité, alors l'opérateur $W : L^2(J, U) / \ker W \to X$ est défini par

$$\begin{aligned} Wu &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mathcal{S}(T-s)\, u(s)\, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} e^{-n^2(T-s)} (u(s), x_n)\, x_n ds \end{aligned}$$

a un opérateur inverse et satisfait la condition (H_2).
Par conséquent, avec les choix ci-dessus (A, B, f), le système non linéaire (4.1)–(4.3) peut s'écrire comme une formulation
abstraite du problème de contrôle (2.1) et ainsi le Théorème 2.1 guarantit que le système (4.1)-(4.3) est contrôlable sur J.

3.3 Exemple 2

Considérons l'équation intégrodifférentielle partielle non linéaire suivante de la forme

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} x(t, z) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} x(t, z) + \mu(t, z) + k_0(z) \sin x(t, z) + k_1 \int_0^t e^{-x(s,z)} ds. \tag{4.4}$$

$$x(0, z) = x_0(z), \qquad 0 \leq z \leq \pi \tag{4.5}$$

$$x(t, 0) = x(t, \pi) = 0, \qquad t \in J = [0, T], \tag{4.6}$$

où $0 < \alpha < 1, \ k_0(z)$ est continu sur $[0, \pi]$ et $k_1 > 0$.
Soient $X = U = L^2[0, \pi], Z = C([0, T], B_r), \ B_r = \{y \in L^2[0, \pi] : \|y\| \leq r\}$.

Notons par $x(t) = x(t,.)$ et $Bu(t) = \mu(t,.)$ où $\mu : J \times [0,\pi] \to [0,\pi]$ est continu, $f(t,x,Hx) = k_0 \sin x(t,.) + Hx,\ h(t,s,x) = k_1 e^{-x(s,.)}$.
Soit l'opérateur $A : D(A) \subset X \to X$ défini par $Ax = x"$ avec le domaine

$$D(A) = \{x \in X : x, x' \text{ sont absolument continues; } x" \in X,\ x(0) = z(\pi) = 0\}.$$

alors

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x, x_n) x_n, \quad x \in D(A),$$

où $x_n(z) = \sqrt{2/\pi} \sin nz, n = 1, 2, 3, ...$est l'ensemble orthogonal des vecteurs propres de A. Il est bien connu que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\mathcal{S}(t)$, $t \geq 0$ dans X et est donné par

$$\mathcal{S}(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} (x, x_n) x_n,\ x \in X$$

Avec ce choix de $A,\ f,\ H$ et $B = I$, l'opérateur d'identité nous voyons que Eqs. (4.4)-(4.6) sont une formulation abstraite du problème de contrôle (3.1). Supposons que l'opérateur $W : L^2(J,U) / \ker W \to X$ défini par

$$\begin{aligned} Wu &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mathcal{S}(T-s) u(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} e^{-n^2(T-s)} (u(s), x_n) x_n ds \end{aligned}$$

a un opérateur inverse et satisfait la condition (H_2).
Autres conditions $(H_3) - (H_6)$ sont satisfaits et il est possible de choisir k_0, k_1 de sorte que la constante $p < 1$. Par conséquent, d'après le Théorème 3.1, le système (4.4)-(4.6) est contrôlable sur J.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence et la contrôlabilité pour deux classes de systèmes dynamiqués non linéaires décrits par des équations différentielles (intégro-différentielles) d'ordres fractionnaires dans un espace de Banach. Des conditions suffisantes pour la contrôlabilité de ces systèmes sont considérés, en basant sur le calcul fractionnaire, la théorié du semi-groupes et le théorème de point fixe.

Bibliographie

[1] B. Bonilla, M. Rivero, L. Rodriguez-Germa, J.J. Trujillo, Fractional differential equations as alternative models to nonlinear differential equations, Applied Mathematics and Computation 187 (2007) 79 88.

[2] D. Delbosco, L. Rodino, Existence and uniqueness for a fractional differential equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications 204 (1996) 609 625.

[3] V. Lakshmikantham, Theory of fractional functional differential equations, Nonlinear Analysis 69 (2008) 3337 3343.

[4] V. Lakshmikantham, A.S. Vatsala, Basic theory of fractional differential equations, Nonlinear Analysis 69 (2008) 2677 2682.

[5] V. Lakshmikantham, A.S. Vatsala, General uniqueness and monotone iterative technique for fractional differential equations, Applied Mathematics Letters 21 (2008) 828 834.

[6] V. Lakshmikantham, J. Vasundhara Devi, Theory of fractional differential equations in Banach spaces, European Journal of Pure and Applied Mathematics 1 (2008) 38 45.

[7] C. BONNET, J.R. PARTINGTON, Coprime factorizations and stability of fractional differential systems, Systems and Control Letters 41 (2000) 167 174.

[8] Y. NEC, A.A. NEPOMNYASHCHY, Linear stability of fractional reaction-diffusion systems, Mathematical Modelling of Natural Phenomena 2 (2007) 77 105.

[9] M.A.A. EL-SAYEED, Fractional order diffusion wave equation, International Journal of Theoretical Physics 35 (1966) 311 322.

[10] J. KLAMKA, Controllability of Dynamical Systems, Kluwer Academic, Dordrecht, 1993.

[11] R.F. CURTAIN, A.J. PRITCHARD, Infinite Dimensional Linear Systems Theory, Springer-Verlag, New York, 1978.

[12] K. BALACHANDRAN, J.P. DAUER, Controllability of nonlinear systems via fixed point theorem, Journal of Optimization Theory and Applications 53 (1987) 345 352.

[13] K. BALACHANDRAN, J.P. DAUER, Controllability of nonlinear systems in Banach spaces ; A survey, Journal of Optimization Theory and Applications 115 (2002) 7 28.

[14] A. ABD EL-GHAFFAR, M.R.A. MOUBARAK, A.B. SHAMARDAN, Controllability of fractional nonlinear control system, Journal of Fractional Calculus 17 (2000) 59 69.

[15] Y.Q. CHEN, H.S. AHU, D. XUE, Robust controllability of interval fractional order linear time invariant systems, Signal Processing 86 (2006) 2794 2802.

[16] A.B. SHAMARDAN, M.R.A. MOUBARAK, Controllability and observability for fractional control systems, Journal of Fractional Calculus 15 (1999) 25 34.

[17] A.A. KILBAS, H.M. SRIVASTAVA, J.J. TRUJILLO, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[18] K.S. MILLER, B. ROSS, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, 1993.

[19] I. PODLUBNY, Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, 1999.

[20] O.K. JARADAT, A. AL-OMARI, S. MOMANI, Existence of the mild solution for fractional semilinear initial value problem, Nonlinear Analysis 69 (2008) 3153 3159.

[21] A. PAZY, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.