République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

ABDA AHMED

Intitulé

Existence et positivité des solutions d'un problème aux limites fractionnaire

Dirigé par :
Prof. ELLAGGOUNE Fateh
Devant le jury

PRESIDENT	Dr. A. FRIOUI	MCB Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. F. ELLAGGOUNE	Prof Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. H. BELHIRECHE	MCB Univ-Guelma

Session Juin 2018

Table des matières

1 La dérivation fractionnaire **8**

1.1 Outils de base 8

1.1.1 La fonction Gamma 8

1.1.2 La Fonction Béta 10

1.2 Intégration fractionnaire 11

1.3 Dérivées fractionnaire 15

1.3.1 Approche de Grünwald-Letnikov 15

1.3.2 Approche de Riemann-Liouville 18

1.3.3 Approche de Caputo 21

1.3.4 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-liouville 24

1.3.5 Propriétés générales des dérivées fractionnaires 24

1.4 Champs d'application 25

2 Rappels et notions fondamentales **29**

2.1 Théorème de l'application contractante 29

2.2 Théorème du point fixe de Schauder 30

2.3 Théorème du point fixe de Krasnosel'skii 31

2.4 Théorème du point fixe d'Avery-Peterson 32

2.5 Théorème du point fixe de l'opérateur croissant 32

2.6 Théorème d'Ascoli-Arzela 33

3 Existence de solutions positives pour un problème aux limites fractionnaire **34**

3.1 Introduction 34

3.2 Préliminaires 35

3.3 Existence des solutions positives 37

3.4 Exemples 43

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier dieu Allah qui m'a donné la santé, la volonté et le courage pour termine cette mémoire.

Je tient à remercier tout d'abord mon encadreur

le professeure Ellaggoune Fateh de m'avoir proposé ce sujet de

recherche. La clarté de l'explication.

De même je remercie Mme FRIOUI Assia et Mme BELHIRECHE Hanane d'avoir

bien voulu faire partie du jury.

De même je remercie ma famille

Enfin, je pourrais terminer ces remerciements sans une pensée à l'ensemble

de mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire

A mes parents

Pour leur patience

A ma sœur et mes frères

A toute ma famille

A mes amies et mes camarades.

Son oublier tout les professeurs que ce soit du

primaire, du moyen, du secondaire ou de

l'enseignement supérieur.

et

A toi ...

Résumé

Ce mémoire a pour but de donner les conditions suffisantes pour prouver l'existence des solutions positives d'un problème fractionnaire.

Nous avons rassemblé les outils nécessaire pour cette étude qui consiste a présenté les différentes définition liées à la dérivation non entière et la théorie du point fixe.

En s'intéresse à l'étude de l'existence des solutions positives d'un problème aux limites fractionnaires en utilisant certains théorèmes de point fixe notamment l'alternative non linéaire de Leray-Shauder, le principe de contraction de Banach et le théorème de Guo-Krasnosel'skii, ainsi que le théorème d'Avery-Peterson pour prouver l'existence d'au moins trois solutions positives.

Mots clés : Dérivées fractionnaires, intégrale fractionnaire, théorème de point fixe, problème aux limites fractionnaire.

Abstract

This thesis aims to give sufficient conditions to prove the existence of positive solutions of a fractional problem.

We have gathered the necessary tools for this study which consists in presenting the different definitions related to the non-integer derivation and the fixed point theory.

It is interested in the study of the existence of positive solutions of fractional boundary value problem by using some fixed point theorems including the Leray-Shauder nonlinear alternative, the Banach contraction principle and the theorem of Guo-Krasnosel'skii, as well as Avery-Peterson's theorem to prove the existence of at least three positive solutions.

Keywords : Fractional derivatives, fractional integral, fixed point theorems, fractional boundary value problem

ملخص

تهدف هذه الرسالة إلى إعطاء الشروط الكافية لإثبات وجود حلول إيجابية لمشكلة كسرية.

لقد جمعنا الأدوات اللازمة لهذه الدراسة والتي تتمثل في تقديم التعريفات المختلفة المتعلقة بالاشتقاق غير الصحيح ونظرية النقطة الثابتة.

يهم في هده الدراسة وجود حلول إيجابية لميالة ذات الشروط الحدية الكسرية ودلك باستخدام بعض نظريات النقطة الثابتة بما في ذلك النظرية المتناوبة الغير خطية للاري - شودار، ومبدأ التقليص لبناخ, ونظرية قيو- كرازنوزلسكي، وكذلك نظرية أفيري بيترسون لإثبات وجود ما لا يقل عن ثلاثة حلول إيجابية.

الكلمات المفتاحية: المشتقات الجزئية ، التكامل الجزئي ، نظرية النقطة الثابتة ، مسألة ذات الشروط الحدية الكسرية .

Introduction

Dans la littérature, on attribue souvent le nom de la dérivation fractionnaire à la généralisation de la dérivation à un ordre quelconque, entier ou non entier, réel ou complexe.

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du $17^{\grave{e}me}$ siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\dfrac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la $n^{\grave{e}me}$ dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu :

Que signifie $\dfrac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$. Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

On peut noter ici que la plupart des travaux sur le calcul fractionnaire sont consacrés à la solvabilité des problèmes engendrés par des équations différentielles fractionnaires linéaires à la base des fonctions spéciales. Nous retrouvons beaucoup des mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20 ème siècle.

Récemment, d'autres résultat traitant l'existence, l'unicité, la multiplicité des solutions et l'existence des solutions positives des problèmes fractionnaires non linéaire utilisent des techniques d'analyse non linéaire comme les théorèmes de point fixe.

Ce mémoire est structurée en trois chapitres :

Le chapitre 1 contient un ensemble de définitions et de notion de dérivation et d'intégration fractionnaire et des résultats qui nous seront utiles dans la suite de cette étude.

Le chapitre 2 nous donnons quelques théorèmes de point fixe tel que le principe de contraction de Banach, l'alternative de Leray-Schauder, le théorème de Guo-

Krasnosel'skii et le théorème d'Avery-Peterson.

Le chapitre 3 on s'intéresse à l'étude du problème aux limites fractionnaire (P) suivant

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{q}_{0+}u(t) &= a(t)f(u(t)), \ 0 < t \ < 1, \\ u(0) &= u'(0) = 0, \ u'(0) = \alpha u(1), \end{aligned} \tag{P}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, $2 < q < 3$, ${}^{C}D^{q}_{0+}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $a \in C([0,1], \mathbb{R})$. On établit l'existence d'au moins une solution positive du problème (P) en utilisant le théorème de point fixe de Guo-Krasnosel'skii sur le cône, ensuite sous certaines conditions sur le terme non linéaire, on applique le théorème Avery-Peterson pour prouver l'existence d'au moins trois solutions positives.

Chapitre 1

La dérivation fractionnaire

L'idée principale de la dérivation et d'intégration fractionnaire est la généralisation de la dérivation et d'intégration itérées. Le terme fractionnaire est un terme trompeur mais il est retenu pour suivre l'usage dominant.

1.1 Outils de base

1.1.1 La fonction Gamma

L'une des fonction de base du calcul fractionnel est la fonctions Gamma qui prolonge le factoriel aux valeurs réelles et complexes.

Pour $Re(z) > 0$ on définie $\Gamma(z)$ par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt. \tag{1.1}$$

Quelques propriétés de la fonction Gamma [17]

Une propriétés importante de la fonction $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

La fonction Gamma d'Euler généralise le factoriel car

$$\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in N^*.$$

Exemple 1.1

$$\Gamma(2) = 1! = 1,\ \Gamma(6) = 5! = 120,\ \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)} = \frac{4!}{2!} = 12,\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Exemple 1.2 Considérons la suite des monômes x^n. On a :

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}, \tag{1.2}$$

et par récurrence

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k x^n = n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}, \tag{1.3}$$

multipliant par $(n-k)!$ on obtient :

$$\frac{(n-k)!\,(n-k+1)!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}. \tag{1.4}$$

On appliquant la propriété de la fonction Gamma d'Euler on obtient :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-k)} x^{n-k}. \tag{1.5}$$

Ainsi on pourrait poser comme définition de la dérivée fractionnaire pour les mo nômes :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} x^{n-\alpha}, \tag{1.6}$$

et prolonger par linéarité aux fonctions qui sont des sommes de séries entières par exemple, si on considère les exponentielles $e^{\lambda x}$, on aura d'abord

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{k} e^{\lambda x} = \lambda^{k}.e^{\lambda x}, \tag{1.7}$$

qui conduit à la définition suivante :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha} e^{\lambda x} = \lambda^{\alpha}.e^{\lambda x}, \tag{1.8}$$

Il n'est pas difficile de voir que les définitions (1.6) et (1.8) sont incompatibles. En effet, puisque

$$e^{\lambda x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n}}{n!} x^{n}, \tag{1.9}$$

alors on aura d'après la première définition

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha} e^{\lambda x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n}}{\Gamma(n+1-\alpha)} x^{n-\alpha} \neq \lambda^{\alpha}.e^{\lambda x}. \tag{1.10}$$

1.1.2 La Fonction Béta

Définition 1.1 [17] La fonction Béta (qui est un type d'intégrale d'Euler) est une fonction définie par :

$$B(p,q) = \int_{0}^{1} t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \; Re(p) > 0 \text{ et } Re(q) > 0. \tag{1.11}$$

Lien entre la fonction Gamma et la fonction Bêta

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \; Re(p) > 0 \text{ et } Re(q) > 0 \tag{1.12}$$

Preuve

On a évidement

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-y}y^{q-1}dy\right) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}dxdy$$

Dans cette intégrale double, effectuons le changement de variable $y = \mu - x$ pour $0 \leq x \leq \mu$, et conservons la variable x, comme $\frac{dy}{d\mu} = 1$ on a $dxdy = dxd\mu$ on obtient que

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{\infty}\int_0^{\mu} e^{-\mu}x^{p-1}(\mu - x)^{q-1}dxd\mu = \int_0^{\infty} e^{-\mu}\left(\int_0^{\mu} x^{p-1}(\mu - x)^{q-1}dx\right)d\mu$$

Pour évaluer l'intégrale relative à dx, effectuons le changement de variable $x = t\mu$ on obtient que

$$\int_0^{\mu} x^{p-1}(\mu - x)^{q-1}dx = \int_0^{1}(t\mu)^{p-1}(\mu - t\mu)^{q-1}dt = \mu^{p+q-1}\int_0^{1} t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \mu^{p+q-1}B(p,q)$$

Par la suite

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p,q)\int_0^{\infty} e^{-\mu}\mu^{p+q-1}d\mu = B(p,q)\Gamma(p+q)$$

Ce qui donne le résultat désiré.

1.2 Intégration fractionnaire

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, on pose

$$(I^{(1)}f)(x) = \int_a^{x} f(t)dt, \tag{1.13}$$

$$(I^{(2)}f)(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u)du, \tag{1.14}$$

En permutant l'ordre d'intégration, (d'apres le Théorèm de Fubini) on obtient

$$(I^{(2)}f)(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt,$$

Par récurrence on peut montrer que

$$(I^{(n)}f)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{(n-1)}f(t)dt, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.15}$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma, Riemann rendu compte que le second membre pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit.

Définition 1.2 *Si* $\alpha \in R_+$, *l'opérateur* I^α *définit sur* $L^1[a,\ b]$ *par*

$$(I_{a^+}^{(\alpha)}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)}f(t)dt, \ \textit{telle que}, \ a \in]-\infty, +\infty[\tag{1.16}$$

Pour $x \in [a,\ b]$ *est appelé opérateur d'intégration fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre* α, *et l'intégrale*

$$I_{b^-}^{(\alpha)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)}f(t)dt, \ \textit{telle que}, \ b \in]-\infty, +\infty[\tag{1.17}$$

Pour $x \in [a,\ b]$ *est appelée l'intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre* α.

Exemple 1.3 Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^m$ et le changement de variable

$t = a + (x-a)\tau$, alors

$$I^{(\alpha)}(x-a)^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)}(t-a)^m dt,$$

$$\begin{aligned} I^{(\alpha)}(x-a)^m &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+m}\int_0^1 (1-\tau)^{(\alpha-1)}\tau^m d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+m}B(m+1,\alpha), \\ &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}(x-a)^{\alpha+m}. \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0.5$, $m = 1$ et $a = 0$, on aura

$$I^{(0.5)}(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)}(x)^{1.5} = \frac{\sqrt{x^3}}{\Gamma(2.5)}.$$

Remarque 1.1 Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale (à gauche).

Théorème 1.1 Pour $f \in C[a,\ b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe

$$I^{(\alpha)}(I^{(\beta)}f(x)) = I^{(\alpha+\beta)}f(x),\ pour\ \alpha > 0,\ \beta > 0. \tag{1.18}$$

Preuve

La preuve découle directement de la définition

$$I^{(\alpha)}(I^{(\beta)}f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\int_a^t f(u)(t-u)^{\beta-1}du,$$

or $f \in C[a,b]$, d'après le théorème de Fubini

$$I^{(\alpha)}(I^{(\beta)}f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(u)\int_u^x (x-t)^{\alpha-1}(t-u)^{\beta-1}dtdu,$$

et par le changement de variable $t = u + s(x-u)$, on obtient

$$I^{(\alpha)}(I^{(\beta)}f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(u)(x-u)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}dsdu,$$

D'après (1.15) on a

$$\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds = \Gamma(\alpha)(I^{(\alpha)}s^{\beta-1}),$$

alors par une relation de récurrence en obtient

$$\begin{aligned}
(I^{(1)}s^{\beta-1}) &= \int_0^1 s^{\beta-1}ds = \frac{1}{\beta}.\\
(I^{(2)}s^{\beta-1}) &= \int_0^1 \frac{s^{\beta}}{\beta}ds = \frac{1}{\beta(\beta+1)}.\\
(I^{(3)}s^{\beta-1}) &= \int_0^1 \frac{s^{\beta+1}}{\beta(\beta+1)}ds = \frac{1}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}.\\
(I^{(\alpha)}s^{\beta-1}) &= \int_0^1 \frac{s^{\beta+\alpha-2}}{\beta(\beta+1)(\beta+2)...(\beta+\alpha-2)}ds,\\
&= \frac{1}{\beta(\beta+1)(\beta+2)...(\beta+\alpha-1)}.
\end{aligned}$$

Multipliant par $(\beta-1)!$ on obtient

$$\begin{aligned}(I^{(\alpha)}s^{\beta-1}) &= \frac{(\beta-1)!}{\beta(\beta+1)(\beta+2)...(\beta+\alpha-1)(\beta-1)!}, \\ &= \frac{(\beta-1)!}{(\beta+\alpha-1)!} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)},\end{aligned}$$

alors on revient

$$\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)},$$

finalement, on obtient

$$I^{(\alpha)}(I^{(\beta)}f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_a^x (x-u)^{\alpha+\beta-1}f(u)du,$$

c.-à-d par définition

$$I^{(\alpha)}(I^{(\beta)}f(x)) = I^{(\alpha+\beta)}f(x) \qquad \text{avec } \alpha,\ \beta \succ 0.$$

1.3 Dérivées fractionnaire

Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

1.3.1 Approche de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires, la dérivée d'ordre 1 d'une fonction f au point x est définie par :

$$D^1 f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t)-f(t-h)}{h},$$

donc on peut exprimer la dérivée d'ordre entier p (si p est positif) et l'intégrale répétée $(-p)$ fois (si p est négatif) d'une fonction f par la formule suivante :

$$D^p f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{p}{k} f(t-kh), avec \binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} \tag{1.19}$$

La généralisation de cette formule pour p non entier (avec $0 \leq n-1 < p < n$) et comme

$$\begin{aligned}
(-1)^k \binom{p}{k} &= \frac{-p(1-p)\dots(k-p-1)}{k!}, \\
&= \frac{-p(1-p)\dots(k-p-1)\Gamma(-p)}{k!\Gamma(-p)}, \\
&= \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)},
\end{aligned}$$

nous obtenons

$${}^G D^p f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)} f(t-kh),$$

et

$${}^G D^{-p} f(t) = \lim_{h\to 0} h^{p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p)} f(t-kh).$$

Si f est de classe C^n, alors en utilisant l'intégration par parties on obtient :

$${}^G D^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+p}}{\Gamma(k+p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+p)} \int_a^t (t-\tau)^{n+p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau,$$

aussi

$${}^G D^{p} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Exemples 1.4

1- La dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov

En générale la dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est pas nulle ni constante.

Si $f(t) = c$ et p non entier positif on a :

$$f^{(k)}(t) = 0 \; pour \; k = 1, 2, ..., n.$$

$$\begin{aligned} {}^{G}D^{p}f(t) &= \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} \end{aligned}$$

2- La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Grünwald-Letnikov

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$ alors on a :

$$f^{(k)}(a) = 0 \; pour \; k = 0, 1, \; \ldots, \; n-1,$$

et

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n},$$

d'où

$${}^{G}D^{p}f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t - a)$ on trouve :

$$\begin{aligned}
{}^{G}D^{p}f(t) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau, \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}\int_{a}^{1}(1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds, \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}, \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}, \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}.
\end{aligned}$$

Un contre exemple si $p = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$, $a = 0$ on a :

$${}^{G}D^{1/2}f(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)}\sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(1.5)}.$$

1.3.2 Approche de Riemann-Liouville

Soit f une fonction intégrable sur $[a,\ t]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n-1 \leq p < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$\begin{aligned}
{}^{R}D^{p}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}f(\tau)d\tau, \qquad (1.20)\\
&= \frac{d^{n}}{dt^{n}}(I^{n-p}f(t)).
\end{aligned}$$

Remarque 1.2 Si f est de classe C^{n}, alors en faisant des intégration par parties et des dérivations répétées on obtient :

$$\begin{aligned} {}^{R}D^{p}f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \qquad (1.21) \\ &= {}^{C}D^{p}f(t). \end{aligned}$$

Dans ce cas l'approche de Grünwald-Letnikov et l'approche de Riemann-Liouville sont équivalentes.

Exemples 1.5

1- La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville

En générale la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a :

$$ {}^{R}D^{p}C = \frac{C}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}. \qquad (1.22)$$

2- La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Riemann-Liouville

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ et $\alpha > -1$, alors on a :

$$ {}^{R}D^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^{n}}{dt^{n}} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha} d\tau. \qquad (1.23)$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on aura :

$$\begin{aligned} {}^{R}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^{n}}{dt^{n}} (t-a)^{n+\alpha-p} \int_{a}^{t} (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha} ds, \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1) B(n-p, \alpha+1)}{\Gamma(n-p)} (t-a)^{\alpha-p}, \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)\Gamma(n+\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p}, \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p}. \end{aligned}$$

A titre d'exemple

$$ {}^{R}D^{0.5}t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)}\sqrt{t} = \Gamma(1.5)\sqrt{t}. $$

Propriétés 1.1

1. Composition avec l'intégrale fractionnaire

L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire

$$ {}^{R}D^{p}(I^{p}f(t)) = f(t), \tag{1.24} $$

en général on a

$$ {}^{R}D^{p}(I^{q}f(t)) = {}^{R}D^{p-q}f(t), \tag{1.25} $$

et si $p - q < 0$,

$$ {}^{R}D^{p-q}f(t) = I^{q-p}f(t). $$

En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas

$$ {}^{R}D^{-p}({}^{R}D^{q}f(t)) = {}^{R}D^{q-p}f(t) - \sum_{k=1a}^{m}[{}^{R}D^{q-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma(p-k+1)}. \tag{1.26} $$

Avec $m - 1 \leq q < m$.

2.Composition avec les dérivées d'ordre entier

La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne commutent que si : $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$$ \frac{d^{n}}{dt^{n}}({}^{R}D^{p}f(t)) = {}^{R}D^{n+p}f(t), \tag{1.27} $$

$$ {}^{R}D^{p}(\frac{d^{n}}{dt^{n}}f(t)) = {}^{R}D^{n+p}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)}. \tag{1.28} $$

3.Composition avec les dérivées fractionnaires

Soit $n-1 \leq p < n$ et $m-1 \leq q < m$, alors

$$^{R}D^{p}(^{R}D^{q}f(t)) =^{R} D^{p+q}f(t) - \sum_{k=1}^{m}[^{R}D^{q-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(p-k+1)}, \tag{1.29}$$

et

$$^{R}D^{q}(^{R}D^{p}f(t)) =^{R} D^{p+q}f(t) - \sum_{k=1}^{n}[^{R}D^{p-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-q-k}}{\Gamma(-q-k+1)}. \tag{1.30}$$

Par la suite deux opérateurs de dérivation fractionnaire $^{R}D^{p}$ et $^{R}D^{q}(p \neq q)$, ne commutent que si $[^{R}D^{p-k}f(t)]_{t=a} = 0$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$, et $[^{R}D^{q-k}f(t)]_{t=a} = 0$ pour tout $k = 1, 2, ..., m$.

1.3.3 Approche de Caputo

La définition de la dérivation fractionnaire de type Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires à cause de leurs applications dans les mathématiques pures (solutions des équations différentielles d'ordre entier, définition de nouvelles classes de fonction, sommation des séries, ...). Cependant, la technologie moderne demande une certaine révision de l'approche mathématique pure bien connue. De nombreux travaux sont apparus, spécialement sur la théorie de viscoélasticité et des mécaniques du solide, où les dérivées fractionnaires sont utilisées pour une bonne description des propriétés des matériaux. Une modélisation mathématique est basée sur les modèles rhéologiques mène naturellement à des équations différentielles d'ordre fractionnaire, et à la nécessité de la formulation des conditions initiales de telles équations. Les problèmes appliqués demandent des définitions de dérivées fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent $f(a)$, $f(a)'$, etc....

Malgré le fait que les problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement (voir par exemple solutions données dans [11]), la solution de ce problème a été proposée par M.Caputo (dans les années soixante) dans sa définition qu'il a adapté avec Mainardi dans la structure de la théorie de viscoélastiques [12]. Donc on introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.

Définition 1.3 *Soit $p > 0$ avec $n-1 < p < n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ et f une fonction telle que* $\dfrac{d^n}{dt^n} f \in L^1[a,b]$.

La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est *définie par*

$$\begin{aligned} {}^C D^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \\ &= I^{n-p}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right). \end{aligned} \tag{1.31}$$

Propriétés 1.2

1.Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville

Soit $p > 0$ avec $n-1 < p < n$, $(n \in N^*)$, supposons que f est une fonction telle que ${}^C D^p f(t)$ et ${}^R D^p f(t)$ existent alors

$${}^C D^p f(t) = {}^R D^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}. \tag{1.32}$$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots.., n-1$, on aura ${}^C D^p f(t) = {}^R D^p f(t)$.

2.Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Si f est une fonction continue on a

$${}^C D^p I^p f = f \text{ et } I^{p\,C} D^p f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}. \tag{1.33}$$

Donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'operateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

Exemples 1.6

1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo.

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$$^{C}D^{p}C = 0. \tag{1.34}$$

2. La dérivée de $f(t) = (t - a)^{\alpha}$ au sens de Caputo.

Soit p un entier et $0 \leq n - 1 < p < n$ avec $\alpha > n - 1$, alors on a

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau - a)^{\alpha-n}, \tag{1.35}$$

d'où

$$^{C}D^{p}(t - a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_{a}^{t}(t - \tau)^{n-p-1}(\tau - a)^{\alpha-n}d\tau, \tag{1.36}$$

effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t - a)$ on obtient

$$\begin{aligned}
^{C}D^{p}\,(t - a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_{a}^{t}(t - \tau)^{n-p-1}(\tau - a)^{\alpha-n}d\tau, \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\,(t - a)^{\alpha-p}\int_{a}^{1}(1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds, \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t - a)^{\alpha-p}, \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t - a)^{\alpha-p}, \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t - a)^{\alpha-p}.
\end{aligned}$$

1.3.4 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-liouville

* L'avantage principal de l'approche Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est à dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.

* Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo (1.34) par contre par Riemann-Lioville elle est $\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$.

1.3.5 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

Linéarité

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^{\alpha} f(t) + \mu D^{\alpha} g(t). \tag{1.37}$$

La règle de Leibniz

Pour n entier on a

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(t)\, g^{(n-k)}(t).$$

La généralisation de cette formule nous donne

$$D^p(f(t)\, g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(t) D^{(p-k)} g(t) + R_n^p(t), \tag{1.38}$$

où $n \geq p+1$ et

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\zeta)(\tau-\zeta)^n d\zeta,$$

avec $\lim_{n\to\infty} R_n^p(t) = 0$.

Si f et g sont continues dans $[a,\ t]$ ainsi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

$$D^p(f(t)g\ (t)) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(t) D^{(p-k)} g(t). \tag{1.39}$$

D^αest la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et au sens de Riemann-Liouville.

1.4 Champs d'application

Les applications de la dérivation fractionnaire dans les sciences physiques et les sciences de l'ingénieur relèvent des contributions scientifiques de ces dernières décennies, elle est utilisée comme outil de modélisation dans plusieurs domaines [15], en mécanique et en rhéologies en physique. En prenons par exemple l'équation de la chaleur :

Equation de la chaleur.

C'est un exemple classique d'application de la dérivation fractionnaire où la dérivée d'ordre un demi s'introduit naturellement quand on cherche à calculer un flux de chaleur à l'aide de la loi de Fourier.

L'équation de la chaleur est donnée par l'équation aux dérivée partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\,(t)\,, t > 0, y \geq 0. \tag{1.40}$$

Où t est un variable positive présente le temps, μ est une constante strictement positive de diffusivité et f une fonction qui (pour cet exemple) ne dépend que du temps. La variable d'espace $y \in [0, +\infty[$ est typiquement une direction orthogonale à une direction principale x d'un écoulement fluide.

Nous considérons les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(y,t) &\longrightarrow 0 \; si \; y \longmapsto +\infty. \end{aligned} \tag{1.41}$$

La température est fixée (arbitrairement) à 0 pour une ordonnée y nulle. Elle a un gradient qui tend vers 0 si l'ordonné y tend vers $+\infty$.

Le flux de chaleur est donné par

$$\phi(t) = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}(0,t), t > 0,$$

est représenté graphiquement par la tangente en $y = 0$.

Nous supposons que μ est une fonction intégrable. Ainsi, le problème peut être résolu à l'aide de la transformation de fourier en temps.

Soit

$$u(y,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u(y,w)) \exp(iwt) dw,$$

où $F(u(y,w))$ la transformation de fourier de la fonction u.En dérivant par rapport à t, nous obtenons :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} iwF(u(y,w)) \exp(iwt) dw,$$

ainsi

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = iwF(u),$$

par conséquent l'équation (1.40) devient

$$iwF(u) - \mu \frac{\partial^2 F(u)}{\partial y^2} = F(f(t)),$$

dont la solution est

$$F(u(y,w)) = \frac{1}{iw}F(f) + \alpha \exp\left(\sqrt{\frac{iw}{\mu}}y\right) + \beta \exp\left(-\sqrt{\frac{iw}{\mu}}y\right).$$

Avec les conditions aux limites (1.41), nous obtenons

$$F(u(y,w)) = \frac{1}{iw}F(f)\left[1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{iw}{\mu}}y\right)\right],$$

ainsi la transformée de Fourier du flux est donnée par

$$F(\phi(w)) = -\sqrt{\frac{\mu}{iw}}F(f).$$

Maintenant si nous posons

$$\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}Y(t),$$

avec $Y(t)$ la fonction de Heaviside définie par

$$Y(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t < 0, \\ 1 \ si \ t > 0, \end{cases}$$

nous arrivons à

$$F(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{iw}},$$

d'où

$$F(\phi) = -\sqrt{\frac{\mu}{\pi}}F(\rho)F(f).$$

On sait que

$$F(\rho * f) = F(\rho)F(f),$$

on trouve

$$F(\phi(t)) = -\sqrt{\frac{\mu}{\pi}}\int_0^t f(\theta)\frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}}.$$

Nous verrons de faire apparaitre l'intégrale d'ordre un demi de la fonction f. Ce qui permet d'établir que le flux de chaleur est donc un dérivateur d'ordre $\frac{1}{2}$.

Electricité

Schmidt et Drumheller [36] ont examiné le Lithium Hydrazinium Sulfate (LiN2H5SO4) et ont pu constater que sous sur large gamme de températures et de fréquences, les parties réelle et imaginaire de la susceptibilité ou encore, de la fonction diélectrique sont très grandes ($\varepsilon^{'} = \varepsilon^{''} = 10^6$) et varient en fonction de la fréquence suivant un ordre de puissance $\frac{1}{2}$.

Soit la fonction diélectrique

$$\varepsilon = \varepsilon^{'} + j\varepsilon^{''},$$

d'après les résultats expérimentales nous trouvons l'équation suivante

$$\varepsilon = \varepsilon^{'} w^{\frac{-1}{2}}(1 - j) = \varepsilon^{'} \sqrt{2}(jw)^{\frac{-1}{2}}, \text{ avec } j = \sqrt{-1}.$$

Comme la relation entre la fonction diélectrique et l'impédance est donnée par

$$Z = \frac{1}{jwC_c\varepsilon}, \text{ où } C_c \text{ est une constante,}$$

alors, on arrive à

$$Z = \frac{1}{jwC_c\varepsilon'\sqrt{2}(jw)^{\frac{-1}{2}}},$$

où

$$Z = \frac{K}{'(jw)^{\frac{-1}{2}}}, \text{ avec } K = \frac{1}{C_c\varepsilon'\sqrt{2}}.$$

En utilisant la variable de Laplace s nous obtenons

$$Z = \frac{K}{(s)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ainsi on définit une impédance fractionnaire de capacité, qui peut être fabriquée à partir de composition de matériaux spécifiques.

Chapitre 2

Rappels et notions fondamentales

2.1 Théorème de l'application contractante

Le théorème du point fixe de Banach garanti l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante, s'applique aux espaces métriques complets et qui possède de nombreuse applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existence de solution pour les équations différentielles ou les équations intégrale et l'étude de la convergence de certaines méthodes numériques.

Définition 2.1 *Soit $(M,\ d)$ un espace métrique complet et l'application $T : M \to M$, on dit que T est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments $x,\ y$ de M, l'inégalité*

$$d(T(x),\ T(y)) \leq k(d(x,\ y)).$$

Si $k \leq 1$, l'application T est appelée non expansive.

Si $k < 1$, l'application T est appelée contraction.

Théorème 2.1 (Théorème du point fixe de Banach (1922))[19]

Soit $(M,\ d)$ un espace métrique complet et soit $T : M \to M$ une application contractante avec la constante de contraction k, alors T a un unique point fixe $x \in M$. De plus *on a*

$$
\begin{aligned}
Si\ x_0 &\in M \text{ et } x_n = T(x_{n-1}), \\
\lim_{n\to\infty} x_n &= x \ et\ d(x_n,\ x) \leq k^n(1-k)^{-1}d(x_1,\ x_0) \qquad n \geq 1,
\end{aligned}
$$

Remarque 2.1 Si T est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées T^p est une contraction, alors T a un seul point fixe.

En effet, soit x l'unique point fixe de T^p on a $T^p(T(x)) = T(T^p(x)) = T(x)$ ce qui convient à dire que $T(x)$ est aussi un point fixe de T^p et grâce à l'unicité $T(x) = x$.

Ce résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

Remarque 2.2 Il se peut que T ne soit pas une contraction sur tout l'espace M mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant

Soit $(M,\ d)$ un espace métrique complet et $T : B \to M$ telle que

$$d(T(x),\ T(y)) \leq kd(x,\ y) \ \ \forall x,\ y \in B \text{ et } k < 1,$$

où

$$B = \{x \in M,\ d(x,\ z)\ < \varepsilon\}\ z \in M \text{ et } \varepsilon > 0.$$

Si $d(z,\ T(z)) < \varepsilon(1-k)$, alors T possède un unique point fixe $x \in B$.

2.2 Théorème du point fixe de Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 2.2 [22] *Soit K un sous ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach E et supposons $T : K \to K$ une application continue. Alors T admet* *un point fixe.*

Théorème 2.3 [6] *(Théorème de l'alternative non linéaire de Leray Schauder)*

Soit X un espace de Banach, Ω un sous ensemble ouvert borné de X, avec $0 \in \Omega$ et $T : \overline{\Omega} \to X$ une application compact. alors un des deux énonvés suivants est vériffié

(i) T a un point fixe sur $\overline{\Omega}$

(ii) il existe $\lambda \in (0,\ 1)$ et $u \in \partial\Omega$ tel que $x = \lambda T(x)$.

2.3 Théorème du point fixe de Krasnosel'skii

Définition 2.2 *Soit K un ensemble non vide d'un espace de Banach E. On dit que K est un cône si K est convexe fermé et satisfait les conditions suivantes*

1) $\alpha x \in K,\ \forall x \in K$ *et* $\alpha \geq 0$

2) x *et* $-x \in K \Rightarrow x = 0$

Tout cône défini une relation d'ordre sur E par

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K.$$

Définition 2.3 *(Opérateur complètement continu)*

Soient E un espace de Banach et Ω une partie de E. On dit que l'opérateur $T : \Omega \to E$ est complètement continu s'il est continu et si pour tout partie bornée B de Ω, $T(B)$ est relativement compact dans E.

Théorème 2.4 [13] *Soit E un espace de Banach et $K \subset E$ un cône. Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts de E avec $0 \in \Omega_1$ et $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$.*

Soit $T : K \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1) \to K$ un opérateur complètement continu tel que

i)$\|Tu\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$, et $\|Tu\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$. ou bien

ii) $\|Tu\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$, et $\|Tu\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$.

Alors T possède un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1)$

2.4 Théorème du point fixe d'Avery-Peterson

Théorème 2.5 [3] *Soit K un cône dans un espace de Banach E. Soit les fonctionnelles φ et ϕ non négatives, continues et convexes sur K, soit la fonctionnelle Λ non négative, continue et concave sur K, et soit la fonctionnelle Ψ non négative et continue sur K satisfaisant $\Psi(ku) \leq k\|u\|$ pour $0 \leq k \leq 1$. Définissant les ensembles,*

$$\begin{aligned} K(\varphi,\, d) &= \{u \in K,\ \varphi(u) < d\}, \\ K(\varphi,\, \Lambda,\, b,\, d) &= \{u \in K,\ b \leq \Lambda(u),\ \varphi(u) \leq d\}, \\ K(\varphi,\, \phi,\, \Lambda,\, b,\, c,\, d) &= \{u \in K,\ b \leq \Lambda(u),\ \phi(u) \leq c,\ \varphi(u) \leq d\}, \\ R\,(\varphi,\, \Psi,\, a,\, d) &= \{u \in K,\ a \leq \Psi(u),\ \varphi(u) \leq d\}. \end{aligned}$$

Pour les nombres positifs M et d, on a $\Lambda(u) \leq \Psi(u)$ et $\|u\| \leq M\varphi(u)$ pour tout $u \in \overline{K(\varphi, d)}$. On supposant que $T : \overline{K(\varphi, d)} \to \overline{K(\varphi, d)}$ est complètement continu et qu'il existe trois nombres positifs a, b et c avec $a < b$ tels que

(S1) $\{u \in K(\varphi,\, \phi,\, \Lambda,\, b,\, c,\, d),\ \Lambda(u) > b\} \neq \emptyset$ et $\Lambda(Tu) > b$ pour $u \in K(\varphi,\, \phi,\, \Lambda,\, b,\, c,\, d)$,

(S2) $\Lambda(Tu) > b$ pour $u \in K(\varphi,\, \Lambda,\, b,\, d)$ avec $\phi(Tu) > c$,

(S3) $0 \notin R(\varphi,\, \Psi,\, a,\, d)$ et $\Psi(Tu) < a$ pour $u \in R(\varphi,\, \Psi,\, a,\, d)$ avec $\Psi(u) = a$.

Alors T a *au moins trois points fixes $u_1,\ u_2,\ u_3 \in \overline{K(\varphi, d)}$ tels que*

$$\varphi(u_i) \leq d \text{ pour } i = 1, 2, 3,\ b < \Lambda(u_1),\ a < \Psi(u_2) \text{ avec } \Lambda(u_2) < b \text{ et } \Psi(u_3) < a.$$

2.5 Théorème du point fixe de l'opérateur croissant

Définition 2.4 *Soit K un cône dans un espace de Banach E, et soit D un sous ensemble de E.L'opérateur $A : D \to E$ est dit croissant si $x_1 \leq x_2 (x_1,\ x_2 \in D)$ implique $Ax_1 \leq Ax_2$.*

Définition 2.5 *Un cône $K \subset E$ est dit normal s'il existe une constante $\delta > 0$ telle* *que*

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq \delta \|y\| \ \forall x,\ y \in K.$$

Théorème 2.6 [10] *Soit K un cône normal dans un espace de Banach E, u_0, $v_0 \in K$, $u_0 \leq v_0$, $A : [u_0,\ v_0] \subset K \to K$ un opérateur. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites*

(i) A est un opérateur croissant

(ii) A est complètement continu

(iii) $u_0 \leq Au_0$, $Av_0 \leq v_0$.

Alors A a un point fixe minimal u^* et un point fixe maximal v^* dans $[u_0,\ v_0]$, de *plus*

$$u^* = \lim_{n\to\infty} u_n,\ v^* = \lim_{n\to\infty} v_n,$$

où

$$u_n = Au_{n-1},\ v_n = Av_{n-1},\ n\ = 1, 2, 3 \ldots$$

et

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n \leq \ldots \leq v_n \leq \ldots \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0.$$

2.6 Théorème d'Ascoli-Arzela

Théorème 2.7 *Soit $X = C([a, b])$ muni de la norme $\|u\| = \max_{a\leq t\leq b}|u(t)|$*, avec $-\infty < a < b < +\infty$. *Si M est un sous ensemble de X tel que*

(i) M est uniformément borné, i.e.$\exists\ r > 0, \|u\| \leq r, \forall u \in M$,

(ii) M est équicontinu, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall t_1,\ t_2 \in [a,\ b] \text{ tel que } |t_1 - t_2| < \delta \text{ et } u \in M \Rightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \varepsilon.$$

Alors, M est relativement compact.

Chapitre 3

Existence de solutions positives pour un problème aux limites fractionnaire

Résumé

On discute dans ce chapitre l'existence des solutions positives d'un problème aux limites fractionnaire en utilisant certains théorèmes de point fixe et sous certaines conditions sur le terme non linéaire.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons les conditions suffisantes pour l'existence de trois solutions positives du problème fractionnaire (P) suivant

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{q}_{0+}u(t) &= a(t)f(u(t)),\ 0<t<1, \\ u(0) &= u'(0)=0,\ u''(0)=\alpha u(1), \end{aligned} \tag{P}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, $2 < q < 3$, ${}^C D^q_{0+}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $a \in C([0,1], \mathbb{R})$. On montre que sous certaines conditions de croissance sur le terme non linéaire f, le problème aux limites fractionnaire (P) a une ou trois solutions positives.

Dans [7], El-Shahed a considéré le problème aux limites fractionnaire non linéaire suivant

$$\begin{aligned} D^q_{0+}u(t) + \lambda a(t) f(t, u(t)) &= 0, \ 0 < t < 1, \\ u(0) &= u'(0) = u'(1) = 0, \end{aligned}$$

où $2 < q < 3$, et D^q_{0+} désigne la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville. En utilisant le théorème de point fixe de Krasnoselskii sur le cône, l'auteur a prouvé l'existence et non existence des solutions positives de ce problème fractionnaire.

Dans [4], Bai et Lu ont étudié l'existence et la multiplicité des solutions positives du problème aux limites de l'équation différentielles fractionnaire suivante

$$\begin{aligned} D^q_{0+}u(t) + f(t, u(t)) &= 0, \ 0 < t < 1, \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

où $1 < q < 2$, et D^q_{0+} désigne la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville. En appliquant la théorie de point fixe sur le cône, les auteurs ont prouvé certains résultats d'existence et de multiplicité des solutions positives.

3.2 Préliminaires

Lemme 3.1 *Pour $\alpha > 0$, $g \in C([0,1], \mathbb{R})$ l'équation différentielle fractionnaire homogène ${}^C D^\alpha_{a+} g(t) = 0$ possède une solution :*

$$g(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + ... + c_n t^{n-1}, \ \ ou\ c_i \in \mathbb{R}, \ et\ n = [n] + 1.$$

Soit $E = C[0,\ 1]$, muni de la norme $\|u\| = \max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$.

On commence par résoudre un problème auxiliaire qui permettra d'obtenir l'expression de la solution.

Lemme 3.2 *On suppose que* $\alpha \neq 2$ *et* $y \in C([0,1],\ \mathbb{R})$, *alors le problème*

$$\begin{aligned} {}^{C}D_{0+}^{q}u(t) &= y(t),\ 0 < t < 1, \\ u(0) &= u'(0) = 0,\ u''(0) = \alpha u(1), \end{aligned}$$

a une solution unique donnée par

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 G(t,\ s)y(s)ds,$$

où

$$G(t,\ s) = \begin{cases} (t-s)^{q-1} + \frac{\alpha}{2-\alpha}t^2(1-s)^{q-1},\ 0 \leq s \leq t, \\ \frac{\alpha}{2-\alpha}t^2(1-s)^{q-1},\ 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Preuve. En utilisant les propriétés du calcul fractionnaire, on a

$$u(t) = I_{0+}^{q}y(t) + a + bt + ct^2 \tag{3.1}$$

La condition $u(0) = 0$ implique que $a = 0$. En dérivant les deux membres de (3.1) et en utilisant la condition initiale $u'(0) = 0$, on trouve $b = 0$. La condition $u''(0) = \alpha u(1)$, donne que $u''(0) = 2c = \alpha u(1)$, $2c = \alpha[I_{0+}^{q}y(1) + c]$, $2c - \alpha c = \alpha I_{0+}^{q}y(1)$, et

$c = \frac{\alpha}{2-\alpha} I_{0+}^{q} y(1)$. En remplaçant a, b et c par leurs valeurs dans (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} u(t) &= I_{0+}^{q} y(t) + \frac{\alpha}{2-\alpha} t^2 I_{0+}^{q} y(1), \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} y(s) ds + \frac{\alpha}{2-\alpha} \frac{1}{\Gamma(q)} t^2 \int_0^1 (t-s)^{q-1} y(s) ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t,s) y(s) ds. \end{aligned}$$

3.3 Existence des solutions positives

Dans cette section on suppose que $0 < \alpha < 2$ et les hypothèses suivantes

(H_1) : $a \in C([0,1], \mathbb{R}_+)$ et pour tout τ tel que $0 < \tau < 1$ alors $\int_\tau^1 (1-s)^{q-1} a(s) ds \neq 0$.

(H_2) : $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$

On définit l'opérateur intégral $T : E \to E$ par

$$T(u)(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t,s) a(s) f(u(s)) ds, \tag{3.2}$$

qui peut être écrit comme

$$T(u)(t) = I_{0+}^{q} a(t) f(u(t)) + \frac{\alpha}{2-\alpha} t^2 I_{0+}^{q} a(1) f(u(1)). \tag{3.3}$$

Définition 3.1 *La fonction u est dite solution positive du problème (P) si $u(t) \geq 0$, $\forall t \in [0,\ 1]$ et elle satisfait les conditions aux limites dans (P).*

On introduit les notations suivantes $A_0 = \lim\limits_{u\to 0} \frac{f(u)}{u}$, $A_\infty = \lim\limits_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u}$. Le cas $A_0 = 0$ et $A_\infty = \infty$ est appelé le cas super linéaire tandis que le cas $A_0 = \infty$ et $A_\infty = 0$ est appelé le cas sous linéaire.

Lemme 3.3 *Si $0 < \alpha < 2$ alors la fonction G a les propriétés suivantes :*

(1) $G(t,s) \geq 0$, et

$$G(t,s) \leq 2\gamma(s),\ \forall t,\ s \in [0,\ 1]. \tag{3.4}$$

(2) *Pour tout* $t \in [\tau,\ 1]$ *et* $s \in [0,\ 1]$, $\tau > 0$, $0 < \tau < 1$, *on a*

$$G(t,s) \geq \alpha\tau^2\gamma(s) \geq 0. \tag{3.5}$$

Où $\gamma(s) = \dfrac{(1-s)^{q-1}}{2-\alpha}$.

Preuve. Pour $t \in [0,\ 1]$, alors on obtient

$$G(t,s) \leq (1-s)^{q-1}(\frac{2}{2-\alpha}) = 2\gamma(s).$$

Si $t \in [\tau, 1]$, on trouve

$$G(t,s) \geq (1-s)^{q-1}\left(\frac{\alpha t^2}{2-\alpha}\right) \geq (1-s)^{q-1}\left(\frac{\alpha\tau^2}{2-\alpha}\right) = \alpha\tau^2\gamma(s). \tag{3.6}$$

Lemme 3.4 *La solution du problème aux limite fractionnaire* (P) *satisfait*

$$\min_{t\in[\tau,1]} u(t) \geq \frac{\alpha\tau^2}{2}\|u\| \tag{3.7}$$

Preuve. D'apès le lemme 3.3, on a $\forall t \in [\tau, 1]$, $G(t,s) \geq \alpha\tau^2\gamma(s)$, donc $\frac{1}{\Gamma(q)}\int\limits_0^1 \alpha\tau^2\gamma(s)y(s)ds \leq$ $u(t)$ ce qui implique $\min\limits_{t\in[\tau,1]} u(t) \geq \dfrac{\alpha\tau^2}{2}\|u\|$.

Théorème 3.1 *En supposant que les conditions* $(H_1) - (H_2)$ *sont vérifiées, alors le problème aux limite* (P) *a au moins une solution positive dans les deux cas sous-linéaire et super-linéaire.*

Pour prouver le théorème 3.1, on applique le théorème du point fixe de Guo-Krasnosel'skii sur le cône.

Preuve. On note par E^+ l'ensemble définit par $E^+ = \{u \in E,\ u(t) \geq 0,\ \forall t \in [0,\ 1]\}$ et on défini le cône K par

$$K = \{u \in E^+, \min_{t\in[\tau,1]} u(t) \geq \frac{\alpha\tau^2}{2}\|u\|\}, \tag{3.8}$$

Il est facile de voir que K est un sous ensemble de E non vide, fermé et convexe, donc c'est un cône. On peut vérifier aussi que $TK \subset K$. Il est évident de voir que T est continu puisque les fonctions f, a et G sont continues. Maintenant on prouve que T est complètement continu.

(i) $T(B_r)$ est uniformément borné, où $B_r = \{u \in K,\ \|u\| \leq r\}$.

Comme les fonctions a et f sont continues, alors il existe une constante c telle que $\max_{t\in[0,1]} |a(t)f(u(t))| = c$ pour tout $u \in B_r$. A partir du lemme 3.1 on obtient

$$|Tu(t)| \leq \frac{2c}{(2-\alpha)\Gamma(q)}. \tag{3.9}$$

Donc $T(B_r)$ est uniformément borné.

(ii) $T(B_r)$ est equicontinu, pour tout $t_1,\ t_2 \in [0,1],\ t_1 < t_2,\ u \in B_r$.on a

$$\begin{aligned} |(Tu)'(t)| &= \left| \begin{array}{l} \frac{1}{\Gamma(q)}\int\limits_0^1 (q-1)(t-s)^{q-2}a(s)f(u(s))ds \\ +\frac{1}{\Gamma(q)}\int\limits_0^1 2t^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}(1-s)^{q-1}a(s)f(u(s))ds \end{array} \right|, \qquad (3.10) \\ &\leq \frac{c}{\Gamma(q-1)}\int\limits_0^1 (1-s)^{q-2}ds + \frac{4c}{\Gamma(q)(2-\alpha)}\int\limits_0^1 (1-s)^{q-1}ds, \\ &\leq \frac{c}{\Gamma(q)}(1+\frac{2}{(2-\alpha)}) = \frac{c_1}{\Gamma(q)}. \end{aligned}$$

Donc

$$|Tu(t_2) - Tu(t_1)| = |\int\limits_{t_1}^{t_2} (Tu)'(t)dt| \leq \frac{c_1(t_2-t_1)}{\Gamma(q)}.$$

Par conséquent $T(B_r)$ est equicontinu. Par application du théorème d'Arzela-Ascoli en déduit que T est complètement continu.

On considère en premier temps le cas super linéaire.

Comme $A_0 = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R_1 > 0$, tel que si $0 < u \leq R_1$ alors

$f(u) \leq \varepsilon u$. Soit $\Omega_1 = \{u \in E,\ \|u\| < R_1\}$, pour chaque $u \in K \cap \partial\Omega_1$, on a

$$Tu\ (t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))ds,$$

$$\leq \frac{2\varepsilon\|u\|}{\Gamma(q)} \int_0^1 \gamma(s)a(s)ds. \tag{3.11}$$

Donc si on choisi $\varepsilon = \frac{\Gamma(q)}{2} \int_0^1 \gamma(s)a(s)ds$, on obtient $||Tu|| \leq ||u||$, pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$.

Deuxièment, de $A_\infty = \infty$, on déduit que pour tout $M > 0$, il existe $R_2 > 0$, tel que $f(u) \geq Mu$ pour $u \geq R_2$.

Soit $R = \max\{R_1, \frac{2R_2}{\alpha\tau^2}\}$, et on note Ω_2 l'ensemble ouvert défini par

$$\Omega_2 = \{u \in E : ||u|| < R\}$$

Si $u \in K \cap \partial\Omega_2$, alors

$$\min_{t\in[\tau,1]} u(t) \geq \frac{\alpha\tau^2}{2}\|u\| = \frac{\alpha\tau^2}{2}R \geq R_2. \tag{3.12}$$

En utilisant (3.5) et le lemme 3.4, on obtient pour $t \in [\tau, 1]$

$$Tu(t) \geq \frac{\alpha\tau^2 M}{\Gamma(q)} \int_\tau^1 \gamma(s)a(s)u(s)ds. \tag{3.13}$$

Donc

$$Tu(t) \geq \frac{\alpha^2\tau^4 M\|u\|}{2\Gamma(q)} \int_\tau^1 \gamma(s)a(s)ds, \tag{3.14}$$

Si on choisit $M = \frac{2\Gamma(q)}{\alpha^2\tau^4} \int_\tau^1 \gamma(s)a(s)ds$, on obtient $||Tu|| \geq ||u||$, $\forall u \in K \cap \partial\Omega_2$.
Le théorème du point fixe de Krasnosel'skii implique que T admet un point fixe dans

$K \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1)$ tel que $R_2 \leq ||u|| \leq R$.

Pour prouver le cas sous linéaire on procède d'une manière similaire au cas précédant.

On définit sur K, les fonctionnelles non négatives et continues suivantes

$*\Lambda(u) = \min\limits_{t\in[\tau,1]} |u(t)|$, concave et on a $\Lambda(u) \leq \|u\|$,

$*\varphi(u) = \phi(u) = \|u\|$, φ et ϕ sont convexes

$*\Psi(u) = \|u\|$, on a alors $\Psi(ku) \leq k\|u\|$ pour $0 \leq k \leq 1$.

Théorème 3.2 *On suppose que $(H_1) - (H_2)$ sont satisfaites, et qu'il existe des constantes positives a, b, c, d, μ, β et ν telles que $a < b$, $\mu > \frac{2}{(2-\alpha)\Gamma(q)} \int\limits_0^1 (1-s)^{q-1} a(s) ds$, $\beta < \frac{\alpha\tau^2}{(2-\alpha)\Gamma(q)} \int\limits_\tau^1 (1-s)^{q-1} a(s) ds$, et*

(i) $f(u) \leq \frac{d}{\mu}$ pour $u \in [0,\ d]$,

(ii) $f(u) \leq \frac{b}{\beta}$ pour $u \in [b,\ c]$,

(iii) $f(u) \leq \frac{a}{\mu}$ pour $u \in [0,\ a]$

Alors le problème (P) a au moins trois solutions positives u_1, u_2, $u_3 \in \overline{K(\varphi, d)}$ telles que

$\varphi(u_i) \leq d$ pour $i = 1, 2, 3$, $b < \Lambda(u_1)$, $a < \Psi(u_2)$ avec $\Lambda(u_2) < b$ et $\Psi(u_3) < a$.

Pour montrer ce théorème, on applique le théorème du point fixe d'Avery-Peterson.

Preuve. En procédant de manière analogue que celle de la preuve du théorème 3.1, on montre que T est complètement continue sur $\overline{K(\varphi, d)}$.

1) $T(\overline{K(\varphi, d)}) \subset \overline{K(\varphi, d)}$. Pour chaque $u \in \overline{K(\varphi, d)}$, alors $\|u\| \leq d$. Donc à l'aide de la supposition (i) on a

$$\begin{aligned}
\varphi(Tu) &= \|Tu\| = \max_{t\in[0,1]} \frac{1}{\Gamma(q)} \int\limits_0^1 G(t,\ s) a(s) f(u(s)) ds, \\
&\leq \frac{2}{(2-\alpha)\Gamma(q)} \int\limits_0^1 (1-s)^{q-1} a(s) f(u(s)) ds, \\
&\leq \frac{d}{\mu} \frac{2}{(2-\alpha)\Gamma(q)} \int\limits_0^1 (1-s)^{q-1} a(s) ds < d.
\end{aligned}$$

Alors $Tu \in \overline{K(\varphi, d)}$.

2) $(S1)$ est vérifiée, alors $\{u \in K(\varphi, \phi,\ \Lambda,\ b,\ \frac{b}{1-\lambda},\ d),\ \Lambda(u) > b\} \neq \emptyset$ et $\Lambda(Tu) > b$ pour $u \in K(\varphi,\ \phi,\ \Lambda,\ b,\ \frac{b}{1-\lambda},\ d\ )$ Soit $y(t) = b(\frac{\lambda}{1-\lambda})$ avec $\frac{1}{2} < \lambda < 1$, alors

$$\phi(y) = \varphi(y) = \|y\| = b\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right) < \frac{b}{1-\lambda}.$$

De plus on a

$$\Lambda(y) = \min_{t\in[\tau,1]} y(t) = b\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right) > b > (1-\lambda)\|y\|.$$

Alors $y \in K(\varphi,\ \phi,\ \Lambda,\ b,\ \frac{b}{1-\lambda},\ d)$, donc $\{u \in K(\varphi,\ \phi,\ \Lambda,\ b,\ \frac{b}{1-\lambda},\ d),\ \Lambda(u) > b\} \neq \emptyset$.

Pour chaque $u \in K(\varphi,\ \phi,\ \Lambda,\ b,\ \frac{b}{1-\lambda},\ d)$, puis $b \leq u(t) \leq \frac{b}{1-\lambda}$, de plus en appliquant le lemme 3.3 et la supposition (ii), on obtient

$$\begin{aligned}\Lambda(Tu) &= \min_{t\in[\tau,1]} |Tu(t)| \geq \frac{\alpha\tau^2}{(2-\alpha)\Gamma(q)} \int_\tau^1 (1-s)^{q-1} a(s) f(u(s)) ds,\\ &\geq \frac{\alpha\tau^2}{(2-\alpha)\Gamma(q)} \frac{b}{\beta} \int_\tau^1 (1-s)^{q-1} a(s) ds > b.\end{aligned}$$

Donc la condition $(S1)$ est satisfaite.

3) $(S2)$ est vérifiée. En effet pour chaque $u \in K(\varphi,\ \Lambda,\ b,\ d)$ tel que $\phi(Tu) = \|Tu\| > c$, alors

$$\Lambda\ (Tu) = \min_{t\in[\tau,1]} |Tu(t)| \geq b,$$

ceci implique que $(S2)$ est vraie.

4) $(S3)$ est vérifiée. En effet pour chaque $u \in R(\varphi,\ \Psi,\ a,\ d)$, alors $0 < a \leq \|u\| \leq d$, et donc $0 \notin R(\varphi,\ \Psi,\ a,\ d)$ avec $\Psi(u) = \|u\| = a$, en utilisant le lemme 3.3 et la supposition

(iii), on a

$$\begin{aligned}\Psi(Tu) &= \max_{t\in[0,1]} \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t,\ s)a(s)f(u(s))ds, \\ &\leq \frac{2}{(2-\alpha)\Gamma(q)} \int_0^1 (1-s)^{q-1}a(s)f(u(s))ds, \\ &\leq \frac{a}{\mu} \frac{2}{(2-\alpha)\Gamma(q)} \int_0^1 (1-s)^{q-1}a(s)ds < a.\end{aligned}$$

Alors $(S3)$ est satisfaite.

3.4 Exemples

Exemple 3.1 *On considère le problème aux limites fractionnaire suivant*

$$^{C}D_{0^+}^{\frac{8}{3}}u(t) = a(t)f(u(t)),\ 0 < t < 1,$$

où $q = \frac{8}{3},\ \alpha = \frac{1}{2},\ f(u) = \exp(-u),\ a(t) = t,\ \tau = \frac{4}{5}$, *un simple calcul donne*

$$\int_0^{0,8} a(s)ds = \int_0^{0,8} sds = 0,\ 32 \neq 0.$$

Alors les hypothèses $(H_1) - (H_2)$ *sont vérifiées et* $A_0 = \infty,\ A_\infty = 0$. *En appliquant le théorème* 3.1, *on en déduit qu'il existe au moins une solution positive.*

Exemple 3.2 *On considère le problème aux limites fractionnaire suivant*

$$^{C}D_{0^+}^{\frac{9}{04}}u(t) = a(t)f(u(t)),\ 0 < t < 1,$$

où $q = \frac{9}{4}$, $\alpha = 1$, $a(t) = \sqrt{1+t}$, $\tau = \frac{9}{10}$,

$$f(u,\ v) = \begin{cases} \frac{u^3}{2}, 0 \leq u \leq 3 \\ \frac{7u^2}{2}, -13,3 \leq u \leq 4 \\ 38, u \geq 4 \end{cases}$$

Comme les hypothèses $(H_1) - (H_2)$ *sont satisfaites, on vérifie les hypothèses du théorème* 3.2

$$\begin{aligned} \mu &> \frac{2(0,1)^{\frac{5}{4}}}{\Gamma(\frac{9}{4})} \int_0^1 \sqrt{1+s}ds = 2.1517, \\ \beta &< \frac{(0,9)^2(0,1)^{\frac{5}{4}}}{\Gamma(\frac{9}{4})} \int_{0,9}^1 \sqrt{1+s}ds = 0,87149, \end{aligned}$$

Si on choisit $\mu = 2,30$, $\beta = 0,5$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 0,1$, $d \geq 127,65$, *alors les hypothèses du théorème* 3.2 *sont satisfaites, par conséquent, il existe au moins trois solutions positives* u_1, u_2, $u_3 \in \overline{K(\varphi, d)}$ *telles que*

$\|u_i\| \leq d = 128,3 < \min\limits_{t \in [\frac{9}{10}, 1]} u_1(t)$, $2 < \|u_2\|$, *avec* $\min\limits_{t \in [\frac{9}{10}, 1]} u_2(t) < 3$ *et* $\|u_3\| < 2$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons prouvé l'existence d'au moins une solution positive du problème (P) en utilisant le théorème du point fixe de Guo-Krasnosel'skii dans le cône, puis sous quelques conditions suffisantes sur le terme source non linéaire, nous avons appliqué le Théorème Avery Peterson pour prouver l'existence d'au moins trois solutions positives. On peut prouver l'existence de plusieurs solutions positives en utilisant d'autres théorèmes du point fixe.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, D. O'Regan and P. J. Y. Wong. *Positive Solutions of differential difference and integral equations*, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1999.

[2] B. Ahmed, J. J. Nieto and J. Pimentel. *Some boundary value problems of fractional differential equations and inclusions*, Computers Mathematics with Applications, Vol. 62 no. 3, 1238-1250, 2011.

[3] R. I. Avery and A. C. Peterson. *Three positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces*, Computers Mathematics with Applications, vol. 42, no. 35, pp. 313-322, 2001.

[4] Z. Bai and H. Lu. *Positive solutions for boundary value problem of a nonlinear fractional differential equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 311, no. 2, pp. 495-505, 2005.

[5] B. Bonilla, M. Rivero, L. Rodriguez-Germa, and J. J. Trujillo. *Fractional differential equations as alternative models to nonlinear differential equations*, Applied Mathematics and Computation, vol. 187, no. 1, pp. 79-88, 2007.

[6] K. Deimling. *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin, Germany, 1985.

[7] M. El-Shahed. *Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation*, Absract and Applied Analysis, vol. 2007, Article ID 10368, 8 pages, 2007.

[8] A. Guezane-Lakoud, S. Kouachi and F. Ellaggoune. *Positive solutions for a fractional boundary value problem. Commun. Fac.*Sci.Univ.Ank.Series A1, 63 (2014), N° 2,177-

187.

[9] A. Guezane-Lakoud and R. Khaldi. *Positive solution to a higher order fractional boundary value problem with fractional integral condition*, Romanian Journal of Mathematics and Computer Sciences, vol. 2, pp. 28-40, 2012.

[10] D. Guo, V. Lakshmikantham. *Nonlinear problems in abstract cones.* Academic Press, San Diego. 1988

[11] M.C.Ho,Y.C.Hungn, C.H Chou, Phys..Lett.A 296 (1) (2002) 43.

[12] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, vol. 204 of North-Holland Mathematics Studies, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[13] M.A. Krasnoselskii : *Positive solutions of operator equations,* Noordhoff, Groningen 1964.

[14] V. Lakshmikantham, A. S. Vatsala : Basic *Theory of fractional differential equations*, Nonlinear Analysis, vol. 69, no. 8, pp. 2677-2682, 2008.

[15] A.Le Méhauté, G.Crepy, *Introduction to transfer and motion in fractal media : the geometry of kinetics*, Solid State Ionics 9& 10 (1983) 17—30.

[16] K. S. Miller, B. Ross : *An introduction to the fractional calculus and differential equations*, John Wiley, New York, 1993.

[17] I. Podlubny : *Fractional Differential Equations, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1999.

[18] V. H. Schmidt and J. E. Drumheller. *Dielectric properties of lithium hydrazinium sulfate.* Phys. Rev. B. 4(1971), 4582-4597.

[19] D.R. Smart : *Fixed point theory*, Cambridge Uni. Press, Cambridge 1974.

[20] J. R. L. Webb and G. Infante : *Positive solutions of nonlocal boundary value problems involving integral conditions.* Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, April2008, Volume 15, Issue 1-2, pp 45-67.

[21] J. R. L. Webb, G. Infante and D. Franco : *Positive solutions of nonlinear fourth-order boundary-value problems with local and non-local boundary conditions.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics, Vol. 138, no. 2, pp 427-446, 2008.

[22] E. Zeidler : *Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem,* Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.