République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **Analyse mathématique appliquée**

Par :

Sikni Imène

Intitulé

Le problème de Sturm-Liouville

Dirigé par : Mr Hamlaoui Abdelhamid

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr.Chaoui Abderrezak**	**Prof**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. Hamlaoui A.Hamid**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr.Benarioua Khadir**	**MCB**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2018

REMERCIEMENTS

أحمد الله الذي أنار لي درب العلم المعرفة، وأعانني على أداء هذا الواجب ووفقني إلى انجاز هذا العمل ...

اللّهم لك الحمد

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je voudrais tout d'abord adresser ma gratitude à Dr. HAMLAOUI ABD ELHAMID d'avoir accepté d'encadrer ce travail, je le remercie pour ses conseils judicieux, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Mes remerciements vont également aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer, discuter et examiner mon modeste travail.

Mes derniers remerciements, et pas les moindres, vont à ma mère et à mon père qui m'ont tant apporté d'amour, d'encouragement et sans eux je n'aurais pas pu aller au bout de ce travail, à mon chère marie Mouaadh et mon fils Younes et mes chères frères Yacine et Fares et mes belles sœurs Sabrina et Fouzia, Warda qui m'ont toujours apporté leur support moral, ainsi que toute ma famille,

à mes chères amies Salwa ; loubna ; Khawla ; Romaissa ; Mariem ; Fatma qui m'ont accompagné, poussé, encouragé tout au long de l'élaboration de ce travail.

J'exprime également, ma profonde reconnaissance Aux Amis qui n'ont pas hésité à aucun moment à nos apporter leur soutien, leur encouragement et surtout leur compréhension.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

À mes parents

A ma très chère Mère ; et à mon très cher Père ; pour ses sacrifices

De tous les instants.

À mon marie Mouaadh et mon fils Younes

À mes frères set sœurs

Ma belle sœur et mon beau frère

À Toute ma famille

A tous Mes enseignants sans Exception

À mes tendres amies

Et à tous ceux qui ont toujours cru en moi, m'ont accompagné et soutenu ...

Qu'ils trouvent ici ma profonde reconnaissance...

SIKNI IMENE

Historique et Résumé :

Au début du $19^{\text{ème}}$ siècle, les bases orthogonales dans $L_2([a,b])$ prennent une importance telle que les valeurs des fonctions de certaines bases sont tabulées. La nécessité d'élaborer une théorie de synthèse afin d'éclaircir les multiples analogies entre les éléments de ces bases, devint impérieuse. Ce que Charles Sturm et Joseph Liouville présentèrent à partir de 1836, d'une manière fort élégante. Les équations et fonctions spéciales ayant conduit à ces nombreux systèmes de polynômes orthogonaux s'avérèrent des cas particuliers de ce qui va s'appeler désormais « le problème de Sturm-Liouville ». Dans ce mémoire, nous définissons ce problème, les propriétés des fonctions et des valeurs propres, ses liens avec les systèmes orthogonaux classiques, et rappelons d'autres théories équivalentes.

Table des matières

0.1 Introduction

0.1.1 Présentation du sujet

Le sujet concerne essentiellement les équations différentielles linéaires du second ordre, à coefficients variables, dites "spéciales". Ces équations furent abordées de différentes manières, à partir du 18ème siècle, proviennent souvent de l'application du principe fondamental de la dynamique (d'où l'ordre 2) et de la séparation des variables dans les équations aux dérivées partielles.

Le programme actuel de licence ne concerne que la théorie générale du linéaire, et la résolution des équations à coefficients constants. Quant aux coefficients variables, il ne subsiste que le théorème de construction d'une seconde solution à partir d'une solution connue, et la recherche de solutions sous la forme de série entière. Or une large classe d'équations dites "spéciales", décrite par une bibliographie abondante, comprenant beaucoup de calculs et un formulaire dense, nécessite une théorie de synthèse vu les multiples analogies entre les équations et leurs solutions. Leur classement comme équations du type de Fuchs a permi de construire les solutions sous la forme de séries presque entières et d'étudier, séparément leurs propriétés. Parmi les théories de synthèse, on peut citer celle de Gauss, dite équation et fonction hypergéométrique, ou le problème de Sturm-Liouville, qui font que les équations et fonctions spéciales n'en sont que des cas particulers.

Nous ramenons toute équation $a_1(x)y" + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0$ (1.1)

à la forme opératorielle $Ly = 0$, (1.2)

et nous cherchons des solutions au problème des valeurs propres

$Ly = \lambda y$, (1.3), pour construire une solution comme superposition des fonctions propres $y = \sum_{n-1}^{\infty} c_n \varphi_n$

On montre que l'equation (1.1) peut s'écrire sous la forme :

$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx}] + [q(x) + \lambda w(x)]y = 0$ (1.4) pour introduire l'opérateur de Sturm-Liouville $\mathcal{L} = \frac{d}{dx}[p(x)\frac{d}{dx}] + q(x)$

et remplacer (1.3) par $\quad \mathcal{L}y = -\lambda w(x)y \qquad (1.5)$

où $p(x),\ q(x)\ et\ w(x)$ sont continues sur $[a,b]$, $p(x) \succ 0$, $w(x) \succ 0$.

Nous partageons ce travail en quatre chapitres, de sorte que :

- Dans le chapitre 1, on rappelle les notions de base nécessaires à la compréhension du mémoire.

- Au $2^{ème}$ chapitre, on expose la théorie de Sturm-Liouville, sur un intervalle fini.

- Dans le chapitre 3, on cite les principaux polynômes orthogonaux, comme solutions d'un problème de Sturm-Liouville.

- Au chapitre 4, on rappelle les différentes approches des systèmes orthogonaux classiques.

On achève le mémoire par une conclusion (ou plutôt une remarque) et une bibliographie succinte.

Chapitre 1

Préliminaires

1.0.2 Le produit scalaire :

Définition :

Soit H un espace vectoriel sur $\Bbbk$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un produit scalaire (inner product) sur H est une application :

$\langle .,. \rangle : H \times H \rightarrow \Bbbk$

$(x,y) \rightarrow \langle x,y \rangle$,telle que : $\forall x,y,z \in H$ et $\alpha,\beta \in \Bbbk$, on a :

(i) $\langle x,x \rangle \geq 0$, et $\langle x,x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(ii) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x,z \rangle + \beta \langle y,z \rangle$

(iii) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$

L'espace $(H, \langle .,. \rangle)$ se nomme espace préhilbertien sur $\Bbbk$. Il est normé par $\|x\| = \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}$.

.

1.0.3 Espace de Hilbert

Définition

Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{k}$. Si H est complet, alors $(H, \langle .,. \rangle)$ s'appelle espace de Hilbert.

.

1.0.4 Fonctions intégrables

Définition

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite :

1. Intégrable (ou sommable), si elle est mesurable et $\int_a^b |f(x)|\, dx \prec \infty$, ($dx$ est la mesure de Lebesgue)

2. De carré intégrable sur $[a, b]$, si elle est mesurable et $\int_a^b |fx)|^2\, dx<\infty$.

On désigne par $l^2([a, b])$ l'espace de toutes les fonctions de carré intégrables sur $[a, b]$.

En identifiant deux fonctions presque partout égales, on obtient l'espace quotient de $l^2([a, b])$ par la relation d'équivalence "p.p égales" qu'on notera par $L^2([a, b])$; (il est constitué des classes d'équivalence $[f]$, et $g \in [f]$ ssi $f = g$ $p.p$). Comme $\int_a^b f = \int_a^b g$, $\forall g \in [f]$, alors on peut omettre les crochets de $[f]$ et considérer la classe d'équivalence comme une fonction ordinaire.

On définit sur $L^2([a, b])$ la norme $\|.\|_2$ par :

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.1)$$

L'espace $(L^2([a, b]), \|.\|_2)$ est un espace de banach (i.e normé complet). Par ailleurs, $L^2([a, b])$ muni du produit scalaire : $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$, est un espace de Hilbert.

1.0.5 Ensembles orthogonaux

Définition

Un sous ensemble $\{f_1, f_2, ...\}$ de $L^2([a,b])$ est dit orthogonal, si pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, $n \neq m \Rightarrow \langle f_n, f_m \rangle = 0$.

Il va de soi qu'on peut normer un tel ensemble de fonctions en divisant chacune d'elles par sa norme. L'ensemble $\{g_n\}$, $n = 1, 2, ...,$ *où* $g_n = \frac{f_n}{\|f_n\|_2}$ est orthonormé et $\langle g_i, g_j \rangle = \sigma_{ij}$ (symbole de Kronecher).

Exemple

L'ensemble des fonctions $g_n(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, ...,$est orthogonal sur $[-\pi, \pi]$ car :

$\langle g_n, g_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x\, dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x\, dx$, d'où :

$$\langle g_n, g_m \rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ \pi \text{ si } n = m \end{cases}$$

et l'ensemble $S = \left\{ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}, ... \right\}$,est orthonormé.

Exemple

L'ensemble des fonctions $\{\sin nx\ , \cos mx,\ n \in \mathbb{N}^*,\ m \in \mathbb{N}\}$ est orthogonal sur $[-\pi, \pi]$.

et l'ensemble $C = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, ... \right\}$ est orthonormé.

Remarque

Certains ensembles de fonctions $\{g_1, g_2, ...\}$ ne sont pas orthogonaux dans le sens défini plutôt, mais possèdent la propriété que pour une certaine fonction positive $p(x)$, on a : $\int_a^b p(x) g_n(x) g_m(x) dx = 0$, pour $n \neq m$. (2.2)

Ces ensembles sont dits orthogonaux par rapport à la fonction densité (ou la fonction poids) $p(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$. La norme de g_m est donc :

$\|g_m(x)\|^2 = \int_a^b p(x) g_m^2(x) dx,$ (2.3)

et on peut de nouveau normer de tels ensembles.

Définition

Soit p une fonction poids sur I. On appelle suite de polynômes orthonormés associés à p, la suite $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de premier terme strictement positif, obtenue par orthonormalisation de la suite $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pour le produit scalaire défini par (2.3).

1.0.6 Développement en série

Proposition

Soit $E = \{g_1, g_2, ...\}$ un sous ensemble de $L^2([a,b])$. Si E est orthogonal, alors E est libre.

Preuve Soit J un ensemble d'indices k et une combinaison linéaire nulle : $\sum_{k\in J} C_k g_k(x) = 0$

Soit $g_n \in E$, alors $\left\langle g_n, \sum_{k\in J} C_k g_k(x) \right\rangle = 0$

or $\left\langle g_n, \sum_{k\in J} C_k g_k(x) \right\rangle = \sum_{k\in J} C_k \langle g_n, g_k \rangle = C_n \langle g_n, g_n \rangle = C_n \|g_n\|^2 = 0$.

Ceci implique que $C_n = 0$ pour tout n . Ce qui signifie que E est libre$\blacksquare$

Par analogie avec l'éxpression d'un vecteur en fonction des éléments de la base, (ici E n'est une base que si l'espace vectoriel engendré par E est partout dense dans $L^2([a,b])$), on parle de l'expression d'une fonction par rapport à l'ensemble orthogonal E.

Si une fonction f s'exprime en fonction des g_n par la série convergente

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, g_n(x) \qquad (2.4)$$

On dit que f admet un développement en série de Fourier généralisée et les C_i sont les coefficients de fourier relativement à l'ensemble $E = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Multiplions (2.4) scalairement par $g_m(x)$, (m fixé), et intégrons les deux membres sur $[a,b]$ en supposant que l'intégration terme à terme de la série est possible, (ce qui est vrai pour les séries de Fourier, les séries uniformément convergentes...).

$$\langle f, g_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \langle g_n, g_m \rangle = C_m \|g_m\|^2 \qquad (2.5)$$

car pour tout $n \neq m$, $\langle g_n, g_m \rangle = 0$.

D'aprés (2.5), le coefficient C_n s'écrit $C_n = \frac{\langle f,\ g_n \rangle}{\|g_n\|^2}$, donc

$$C_n = \frac{1}{\|g_n\|^2} \int_a^b f(x) g_n(x) dx \qquad (2.6)$$

On procède de manière similaire si f admet un développement en série de Fourier généralisée par rapport à un ensemble $\{h_1, h_2, ...\}$ orthogonal relativement à une fonction densité p . Dans ce cas, on a :

$$f(x) = C_1 h_1(x) + C_2 h_2(x) + \ldots + C_m h_m(x) + \ldots , \qquad (2.7)$$

où $$C_m = \frac{1}{\|h_m\|^2} \int_a^b p(x) f(x) h_m(x) dx \qquad (2.8)$$

1.0.7 Séries entières et équations différentielles

On s'intéresse aux équations différentielles linéaires du second ordre, homogènes ,

$a_0(x)\ y" + a_1(x)\ y' + a_2(x)\ y = 0$, (3.1) ;

que l'on met sous la forme générique

$y" + P(x)\ y' + Q(x)\ y = 0$, (3.2) .

Les équations non -homogènes se traitent de la façon usuelle, en résolvant tout d'abord l'équation homogène associée, et en ajoutant à la solution générale de celle ci une solution particulière de l'équation non-homogène.

Notion de point singulier

Considérons l'équation (3.1), où les $a_i(x)$ sont des polynômes en x , $i = 0, 1, 2$.

Définition 1.1 *Un point x_0 est un point **ordinaire** de (3.1) si $a_0(x_0) \neq 0$.*

Définition 1.2 *Un point x_0 est un point **singulier** de (3.1) si $a_0(x_0) = 0$.*

Définition 1.3 *Un point x_0 est un point **singulier régulier** si $(x - x_0)P(x)$ et $(x - x_0)^2Q(x)$ sont analytiques au voisinage de x_0.*

Rechercher un possible point régulier ou singulier en x_0 revient donc à étudier le comportement de $P(x)$ et $Q(x)$ au voisinage de x_0.

Equations homogènes à coefficients analytiques

Considérons tout d'abord le cas où les coefficients $a_i(x)$ de (3.1) sont réguliers. Il est alors possible de les développer en série entière au voisinage d'un point régulier, et d'en déduire une solution elle même sous forme de série entière. Plus précisément, on a le résultat suivant .

Théorème 1.1 *On considère l'équation différentielle (3.1), avec les conditions $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$. Alors, si les fonctions P et Q, considérées comme fonctions d'une variable complexe x, sont régulières dans un cercle de rayon R centré sur x_0 dans $\mathbb{C}$, il existe une unique solution de l'équation développable en série entière autour de x_0 et obéissant aux conditions données.*

Dans ces conditions, étant donné un point régulier x_0 , on peut rechercher des solutions de l'équation différentielle sous la forme

$$\boxed{y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k}$$

Dans le cas plus complexe où les conditions de régularité sur P et Q ne sont pas remplies, les solutions peuvent prendre une forme un peu plus compliquée.

La méthode de Frobenius

Coefficients analytiques, points singuliers Maintenant, on se place dans le cas où x_0 est un point singulier régulier .

Pour simplifier, posons $x_0 = 0$

$$y" + P(x).y' + Q(x).y = 0.$$

où $xP(x) = \alpha(x)$ et $x^2Q(x) = \beta(x)$ sont développables en série au voisinage de $x = 0$.On a donc

$$\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \quad , \quad \beta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k \text{ , pour } |x| < R \qquad (3.3).$$

et l'équation peut s'écrire :

$$x^2 y" + x\alpha(x).y' + \beta(x).y = 0 \qquad (3.4)$$

On va chercher une solution sous la forme de la série presque entière :

$$\boxed{\varphi(x) = x^r.\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k} \qquad \text{où } c_0 \neq 0 \text{ et } r \in \mathbb{C}.$$

Il s'agit donc de déterminer r et les coefficients c_k .

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\ x^{k+r}, \qquad \beta(x)\ \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+r}(\sum_{j=0}^{k} c_j \beta_{k-j})$$

$$\varphi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+r)x^{k+r-1}, \quad x.\alpha(x).\varphi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+r}(\sum_{j=0}^{k} c_j.\alpha_{k-j}.(k+r))$$

$$\varphi"(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+r)(k+r-1).x^{k+r-2},$$

$$x^2\ \ \varphi"(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+r)(k+r-1).x^{k+r}$$

et en remplaçant dans (3.4), on obtient :

$$x^r \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x^k[(k+r)(k+r-1).c_k + \sum_{j=0}^{k} c_j.\alpha_{k-j}.(j+r) + \sum_{j=0}^{k} c_j \beta_{k-j}] \right\} = 0$$

ce qui s'écrit encore : $[r(r-1) + \alpha_0.r + \beta_0].c_0 +$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+r)(k+r-1).c_k + \sum_{j=0}^{k} ((j+r).\alpha_{k-j} + \beta_{k-j}).c_j \right] x^k = 0. \qquad (3.5)$$

Si l'on pose

$$F(r) = r(r-1) + \alpha_0.r + \beta_0 \qquad (3.6)$$

en annulant les coefficients de x^k dans (3.5), on obtient les équations :

$$F(r) = 0$$

que l'on appelle équation indicielle, ainsi que

$$F(r+k)c_k + \sum_{j=0}^{k-1}[(j+r)\alpha_{k-j} + \beta_{k-j}].c_j = 0$$

Choisissons $c_0 \neq 0$. Soient r_1 et r_2 les racines de l'équation indicielle (3.6), ces deux dernières nous conduisent à des solutions de la forme

$$y_1(x) = (x-x_0)^{r_1}\varphi_1(x) \qquad , \qquad y_2(x) = (x-x_0)^{r_2}\varphi_2(x)$$

où φ_1 et φ_2 sont deux fonctions régulières (c'est à dire développables en série entière en x_0).

Chapitre 2

Problème de Sturm-Liouville

La théorie de Sturm_liouville étudie le cas particulier des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre deux de la forme

$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx}] + (q(x) + \lambda w(x))y = 0$

dans laquelle le paramètre λ fait partie comme la fonction y des inconnues .cette équation est fréquement posée sur un segment [a,b]

et accompagnée des conditions aux bords relient les valeurs $y(a)$, $y'(a)$, $y(b)$ et $y'(b)$.les solutions λ et y du problème apparaissent alors comme

valeur propre et vecteur propre d'un certain opérateur auto adjoint dans un espace de hilbert.

Définition 2.1 *Un problème de Sturm-Liouville est une équation de second ordre de la forme :*

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx}] + (q(x) + \lambda w(x))y = 0 \text{ , pour tout } x \in [a,b], \tag{4.1}$$

avec les conditions aux bords de l'intervalle $[a, b]$, de la forme :

$$\begin{cases} K_1y(a) + K_2y'(a) = 0; \ K_1^2 + K_2^2 \ > 0 \\ L_1y(b) + L_2y'(b) = 0; \ L_1^2 + L_2^2 \ > 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

où K_1, K_2, L_1, L_2 sont des constantes réelles données .

p, q, w sont des fonctions réelles données ; λ est un paramètre quelconque.

On cherche à déterminer les solutions $y(x)$ pour différentes valeurs de λ. On voit que $y = 0$ est solution du problème pour toute valeur de λ. Les solutions $y(x)$ non nulles et les paramètres λ pour lesquels ces solutions existent, sont respectivement appelés fonctions propres et valeurs propres du problème.

On suppose que $p(x)$ garde un signe constant sur $[a, b]$.

Notons que (4.2) résume tous les types de conditions aux limites. Si $K_2 = L_2 = 0$, on a un problème de Dirichlet, càd : $y(a) = y(b) = 0$. Si $K_1 = K_2 = 0$, on a un problème de Newmann, à savoir $y'(a) = y'b) = 0$; ...etc

Exemple

Le problème $y" + \lambda y = 0,\ y(\pi) = 0$ est un cas particulier du problème de Sturm-Liouville $(p(x) = w(x) = 1,\ q(x) = 0)$. Pour $\lambda \leq 0$, la solution est triviale $y = 0$. Pour $\lambda = K^2 \succ 0$, la solution est :

$y(x) = C_1 \cos Kx + C_2 \sin Kx$.

$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$, $y(\pi) = 0 \Rightarrow K$ entier.

Donc $\lambda = K^2 = 1, 4, 9, 16, ...$sont les valeurs propres et $y_k(x) = c_k \sin Kx$ sont les fonctions propres correspondantes.

2.0.8 Définition

Le problème de Sturm-Liouville défini sur $[a, b]$, dans la définition (3.1), est dit régulier si : les fonctions $p(x), q(x)$ et $w(x)$ sont à valeurs réelles, continues sur l'intervalle $[a, b]$ et que $p(x) \succ 0$ et $w(x) \succ 0$, pour tout $x \in [a, b]$.

Sinon le problème est dit singulier.

Exemple

$\begin{cases} y" + \lambda y = 0, & x \in [0, a] \\ y(0) = y(a) = 0 \end{cases}$ est un problème de Sturm-Liouville régulier.

$\begin{cases} x^2 y" + xy' + (\lambda^2 x^2 - m^2) y = 0; & x \in [0, a] \\ y(a) = 0 \end{cases}$ est un problème de Sturm-Liouville singulier.

2.0.9 Universalité du problème de Sturm-Liouville

Proposition 2.1 *La recherche des valeurs propres et des vecteurs propres d'un opérateur différentiel linéaire du second ordre $P(x)$ revient un problème de Sturm-Liouville.*

Preuve :

Soit l'opérateur différentiel $P(D) = a_1(x)D^2 + a_2(x)D + a_3(x)$.

Alors $P(D)y = \lambda y \Longleftrightarrow a_1(x)y" + a_2(x)y' + (a_3(x) - \lambda)y = 0$

tel que $a_1(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$; $\frac{a_2(x)}{a_1(x)}$ est intégrable sur $[a, b]$.

On définit : $\begin{cases} p(x) = \exp(\int_a^x \frac{a_2(t)}{a_1(t)} dt) \\ q(x) = \frac{a_3(x)}{a_1(x)} p(x) \\ w(x) = \frac{p(x)}{a_1(x)} \end{cases}$

alors l'équation différentielle ordinaire :

$a_1(x)y"(x) + a_2(x)y' + (a_3(x) + \lambda)y = 0 \qquad (**)$

est équivalente à l'équation de Sturm-Liouville

$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx}] + [q(x) + \lambda w(x)]y = 0$

En effet :

$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) = p(x)y" + p'(x)y'$

$$= p(x)y" + \frac{a_2(x)}{a_1(x)} \exp(\int_a^x \frac{a_2(t)}{a_1(t)} dt)\ y' = p(x)y" + \frac{a_2(x)}{a_1(x)} p(x)y'$$

En substituant dans l'équation de Sturm-Liouville :

$p(x)y" + \frac{a_2(x)}{a_1(x)}p(x)y' + [\frac{a_3(x)}{a_1(x)}p(x) + \lambda\frac{p(x)}{a_1(x)}]\ y = 0$, qu'on multiplie par $\frac{a_1(x)}{p(x)}$ pour aboutir à l'équation $(**)$

$a_1(x)y"(x) + a_2(x)y' + (a_3(x) + \lambda)y = 0 \quad , \forall x \in [a, b]$ ■

Si $y = y(x)$ est une solution de l'équation de Sturm-Liouville, alors y sera aussi une solution de l'équation $(**)$.

.

2.0.10 Propriétés des fonctions et des valeurs propres

Théorème

(i) Soient p, q et w des fonctions réelles, continues sur $[a, b]$.

Si $y_n(x)$ et $y_m(x)$ sont deux fonctions propres correspondant aux valeurs propres distinctes λ_n et λ_m , alors y_n et y_m sont **orthogonales** relativement à la fonction densité $w(x)$.

$i.e$: $\int_a^b w(x)y_n(x)y_m(x)dx = 0$.

(ii) Si $p(a) = p(b)$, les conditions aux aux bords (4.2) peuvent êtres remplacées par la condition :

$$y(a) = y(b) \quad , \quad y'(a) = y'(b) \qquad (4.3)$$

Preuve :

Considérons la $1^{ère}$condition de (4.2), où $K_2 \neq 0$ (car $K_1^2 + K_2^2 > 0$)

$$K_1 y_n(a) + K_2 y_n'(a) = 0$$

$$K_1 y_m(a) + K_2 y_m'(a) = 0 \qquad (4.4)$$

Multiplions la première égalité par $y_m(a)$ et la deuxième par $-y_n(a)$, puis additionnons : $K_2[y_n'(a)y_m(a) - y_n(a)y_m'(a)] = 0$, d'où

$$\begin{vmatrix} y_m(a) & y_n(a) \\ y_m'(a) & y_n'(a) \end{vmatrix} = W(a) = 0 \qquad (4.5)$$

$W(a)$ est le déterminant de Wronski, ou le Wronskien de y_n, y_m au point a.

Si $K_1 \neq 0$, on obtient le même résultat en éliminant le deuxième terme du système (4.4). En raisonnant avec la $2^{ème}$ condition, on obtient aussi que $W(b) = 0$. Les conditions du système (4.4) lient linéairement les solutions y_n et y_m aux extrémités. Revenons maintenant à l'équation de Sturm-Liouville

on a : $$(py_n')' + (q + \lambda_n w)y_n = 0.$$
$$(py_m')' + (q + \lambda_m w)y_m = 0.$$

On multiplie la 1ère par y_m et la 2ème par $(-y_n)$ et on les additionne, pour obtenir :

$$(\lambda_m - \lambda_n)w\ y_m y_n = y_m(py_n')' - y_n(py_m')' \ = [(py_n')y_m - (py_m')y_n]'.$$

Donc :

$$\begin{aligned}(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b w(x)y_n(x)y_m(x)dx &= [(py_n')y_m - (py_m')y_n]_a^b \\ &= p(b)[y_n'(b)y_m(b) - y_m'(b)y_n(b) \ -p(a)[y_n'(a)y_m(a) - y_m'(a)y_n(a)] \\ &= p(b)W(b) - p(a)W(a) = 0\end{aligned}$$

Donc (i) est démontré,car $\lambda_n - \lambda_m \neq 0$. Si $p(a) = p(b)$, l'expression précédente s'écrit :

$$p(b)[W(b) - W(a)] = 0$$

et comme $p(a) \neq 0$, alors $W(a) = W(b)$■

2.0.11 Proposition

Soit le problème de Sturm-Liouville défini sur l'intervalle $[a, b]$:

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx}] + (q(x) + \lambda w(x))y = 0, \text{ pour tout } x \in [a, b]$$

avec les conditions aux bords de l'intervalle $[a, b]$ de la forme :

$$\begin{cases} K_1 y(a) + K_2 y'(a) = 0; \ K_1^2 + K_2^2 \ > 0 \\ L_1 y(b) + L_2 y'(b) = 0; \ L_1^2 + L_2^2 \ > 0 \end{cases}$$

Supposons que les fonctions p, q, w et p' sont à valeurs réelles et continues sur l'intervalle $[a, b]$.

Si $w(x) \succ 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors **toutes les valeurs propres du problème sont réelles.**

Preuve :

Supposons que $\lambda = \alpha + i\beta$ est une valeur propre du problème avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $i = \sqrt{-1}$.Notons par $y(x) = u(x) + iv(x)$ une fonction

propre correspondante à cette valeur propre λ, où u et v sont deux fonctions à valeurs réelles. En remplaçant dans l'équation de

Sturm-Liouville, nous obtenons :

$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx} + p(x)\frac{dv}{dx}i) + (q(x) + \alpha w(x) + \beta w(x)i)(u(x) + v(x)i) = 0$

En considérant la partie réelle et la partie imaginaire, nous obtenons deux équations :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) + q(x) + \alpha w(x)u(x) - \beta w(x)v(x) = 0 \\ \frac{d}{dx}(p(x)\frac{dv}{dx}) + (q(x) + \alpha w(x)v(x) + \beta w(x)u(x) = 0 \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $v(x)$ et la second par $(-u(x))$, et en additionnant les deux équations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} -\beta(u^2(x) + v^2(x))w(x) &= u(x)\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dv}{dx}) - v(x)\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) \\ &= \frac{d}{dx}[p(x)u(x)\frac{dv}{dx} - p(x)v(x)\frac{du}{dx}]. \end{aligned}$$

En intégrant sur l'intervalle $[a, b]$, nous obtenons :

$-\beta\int_a^b(u^2(x) + v^2(x))w(x)dx = [p(x)u(x)\frac{dv}{dx} - p(x)v(x)\frac{du}{dx}]_a^b$

Mais cette dernière expression est nulle.

En effet : si nous considérons les conditions (4.2), nous aurons :

$K_1y(a) + K_2y'(a) = 0 \Rightarrow K_1(u(a) + v(a)i) + K_2(u'(a) + v'(a)i) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(a)K_1 + u'(a)K_2 = 0 \\ v(a)K_1 + v'(a)K_2 = 0 \end{cases}$$

Ainsi que :

$L_1y(a) + L_2y'(a) = 0 \Rightarrow L_1(u(b) + v(b)i) + L_2(u'(b) + v'(b)i) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(b)L_1 + u'(b)L_2 = 0 \\ v(b)L_1 + v'(b)L_2 = 0 \end{cases}$$

De ceci, nous pouvons conclure que le système d'équations linéaires en z_1 et z_2 :

$$\begin{pmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a au moins une solution non nulle, à savoir : $(z_1, z_2) = (K_1, K_2)$ et par conséquent, le

déterminant
$$\begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{vmatrix} = (u(a)v'(a) - u'(a)v(a)) = 0.$$

Sinon, seule la solution triviale est possible. De même, le système d'équations linéaire en z_1 et z_2
$$\begin{pmatrix} u(b) & u'(b) \\ v(b) & v'(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a au moins une solution non nulle, à savoir : $(z_1, z_2) = (L_1, L_2)$ et en conséquence, le déterminant :
$$\begin{vmatrix} u(b) & u'(b) \\ v(b) & v'(b) \end{vmatrix} = (u(b)v'(b) - u'(b)v(b)) = 0.$$

C'est ainsi que nous obtenons : $-\beta \int_a^b (u^2(x) + v^2(x))w(x)dx = 0$.

comme y est une fonction propre, alors $y \neq 0$ donc $(u^2(x) + v^2(x)) \neq 0$.

De plus, comme $w(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$, (ou encore $0 \succ w(x)$ pour tout $x \in [a,b]$)

Alors : $\int_a^b (u^2(x) + v^2(x))w(x)dx \neq 0$.

Nous pouvons donc conclure que $\beta = 0$, et $\lambda = \alpha \in \mathbb{R}$.

.

Chapitre 3

Exemples de polynômes orthogonaux classiques :

Nous traiterons, en exemple, les polynômes orthogonaux classiques d'Hermite, de Laguerre, de Tchebytchev, de Legendre et de Bessel, comme solutions de problèmes de Sturm-Liouville particuliers.

Toutefois, vu l'importance des fonctions de Legendre et de Bessel, leur étude sera un peu plus détaillée.

3.0.12 Polynômes d'Hermite

En posant $p(x) = w(x) = \exp(-x^2)$, $q(x) = 0$, $\lambda = 2n$, l'équation de Sturm-Liouville devient :

$[\exp(-x^2)y']' + 2n\ \exp(-x^2)y = \exp(-x^2)[y" - 2xy' + 2ny] = 0$

$\Rightarrow \boxed{y" - 2xy' + 2ny = 0}$, où $\quad n = 0, 1, 2, 3, ...$

Cette équation, dite équation d'Hermite, a pour fonctions propres les polynômes d'Hermite :

$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2)\frac{d^n}{dx^n}\exp(-x^2)$, pour $x \in \mathbb{R}$

D'aprés le théorème 1, ces polynômes sont orthogonaux sur $\mathbb{R}$ par rapport à la fonction densité $\exp(-x^2)$.

Donc :(car $p(-\infty) = p(+\infty) = 0$) , $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)\exp(-x^2)dx = 0$, pour $m \neq n$.

et on montre que :

$$\|H_n\|^2 = 2^n n!\sqrt{\pi}.$$

Proposition

Les polynômes d'Hermite vérifient les formules de récurrence :

(i) $H_n'(x) = 2n\ H_{n-1}(x)$.

(ii) $H_{n+1}(x) = 2x\ H_n(x) - 2n\ H_{n-1}(x)$.

Preuve : Considérons la fonction $g(t) = \exp(2tx - t^2)$ dépendant du paramètre réel x.

$g(t)$ est dite fonction génératrice des polynômes d'Hermite ,c'est à dire

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}t^n.$$

En effet : $g(t) = \exp(x^2)\exp(-(t-x)^2)$.

$\frac{d^n}{dt^n}g(t) = \exp(x^2)\frac{d^n}{dt^n}[\exp(-(t-x)^2)] = \exp(x^2)(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}(\exp(-(t-x)^2))$;

donc pour $t = 0$:

$$[g^{(n)}(t)]_{t=0} = (-1)^n\exp(x^2)\frac{d^n}{dx^n}(\exp(-x^2)) = H_n(x).$$

d'où $$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n$$

Montrons (i) : $$\frac{d}{dx}g(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n'(x)}{n!}t^n.$$

Or $\frac{d}{dx}g(t) = \frac{d}{dx}\exp(2tx - t^2) = 2t\ g(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2H_n(x)}{n!}t^{n+1}$.

d'où

$$H_0' + H_1't + H_2'\frac{t^2}{2!} + H_3'\frac{t^3}{3!} + H_4'\frac{t^4}{4!} + ... = 2H_0t + 2\frac{2}{2!}H_1t^2 + 2\frac{3}{3!}H_2t^3 + ...$$

$$\left.\begin{array}{r}H_0' = 0\\ H_1' = 2.1H_0\\ H_2' = 2.2H_1\\ H_3' = 2.3!\frac{H_2}{2!} = 2.3H_2\\ H_4' = 4!.2\frac{H_3}{3!} = 2.4H_3\end{array}\right\} \text{donc } H_n' = 2nH_{n-1}.$$

Pour la propriété (ii), on a $H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2)\frac{d^n}{dx^n}\exp(-x^2)$, donc

$$H_n'(x) = \frac{d}{dx}[(-1)^n \exp(x^2)\frac{d^n}{dx^n}\exp(-x^2)] = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x).$$

d'où

$$H_{n+1} = 2xH_n - H_n' = 2xH_n - 2nH_{n-1}.\blacksquare$$

Remarque

H_n est un polynôme de degré n en x.

Utilisons la formule (ii) pour calculer $H_n(x)$ pour $n \leq 4$:

$$\left\{\begin{array}{r}H_0(x) = 1.\\ H_1(x) = 2x.\\ H_2(x) = 2xH_1 - 2H_0 = 4x^2 - 2.\\ H_3(x) = 2xH_2 - 4H_1 = 8x^3 - 12x.\\ H_4(x) = 2xH_3 - 6H_2(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.\end{array}\right.$$

Remarque

Si f est une fonction à variation bornée ainsi que sa dérivée, on peut la développer en une série de polynômes d'Hermite :

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} C_n H_n(x) \quad \text{où} \quad C_n = \frac{1}{\|H_n\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)H_n(x)\exp(-x^2)dx.$$

3.0.13 Polynômes de Laguerre

En posant $p(x) = x\exp(-x)$, $q(x) = 0$, $w(x) = \exp(-x)$, $\lambda = n$.

l'équation de Sturm-Liouville (4.1) devient :

$$(x\exp(-x)y')' + n\exp(-x)y = 0 \Rightarrow \exp(-x)[xy" + (1-x)y' + ny] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{xy" + (1-x)y' + ny = 0}.$$

Cette équation, dite équation de Laguerre, a pour fonctions propres les polynômes de Laguerre :

$$L_n(x) = \tfrac{\exp(x)}{n!}\tfrac{d^n}{dx^n}(x^n\exp(-x)).$$

Moyennant des conditions aux bords, on déduit que ces polynômes sont orthogonaux sur $\mathbb{R}^+$ par rapport à la fonction densité $\exp(-x)$, (l'intervalle d'orthogonalité est choisi de façon à assurer la régularité des fonctions p, q et w, et la convergence de l'intégrale du produit scalaire). On montre que $\| \ L_n\| = 1$.

Le système des polynômes de Laguerre est donc orthonormé.

Proposition

(a) $L_n(x)$ est un polynôme de degré n en x ; $L_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} C_n^k \ x^k$.

(b) $L_n(x)$ vérifie les formules de récurrence :

(i) $x\ L_n'(x) = n[\ L_n(x) - \ L_{n-1}(x)]$.

(ii) $(n+1)\ L_{n+1}(x) = (2n+1-x)\ L_n(x) - n\ L_{n-1}(x)$.

Preuve

(a) D'aprés la formule de Newton-leibnitz, on a :

$$(x^n\exp(-x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^n)^{(n-k)}(\exp(-x))^{(k)}.$$

Pour $k = 1, 2, ..., n$, on a :

$$(\exp(-x))^{(k)} = (-1)^k\exp(-x), \quad \text{et} \qquad (x^n)^{(n-k)} = \tfrac{n!}{k!}x^k.$$

d'où

$$L_n(x) = \tfrac{\exp(x)}{n!}(x^n\exp(-x))^{(n)} = \tfrac{\exp(x)}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \tfrac{n!}{k!} x^k(-1)^k\exp(-x).$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} C_n^k \; x^k.$$

Démontrons d'abord (ii), ce qui nous permettra de faire connaissance avec la fonction génératrice des polynômes de Laguerre. Celle -ci s'écrit : $g(t) = \frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{1-t} = \sum_{n\geq 0} L_n(x)t^n$ (4.1)

$$\frac{d}{dt}g(t) = \frac{g(t)}{1-t} - \frac{xg(t)}{(1-t)^2} = \sum_{n\geq 0} n \; L_n(x)t^{n-1}$$

d'où :

$$(1-t)g(t) - xg(t) = \sum_{n\geq 0}(1-t)^2 n \; L_n(x)t^{n-1},$$

ou autrement :

$$\sum_{n\geq 0} L_n(x)t^n - \sum_{n\geq 0} L_n(x)t^{n+1} - \sum_{n\geq 0} xL_n(x)t^n = \sum_{n\geq 0} nL_n(x)t^{n-1} - \sum_{n\geq 0} 2nL_n(x)t^n + \sum_{n\geq 0} n \; L_n(x)t^{n+1}$$

Ecrivons l'égalité des coefficients de t^n dans les deux membres :

$$L_n(x) - L_{n-1}(x) - xL_n(x) = (n+1)L_{n+1}(x) - 2nL_n(x) + (n+1)L_{n-1}(x).$$

et en simplifiant, on obtient (ii).

Démontrons (i) ,on a

$$\frac{d}{dx}g(t) = \frac{-t}{1-t}g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x)t^n.$$

donc $\quad -t \; g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-t)L'_n(x)t^n$

$$\Rightarrow -\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x)t^{n+1}.$$

En égalisant les coéfficients de t^n et de t^{n+1}, on obtient :

$$\begin{cases} -L_{n-1} = L'_n - L'_{n-1} \\ -L_n = L'_{n+1} - L'_n, \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} L'_{n-1} = L'_n + L_{n-1} \\ L'_{n+1} = L'_n - L_n \end{cases} \qquad (4.2).$$

Dérivons la relation (ii) et reportons-y les formules (4.2).

$$(n+1)L'_{n+1} = (2n+1-x)L'_n - nL'_{n-1} - L_n.$$

$$(n+1)(L'_n - L_n) = (2n+1-x)L'_n - L_n - n(L'_n + L_{n-1}).$$

et aprés simplification :

$$x \; L'_n = n(L_n - L_{n-1})$$

Les 5 premiers polynômes de Laguerre sont :

$$\begin{cases} L_0 = 1. \\ L_1 = 1 - x. \\ L_2 = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}. \\ L_3 = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{6}. \\ L_4 = 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{24}. \end{cases} \blacksquare$$

3.0.14 Polynômes de Tchebychev

On se propose d'établir une relation entre les polynômes algébriques et les polynômes trigonométriques. Nous savons que :

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos\theta)^k (i\sin\theta)^{n-k}.$$

Les termes de puissances paires en $\sin\theta$ sont réels, et comme :

$(\sin\theta)^{2n} = (1 - \cos^2\theta)^n$; il s'ensuit que $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$.

où $T_n(x) = \cos(n \arccos x) = a_0^n + a_1^n x + a_2^n x^2 + ... + a_n^n x^n$ est un polynôme algébrique de degré n à coefficients réels. On l'appelle polynôme de Tchebychev d'ordre n .Pour tout n, T_n est solution de l'équation de Tchebychev :

$$(1 - x^2)y" - xy' + n^2 y = 0.$$

Nous remarquons que cette équation est un cas particulier de l'équation de Sturm-Liouville, où on a posé :

$$p(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad w(x) = (1 - x^2)^{\frac{-1}{2}} \quad , q(x) = 0 \quad , \lambda = n^2.$$

Comme $p(-1) = p(1) = 0$, on déduit l'orthogonalité des polynômes de Tchebychev sur $[-1, 1]$ par rapport à la fonction densité $w(x)$, et on montre que :

$$\|T_0\| = \sqrt{\pi} \ , \quad \|T_n\| = (\tfrac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}} \text{ pour } n = 1, 2, ...$$

Proposition

Tous les polynômes de Tchebychev vérifient la relation de récurence

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Preuve :

Soit $\theta = \arccos x$,

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) = \cos(n\theta + \theta) = \cos n\theta \cos\theta - \sin n\theta \sin\theta \\ = xT_n(x) - \tfrac{1}{2}\cos(n\theta - \theta) + \tfrac{1}{2}\cos(n\theta + \theta) \\ = xT_n(x) - \tfrac{1}{2}T_{n-1}(x) + \tfrac{1}{2}T_{n+1}(x) \end{aligned}$$

d'où le résultat.■

Les 5 premiers polynômes de Tchebychev sont :

$$\begin{cases} T_0 = \cos 0 = 1. \\ T_1 = \cos(\arccos x) = x. \\ T_2 = 2xT_1 - T_0 = 2x^2 - 1. \\ T_3 = 2xT_2 - T_1 = 4x^3 - 3x. \\ T_4 = 2xT_3 - T_2 = 8x^4 - 8x^2 + 1. \end{cases}$$

Remarque

Un rôle équivalent à celui des $T_n(x)$ est attribué aux polynôme de Tchebychev de seconde espèce :

$$U_n(x) = (1 - x^2)^{\frac{-1}{2}} \sin[(n+1)\arccos x].$$

lesquels vérifient la même équation et aussi la relation de récurrence. On a

$U_0 = 1,\ U_1 = 2x,\ U_2 = 4x^2 - 1,\ U_3 = 8x^3 - 4x$, etc...

Remarque

Tchebychev établit ainsi une relation biunivoque entre les polynômes algébriques $p_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ pour $-1 \leq x \leq 1$, et les polynomes trigonométriques $Q_n(\theta) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} b_k \cos k\theta$, pour $0 \leq \theta \leq \pi$, au moyen de la substitution $x = \cos\theta$ ou $\theta = \arccos x$.

3.0.15 Equation et fonctions de Bessel

Définition On appelle équation de Bessel ,l'équation du second ordre :

$x^2y" + xy' + (x^2 - v^2)y = 0.$ (4.3), où $\nu \in \mathbb{R}$.

Cherchons la solution de cette équation sous la forme d'une série presque entière : $y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k \; x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \; x^{k+r}.$ (4.4) où r est choisi de telle sorte que $c_k = 0$ pour $k<0$, et $c_0 \neq 0$; en reportant (4.4) dans (4.3) l'équation de Bessel devient : $\sum_{k=0}^{\infty}[(k+r)^2 - v^2]c_k x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r+2} = 0.$

En écrivant que les coéfficients de x^r, x^{r+1} et x^{r+k} $(k \geq 2)$ sont nuls, on obtient les relations :

(3a) $(r^2 - v^2)c_0 = 0.$

(3b) $[(r+1)^2 - v^2]c_1 = 0.$

(3c) $[(r+k)^2 - v^2]c_k + c_{k-2} = 0.$

La relation (3c) est une relation de récurrence entre c_k et c_{k-2} qui s'écrit :

$c_k = \frac{-c_{k-2}}{(r+k)^2 - v^2}.$ (4.5)

Pour avoir $c_0 \neq 0$, on doit poser $r^2 - v^2 = 0$, équation indicielle de l' équation (4.3) et qui a pour racine $r_1 = v$ et $r_2 = -v$. Cherchons une solution relative à la racine $r = r_1$.

D'aprés (3b), on a $c_1 = 0$ et au vu de (4.5), $c_3 = c_5 = ... = c_{2p+1} = 0$, pour tout p entier.

D'autre part,d'aprés (4.5), on a

$$c_2 = \frac{-c_0}{2^2(1+v)} \; , \; c_4 = \frac{(-1)c_2}{2^2.2(2+v)} = \frac{(-1)^2 c_0}{2^4.2(1+v)(2+v)}.$$

En continuant le processus, on obtient tous les coefficients d'indice pair :

$$c_{2p} = \frac{(-1)^p c_0}{2^{2p}.p!(1+v)(2+v)...(p+v)} \qquad (4.6)$$

Avant de passer à la solution générale de l'équation de Bessel, il est habituel de simplifier les coefficients c_k en utilisant la fonction Gamma d'Euler, définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \; t^{x-1} dt.$ (4.7)

On se contente de $\Gamma(x)$ pour x strictement positif et, particulièrement, de la propriété :

$x \; \Gamma(x) = \Gamma(x+1).$

En effet :

En intégrant par parties dans (4.7), on obtient :

$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}\ t^x dt = [-e^{-t}t^x]_{t=0}^{t=\infty} + x\int_0^\infty e^{-t}\ t^{x-1}dt = x\ \Gamma(x).$

En particulier, lorsque x est un entier positif, on a : $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1.$

$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1,\ \Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2,\ etc...$

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

et c'est ainsi que Gamma est la généralisation de la fonction "factoriel".

Exemple

Cherchons $(-\frac{1}{2})!$. Par définition : $(\frac{-1}{2})! = \Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t}\ t^{\frac{-1}{2}} dt.$

Posons $t = y^2,\ dt = 2y\ dy$ et $t^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{y}$, d'où

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty \exp(-y^2)\tfrac{1}{y}2y\ dy = 2\int_0^\infty \exp(-y^2)dy = \sqrt{\pi}.$$

ainsi

$$(-\tfrac{1}{2})! = \sqrt{\pi}.$$

Pour revenir aux coefficients (4.6), remarquons que :

$\Gamma(v+1).(v+1)(v+2)...(v+p) = \Gamma(v+2).(v+2)...(v+p) = \Gamma(v+p+1).$

On choisit donc :

$$c_0 = \frac{1}{2^v\ \Gamma(v+1)}.$$

On a alors:

$$c_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p+v}\ p!\ \Gamma(v+p+1)}.$$

En insérant ces coefficients dans la série (4.4) et vu que $c_1 = c_3 = c_5 = ... = 0$, on obtient une solution particulière de l'équation de Bessel, notée $J_v(x)$ et appelée fonction de Bessel de première espèce, d'ordre v :

$$J_\nu(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\ \Gamma(v+p+1)}(\tfrac{x}{2})^{2p+v}\ . \tag{4.8}$$

Exemples de fonctions de Bessel

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + ...$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^3(2!)} + \frac{x^5}{2^5 3!2!} - \frac{x^7}{2^7 3!4!} + ...$$

$$J_{1/2}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\Gamma(p+3/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1/2}$$

on a :

$$\Gamma(p+1+\tfrac{1}{2}) = (p+\tfrac{1}{2})\Gamma(p+\tfrac{1}{2}) = (p+\tfrac{1}{2})\Gamma(p+\tfrac{1}{2}-1)\Gamma(p+\tfrac{1}{2}-1)$$
$$= ... = \frac{2p+1}{2}\frac{2p-1}{2}...\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$
$$= \frac{1.3.5...(2p-1)(2p+1)}{2^{p+1}}\sqrt{\pi}.$$

D'autre part :

$$p! = 1.2.3...p = \frac{2.4.6...(2p)}{2^p}.$$

D'où :

$$p!\ \Gamma(p+\tfrac{3}{2}) = \frac{1.2.3...(2p)(2p+1)}{2^{2p+1}}\sqrt{\pi} = \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}}\sqrt{\pi}.$$

En portant cette formule dans $J_{\frac{1}{2}}$,on trouve :

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+\frac{1}{2}}}{(2p+1)!}\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{2p+1}.$$

ou

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

De la même manière, on montre que :

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

Théorème

(a) si v n'est pas un nombre entier, la solution générale de l'équation de Bessel est : $y(x) = AJ_v(x) + BJ_{-v}(x)$.

(b) si $v = n$ est un entier, alors $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ et par conséquent, $AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$ n'est pas une solution générale de l'équation de Bessel.

Preuve : (a) puisque l'équation de Bessel dépend de v^2, $J_v(x)$ et $J_{-v}(x)$ sont toutes deux des solutions particulières. Montrons qu'elles sont linéairemement indépendantes. En effet :$\lim_{x\to 0} J_v(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} J_{-v}(x) = +\infty$.

(b) Pour x réel négatif, on définit $\Gamma(x)$ à partir de la relation : $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$.

donc : $\Gamma(0)=\infty$.

Si $-1 \prec x \prec 0,\ 0 \prec x+1 \prec 1$, alors $\Gamma(x)$ est défini par (4.6).

Si $-2 \prec x \prec -1\ ,\ 0 \prec x+2 \prec 1$, alors

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}=\frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)}.$$

Si $-K-1 \prec x \prec -K$: alors $\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+K+1)}{x(x+1)...(x+K)}$, et $\Gamma(x+K+1)$ est défini par (4.7).

Donc $\Gamma(-n)=\infty$ pour tout entier naturel n, et $\frac{1}{\Gamma(-n)}=0$.

$J_{-n}(x)=\sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\Gamma(p+1-n)}(\frac{x}{2})^{2p-n}=\sum\limits_{p=n}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\Gamma(p+1-n)}(\frac{x}{2})^{2p-n}$. On pose $p=n+k$, alors

$J_{-n}(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{(n+k)!\ \Gamma(k+1)}(\frac{x}{2})^{2k+n}=(-1)^n J_n(x)$.

Pour trouver une solution générale de l'équation de Bessel, lorsque v est entier, on introduit la fonction de Bessel de seconde espèce $N_v(x)$, dite fonction de Newmann définie par : $\begin{cases} N_v(x)=\frac{J_v(x)\cos v\pi - J_{-v}(x)}{\sin v\pi}. \\ N_n(x)=\lim_{v\to n} N_v(x). \end{cases}$

La solution générale est donc

$$y(x)=AJ_v(x)+BN_v(x).\blacksquare$$

Signalons que les solutions de l'équation de Bessel, à valeurs complexes, sont d'une grande utilité pratique. Les solutions les plus utilisées sont :

$$\begin{cases} H_v^{(1)}(x)=J_v(x)+i\ N_v(x). \\ H_v^{(2)}(x)=J_v(x)-i\ N_v(x). \end{cases}$$

et s'appellent les fonctions de Bessel de troisième espèce, ou les fonctions de Hankel de première et de seconde espèce, d'ordre v . Toutes les fonctions de Bessel sont tabulées.

Orthogonalité des fonctions de Bessel

On sait que, pour tout s réel, $J_n(s)$ existe et vérifie l'équation de Bessel. En effet, si R est le rayon de convergence de la série :

$$J_v(s)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\Gamma(v+p+1)}(\tfrac{s}{2})^{2p+v}=s^v\sum_{p=0}^{\infty}C_p\ s^{2p}.$$

On a

$$R=\lim_{p\to\infty}\left|\frac{C_p}{C_{p+1}}\right|=\lim_{p\to\infty}\left|\frac{(-1)^p 2^{2p+2+v}(p+1)!\Gamma(v+p+2)}{p!\Gamma(v+p+1)2^{2p+v}(-1)^{p+1}}\right|.$$

$R = \lim_{p\to\infty} |(p+1)(v+p+1)2^2| = \infty.$

Soit l'équation de Bessel :

$$s^2 J"_n(s) + sJ'(s) + (s^2 - n^2)J_n(s) = 0.$$

Posons $s = \lambda x$, où λ est une constante, alors :

$$\frac{d}{dx} J_n(s) = \lambda \ J_n'(s) \ \text{ et } \ \frac{d^2}{dx^2} J_n(s) = \lambda^2 J_n''(s) \ .$$

Roportons les valeurs de s et de $J_n'(s)$ et $J_n''(s)$ dans l'équation précédente :

$$x_n^2 \ J_n''(\lambda x) + x \ J_n'(\lambda x) + (\lambda^2 x^2 - n^2) \ J_n(\lambda x) = 0. \qquad (4.9)$$

En dévisant par x et en écrivant l'équation sous la forme :

$$\frac{d}{dx}[x J_n'(\lambda x)] + (\frac{-n^2}{x} + \lambda^2 x) J_n(\lambda x) = 0, \qquad (4.10)$$

on voit que pour tout n fixé, on a affaire à l'équation de Sturm-Liouville avec

$$p(x) = w(x) = x \ \text{ et } q(x) = \frac{-n^2}{x}.$$

Puisque $p(x) = 0$ pour $x = 0$, il résulte du théorème que les solutions de (4.9) forment un ensemble orthogonal par rapport à la fonction densité $w(x) = x$, sur tout intervalle $0 \leq x \leq R$ vérifiant : $J_n(\lambda R) = 0$.

Il est prouvé que pour tout n fixé, $J_n(x)$ possède une infinité dénombrable de zéros α_{nm} , qui son tabulés. Exemple, pour $J_0(x)$, les racines positives sont : $\alpha_{01} = 2,4048$, $\alpha_{02} = 5,5201$, $\alpha_{03} = 8,6573$, $\alpha_{04} = 11,7915$, etc.

Donc, l'orthogonalité des fonctions de Bessel est obtenue pour tous les λ vérifiant

$$\lambda R = \alpha_{nm} \ \text{ où } \ \lambda = \lambda_{nm} = \frac{\alpha_{nm}}{R} \ \ (m = 1, 2, ...).$$

En conclusion : Pour tout n fixé, $n = 0, 1, 2, ...$, les fonctions de Bessel $J_n(\lambda_{n_1} x)$, $J_n(\lambda_{n_2} x)$, $J_n(\lambda_{n_3}$ l'égalité : $\int_0^R x J_n(\lambda_{n_m} x) J_n(\lambda_{n_k} x) dx = 0$ pour $k \neq m$.

Nous arrêtons ici notre discussion sur les fonctions de Bessel. Rappelons simplement que les fonctions de Bessel et celles qui s'y rattachent, notamment les fonctions de Newmann, de Hankel, de Kelvin, etc...sont dites fonctions cylindriques, vu leur utilisation plus fréquente dans les domaines cylindriques.

Exemple d'application

On sait que l'équation de vibration d'une plaque homogène parfaitement flexible sans épaisseur est :

$$U_{tt} = C^2 \Delta U = C^2(U_{xx} + U_{yy}).$$

Prenons une membrane circulaire de rayon R et passons aux coordonnées polaires : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, l'équation devient :

$$U_{tt} = C^2(U_{rr} + \tfrac{1}{r}U_r + \tfrac{1}{r^2}U_{\theta\theta}). \tag{4.11}$$

Si nous considérons les vibrations symétriques par rapport au centre, u ne dépend pas de θ et l'équation s'écrit :

$$U_{tt} = c^2(U_{rr} + \tfrac{1}{r}U_r). \tag{4.12}$$

$$U(R,t) = 0. \tag{4.13}$$

$$U(r,0) = f(r). \tag{4.14}$$

$$U_t(r,0) = g(r). \tag{4.15}$$

La condition (4.13) signifie que le bord de la membrane est fixé et les conditions (4.14) et (4.15) que l'écart initial d'un point de la membrane situé à une distance r du centre, est $f(r)$, et sa vitesse initiale est $g(r)$.

Utilisons la méthode de séparation des variables :

$$U(r,t) = F(r).G(t),$$

et en remplaçant dans (4.12) ,on obtient :

$$\tfrac{G"}{C^2G} = \tfrac{1}{F}(F" + \tfrac{F'}{r}) = -K^2$$

où K est une constante. On a pris $-K^2$ pour éviter les solutions triviales $U(r,t) = 0$. On obtient donc 2 équations différentielles du second ordre

$$G" + C^2K^2G = 0. \tag{4.16}$$

$$F" + \tfrac{1}{r}F' + K^2F = 0. \tag{4.17}$$

Si dans (4.17), nous introduisons une nouvelle variable $s = K\ r$, on a :
$F' = K\frac{dF}{ds}$, et $F'' = k^2\frac{d^2F}{Ds^2}$.

d'où l'équation (4.17) devient : $\frac{d^2F}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dF}{ds} + F = 0$ (4.18)

Donc (4.18) est l'équation de Bessel avec $v = 0$ .Sa solution générale est:

$F = C_1 J_0(s) + C_2 N_0(s)$.

Les vibrations sont limitées alors que $N_0(s)$ devient infinie lorsque s tend vers zéro, c'est pour cela qu'on pose $C_2 = 0$. La solution de (4.17) est : $F(r) = C_1 J_0(kr)$.

d'aprés (4.13), $F(R) = C_1 J_0(kR) = 0$, ce qui entraine que kR est l'une des racines positives α_1, α_2...de J_0.

$KR = \alpha_m$ ou $K = K_m = \frac{\alpha_m}{R}$ pour $m = 1, 2...$

La solution générale de (4.16) correspond à $K = K_m$ est :

$G_m(t) = a_m \cos ck_m t + b_m \sin ck_m t$

Donc les solutions du problème (4.12) et (4.13) sont :

$U_m(r,t) = (a_m \cos CK_m t + b_m \sin CK_m t) J_0(K_m r)$

Pour vérifier les conditions (4.14) et (4.15), on pose :

$$U(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} U_m(r,t) \tag{4.19}$$

$$U(r,0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(\tfrac{\alpha_m}{R} r) = f(r).$$

Ce qui signifie que (4.19) est la solution de (4.12) vérifiant(4.14) si $f(r)$ admet un développement de Bessel-Fourier en terme de $J_0(\alpha_m \frac{r}{R})$, ce qui est vrai si f est différentiable , et on a :

$$a_m = \frac{1}{\|J_0\|^2} \int_0^R r f(r)\ J_0(\alpha_m \tfrac{r}{R}) dr = \frac{2}{R^2 J_1(\alpha_m)} \int_0^R r f(r) J_0(\alpha_m \tfrac{r}{R}) dr.$$

On détermine de même les coefficients b_m à l'aide de $g(r)$.

3.0.16 Equation et fonctions de Legendre

Définition On appelle équation de Legendre, l'équation du second ordre :

$$(1 - x^2)\ y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0. \tag{4.20}$$

Il est évident que cette équation est un cas particulier de l'équation de Sturm-Liouville, avec $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = 0$ et $w(x) = 1$. Comme $p(1) = p(-1) = 0$, il résulte du théorème 1 que les solutions sont orthogonales sur l'intervalle $[-1, 1]$. La valeur $n(n+1)$

du paramètre est la seule qui permet d'avoir des solutions bornées de l'équation comme on peut le voir en laissant λ et en cherchant la solution sous la forme d'une série entière. Les fonctions propres de cette équation correspondant aux valeurs propres $n(n+1)$ sont appelées polynômes de Legendre et on va les déterminer .

En divisant l'équation (4.20) par $1-x^2$, celle-ci prend la forme

$$y" + a(x)\ y' + b(x)\ y = 0.$$

où $a(x)$ et $b(x)$ sont analytiques en $x=0$. L'équation admet donc une solution sous la forme de la série entière .

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m. \qquad (4.21)$$

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} mC_m\ x^{m-1} \qquad \text{et} \qquad y" = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)C_m\ x^{m-2},$$

et en reportant $y,\ y',\ y"$ dans l'équation (4.20), on a :

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)C_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)C_m x^m - \sum_{m=1}^{\infty} 2mC_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} n(n+1)C_m x^m = 0.$$

En annulant les coefficients de x^m, $m = 1, 2, ...$,on obtient :

$n(n+1)C_0 + 2C_2 = 0$ coefficient de x^0, (3.a)

$6C_3 - [2 - n(n+1)]C_1 - 0$ coefficient de x , (3.b)

$[n(n+1) - 2m - m(m-1)C_m + (m+1)(m+2)C_{m+2} = 0$,(de x^m) , (3.c)

L'éxpression (3.c) est une formule de récurrence qui s'écrit :

$$C_{m+2} = \tfrac{(m-n)(m+n+1)}{(m+1)(m+2)} C_m. \qquad (4.22)$$

Car dans (3.c), $n(n+1) - 2m - m(m-1) = (n-m)(m+n+1)$; donc tous les coefficients d'indice pair s'expriment en fonction de C_0 et tous les coéfficients d'indice impair en fonction de C_1.Donc

$$y(x) = C_0 y_1(x) + C_1 y_2(x) \qquad (4.23)$$

où y_1 est une fonction paire et y_2 est une fonction impaire. Il est évident que ces fonctions sont linéairements indépendantes (Le rapport $\frac{y_1}{y_2}$ ne peut ôtre constant) et la solution (4.23) est la solution générale de l'équation de Legendre, (pour $|x| <1$). D'après (4.22) , lorsque $m = n$, $C_{m+2} =,C_{m+4} = ... =,C_{m+2p} = 0$ pour tout p. Donc si n est pair, y_1 se réduit à un polynôme de degré n en x et si n est impair, y_2 se réduit à un polynôme de degré n en x .

On appelle polynôme de Legendre d'ordre n pair et on note $P_n(x)$, le polynôme $y_1(x)$ qui prend la valeur 1 lorsque $x = 1$. $P_0(x)$ est un polynôme de degré 0 tel que $P_0(1) = 1$,

donc $P_0(x) = 1$: $P_2(x) = C_0 + C_2x^2 = C_0 - 3C_0x^2$,

d'aprés (4.22). $P_2(1) = -2C_0 = 1 \Rightarrow C_0 = -\frac{1}{2}$, d'où : $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$.

En poursuivant le processus : $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$, etc...

De même, les polynômes de Legendre d'ordre n impair sont les polynômes $y_2(x)$ qui prennent la valeur 1 lorsque $x = 1$.

$P_1(x) = C_1x$ et $P_1(1) = 1$ nous donnent $P_1(x) = x$.

$P_3(x) = C_1x + C_3x^3 = C_1x - \frac{5}{3}C_1x^3$, d'aprés (4.22),

$P_3(1) = 1 \Rightarrow C_1 = -\frac{3}{2}$; d'où : $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$.

De la même manière, on obtient : $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$.

Sous une forme plus générale, $P_n(x)$ est donné par la formule de Rodrigue :

$$\boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n}.$$

En effet : posant : $U(x) = x^2 - 1$, $a_n = \frac{1}{2^n n!}$ et montrons que le polynôme $P_n(x) = a_nU^{(n)}(x)$ vérifie l'équation (4.20) et la condition $P_n(1) = 1$.

$P_n(x) = a_n[(x-1)^n(x+1)^n]^{(n)} = \frac{1}{n!2^n}[n!(x+1)^n + (x-1)g(x)]$.

d'aprés la formule de dérivation de Newton Leibnitz, donc $P_n(1) = 1$.

D'autre part ,

$$U'(x) = 2nx(x^2 - 1)^{n-1} = \frac{2nxU(x)}{x^2-1},$$

d'où :

$$(x^2 - 1)\ U'(x) - 2n\ x\ U(x) = 0.$$

Dérivons cette égalité $(n + 1)$ fois, on obtient :

$(x^2 - 1)U^{(n+2)} + C_{n+1}^1 2xU^{(n+1)} + C_{n+1}^2 2U^{(n)} - 2nxU^{(n+1)} - C_{n+1}^1 2nU^{(n)} = 0.$

Aprés simplification, on trouve

$$(1-x^2)U^{(n+2)} - 2xU^{(n+1)} + n(n+1)U^{(n)} = 0.$$

En multipliant cette dernière égalité par a_n, on obtient :

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Exemple d'application Soit $U(R, \theta, \alpha) = f(\alpha)$ la distribution du potentiel électrique U sur une sphère S de rayon R, centrée à l'origine ; r , θ et α sont les coordonnées sphériques définies par : $x = r\cos\theta\sin\alpha$; $y = r\sin\theta\sin\alpha$; $z = r\cos\alpha$.

Cherchons le potentiel U en tout point de l'espace, si aucune autre charge n'intervient. Evidement U est solution de l'équation de Laplace $\Delta U = 0$. Le Laplacien en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 U_r) + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\sin\alpha\ U_\alpha) + \frac{1}{\sin^2\alpha}U_{\theta\theta}]$$

Comme sur S, U ne dépend pas de θ, il en sera de même en tout point de l'espace et l'équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 U_r) + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\sin\alpha U_\alpha) = 0 \qquad (4.24)$$

avec les conditions :

$$U(R, \theta, \alpha) = f(\alpha). \qquad (4.25)$$

$$\lim_{r\to\infty} U(r, \alpha) = 0 \qquad (4.26)$$

Utilisons la méthode de séparation des variables : $U(r, \alpha) = G(r)H(\alpha)$, d'où l'équation devient : $\frac{1}{G}(r^2G')' = \frac{-1}{H\sin\alpha}(H'\sin\alpha)' = K = Const$ (4.27)

et $r^2G'' + 2r\ G' - KG = 0$ (4.28)

L'équation (4.28) est l'équation d'Euler-Cauchy, ses solutions sont donc de la forme $G(r) = r^t$. En reportant cette valeur dans l'équation (4.28) et en posant $K = n(n+1)$, celle-ci devient :

$t(t-1) + 2t - n(n+1) = 0$; et admet pour racine $t = n$ et $t = -n-1$. Donc

$$G(r) = G_n(r) = r^n \quad \text{ou } G_n(r) = \frac{1}{r^{n+1}} \qquad (4.29)$$

Dans l'équation (4.27), posons $w = \cos\alpha$, d'où $\sin^2\alpha = 1 - w^2$, et $\frac{d}{d\alpha} = \frac{d}{dw}\frac{dw}{d\alpha} = -\sin\alpha\frac{d}{dw}$ et (4.27) s'écrit

$$\frac{d}{dw}(1-w^2)\frac{dH}{dw}+n(n+1)w=0$$

ou $$(1-w^2)\frac{d^2H}{dw^2}-2w\frac{dH}{dw}+n(n+1)H=0 \qquad (4.30)$$

L'équation(4.30) est l'équation de Legendre et pour tout entier $n=0,1,2,...$, elle admet pour solutions les polynômes de Legendre :

$$H=P_n(w)=P_n(\cos\alpha)$$

On obtient donc deux suites de solutions de l'équation (4.24) :

$$U_n(r,\alpha)=A_n r^n P_n(\cos\alpha) \quad \text{et} \quad U_n^*(r,\alpha)=\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\alpha) \qquad (4.31)$$

et selon les arguments usuels, les solutions cherchées seront les séries :

$$U(r,\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\alpha) \quad \text{et} \quad U^*(r,\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\alpha) \qquad (4.32)$$

On montre que si f et f' sont continues par morceaux pour $0\leq\alpha\leq\pi$, les séries(4.32) convergent et sont solutions du problème (4.24)-(4.25)-(4.26).

Pour trouver les constantes A_n et B_n ,on utilise (4.25) :

$$f(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n R^n P_n(\cos\alpha) \quad \text{d'où} \quad A_n R^n=\frac{1}{\|L_n\|^2}\int_{-1}^{1}\Psi(w)P_n(w)dw \qquad (4.33)$$

où $\Psi(w)=f(\cos\alpha)$; (4.33) est le développement de f en série de polynômes de Legendre. La solution U définit le potentiel à l'intérieur de la sphère et U^* donnée par (4.32), définit le potentiel à l'éxterieur de la sphère .

En posant $f(\alpha)=U^*(R,\alpha)$,on trouve

$$B_n=\frac{R^{n+1}}{\|L_n\|^2}\int_0^{\pi}f(\alpha)P_n(\cos\alpha)\sin\alpha\, d\alpha.$$

Chapitre 4

Approches équivalentes au P.S.L

On vient de voir que le problème de Sturm-Liouville est une vision de synthèse des multiples bases orthogonales dans $L_2([a,b])$ et les analogies entre les polynômes orthogonaux classiques trouvent une justification et une explication simples. D'autres approches des équations et fonctions spéciales mènent au même résultat. Nous allons en citer quelques unes.

4.0.17 Equation et fonction Hypergéométrique

L'équation différentielle du second ordre, linéaire, appellée de Gauss, s'écrit sous la forme

$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]\, y' - aby = 0 \qquad (5.1)$$

où a, b, c sont des constantes.

Pour la résolution de cette équation en chacun des points singuliers $(0, 1, \infty)$, on doit appliquer la méthode de Frobenius. La solution de (5.1) est de la forme : $y(x) = x^0 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

où les c_k peuvent être déterminés en remplaçant $y(x)$ dans l'équation (5.1), cela nous donne :

$$(x-x^2)\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}+[c-(a+b+1)x]\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}-ab\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0$$

on tire le coéfficient de x^k,$k\geq 1$:

$$-k(k-1)c_k+k(k+1)c_{k+1}-(a+b+1)kc_k+c(k+1)c_{k+1}-abc_k=0$$

et de là la formule de réccurence pour déterminer les c_k :

$c_{k+1}=c_k\frac{k(k-1)+k(a+b+1)+ab}{(k+1)(c+k)}=c_k\frac{(a+k)(b+k)}{(k+1)(c+k)}$

Si on choisit $c_0=1$,on trouve :

$c_1=\frac{ab}{c}$

$c_2=\frac{ab}{c}\frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)}$

$c_3=\frac{ab}{c}\frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)}\frac{(a+2)(b+2)}{3(c+2)}$

et alors

$c_k=\frac{1}{k!}\frac{a(a+1)...(a+k-1)b(b+1)...(b+k-1)}{c(c+1)...(c+k-1)}$

On pose

$$F(a,b,c,x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{a(a+1)...(a+k-1)b(b+1)...(b+k-1)}{c(c+1)...(c+k-1)}x^k$$

et on l'appelle fonction hypergéométrique.

Définition

Soit le symbole de Pochhammer $(\alpha)_n$ défini par :

$(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)},\quad n\geq 0$

$(\alpha)_0=1.$

D'où : $\boxed{F(a,b,c,x)=\sum_{r\geq 0}\frac{(a)_r(b)_r}{(c)_r}\frac{x^r}{r!}}$ solution de l'équation hypergéométrique.

Par la suite on définit la fonction hypergéométrique générale ${}_mF_n(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m;\beta_1,\beta_2,...,\beta_n;x)$ par :

$${}_mF_n(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m;\beta_1,\beta_2,...,\beta_n;x)=\sum_{r\geq 0}\frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r...(\alpha_m)_r}{(\beta_1)_r(\beta_2)_r...(\beta_n)_r}\frac{x^r}{r!}\tag{5.2}$$

La notation : ${}_mF_n\left[\begin{matrix}\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m;\\ \beta_1,\beta_2,...,\beta_n;\end{matrix}\; x\right]$ est souvent utilisée.

On montre alors que les équations et les fonctions spéciales s'expriment à l'aide de l'équation et de la fonction hypergéométrique, ce qui rapproche cette théorie du P.S.L. On rappelle notamment :

Fonctions de Legendre

(i) $P_n(x) =_2 F_1(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2})$.

Fonctions associées de Legendre

(ii) $P_n^m(x) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m m!} \ _2F_1(n, m+n+1; m+1; \frac{1-x}{2})$.

Fonctions de Bessel

(iii) $J_n(x) = \frac{\exp(-ix)}{n!} \ _1F_1(n+\frac{1}{2}; 2n+1; 2ix)$

Fonctions de Hermite

(iv) $H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \ _1F_1(-n; \frac{1}{2}; x^2)$

Fonction associeés de Hermite

(v) $H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{2(2n+1)!}{n!} x \ _1F_1(-n; \frac{3}{2}; x^2)$

Fonction de Laguerre

(vi) $L_n(x) =_1 F_1(-n; 1; x)$

Fonction associeés de Laguerre

(vii) $L_n^k(x) = \frac{\Gamma(n+k+1)}{n!\Gamma(k+1)} \ _1F_1(-n; k+1; x)$

Fonction de Chebyshev de première espèce

(viii) $T_n(x) =_2 F_1(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2})$

Fonction de Chebyshev de second espèce

(ix) $U_n(x) = \sqrt{(1-x^2)n} \ _2F_1(-n+1, n+1; \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2})$

et ainsi de suite, pour les autres systèmes orthogonaux classiques, de Jacobi, de Gegenbauer, de Hankel, etc...

4.0.18 L'orthogonalisation du système $(1, x, x^2, x^3, ...)$

En munissant notre espace du produit scalaire $(f,g)=\int\limits_a^b f(x)g(x)w(x)dx$ et en utilisant l'orthogonalisation de Gramm-Schmidt de la base $\{1,x,x^2;...\}$, on aboutit à un résultat équivalent à PSL, dans le sens d'une synthèse des polynômes orthogonaux. En effet,

Si $b=-a=1$, et $w(x)=1$, on obtient les polynômes de **Legendre**.

Si $b=-a=1$, et $w(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, on obtient les polynômes de **Tchebychev**.

Si $a=-\infty, b=\infty$, et $w(x)=\exp(-x^2)$, on obtient les polynômes d'**Hermite**.

Si $a=0, b=\infty$, et $w(x)=\exp(-x^2)$, on obtient les polynômes de **Laguerre**.

et ainsi de suite.

4.0.19 Les fonctions génératrices

La série entière convergente $S(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k(x)t^k$,

est dite fonction génératrice des coefficients p_k, (dépendant du paramètre x). On appelle, de même, fonction génératrice, ou exponentiellement génératrice, la fonction $S^*(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{p_k(x)}{k!}t^k$.

A tout type de polynômes orthogonaux, correspond une fonction génératrice. Ainsi :

Legendre : $S(t)=(1-2tx+t^2)^{\frac{-1}{2.}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$, $(|t|\prec 1)$

Tchebychev I : $S(t)=\frac{1-\ t^2}{1-2tx+t^2}=T_0(x)+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(x)\ t^n$, $(|t|\prec 1)$

Tchebychev II : $S(t)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2xt+t^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}U_{n+1}(x)\ t^n$.

Laguerre : $S(t)=\frac{\exp(\frac{-t\ x}{(1-t)})}{1-t}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n$.

Hermite : $S^*(t)=\exp(-t^2+2tx)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n$.

Legendre : $S(t) = (1 - 2tx + t^2)^{\frac{-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$, $(|t| \prec 1)$

Tchebychev I : $S(t) = \frac{1-\ t^2}{1-2tx+t^2} = T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)\ t^n$, $(|t| \prec 1)$

Tchebychev II : $S(t) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}(x)\ t^n$.

Laguerre : $S(t) = \frac{\exp(\frac{-t\ x}{(1-t)})}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$.

Hermite : $S^*(t) = \exp(-t^2 + 2tx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$.

Bessel : $S(t) = \exp[\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$.

Conclusion 4.1

En poursuivant le but de regrouper les polynômes orthogonaux classiques grace à la théorie de Sturm-Liouville, but que nous espérons avoir atteint, du moins en partie, nous terminons avec un goût d'inachevé car, nous n'avons abordé que cinq bases de fonctions spéciales sur la multitude existante, et nous avons, à peine esquissé les fonctions génératrices et la théorie hypergéométrique qui sont deux thèmes très importants et qui connaissent un regain d'intérêt ces dernières années.

Bibliographie

[1] J.Basse, "Cours de mathématiques", Ed Masson&Cie, Paris 1971.

[2] W.W.Bell, "Special Functions for scientists and engineers", D Van Nostrand Cie LTD, London 1968.

[3] R.Bronson, "Equations différentielles, méthodes et applications", Mc Graw Hill, 2nd edition 1994.

[4] A.Zelt, "Sturm-Liouville theory, mathematical surveys and monographs", A.M.S, vol 121, 2005.