

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



7/50-228

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP et Analyse numérique

Par : FARHI Sassia

Intitulé



Approximation numérique d'un problème inverse  
d'identification de source  
par la méthode de projection de Krylov

Dirigé par : Mr. Bousetila Nadjib

Devant le jury

Président	Dr. Benrabah Abderafik	MCA	Univ-Guelma
Rapporteur	Dr. Bousetila Nadjib	Prof.	Univ-Guelma
Examineur	Dr. Mehri Allaoua	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2018

## Remerciements

*On remercie 'Dieu 'le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.*

*Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Pr. Boustila najib ,on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.*

*En fin, nous remercions beaucoup tous nos Directeurs administratif, les docteurs et les professeurs du département de Mathématique*

## Dédicace :

*Je dédie ce modeste travail à :*

*A mes beaux-parents Houase et Fatiha 'la pitié de Dieu sur eux '*

*A celui que j'aime beaucoup et qui m'a soutenue tout au long de ce projet :*

*A mes beaux-frères et*

*sœurs: Toufik, Mourad, Salwa, Samir, Samya, Amina, Wafa,*

*et Imen et leurs conjoints et leurs femmes et leurs enfants. Je ne pourrais jamais exprimer le respect que j'ai pour vous. Vos prières, vos encouragements et votre soutien m'ont toujours été d'un grand secours. Puisse Dieu, le tout puissant vous préserver du mal, vous combler de santé, de bonheur et vous procurer une longue vie.*

*A mes beaux-amies*

*Amine, Amina, Zieneb, Amna, Faten, Imen, Bouthaina et Roumaysa*

*Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible, je vous dis merci*



## Table des matières

Introduction	1
Terminologie des problèmes inverses	1
Problèmes bien posés	4
Chapitre 1. Exemples de problèmes inverses et mal posés	6
Chapitre 2. Fonctions de matrices et méthode de projection de Krylov	12
1. Méthodes de projection de Krylov	13
2. Approximation de $f(A)v$ par la méthode des sous espaces de Krylov	17
Chapitre 3. Etude d'un problème inverse d'identification de sources du type parabolique	25
1. Position du problème	25
2. Stabilisation et approximation	27

### Terminologie des problèmes inverses

L'étude des phénomènes dans la nature nous permet de calculer des quantités ou **des propriétés physiques d'un modèle donné**. On distingue alors deux types de problèmes : les problèmes directs et les problèmes inverses. De manière schématique, un problème inverse peut être formulé comme étant une relation fonctionnelle (**Input, Système, Output**), où l'objectif d'étude est d'identifier des causes connaissant les effets. D'après J.B. Keller, deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre si la formulation de l'un met l'autre en cause. **La causalité et l'irréversibilité donnent une dichotomie entre les phénomènes physiques, qui peut être quantifiée mathématiquement en deux classes de problèmes : les problèmes bien posés et les problèmes mal posés. En se référant de cette dichotomie, le mot problèmes inverses désigne tous les problèmes qui partagent le caractère mal posé par opposition aux problèmes dits directs.**

La prédiction de l'état futur d'un système physique connaissant son état actuel est l'exemple type de problème direct. On peut envisager divers problèmes inverses :

- Reconstituer l'état passé d'un système connaissant son état actuel si ce système est irréversible.
- Déterminer des paramètres du système connaissant entièrement ou en partie son évolution (Problèmes d'identification de paramètres)

Un problème inverse est une situation dans laquelle **les valeurs de certains paramètres (ou inconnues) d'un modèle doivent être identifiées à partir d'observations (ou mesures) du phénomène**. C'est également en quelque sorte le contraire d'un problème direct : supposons que l'on dispose d'un modèle. Si on se fixe des valeurs pour les paramètres du modèle, on peut alors faire tourner le modèle, en déduire une trajectoire, et l'observer. Il s'agit du problème direct. Le problème inverse consiste à remonter le schéma : connaissant les observations, le but est de retrouver les valeurs des paramètres.

En médecine, on cherche les causes d'une maladie. Pour confirmer la cause, on se base en général sur un diagnostic (bilan d'expériences, questions précises, informations a priori). Mais plusieurs causes peuvent provoquer la même maladie (problème d'unicité). L'unicité s'obtient par un processus d'éliminations successives basées sur une bonne expérience médicale.

L'analyse d'une situation d'échec d'un système éducatif est un cas pratique d'un problème inverse en statistique. L'input est l'élève, le modèle social est l'école (administration, moyens, locaux, espaces de loisir, bibliothèque, enseignants, programme scolaire, emploi du temps, mode d'évaluation, .....). L'output est un élève diplômé. On fait une évaluation du produit final (élève diplômé) sur la base d'un protocole d'évaluation pour mesurer la qualité du produit, et on essaye de déterminer les paramètres qui ont produit certaines observations pour améliorer le produit.

**Problèmes directs.** Si on note par  $\mathbf{P}$  l'espace des paramètres,  $\mathbf{E}$  l'espace des excitations et  $\mathbf{R}$  l'espace des états (réponses), alors le problème direct  $L : \mathbf{P} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$ , consiste à calculer la réponse  $d$  à partir de la donnée des sollicitations  $x$  et des paramètres  $p$ . Les équations de la physique donnent en général la réponse  $d$  comme fonction de  $x$  et  $p$  :  $L(x, p) = d$ , la notation  $L$  symbolise les équations de la physique du problème considéré ; on parle parfois du modèle physique.

**Problèmes inverses.** D'un point de vue "physique" ou "expérimental", on dit qu'on a un problème inverse dans toute situation où l'on souhaite évaluer une certaine grandeur physique  $p$  inaccessible à l'expérience à partir de la mesure d'une autre grandeur  $d$  directement

accessible à l'expérience, connaissant un modèle mathématique du problème direct qui donne explicitement  $d$  à partir de  $p$  (ce que l'on note symboliquement  $d = G(p)$ ).<sup>Réf 1</sup>

### Problèmes directs en EDP.

Etant donné un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , on s'intéresse aux solutions  $u$  :

$\Omega \times [0, \infty[ \ni (x, t) \longrightarrow u(x, t) \in E$  de

$$\begin{cases} u_t + F(t, x, \partial_{x_1}^{\alpha_1} u, \dots, \partial_{x_p}^{\alpha_p} u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ \{B_i\}_{i=1}^q u = g_i, & \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

### Problèmes inverses en EDP

A partir d'une connaissance partielle de la solution  $u$  de l'EDP (mesures internes, mesures frontières, .....), retrouver :

- $f, g_1, \dots, g_q \longrightarrow$  Identification de sources.
- $u_0 \longrightarrow$  Identification de données initiales.
- $F \longrightarrow$  Identification de coefficients.
- $\Omega \longrightarrow$  Identification géométrique.

► Toute problématique directe génère une famille de problèmes inverses.

Les problèmes inverses sont un sujet trop vaste pour que nous puissions en donner un exposé exhaustif dans une séance de demi-heure. C'est aussi un sujet qui a connu un essor considérable ces dernières décennies, parallèlement au développement de techniques numériques et de moyens de calcul permettant leur résolution.

On peut les classer en deux catégories : les problèmes qui visent à déterminer des conditions aux limites ou des sources inconnues, et les problèmes liés à l'estimation de paramètres intrinsèques du système. Le premier type de problèmes apparaît dès que la mesure directe

---

1. Marc Bonnet, Problèmes inverses : Cours de DEA Dynamique des Structures et Couplages (2004).

de la grandeur physique étudiée n'est pas accessible en pratique. Dans la deuxième catégorie de problèmes inverses, l'objectif fixé est de déterminer à partir d'une connaissance partielle de l'état du système, les paramètres décrivant le modèle physique.

### Problèmes bien posés

■ J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's problem in linear PDEs*, New York (1923).

DÉFINITION 0.1. [Hadamard 1923] Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach et  $L : X \rightarrow Y$  un opérateur. Le problème inverse  $Lx = y$  est *bien posé* au sens de Hadamard si

**Existence** : Pour tout  $y \in Y$  il existe  $x \in X$  tel que  $Lx = y$ .

**Unicité** : Pour tout  $y \in Y$ , il y a au plus une solution  $x \in X$ .

**Stabilité** : La solution  $x$  dépend continûment de la donnée  $y$ .

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, alors le problème est dit *mal posé*.

**Le choix des espaces de départ et d'arrivée  $X$  et  $Y$  est bien sûr très important dans cette définition. La stabilité est une condition primordiale. En effet, s'il y a un problème de stabilité, le calcul numérique de la solution peut devenir impossible à cause des erreurs de mesures ou d'arrondis.**

Un modèle physique étant fixé, les données expérimentales dont on dispose sont en général bruitées, et rien ne garantit que de telles données proviennent de ce modèle, même pour un autre jeu de paramètres.

Si une solution existe, il est parfaitement concevable (et nous le verrons sur des exemples) que des paramètres différents conduisent aux mêmes observations.

Le fait que la solution d'un problème inverse puisse ne pas exister n'est pas une difficulté sérieuse. Il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution (procédé classique en mathématique).

La non-unicité est un problème plus sérieux. Si un problème a plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir entre elles. Pour cela, il faut disposer d'informations supplémentaires (une information a priori).

---

Le manque de continuité est sans doute le plus problématique, en particulier en vue d'une résolution approchée ou numérique. Cela veut dire qu'il ne sera pas possible (indépendamment de la méthode numérique) d'approcher de façon satisfaisante la solution du problème inverse, puisque les données disponibles seront bruitées donc proches, mais différentes, des données réelles.

## Exemples de problèmes inverses et mal posés

### Sensibilité des matrices mal conditionnées

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.000001 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.000001 \end{pmatrix}.$$

Les solutions des systèmes  $Ax = b_1$  et  $Ax = b_2$  sont

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Evaluons la taille de l'erreur relative sur la solution du système

$$\|x_2 - x_1\| / \|x_1\| = \sqrt{2}.$$

Evaluons la taille de l'erreur relative sur le second membre

$$\|b_2 - b_1\| / \|b_1\| = \frac{0.000001}{\sqrt{2}} \approx 10^{-6}.$$

**Observation.** Une **erreur infime** sur le **second membre** a eu comme conséquence une **erreur remarquable** sur la **solution calculée**. Le système  $Ax = b$  est sensible aux erreurs d'arrondis. On dit que la matrice  $A$  est mal conditionnée.

$$\text{Cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\| = 4 \times 10^6$$

La matrice est  $A$  est presque singulière.

$\text{Cond}(A) \gg 1 \implies$  la matrice  $A$  est **sensible aux erreurs numériques!!!**

**La différentiation et l'intégration sont deux problèmes inverses l'un de l'autre.** Il est plus habituel de penser à la différentiation comme problème direct, et à l'intégration comme problème inverse. En fait, l'intégration possède de bonnes propriétés mathématiques qui conduisent à la considérer comme le problème direct. Et la différentiation est le « prototype » du problème mal posé.

Considérons l'espace de Hilbert  $H = L_2(0, 1)$ , et l'opérateur intégral  $A$  défini par

$$(Af)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Il est clair que  $A$  est borné ( $\|A\| = \frac{2}{\pi}$ ). Cet opérateur est injectif, par contre son image est le sous espace vectoriel  $R(A) = \{u \in H^1(0, 1) : u(0) = 0\}$ , où  $H^1(0, 1)$  est l'espace de Sobolev.

L'image de  $A$  n'est pas fermée dans  $L_2(0, 1)$  (bien entendu, elle l'est dans  $H^1(0, 1)$ ). En conséquence, l'inverse de  $A$  n'est pas continu sur  $L_2(0, 1)$ , comme le montre l'exemple suivant.

Considérons la suite  $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n^2 x)$ . on a

$$\|f_n\|_H^2 = \frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty,$$

alors que

$$\|f_n'\|_H^2 = n^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right) \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty.$$

$$A^{-1} = \frac{d}{dx} \text{ n'est pas continu.}$$

**Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace.** Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_y u(x, 0) = \varphi_\varepsilon(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (0.1)$$

où  $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon \sin(x/\varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ .

On vérifie aisément que  $u_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^2 \sinh(y/\varepsilon) \sin(x/\varepsilon)$  est une solution du problème (0.1).

On remarque que  $(\varphi_\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0)$  mais  $(u_\varepsilon(x, y) \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0)$  pour tout  $x > 0$  fixé. Ce qui prouve que les solutions de (0.1) ne dépendent pas continûment des données initiales.

**Problème d'identification de paramètres.** Ce problème consiste à la détermination du paramètre  $a(t)$  tel que :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (0.2)$$

On suppose que  $a(t)$  est positive et continue,  $\forall t \geq 0$ .

La solution unique de ce problème est donnée par

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 \int_0^t a(\tau) d\tau} \sin(\pi x). \quad (0.3)$$

Considérons le problème inverses suivant : Pour une mesure interne de la temperature au point  $x = 1/2$  ( $u(1/2, t) = h(t)$ ) déterminer  $a(t)$ ?

De la formule (0.3), on peut écrire

$$\begin{aligned} h(t) = e^{-\pi^2 \int_0^t a(\tau) d\tau} &\implies \ln(h(t)) = -\pi^2 \int_0^t a(\tau) d\tau \implies \\ a(t) &= \frac{-1}{\pi^2} \frac{h'(t)}{h(t)}. \end{aligned} \quad (S2)$$

■ Ce problème inverse admet une solution **unique** mais il est **mal posé (instable)** car la formule (S2) intervient un opérateur de dérivation ( $h'(t)$ ) qui est instable. En effet,

Supposons que :

$$d_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ -2n^5 (t-1)^3 + 3n^2 (t-1)^2, & 1 < t \leq 1 + \frac{1}{n^2}, \\ \frac{1}{n}, & 1 + \frac{1}{n^2} < t. \end{cases}$$

et

$$h_n(t) = h(t) + d_n(t)$$

où  $h(t) = e^{-\pi^2 t}$ , on trouve alors que  $a(t) = 1$ . De plus,

$$\|h - h_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty.$$

D'autre part, on a

$$a_n(t) = \frac{-1}{\pi^2} \left[ \frac{h'_n(t)}{h_n(t)} \right] = \left[ \frac{-1}{\pi^2} \frac{h'(t) + d'_n(t)}{h(t) + d_n(t)} \right]$$

avec

$$d'_n(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ -6n^5(t-1)^2 + 6n^2(t-1) & , \quad 1 < t < 1 + \frac{1}{n^2} \\ 0 & , \quad 1 + \frac{1}{n^2} < t \end{cases}$$

Un calcul direct de  $a_n\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)$  donne

$$\begin{aligned} a_n\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right) &= \frac{-1}{\pi^2} \left[ \frac{h'\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right) + d'_n\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)}{h\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right) + d_n\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)} \right] \\ &= \frac{4n^2}{\pi^2} \left[ \frac{\pi^2 e^{-\pi^2\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)} + 3 - \frac{3}{2}n}{4n^2 e^{-\pi^2\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)} + 3 - n} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

Donc  $a_n(t)$  ne converge pas vers  $a(t) = 1$ .

**Equation de la chaleur rétrograde.** Trouver  $u(x, 0) = u_0(x)$  (condition initiale inconnue), sachant que le champ de température  $u(x, t)$  vérifié :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t \in (0, T), \\ u(x, T) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (BCP)$$

où  $\psi \in L_2(0, \pi)$  est une fonction donnée. Par la méthode de Fourier, on peut expliciter la solution du problème (BCP) sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(T-t)n^2} \psi_n e_n(x)$$

où  $\psi_n$  est le coefficient de Fourier d'ordre  $n$  de  $\psi$  :  $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \psi(x) e_n(x) dx$ ,  $e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$ .

Soit  $\varphi(x) = u_0(x, 0)$  la température initiale. Alors d'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\|\varphi\|^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n^2 T} |\psi_n|^2.$$

On considère maintenant le problème (BCP) avec des données bruitées :

$$\psi_k = \psi + \frac{1}{k} \sin(kx).$$

On remarque que  $\|\psi_k - \psi\| \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow +\infty$  mais  $\|u(\psi_k; 0) - u(\psi; 0)\| = \frac{1}{k} e^{2k^2 T} \rightarrow +\infty$ ,  $k \rightarrow +\infty$ . On voit très clair que le problème (BCP) est instable donc mal posé. C'est pour cela qu'on dit que **les phénomènes de la chaleur sont irréversibles**.

**Problème de Cauchy rétrograde.** On se place dans un cadre Hilbertien, et soit  $A$  un opérateur auto-adjoint positif. Considérons le problème suivant : déterminer  $u(0) = g$  sachant que  $u(t)$  vérifie l'équation :

$$u_t + Au = 0, \quad 0 < t < T, \quad u(T) = f, \quad (ABCP)$$

où  $f$  est un élément de  $H$  donné.

On sait d'après la théorie des semi-groupes, que la solution du problème direct est donnée par  $u(t) = e^{-tA}u(0)$ . Le problème de la détermination de  $u(0)$  devient

$$Bg = e^{-TA}u(0) = f.$$

On distingue deux cas très importants :

(a) Si le semi-groupe  $S(t) = e^{-tA}$  est compact, alors le problème est mal posé.

*Remarque.* Si l'opérateur  $A^{-1}$  est compact, alors  $A$  est diagonalisable, c'est-à-dire, il existe une base propre  $\{e_n\}_{n \geq 1}$  telle que :

$$Ae_n = \lambda_n e_n \text{ avec } \|e_n\| = 1 \text{ et } 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow +\infty,$$

$$\forall h \in H, \quad h = \sum_{n=1}^{\infty} (h, e_n) e_n,$$

alors le semi-groupe  $S(t)$  engendré par  $-A$  prend la forme :

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\lambda_n} \mathcal{P}_{e_n}, \text{ où } \mathcal{P}_{e_n} h = (h, e_n) e_n.$$

Il est clair que  $\sigma(S(t)) = \sigma_p(A) \cup \{0\} = \{e^{-t\lambda_n}\}_{n \geq 1} \cup \{0\}$  et  $S(t)$  est compact pour tout  $t > 0$ .

(b) [Effet régularisant et irréversibilité]. Comme  $A$  est auto-adjoint positif, alors le semi-groupe  $S(t) = e^{-tA}$  est analytique, de plus, on a les propriétés suivantes :

$$(1) \|S(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0;$$

$$(2) \text{ pour tout } r \geq 0 \text{ et } t > 0, \text{ l'opérateur } S(t) \in \mathcal{D}^2(1t, \gamma(A^r));$$

(3) pour tout entier  $k \geq 0$  et  $t > 0$ ,  $\|S^{(k)}(t)\| = \|A^k S(t)\| \leq c(k)t^{-k}$ ;

(4) pour tout  $x \in \mathcal{D}(A^r)$ ,  $r \geq 0$  on a  $S(t)A^r x = A^r S(t)x$ .

(voir Pazy, Chap. 2, théorème 6.13, p. 74).

On voit d'après les propriétés de  $S(t)$  que le problème direct

$$u_t(t) + Au(t) = 0, \quad u(0) = u_0$$

présente le phénomène de régularisation suivant : En supposant seulement la donnée initiale dans  $H$ , alors pour tout  $t > 0$ , et tout entier  $k$ , on a  $u(t) \in \mathcal{D}(A^k)$  (espace plus régulier que  $H$ ). Il en résulte que, pour que le problème rétrograde (ABCP) ait une solution, il faudrait que  $0.98, 0.00, 0.00u(T) = f \in \mathcal{D}_\infty = \bigcap_k \mathcal{D}(A^k)$ . En fait même dans ce cas, on pourrait construire des exemples où il n'y a pas de solution sur l'intervalle  $(0, T)$ . On dit que le problème (ABCP) est irréversible dans le sens :

$$S(T) = e^{-TA} : H \longrightarrow H,$$

$$S(T)^{-1} = e^{TA} : \mathcal{R}(S(T)) \subseteq \mathcal{D}_\infty \subset H \longrightarrow H.$$

On montre que  $\mathcal{R}(S(T))$  est dense, mais n'est pas fermée.

► On remarque d'après les exemples donnés qu'il y a deux questions sérieuses liées à cette catégorie de problèmes :

**1 La non unicité.** Pour cette question, il nous faut des informations supplémentaires sur la solution et une bonne connaissance de la nature physique du problème, pour récupérer l'unicité.

**2 L'instabilité.** Ce caractère est le plus problématique, surtout dans l'implémentation numérique. Cela veut dire qu'il est impossible de donner un schéma numérique convergent et stable quel que soit la performance de la méthode proposée. Pour traiter ce caractère d'instabilité, on régularise par un problème proche (dans un certain sens) qui est stable. Les méthodes de régularisation sont variées, chaque problème nécessite un traitement spécifique selon sa complexité et son degré de mal position.

## Fonctions de matrices et méthode de projection de Krylov

La discrétisation par éléments finis ou différences finies d'une EDP intervenant dans un problème inverse est une source d'erreur et son influence sur la convergence est certaine. Pour remédier à ce phénomène, on propose une **semi-discrétisation** du problème, ce qui va nous permettre d'une part de diminuer les erreurs, et d'autre part de transformer le problème semi-discrétisé en une EDO, dont l'étude repose en général sur des méthodes spectrales en dimension finie.

Par un calcul opérationnel, on transforme notre problème en un problème de calcul matriciel de la forme :  $u = \Phi(A)v$ , où  $u :=$  est la solution recherchée,  $v :=$  les données du problème,  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est une matrice symétrique définie positive, et  $\Phi :=$  une fonction définie et continue sur une partie contenant le spectre de  $A$ .

Notons  $A_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$  l'opérateur discret de  $A$ , qui est une matrice symétrique, définie positive. On suppose que les erreurs de la discrétisation sont petites par rapport à l'incertitude  $\delta$ , et que  $A_m$  est de taille suffisamment grande de façon que  $A_m$  soit une bonne approximation de l'opérateur différentiel  $A$ .

Parmi les méthodes de calcul de l'expression  $u = \Phi(A)v$  il y a les méthodes de projection de Krylov, qui sont bien étudiées et expérimentées numériquement pour certaines classes de fonctions.

Les fonctions intervenant dans les problèmes inverses sont des fonctions croissantes, donc engendrent plus de difficultés, et peu de résultats sont disponibles.

Comme nous traitons un problème mal posé, une procédure de régularisation est nécessaire pour neutraliser le comportement instable. Lorsqu'il s'agit d'identifier ou de calculer une grandeur physique à partir des observations (mesures), on est amené souvent à inverser un opérateur (la résolvante qui donne la solution du problème direct). Cette inversion, qui est souvent mal posée, nécessite un traitement particulier des instabilités, par des techniques dites de régularisation qui consistent à perturber légèrement le problème, ou d'éliminer les hautes fréquences responsables de cette instabilité, de manière à rendre le problème en question bien posé et numériquement réalisable.

### 1. Méthodes de projection de Krylov

La résolution de systèmes linéaires repose, dans la plupart des codes de calcul, sur l'utilisation de méthodes de projection sur des sous-espaces de Krylov dont les représentants les plus connus sont la méthode de Lanczos pour les matrices symétriques définies positives et la méthode d'Arnoldi. Ceci est dû à leur efficacité sur une grande variété de problèmes.

**DÉFINITION 1.1. (Sous espaces de Krylov)** Le  $m$ -sous espace de Krylov de  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et  $v \in \mathbb{C}^n$ ,  $v \neq 0$  est défini par :

$$K_m = K_m(A, v) = \text{vect}\{v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v\} = \{p(A)v, p \in P_{m-1}\}, \quad (1.1)$$

où  $\text{vect}\{\cdot\}$  désigne l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments qui se trouvent entre accolade et  $P_{m-1}$  l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $m-1$ .

**LEMME 1.1.** *Le polynôme minimal de  $A$  par rapport à  $v \in \mathbb{C}^n$  est donné par :*

$$\psi_{A,v}(t) = \prod_{i=1}^s (t - \lambda_i)^{l_i} \in P_L, \text{ où } L = \text{deg}(\psi_{A,v}) = \sum_{i=1}^s l_i, \quad 0 \leq l_i \leq n_i,$$

$l_i$  dépend de  $v$  aussi bien que de  $A$  et  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s$  les valeurs propres distinctes de  $A$ ,  $n_i$  étant la dimension du plus grand bloc de la matrice de Jordan dans le quel  $\lambda_i$  apparaît (l'ordre de multiplicité de  $\lambda_i$ )

**Preuve.** Montrons d'abord l'unicité de  $\psi_{A,v}$ . Supposons qu'il existe un autre polynôme minimal  $\chi_{A,v}$  de  $A$  par rapport à  $v$ .

Par définition on a :  $\deg(\psi_{A,v}) = \deg(\chi_{A,v})$  et par conséquent on peut poser

$p = \alpha(\chi_{A,v} - \psi_{A,v})$  qui est polynôme unitaire avec  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ . Donc  $p(A)v = 0$  et

$\deg(p) < \deg(\psi_{A,v})$ , ce qui est contradictoire car  $\psi_{A,v}$  a le plus bas degré.

Supposons maintenant que  $\psi_{A,v}$  contienne un facteur de la forme  $(t - \tilde{\lambda}_i)$ , où

$\tilde{\lambda}_i \notin \text{Sp}(A)$ . Donc  $(A - \tilde{\lambda}_i I)$  est inversible et par définition de  $\psi_{A,v}$ , on a :

$$(A - \tilde{\lambda}_i I)^{-1} \psi_{A,v}(A)v = 0.$$

D'autre part,  $\deg((t - \tilde{\lambda}_i)^{-1} \psi_{A,v}) < \deg(\psi_{A,v})$ . Ce qui est contradictoire avec  $\psi_{A,v}$  minimal.

On a donc :

$$\psi_{A,v}(t) = \prod_{i=1}^s (t - \lambda_i)^{l_i}.$$

■

**Remarque 1.1.** On a  $\deg(\psi_{A,v}) \leq \deg(\psi_A)$

**THÉORÈME 1.1.** (cf.[?]) Pour tous polynômes  $p$  et  $q$  et une matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,

$p(A)v = q(A)v$  si et seulement si

$$p^{(j)}(\lambda_i) = q^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0 : l_i - 1, \quad i = 1 : s \text{ avec } 0 \leq l_i \leq n_i.$$

**THÉORÈME 1.2.** (cf. [?]) Soient  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $\psi_{A,v}$  le polynôme minimal de  $A$  par rapport à  $v \in \mathbb{C}^n$ .

Si  $f$  est une fonction définie sur le  $\text{Sp}(A)$ , alors  $f(A)v = q(A)v$ , où  $q$  est l'unique polynôme d'interpolation d'Hermite de degré

$$\deg(q) \leq \deg(\psi_{A,v}) = \sum_s^{i=1} l_i$$

et satisfait aux conditions d'interpolation de Hermite :

$$q^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0 : l_i - 1, \quad i = 1 : s.$$

D'après le théorème 1.2, on a :  $f(A)v \in K_L(A, v)$  où l'indice

$$L = L(A, v) = \deg(\psi_{A,v}) \in \mathbb{N}$$

est le plus petit nombre pour lequel  $K_L(A, v) = K_{L+1}(A, v)$ .

PROPOSITION 1.1. Si  $A^m v \in K_m$  alors  $A^{m+r} v \in K_m$ , pour tout  $r > 0$ .

**Preuve.** Supposons  $A^m v \in K_m$ . Raisonnons par récurrence.

Par définition,  $K_m = K_m(A, v) = \text{vect}\{v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v\}$  et

$$A^m v \in K_m \Rightarrow A^m v = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k A^k v, \text{ avec } A^0 = I.$$

Pour  $r = 1$ , on a

$$\begin{aligned} A^{m+1}v &= A(A^m v) \\ &= A\left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k A^k v\right) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k A^{k+1} v \\ &= \sum_{k=0}^{m-2} \alpha_k A^{k+1} v + \alpha_{m-1} A^m v \\ &= \sum_{k=0}^{m-2} \alpha_k A^{k+1} v + \alpha_{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k A^k v \\ &= \sum_{k=0}^{m-2} \alpha_k A^{k+1} v + \alpha_{m-1} \alpha_0 v + \alpha_{m-1} \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k A^k v \\ &\quad - \sum_{k=0}^{m-2} \alpha_k A^{k+1} v + \alpha_{m-1} \alpha_0 v + \alpha_{m-1} \sum_{k=0}^{m-2} \alpha_{k+1} A^{k+1} v \\ &= \alpha_{m-1} \alpha_0 v + \sum_{k=0}^{m-2} (\alpha_k + \alpha_{m-1} \alpha_{k+1}) A^{k+1} v \\ &= \alpha_{m-1} \alpha_0 v + \sum_{k=1}^{m-1} (\alpha_{k-1} + \alpha_{m-1} \alpha_k) A^k v. \end{aligned}$$

Posons  $\beta_0 = \alpha_{m-1} \alpha_0$ ,  $\beta_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{m-1} \alpha_k$ ,  $k = 1 : m-1$ .

On a :

$$A^{m+1}v = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k A^k v \in K_m.$$

Donc pour  $r = 1$ , la relation est vraie.

Supposons que pour  $r \geq 1$ ,  $A^{m+r}v \in K_m$  et montrons que  $A^{m+r+1}v \in K_m$ .

$$A^{m+r}v \in K_m \Rightarrow A^{m+r}v = \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k A^k v$$

et donc

$$\begin{aligned} A^{m+r+1}v &= A(A^{m+r}v) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k A^{k+1}v \\ &= \sum_{k=0}^{m-2} \gamma_k A^{k+1}v + \gamma_{m-1} A^m v \\ &= \sum_{k=0}^{m-2} \gamma_k A^{k+1}v + \gamma_{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k A^k v \\ &= \sum_{k=0}^{m-2} \gamma_k A^{k+1}v + \gamma_{m-1} \gamma_0 v + \gamma_{m-1} \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k A^k v \\ &= \sum_{k=0}^{m-2} \gamma_k A^{k+1}v + \gamma_{m-1} \gamma_0 v + \gamma_{m-1} \sum_{k=0}^{m-2} \gamma_{k+1} A^{k+1}v \\ &= \gamma_{m-1} \gamma_0 v + \sum_{k=0}^{m-2} (\gamma_k + \gamma_{m-1} \gamma_{k+1}) A^{k+1}v \\ &= \gamma_{m-1} \gamma_0 v + \sum_{k=1}^{m-1} (\gamma_{k-1} + \gamma_{m-1} \gamma_k) A^k v. \end{aligned}$$

En posant  $\sigma_0 = \gamma_{m-1} \gamma_0$  et  $\sigma_k = \gamma_{k-1} + \gamma_{m-1} \gamma_k$ , On obtient :

$$A^{m+r+1}v = \sum_{k=0}^{m-1} \sigma_k A^k v, \text{ et par suite } A^{m+r+1}v \in K_m.$$

En conclusion,  $A^{m+r}v \in K_m$ , pour tout  $r > 0$ . ■

**1.1. Principe de fonctionnement.** Soit  $A$  la matrice  $(n, n)$  du système à résoudre,  $v$  un vecteur quelconque, on note  $K_m = K_m(A, v) = \text{vect}\{v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v\}$  le sous-espace de Krylov engendré par  $A$  et  $v$ .

$V_m$  est la matrice des vecteurs d'une base de  $K_m(A, v)$ ,  $\{v_1, \dots, v_m\}$ .

*Construction de  $V_m$ .* Pour la construction de la base  $\{v_1, \dots, v_m\}$  de  $K_m(A, v)$ , on utilise l'algorithme d'Arnoldi ou l'algorithme de Lanczos si la matrice  $A$  est symétrique.

Soit  $A = VHV^*$ , où  $V$  est orthogonale. Alors  $V^*AV = H$  (matrice Heisenberg). Posons  $V = [v_1, v_2, \dots, v_m]$ , on a :  $AV = VH$  alors

$$Av_j = \sum_{i=1}^{j+1} h_{i,j}v_i \quad j = 1 : m-1.$$

Ce qui peut s'écrire

$$Av_j = \sum_{i=1}^j h_{i,j}v_i + h_{j+1,j}v_{j+1} \Leftrightarrow h_{j+1,j}v_{j+1} = Av_j - \sum_{i=1}^j h_{i,j}v_i = w_j.$$

Comme  $V$  est unitaire,  $h_{i,j} = v_i^*Av_j$ ,  $i = 1 : j$ .

Supposons que  $w_j \neq 0$ ,  $v_{j+1} = w_j/h_{j+1,j}$  avec  $h_{j+1,j} = \|w_j\|_2$ .

Comme  $Av_j = \sum_{i=1}^{j+1} h_{i,j}v_i$  on a :

$$\text{vect}\{v_1, v_2, \dots, v_j\} = \text{vect}\{v_1, Av_1, \dots, A^{j-1}v_1\}.$$

Donc cette procédure produit une séquence de vecteurs orthonormaux  $v_1, v_2, \dots, v_m$  tels que pour chaque  $j$ , les vecteurs  $v_1, v_2, \dots, v_j$  constituent des sous-espaces de Krylov. Ces vecteurs constituent la base orthonormale d'Arnoldi  $\{v_i\}_{i=1}^j$  du sous espace de Krylov  $K_m(A, v_1)$ .

D'après la méthode d'Arnoldi, on a, à l'étape  $m$ , la factorisation suivante :

$$AV_m = V_{m+1}H_{m+1,m} = V_mH_m + h_{m+1,m}v_{m+1}e_m^T.$$

## 2. Approximation de $f(A)v$ par la méthode des sous espaces de Krylov

Considérons  $f_m = p(A)v \in K_m$  l'approximation de  $f(A)v$ . Pour chercher cette approximation, on utilise la méthode d'Arnoldi, basée sur la décomposition de  $K_m$ .

Soit

$$K_m = K_m(A, v) = \text{vect}\{v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v\}.$$

Les vecteurs colonnes de ces matrices ne sont pas orthogonaux mais nous pouvons extraire une base orthogonale par la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Mais il se trouve que cette méthode n'est pas toujours stable. D'où l'utilisation de l'algorithme d'Arnoldi qui permet de garantir la stabilité de la méthode de Gram-Schmidt et qui consiste

à calculer récursivement la mise de  $A$  sous la représentation unitairement semblable  $H$ ,  $H$  étant de type Heisenberg.

Nous nous plaçons dans le cas où  $\dim(K_m(A, v)) = m$ .

**2.1. Procédure d'Arnoldi : Algorithme.** La méthode d'Arnoldi est une méthode de projection orthogonale sur un sous-espace de Krylov permettant de construire, pour toute matrice  $A$ , une base orthonormale du sous-espace et une matrice de Heisenberg. La construction est basée sur la multiplication successive d'un vecteur initial  $v$  par la matrice  $A$  et l'orthonormalisation par une procédure de Gram-Schmidt modifiée appliquée aux vecteurs obtenus, selon le schéma suivant :

$$\begin{aligned} v_1 = \frac{v}{\|v\|}, & \longrightarrow v_2 = Av_1 \quad \rightsquigarrow v_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}, \\ \dots & \longrightarrow v_m = Av_{m-1} \quad \rightsquigarrow v_m = \frac{v_m}{\|v_m\|}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Soient  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $v_1 \in \mathbb{C}^n$ . Cet Algorithme calcule la factorisation de  $A$  sous la forme  $AV = VH$ , où  $V \in M_{n,m}(\mathbb{C})$  ( $m = \deg(\psi_{A,v_1}) \leq n$ ) de colonnes orthonormales et  $H \in M_m(\mathbb{C})$  Heisenberg supérieur. C'est-à-dire il calcule une base orthogonale d'un espace de Krylov engendré par  $(v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v)$  par la méthode d'Arnoldi et renvoie cette base stockée en vecteurs colonnes dans  $V$  et la matrice Heisenberg des coefficients d'orthogonalisation dans  $H$ . On Choisit un vecteur  $v_1$

#### Algorithme d'Arnoldi.

- 1: Données  $A, v, m$
- 2: Résultats  $V_m, H_m$
- 3:  $v_1 = \frac{v}{\|v\|_2} \quad \longrightarrow$  initialisation
- 4: **for**  $j = 1 : m$  **do**
- 5:    $w := Av_j$
- 6:   **for**  $i = 1 : j$  **do**
- 7:      $h_{i,j} := v_i^* w$
- 8:      $w := w - h_{i,j} v_i \quad \longrightarrow$  orthogonalisation de  $w$ ,  $h_{i,j} = (Av_j, v_i)$ ,  $i < j$
- 9:   **end for**

```

10:  $h_{j+1,j} := \|w\|_2 \quad \rightarrow \quad h_{j+1,j} = 0 \text{ si } j = m$ 
11: if  $h_{j+1,j} > 0$  then
12:    $v_{j+1} := \frac{w}{h_{j+1,j}}$ 
13: else
14:    $v_{j+1} := 0$ 
15: end if
16: end for

```

A la sortie on a  $V_m = [v_1, \dots, v_m]$ ,  $v_{m+1}$ ,  $H_m = (h_{i,j})$   $1 \leq i, j \leq m$ ,  $h_{m+1,m}$ , où les  $(v_i)_{i=1,2,\dots,j}$  sont les vecteurs du système orthonormé trouvé à l'étape  $m-1$ . Les vecteurs sont calculés récursivement.

La matrice  $V_m$  est alors une base d'un sous espace invariant associé à  $A$ . On obtient donc une base orthonormée de  $K_m(A, v)$ .

Les  $h_{i,j}$  sont calculées par l'Algorithme et donne une matrice de type Heisenberg supérieure. On a ensuite  $H_m = V_m^* A V_m$ . La matrice  $H_m$  est donc la représentation de la base formée par les vecteurs d'Arnoldi de la projection orthogonale de  $A$  sur les sous-espaces de Krylov.

$$H_m = \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & h_{1,m-1} & h_{1,m} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & h_{2,m-1} & h_{2,m} \\ 0 & h_{3,2} & \cdot & \cdot & \cdot & h_{3,m-1} & h_{3,m} \\ 0 & 0 & h_{4,3} & \cdot & \cdot & h_{4,m-1} & h_{4,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & h_{m,m-1} & h_{m,m} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Le problème a une solution si seulement si l'itération d'Arnoldi s'arrête. L'Algorithme d'Arnoldi s'arrête lorsque  $h_{m+1,m} = 0$ .

L'intérêt de la méthode d'Arnoldi pour les grandes matrices ( $n > 10^3$ ) est de pouvoir stopper le processus à l'étape  $m \times n$  et de travailler avec  $H$  de taille  $m \times m$  ou  $(m+1) \times m$ .

L'écriture matricielle du procédé d'Arnoldi conduit à la relation :

$$A V_m = V_m H_m + h_{m+1,m} v_{m+1} e_m^T, \quad (2.3)$$

ou encore

$$A V_m = V_{m+1} \tilde{H}_{m+1,m}. \quad (2.4)$$

Soit

$$A[v_1, v_2, \dots, v_m] = [v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}] \tilde{H}_{m+1, m}$$

Avec

$$\tilde{H}_{m+1, m} = \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & h_{1,m-1} & h_{1,m} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & h_{2,m-1} & h_{2,m} \\ 0 & h_{3,2} & \cdot & \cdot & \cdot & h_{3,m-1} & h_{3,m} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & h_{m,m-1} & h_{m,m} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & h_{m+1,m} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$= \begin{pmatrix} (Av_1, v_1) & (Av_2, v_1) & \cdot & \cdot & \cdot & (Av_m, v_1) \\ (Av_1, v_2) & (Av_2, v_2) & \cdot & \cdot & \cdot & (Av_m, v_2) \\ 0 & (Av_2, v_3) & \cdot & \cdot & \cdot & (Av_m, v_3) \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (Av_m, v_m) \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & (Av_m, v_{m+1}) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Nous définissons  $H_m = [h_{i,j}, 1 \leq i, j \leq m]$  en délogant le dernier rang de  $\tilde{H}_{m+1, m}$  une matrice Heisenberg supérieure. Donc

$$A[v_1, v_2, \dots, v_m] = [v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}] \tilde{H}_{m+1, m}$$

peut s'écrire comme

$$A[v_1, v_2, \dots, v_m] = [v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}] H_m + h_{m+1, m} v_{m+1} e_m^T$$

En remplaçant  $V_m = [v_1, \dots, v_m]$  on a :

$$AV_m = V_m H_m + h_{m+1, m} v_{m+1} e_m^T$$

où  $H_m = (h_{i,j})$  et  $e_m = [0, 0, \dots, 0, 1]^T$ ,  $e_m \in \mathbb{R}^m$  vecteur dont la  $m^{ieme}$  composante est 1.

**COROLLAIRE 2.1.** Si  $m = n$ , alors  $AV_n = V_n H_n$  et  $H_n$  est unitairement semblable à  $A$ .

**Remarque 2.1.** On dit que  $H_m$  est la **compression (ou projection)** de  $A$  sur  $K_m$ . Elle représente le calcul de  $A$  sur  $K_m$  par rapport à la base d'Arnoldi  $\{v_i\}_{i=1}^j$  avec  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ .

On peut poser

$$\text{vect}\{v_1, v_2, \dots, v_j\} = \text{vect}\{v_1, Av_1, \dots, A^{j-1}v_1\},$$

car la procédure d'Arnoldi produit une séquence de vecteurs orthonormaux  $v_1, v_2, \dots, v_m$  tels que pour chaque  $n$ , les vecteurs  $v_1, v_2, \dots, v_n$  constituent les sous-espaces de Krylov.

Ces vecteurs constituent la base orthonormale d'Arnoldi  $\{v_i\}_{i=1}^j$  du sous espace de Krylov  $K_m(A, v_1)$ .

**2.2. Approximation d'Arnoldi de  $f(A)v$ .** Trouvons l'approximation de  $f(A)v$  par le procédé d'Arnoldi en prenant

$$v_1 = \frac{v}{\|v\|_2}.$$

LEMME 2.1. Pour  $m < n$  fixé et

$$p(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0 \in P_m,$$

avec  $AV_m = V_m H_m + h_{m+1,m} v_{m+1} e_m^T$  on a :

$$p(A)v = \|v\| V_m p(H_m) e_1 + \|v\| a_m \alpha_m v_{m+1}, \quad \text{avec } \alpha_m = \prod_{j=1}^m h_{j+1,j}. \quad (2.7)$$

En particulier, pour tout  $p \in P_{m-1}$  on a :

$$p(A)v = \|v\| V_m p(H_m) e_1. \quad (2.8)$$

**Preuve.** Il est suffisant de montrer ces résultats pour  $p(z) = z^j$ , i.e.,

$$A^j v = \|v\| V_m H_m^j e_1 \quad \text{pour } j < m$$

et

$$A^m v = \|v\| V_m H_m^m e_1 + \|v\| \alpha_m v_{m+1}.$$

Par construction de la base d'Arnoldi on a :  $v = \|v\| V_m e_1$ .

Montrons que  $A^j v = \|v\| V_m H_m^j e_1$ . Raisonnons par récurrence.

Pour  $j = 0$ , on a  $A^0 v = \|v\| V_m H_m^0 e_1 \Leftrightarrow v = \|v\| V_m e_1$  vraie.

Supposons la relation est vraie à l'ordre  $k - 1$  et montrons qu'elle est aussi vraie à l'ordre  $k$ .

$$\begin{aligned} A^k v &= A(A^{k-1} v) = A(\|v\| V_m H_m^{k-1} e_1) = \|v\| (A V_m) H_m^{k-1} e_1 \\ &= \|v\| (V_m H_m + h_{m+1,m} v_{m+1} e_m^T) H_m^{k-1} e_1 \\ A^k v &= \|v\| V_m H_m^k e_1 + \|v\| h_{m+1,m} v_{m+1} e_m^T H_m^{k-1} e_1 \\ &= \|v\| V_m H_m^k e_1 + \|v\| h_{m+1,m} (e_m^T H_m^{k-1} e_1) v_{m+1}. \end{aligned}$$

En posant  $\alpha_m = h_{m+1,m}(e_m^t H_m^{k-1} e_1)$  on a :

$$A^k v = \|v\| V_m H_m^k e_1 + \|v\| \alpha_m v_{m+1}.$$

Or

$$e_m^t H_m^{k-1} e_1 = \begin{cases} 0, & k < m; \\ \prod_{j=1}^{m-1} h_{j+1,j}, & k = m. \end{cases}$$

(cf.[?])

Pour  $k < m$ ,  $A^k v = \|v\| V_m H_m^k e_1$ .

Pour  $k = m$ ,  $A^m v = \|v\| V_m H_m^m e_1 + \|v\| \alpha_m v_{m+1}$ . ■

**DÉFINITION 2.1. (Approximation d'Arnoldi)** Soit  $f$  une fonction définie pour  $H_m$ . L'approximation d'Arnoldi d'ordre  $m$  de  $f(A)v$  est définie comme

$$f_m = \|v\| V_m f(H_m) e_1. \quad (2.9)$$

L'Algorithme d'obtention de cette approximation  $f_m$  peut être résumé par :

**Algorithme.** Données :  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $v \in \mathbb{C}^n$  et  $m < n$ .

Résultat : L'approximation d'Arnoldi  $f_m$ .

- (1) On détermine  $V_m, H_m$  utilisées dans la procédure d'Arnoldi.
- (2) On pose  $f_m = \|v\| V_m f(H_m) e_1$ .

**Remarque 2.2.** (1) La dimension du problème qui était de  $n$  est réduite à  $m$ ,

$$f(A)v \simeq \|v\| V_m f(H_m) e_1 = f_m, \quad V_m \text{ est la base orthonormale de Krylov et } v = \|v\| V_m e_1.$$

- (2) On n'a besoin que de la première colonne de  $f(H_m)$  car on prend le produit  $f(H_m)e_1$  sinon le calcul de  $f(H_m)$  demeure toujours un petit problème si on ne connaît pas les valeurs propres de  $H_m$ .
- (3) Même si nous supposons que  $f$  est définie sur le  $Sp(A)$ ,  $H_m$  peut avoir des valeurs propres en des points où  $f$  n'est pas définie. Dans ce cas  $f(H_m)$  n'est pas défini et par conséquent on ne pourra pas déterminer l'approximation d'Arnoldi d'ordre  $m$ .

**Conclusion** Dans le cas de données exactes on pose l'approximation de  $u = f(A)v$  par la projection sur les sous-espaces de Krylov, on a :

- Pour  $m = n$ , La méthode d'Arnoldi nous fournit une formule très pratique pour son calcul en posant  $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$  et en calculant

$$f(A)v = V_n f(H_n) V_n^* v = \|v\| V_n f(H_n) e_1 \quad (2.10)$$

avec  $v = \|v\| V_n e_1$ .

En effet :

D'après la définition de  $f(A)$  par la formule d'intégrale de Cauchy on a :

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(zI - A)^{-1} dz$$

où  $f$  est une fonction analytique dans un domaine  $D$ , tel que  $\Gamma$  entoure  $D$  avec  $\Gamma \cap D = \emptyset$ .

On a

$$f(A)v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(zI - A)^{-1} v dz.$$

D'autre part

$$zI - H_m = zI - V_m^t A V_m = z(V_m^t V_m) - V_m^t A V_m = V_m^t (zV_m - A V_m) = V_m^t (zI - A) V_m,$$

et

$$(zI - H_m)^{-1} = V_m^{-1} (zI - A)^{-1} (V_m^t)^{-1} = V_m^t (zI - A)^{-1} V_m.$$

Donc

$$f(H_m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(zI - H_m)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(V_m^t (zI - A)^{-1} V_m) dz.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \|v\| V_m f(H_m) e_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) \|v\| (V_m V_m^t (zI - A)^{-1} V_m^t e_1) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) (zI - A)^{-1} (\|v\| V_m^t e_1) dz = f(A)v \end{aligned}$$

- Pour  $m \ll n$ , on le projette sur un sous espace de Krylov de dimension  $m \ll n$ , pour obtenir  $f(A)v \simeq \|v\| V_m f(H_m) e_1$  car

$$f(A)v = f(A) V_k V_k^t v \simeq V_k V_k^t f(A) V_k V_k^t v \simeq V_k f(V_k^t A V_k) V_k^t v = V_k \|v\| f(H_k) e_k.$$

L'Approximation de Krylov est de la forme

$$f_k = \|v\|V_k f(H_k)e_1. \quad (2.11)$$

**2.3. Valeurs de Ritz.** Soit  $1 \leq m \leq n$ . Les valeurs propres de la matrice  $H_m$  sont appelées valeurs *Ritz*( $m$ ) de  $A$ .

En pratique, le calcul des couples propres d'une matrice carrée  $A$  est un travail souvent fastidieux, c'est pour cela, il est commode de calculer les couples de Ritz qui peuvent être considérés comme des bonnes approximations à une certaine précision. Cette approche est bien justifiée théoriquement et numériquement.

Soient  $(\lambda_i)_{i=1}^n$  les valeurs propres de la matrice  $A$  et  $(\beta_i)_{i=1}^m$  les valeurs propres de  $H_m$  si  $A = A^t$  d'après Golub et Van Loan [?] (voir aussi, [?]) on a la localisation suivante :

$$\lambda_{min} \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_m \leq \lambda_{max}$$

Chaque intervalle  $(-\infty, \beta_1], [\beta_1, \beta_2], [\beta_2, \beta_3], \dots, [\beta_{m-1}, \beta_m], [\beta_m, +\infty)$  contient au moins une valeur propre de  $A$ . Ceci montre que les valeurs de Ritz  $(\beta_i)_{i=1}^m$  sont des approximations des valeurs propres de  $A$  qui dépendent explicitement du choix du vecteur initial  $v$  dans la procédure d'Arnoldi (Lanczòs dans le cas symétrique). L'Approximation de  $f(A)v$  avec la procédure d'Arnoldi en prenant  $v_1 = \frac{v}{\|v\|_2}$  et pour  $(m = \text{deg}(\psi_{A,v_1}) \leq n)$  est :  $f_m = \|v\|V_m f(H_m)e_1 = f(V_m H_m V_m^*)v = V_m f(H_m) V_m^* v$  qui est l'évaluation de  $f(A)v$  sur le plus petit sous-espace de Krylov  $K_m(A, v_1)$ . Donc on peut l'étendre sur tout l'espace de Krylov  $K_m(A, v_n)$  avec  $n = 1 : m$ .

**THÉORÈME 2.1.** (cf. [?]) Soient les matrices  $V_m$  et  $H_m$  obtenues par la procédure d'Arnoldi sur  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et  $v \in \mathbb{C}^n$ . On a :

$$\|v\|V_m f(H_m)e_1 = \tilde{p}_{m-1}(A)v, \quad (2.12)$$

où  $\tilde{p}_{m-1}$  est l'unique polynôme d'interpolation de Hermite degré  $m - 1$  qui interpole  $f$  sur  $Sp(H_m)$ .

## Etude d'un problème inverse d'identification de sources du type parabolique

### 0.1. Position du problème.

#### 1. Position du problème

Soient  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$  un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, et  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur non borné à domaine dense dans  $H$ .

Considérons le problème parabolique suivant :

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(0) = f, \end{cases} \quad (1.1)$$

où la source  $f \in H$  est une fonction donnée de  $t$ .

On fait les hypothèses suivantes :

**H1** L'opérateur  $A$  est auto-adjoint, i.e.,  $A = A^*$ .

**H2** L'opérateur  $A$  est strictement positif, i.e.,  $A \geq \gamma I$  où  $0 < \gamma = \inf \sigma(A)$ .

**H3** L'injection  $H^1 := (D(A), \|\cdot\|_G) \hookrightarrow H$  est compacte, où  $\|\cdot\|_G$  est la norme du graphe.

• Sous les hypothèses (**H1**, **H2** et **H3**) l'opérateur  $A$  est diagonalisable.<sup>1 2</sup> Soit alors  $(\xi_k, \lambda_k)_{k \geq 1}$  les couples propres (valeur propres, vecteurs propres) de l'opérateur  $A$  :

$$A\xi_k = \lambda_k \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \langle \xi_m, \xi_n \rangle = \delta_{mn},$$

$$0 < \gamma \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \lambda_k \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty,$$

1.  $H2 \implies 0 \in \rho(A)$ ,  $H3 \implies A^{-1}$  est compact.

2.  $(H1, H2, H3) \implies A^{-1}$  est auto-adjoint compact, et donc diagonalisable d'après le Théorème de la décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts. En conséquence  $A$  est diagonalisable.

$$\forall h \in H, \quad h = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \xi_k, \quad h_k = \langle h, \xi_k \rangle \text{ le coefficient de Fourier d'ordre } k \text{ de } h.$$

THÉORÈME 1.1. *Pour tout  $f \in H$ , le problème 1.1 admet une solution unique  $u \in C([0, T]; H)$  donnée par l'expression*

$$u(t) = R(t)f = e^{-tA}f = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\lambda_k} \langle f, \xi_k \rangle \xi_k. \quad (1.2)$$

Comme exemple d'application, on prend  $H = L^2(0, 1)$  et

$$A = -\frac{d}{dx^2}, \quad D(A) = H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1),$$

i.e., l'équation de la chaleur avec conditions de Dirichlet :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < 1, 0 < t < 1, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (1.3)$$

Notre problème inverse se formule comme suit :

Soit  $u(T; f) = g$  une observation finale de la solution  $u(t; f)$  au point  $t = T$ . Notre objectif est de déterminer la donnée  $f$  à partir de la condition  $g$ .

On peut schématiser notre problème inverse comme suit :

$$f \longrightarrow u(t) = R(t)f \longrightarrow \Theta(u) = u(T) = g, \quad (1.4)$$

on obtient donc une équation de Fredholm de première espèce

$$Kf = g, \quad K = R(T). \quad (1.5)$$

Il est clair que l'opérateur  $K$  est auto-adjoint, compact et injectif, et donc d'après le théorème de Picard, la solution recherchée  $f$  sera donnée par la formule

$$f = K^{-1}g = \sum_{k=1}^{\infty} e^{T\lambda_k} \langle g, \xi_k \rangle \xi_k, \quad (1.6)$$

sous la condition que

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{2T\lambda_k} |\langle g, \xi_k \rangle|^2 < +\infty. \quad (1.7)$$

## 2. Stabilisation et approximation

Nous voulons maintenant aborder la question de stabilisation dans le cas de données entachées de bruit, parce que les données dont on dispose viennent de l'expérimentation, ce qui implique l'existence d'erreurs de mesure. Cette cause d'incertitude induit une image floue à cause de la sensibilité des problèmes inverses aux incertitudes, et l'interprétation des réponses devient presque impossible et engendre un grand risque.

On suppose maintenant que la donnée  $u(T) = g$  est entachée de bruit (inexacte), i.e., on dispose d'une approximation  $g_\delta$  de  $g$  :  $\|g_\delta - g\| \leq \delta$ ,  $\delta$  est le niveau de bruit.

### 2.1. Approximation numérique du problème par La méthode de Krylov.

**Discretisation et projection de la solution.** Dans la suite, nous utilisons les notations suivantes :

$$E_m := \mathbb{R}^m, \quad m \geq 1.$$

$G \in E_m$  := l'analogue discret de  $g$ .

$G^\delta \in E_m$  := l'analogue discret de  $g_\delta$ .

$\sigma(A_m) = \{\alpha_k\}_{k=1}^m$  := l'ensemble des valeurs propres de  $A_m$  ( $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_m$ ).

$\{\zeta_k\}_{k=1}^m$  := l'ensemble des vecteurs propres normalisés de  $A_m$ .

La solution discrète (resp. discrète tronquée) dans le cas exact et inexact sont notés respectivement par :

$$I := \sum_{k=1}^m e^{T\alpha_k} \langle G, \zeta_k \rangle \zeta_k, \quad (2.1)$$

$$F_n = \sum_{k=1}^n e^{T\alpha_k} \langle G, \zeta_k \rangle \zeta_k, \quad (n \leq m). \quad (2.2)$$

$$F = \sum_{k=1}^m e^{T\alpha_k} \langle G_\delta, \zeta_k \rangle \zeta_k, \quad (2.3)$$

$$F_n = \sum_{k=1}^n e^{T\alpha_k} \langle G_\delta, \zeta_k \rangle \zeta_k, \quad (n \leq m). \quad (2.4)$$

La méthode de projection de Krylov pour calculer (2.4) commence tout d'abord par la génération du sous-espace de Krylov

$$\mathcal{K}(\mathbf{A}, \mathbf{g}_\delta) = \text{span}\{\mathbf{g}_\delta, \mathbf{A}\mathbf{g}_\delta, \dots, \mathbf{A}^{l-1}\mathbf{g}_\delta\}, \quad l \leq m.$$

Soit  $(q_i)_{i=1}^l$  une base orthogonale de  $\mathcal{K}(\mathbf{A}, \mathbf{g}_\delta)$ , avec  $q_1 = \frac{\mathbf{g}_\delta}{\|\mathbf{g}_\delta\|}$ . Posons  $\mathbf{Q}_l = [q_1, q_2, \dots, q_l]$  et  $\mathbf{R}_l = \mathbf{Q}_l^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_l \in \mathcal{M}_l(\mathbb{R})$  la représentation symétrique réduite de  $A$  sur cet espace. Une approximation de (2.4) dans  $\mathcal{K}(\mathbf{A}, \mathbf{g}_\delta)$  est donnée par :

$$\mathbf{f}_l^\delta = \|\mathbf{g}_\delta\| \mathbf{Q}_l \mathbf{R}_l \exp(\mathbf{T} \mathbf{R}_l)^{-1} e_1, \quad (2.5)$$

où  $e_1$  est le premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^l$ .

Notons  $(r_j, \zeta_j)_{j=1}^l$  les couples propres de la matrice  $\mathbf{R}_l$  (valeurs et vecteurs de Ritz de  $\mathbf{A}$ ), alors on peut approcher (??) comme suit

$$\mathbf{f}_l^\delta = \|\mathbf{g}_\delta\| \mathbf{Q}_l \left\{ \sum_{j=1}^l e^{Tr_j} (\zeta_j^T e_1) \zeta_j \right\}. \quad (2.6)$$

**2.2. Exemple numérique.** Dans ce paragraphe on donne un exemple numérique en dimension deux.

On considère le problème inverse suivant :

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = 0, & x \in (0, \pi), t \in (0, T), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, T) = g(x), & x \in [0, \pi], \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $f(x) = u(x, 0)$  est la source inconnue à déterminer à partir de la condition final  $u(x, T) = g(x)$ .

Il est bien connu que l'opérateur

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \mathcal{D}(A) = H_0^1(0, \pi) \cap H^2(0, \pi) \subset H = L^2(0, \pi),$$

est positif, auto-adjoint et à résolvante compacte ( $A$  est diagonalisable).

Les couples propres  $(\lambda_n, \phi_n)$  de  $A$  sont

$$\lambda_n = n^2, \quad \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Dans ce cas, la solution recherchée est donnée par

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{Tn^2} \left( \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx \right) \sin(nx), \quad (2.8)$$

et la solution régularisée (solution tronquée) est donnée par la formule

$$f_N = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N e^{Tn^2} \left( \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx \right) \sin(nx). \quad (2.9)$$

L'exemple numérique est bien expliqué dans le script MATLAB suivant

```

1
2 %gaussleg .m
3 function [x,w]=gaussleg(a,b,n)
4 %Given the lower and upper limits of integration a and b, and
  given n,
5 %this MATLAB function returns arrays x(1:n) and w(1:n) of length
  n,
6 %containing the abscissas and weights of the Gauss-Legendre n-
  point
7 %quadrature formula
8 format long e
9 epsilon=3*10^(-14);
10 m=(n+1)/2;
11 %The roots are symmetric in the interval, so we only have to find
  half
12 %of them.
13 xm=0.5*(a+b);
14 xl=0.5*(b-a);
15 for i=1:m
16     z(i)=cos(pi*(i-0.25)/(n+0.5));
17 %Starting with the above approximation of the ith root, we enter
18 %the main loop of refinement by Newton's method
19     z1(i)=z(i)+2*epsilon;
20     while abs(z(i)-z1(i))>epsilon
21         p1(i)=1;
22         p2(i)=0;
23 %Loop up the recurrence relation to get the Legendre polynomial
24 %evaluated at z.
25     for j=1:n

```

```

26         p3(i)=p2(i);
27         p2(i)=p1(i);
28         p1(i)=((2*j-1)*z(i)*p2(i)-(j-1)*p3(i))/j;
29     end
30     %p1 is now the desired Legendre polynomial. We next compute pp,
31     %its derivative, by a standard relation involving also p2,
32     %the polynomial of lower order.
33     pp(i)=n*(z(i)*p1(i)-p2(i))/(z(i)^2-1);
34     z1(i)=z(i);
35     z(i)=z1(i)-p1(i)/pp(i);
36     end
37 %Scale the root to the desired interval, and put its symmetric
38 %counterpart.
39     x(i)=xm-xl*z(i);
40     x(n+1-i)=xm+xl*z(i);
41 %Compute the weight and its symmetric counterpart.
42     w(i)=2*xl/((1-z(i)^2)*pp(i)^2);
43     w(n+1-i)=w(i);
44 end
45
46
47
48
49 function [T varargout] = myLanczos(mat,varargin)
50 %
-----
51 % Syntax:      T = myLanczos(mat);
52 %             T = myLanczos(mat,k);
53 %             T = myLanczos(mat,v);
54 %             T = myLanczos(mat,k,v);
55 %             [T Q] = myLanczos(mat);
56 %             [T Q] = myLanczos(mat,k);
57 %             [T Q] = myLanczos(mat,v);
58 %             [T Q] = myLanczos(mat,k,v);
59 %
60 % Inputs:      mat is a symmetric or Hermitian N x N matrix
61 %

```

```
62 %          k is the number of Lanczos iterations to perform.
    The
63 %          default value is N
64 %
65 %          v is an N x 1 vector (internally forced to have
    unit norm)
66 %          specifying a particular starting vector to use.
    The default
67 %          vector is chosen uniformly at random from the
    unit sphere
68 %
69 % Outputs:  T is a k x k symmetric tridiagonal matrix. When k
    < N, T is
70 %          approximately similar to mat up to rank k. When k
    = N, T is
71 %          similar (in the linear algebra sense) to mat.
    That is , when
72 %          k = N, T has identical eigenvalues to mat
73 %
74 %          Q is the N x k similarity transformation such
    that
75 %          mat = Q * T * Q'. Note that equality holds only
    when k = N.
76 %          For k < N, mat ~ Q * T * Q'
77 %
78 % Description: This function uses the Lanczos algorithm with
    full
79 %          reorthogonalization to compute k x k symmetric
    tridiagonal
80 %          matrix T that approximates mat up to rank k with
    respect to
81 %          transformation Q. That is , mat = Q * T * Q'. Note
    that
82 %          equality holds only for k = N. For k < N, mat ~ Q
    * T * Q'
83 %
84 %          NOTE: In particular , when k = N, T has identical
85 %          eigenvalues to mat
86 %
```

```
87 % Author:      Brian Moore
88 %              brimoor@umich.edu
89 %
90 % Date:        July 5, 2013
91 %
-----
92
93 % Knobs
94 symTol = 1e-8;
95
96 % Check input matrix size
97 [m,n] = size(mat);
98 if (m ~= n)
99     error('Input matrix must be square');
100 end
101
102 % Make sure input matrix is symmetric
103 if max(max(abs(mat - mat')))) > symTol
104     error('Input matrix is not symmetric to working precision');
105 end
106
107 % Parse user inputs
108 if (nargin == 2)
109     if (length(varargin{1}) == n)
110         k = n;
111         v = varargin{1};
112     else
113         k = varargin{1};
114         v = randn(n,1);
115     end
116 elseif (nargin == 3)
117     k = varargin{1};
118     v = varargin{2};
119 else
120     k = n;
121     v = randn(n,1);
122 end
123
```

```

124 % Initialize variables
125 Q = nan(n,k);
126 q = v / norm(v);
127 Q(:,1) = q;
128 d = nan(k,1);
129 od = nan(k-1,1);
130
131 % Perform Lanczos iterations
132 for i = 1:k
133     z = mat * q;
134     d(i) = q' * z;
135
136     %-----
137     % Uncomment only one of the following 3 options
138     %-----
139     % Option 1: Full re-orthogonalization
140     %z = z - Q(:,1:i) * (Q(:,1:i))' * z);
141
142     % Option 2: Full re-orthogonalization (x2)
143     z = z - Q(:,1:i) * (Q(:,1:i))' * z);
144     z = z - Q(:,1:i) * (Q(:,1:i))' * z);
145
146     % Option 3: No re-orthogonalization
147     %z = z - d(i) * q;
148     %if (i > 1)
149     %    z = z - od(i-1) * Q(:,i-1);
150     %end
151     %
152
153     if (i ~= k)
154         od(i) = norm(z);
155         q = z / od(i);
156         Q(:,i + 1) = q;
157     end
158 end
159
160 % Construct T
161 T = diag(d) + diag(od,-1) + diag(od,1);
162

```

```

163 % Return user-requested information
164 if (nargout == 2)
165     varargout{1} = Q;
166 end
167
168
169
170
171
172 %%% Méthode de projection de Krylov %%%
173 clc
174 clear all
175 close all
176 a=pi;
177 b=0.01;
178 nx=150;nz =150; k =6;
179 N=100;teau=b/2;epsi=0.0;
180 %%% Equation de la chaleur dans un domaine carré
    %%%
181 dx = a/nx;
182 dz = b/nz;
183 x = 0:dx:a;
184 s = 0:dx:a;
185 z = 0:dz:b;
186 [X,Z]=meshgrid(x,z);
187 u=0;
188 phi= inline('sin(t).*t.^2');
189 [t,w]=gaussleg(0,a,100);
190 for i =1:N
191     g(i)= (phi(t).*sin(t*pi*i/a))*w';
192     u = u + (2/a)* g(i) *(sin(((i*pi)/a)*X).*exp((b-Z)*(i*pi)/a))
        ;
193 end
194 %%% condition finale %%%
195 h=griddata(X,Z,u,x,teau,'cubic')+epsi*randn(size(x));
196
197 fi=sin(x).*x.^2;
198 %%% Laplacien discret %%%
199

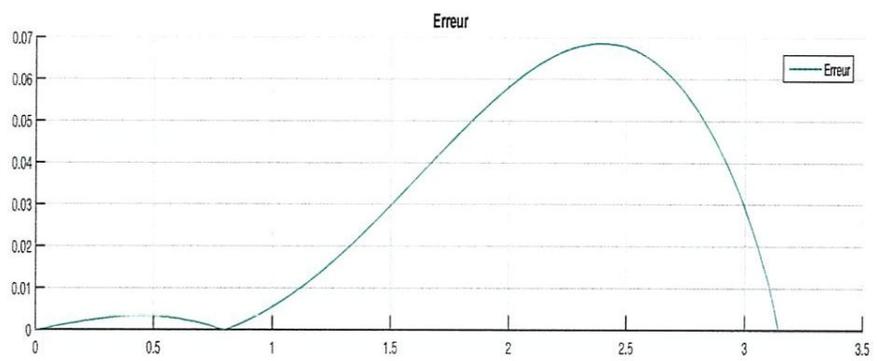
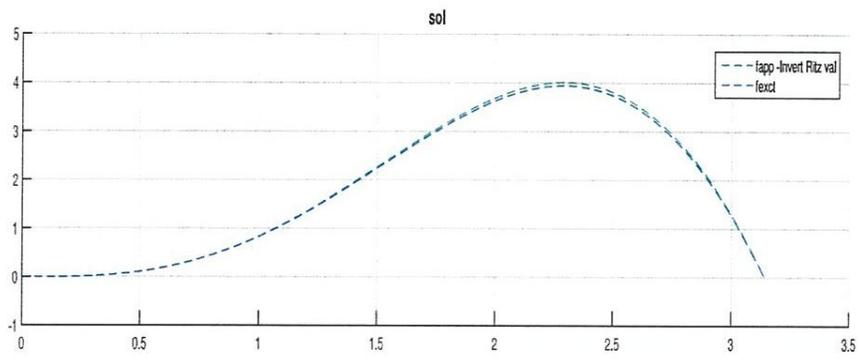
```

```

200 n = nx+1;
201 sub = diag(ones(n-1,1),-1);
202 A = 2*eye(n) + (-1) .* sub + (-1) .* sub';
203
204 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%TEST
205 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
206 A=(nx/a)^2*A;
207 v=h'/norm(h);
208 [T Q] = myLanczos(A,k,v);
209 U2=0;[RITZ]=eig(T);
210 for i=1:k
211     rit(i)=sqrt(RITZ(i));
212     U2=U2+Q(:,i)*(exp(rit(i)*b))*Q(:,i) '*h';
213 end
214 U2=U2';
215 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%SHIFT INVERT
216 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
217 In=eye(n);
218 Ik=eye(k);
219 teta=0;
220 vn=h'/norm(h);
221 A=(A-teta*In)^-1;
222 [T1 Q1] = myLanczos(A,k,vn);
223 U3=0;[RITZ1]=eig((T1^-1)+teta*Ik);
224 for i=1:k
225     rit1(i)=sqrt(RITZ1(i));
226     U3=U3+Q1(:,i)*(exp(rit1(i)*b))*Q1(:,i) '*h';
227 end
228 U3=U3';
229
230
231 %
232 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
233 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% les figures
234 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
235 %
236 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
237 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```
234 clf
235 figure(1);
236 subplot(2 ,1 ,1),
237 hold on,
238 plot(x,U2, 'r--',x,fi , 'b--');
239 legend( 'fapp-Ritz_val' , 'fexct' ),
240 title('sol'),
241 grid on,
242 hold off,
243 subplot(2 ,1 ,2) ,
244 hold on,
245 er=abs( fi-U2);
246 plot( x , er , 'r' ),
247 legend ( 'Erreur' ),
248 title('Erreur'),
249 grid on,
250 figure(2);
251 subplot(2 ,1 ,1),
252 hold on,
253 plot(x,U3, 'g--',x,fi , 'b--');
254 legend( 'fapp-Invert-Ritz_val' , 'fexct' ),
255 title('sol'),
256 grid on,
257 hold off,
258 subplot(2 ,1 ,2) ,
259 hold on,
260 er1=abs( fi-U3);
261 plot( x , er1 , 'g' ),
262 legend ( 'Erreur' ),
263 title('Erreur'),
264 grid on,
```



## Bibliographie

- [1] P. Brianzi, P. Favati, O. Menchi and F. Romani, "A framework for studying the regularizing properties of Krylov subspace methods", *Inverse Problems* 22 (2006) 1007-1021.
- [2] O.S. Coulibaly, *Stabilization and numerical approximation for a classe of inverse PDEs Problem*, Ph.D. Thesis, FST, Bamako, Mali 2017.
- [3] L.Elden, V. Simoncini, "A numerical solution of a Cauchy problem for an elliptic equation by Krylov subspaces", *Inverse Problems* 25 (2009) 065002 (22pp).
- [4] N.J. Higham, *Matrix Functions, Theory and Application*, SIAM - Philadelphia, USA 2008.
- [5] J. Liesen, Z. Strakos, *Krylov Subspace Methods : Principles and Analysis*, Oxford University Press 2013.
- [6] V. Kovtun, *Regularization Based on Krylov Subspace Iterations*, Ph.D. Thesis, Praha 2013.

