République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP et Analyse Numérique**

Par : **Rima Makhlouf**

Intitulé

Calcul stochastique pour des mesures signées

Dirigé par : **Dr. Sakrani Samia**

Devant le jury

Président	**Dr. Karbouaa mourad**	**Univ. 8 Mai 1945 Guelma**
Examinateur	**Dr. Benchabane abess**	**Univ. 8 Mai 1945 Guelma**

Session Juin 2018

Remerciement

Je remercie tout d'abord mon dieu, pour le courage qu'il ma donné pour surmonter toutes les difficultés durant mes années d'études et pour le pouvoir d'effectuer mon projet de fin d'étude.

Je tiens après à exprimer ma reconnaissance au directeur de ce travail : Madame Sakrani Samia pour avoir accepté de m'encadrer dans cette mémoire.

Je la remercie très vivement pour son implication, son soutient, ses encouragements et ses conseilles tout au long de ce travail ; je souhaite qu'elle retrouve ici mon expression et ma profonde gratitude pour son aide et guide lors de l'élaboration de cette mémoire.

Je désire aussi de remercie les professeurs : Mr KARBOUA.M et Mr BEN CHAABANNE.A pour l'honneur qu'ils sont acceptés de faire partie de ce jury.

J'adresse mes sincères remerciements à tous mes professeurs et enseignants pour leurs bienveillance tout au long de ma formation universitaire.

Je remercie mes chers parents qui ont toujours été là pour moi, pour leur aide, encouragement, confiance et leurs soutiens inconditionnel.

Enfin, je remercie ceux qui ont participé de prés ou de loin à l'exécution de cette mémoire.

Résumé

Dans notre éssai nous établit la notion du mesure signée comme une processus stochastique et on va présente les propriétés et les caractéristiques.

Table des matières

Introduction

Soit Ω l'ensemble des applications $t \longrightarrow X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, continues et nulles pour $t = 0$. On munit Ω de sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$ .Le célèbre théorème de Paul Lévy caractérise la loi brownienne comme la seule loi Pous laquelle X_t et $X_t^2 - t$ sont des martingales locals.

Rappelons comment Dellacherie (sém. prob.VIII) en déduit la propriété de représentation prévisible du mouvement brownienne dans L^2 . Soit I le sous-espace fermé de L^2 formé des intégrales $\int_0^\infty H_s \, dX_s$, avec $E\left[\int H_s^2 \, ds\right] < \infty$. Tout revient à montrer que l'orthogonal $I^\perp$ est réduit aux v.a. constantes.

Soit d'abord M un élément positif de $I^\perp$. On peut supposer que $E[M] = 1$ et introduire la loi $Q = MP$. L'orthogonalité entraine que, sous la loi Q , toute i.s. $H.X$ est encore une martingale locale; c'est donc le cas pour X_t .Comme $Q << P$, on a $[X, X]_t = t$ sous la loi Q . D'aprés le théorème de Paul Lévy , on a $Q = P$, donc $M = 1$ p.s.. On passe de là sans peine au cas où M est bornée , en remplaçant M par $M + c$ où c est une constante assez grande.

Pour passer au cas général, on remarque que $I^\perp$ est stable par les opérateurs $E[.\backslash\mathcal{F}_t]$ où T est un temps d'arrêt. Or la martingale $M_t = E[M \setminus \mathcal{F}_t]$ est continue, donc admet des arrêtées bornées, auxquelles on peut appliquer le résultat précédent, pour montrer finalement que $M = cte$.

Malheureusement , dans cette dernière étape , on a perdu la simplicité de l'idée de Dellacherie , car il a fallu établir au préalable que toutes les martingales du mouvement brownienne sont continues. Yor est parvenu à supprimer cette difficulté en considérant le sous-espace fermé I dans H^1 et son orthogonal $I^\perp$ dan BMO (donc tout élément de $I^\perp$ est à sauts bornés) , mais là aussi

, on perd le caractère élémentaire de la démonstration.

C'est pourquoi P.A. Meyer a suggéré d'étendre le théorème de Lévy aux mesures signées , de manière à justifier le raisonnement ci- dessus pour un élément quelconque de $I^{\perp}$.

Nous présentons dans ce travail un certain nombre de résultats qui se rattashent à cette idée.Tous sont de nature tres élémentaire,mais certains sont vraiment inattendus. Cet exposé à était présenté au séminaire de Berne en Juin 1983.

Chapitre 1

Rappels et Complémentaires

Dans ce chapitre on va présenter tous les définitions et les théorème nécissaires pour développer et améliorer ce travail.

Dans tout ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désigne un espace de probabilité complet.

1.1 Les filtrations et les mesures

Définition 1.1 *Soit T un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.*

-Un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ dans $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ est une famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ indexée par T.

Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \to X_t(\omega)$ est appelée trajectoire.

Définition 1.2 *On appelle tribu $(\delta - a\lg \grave{e}bre)$ de tout parties de Ω toute famille $\mathcal{F}$ de sous ensemble de Ω satisfaisant :*

-i- $\emptyset \in \mathcal{F}$.

-ii- $A^c \in \mathcal{F}$ si $A \in \mathcal{F}$.

-iii- si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite de $\mathcal{F}$ alors :

$$\underset{n\geq 1}{\cup} A_n \in \mathcal{F}.$$

le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ ou $\mathcal{F}$ est une tribue des parties de Ω est appelé un espece probabilisable.

Définition 1.3 *Soit $X = \{X_t, t \in [0,T]\ \}$une famille de sous-ensemble de Ω ,alors le tribu engendré par X est le plus petite tribure sur Ω qui contient tous les sous ensembles X , tq : $t \leq T$, elle est noté : $\delta(X)$*

Définition 1.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé .Une famille $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ de δ-algèbres sur Ω est appelées filtration si pour tout $t \geq s, \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}s \subset \mathcal{F}$.Une filtration est dit continue si pour tout $t \geq 0$,$\mathcal{F}_t = \underset{s>t}{\cap} \mathcal{F}s$.*

Une filtration est une suite croissante de tribus $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$, C'est -à-dire : $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$,$\forall n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.5 *Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ >0}$ est une suite croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$.*
Si $(\mathcal{F}_t)_{t\ >0}$ est une filtration de $(\Omega, \mathcal{F},\ P)$ alors $(\Omega, \mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\ >0},P)$ est appelé espace de probabilité filtré.

Définition 1.6 *Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires , On dit que $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $\mathcal{F}_n = \delta(X_0, ..., X_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ est la filtration naturelle de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$*

Définition 1.7 *Une mesure μ est une application de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}^+$ tq :*

-i-$\mu(\emptyset) = 0$.

-ii-Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite dénombrable d'ensembles deux à deux adjoint alors :

$$\mu\left(\underset{n\geq 1}{\cup} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$$

.

Le triplet $(E, \mathcal{F}, \mu)$ est appelé espace mesuré.

Définition 1.8 *soit (E, A) un espace mesurable. Une mesure signée μ sur (E, A) est une application $\mu : A \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et que pour toute famille$(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$ d'éléments disjoints de* **A**, *la série*

$$\sum_{t\in\mathbb{N}} \mu(A_t)$$

converge absolement ,et

$$\mu\left(\underset{t\in\mathbb{N}}{\cup} A_t\right) = \sum_{t\in\mathbb{N}} \mu(A_t).$$

Définition 1.9 *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration. Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est adaptée à la filtration $\mathcal{F}$ si X_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable pour tout $t \geq 0$*

1.2 le mouvement brownien et le temps d'arrêt

Définition 1.10 (Le mouvement brownien) *Le mouvement brownien standard est un processus stochastique réel $B = (B_t)_{t\geq 0}$ vérifiant :*

i)$B_0 = 0$ $P-p.s$

ii) $\forall\ s \in [0, t]$, $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$.

iii) $\forall\ n \geq 1, \forall\ t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$; $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes

iv) $P-p.s$, l'application t$\rightarrow B_t$ est continue.

- Soit $x \in \mathbb{R}$, un mouvement brownien issu de x $B^x = (B_t^x)_{t>0}$ est un processus qui vérifie ii) , iii) et iv) et $B_0 = x$, P-p.s.

- Un mouvement standard dans $\mathbb{R}^d$ noté BM^d est un processus $B = (B_t)_{t>0}$ où $B_t = (B_t^1, ..., B_t^d)$ avec $\{(B_t^i), 1 \leq i \leq d\}$ des mouvements browniens standard indépandants .

Définition 1.11 *Soit $(\mathcal{F}_t)$ une filtration et $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ une application ,on dit que T est un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ si*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.12 (Processus prévisible) *Un processus stochastique est dit* $(\mathcal{F}_t)$ *-prévisible si la fonction de* $(t, \omega) \in \tau \times \Omega \to \mathbb{R}$ *est mesurable par rapport à la tribu sur* $\tau \times \Omega$ *engendrée par les processus adaptés est continue à gauche . En quelque sort , la valeur de* X *en* t *est entiérement déterminé à partir des valeurs passées de* $X(s), s < t$ *.Intuitivement un processus prévisible est un processus dont la valeur en* t *découle des valeurs observés avant* t

Définition 1.13 (Processus adapté) *On dit que le processus* $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *est adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *si* X_t *est* $\mathcal{F}_t$ *-mesurable pour tout entier* t *, C'est -à-dire : pour tout* $t \geqslant 0$ *,*$(X_s)_{0\leq s\leq t}$ *est* $B([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *mesurable.*

Définition 1.14 (Processus progressif) *Un processus* X *est progressivement mesurable par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *si pour tout* $t \geq 0$*,l'application* $(s, \omega) \to X_s(\omega)$ *de* $[0, T] \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport à* $B([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $B(\mathbb{R}^d)$ *.*

Définition 1.15 (processus uniformment intgrable)

Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique

1) On dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable si :

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \sup_{t\geq 0} \int_{(|X_t|>\alpha)} |X_t| \, dp = 0.$$

2) Si $p \geq 1$, on dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est borné dans L^p si :

$$\sup_{t\geq 0} E\left[|X_t|^p\right] < \infty.$$

Proposition 1.1 *Soit* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique :*

1) S'il existe une v.a.r positive et intégrable Z telle que $|X_t| \leq Z, \forall t \geq 0$, alors $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable.

2) Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est borné dans $L^p\,(p > 1)$, alors $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable

1.3 Les Martingales

On suppose donné un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$

Définition 1.16 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_t)$ une filtration. Un processus $(M_t : t \geqslant 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t : t \geqslant 0)$ si $(M_t : t \geqslant 0)$ est adapté à $(\mathcal{F}_t : t \geqslant 0)$ et si pour tout $0 \leq s \leq t$,*

$$E\left[M_t \backslash \mathcal{F}_s\right] = M_s.$$

Le processus est appelé sous-martingale si $\geq$ remplace l'égalité dans la ligne précédente.

Définition 1.17 *Soient $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ un espace de probabilité filtré, $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu.*

On dit que X est une $(\mathcal{F}_t, P)$ $-$martingale locale, s'il existe une famille de temps d'arrêt $\{T_n, n \geq 1\}$, telle que

i) La suite $(T_n)_{n\geq 1}$est croissante et $\lim\limits_{t\to\infty} T_n = +\infty$ p.s.

ii) Pour tout n , le processus $X^{T_n}\P_{\{T_n>0\}} = \left(X_t^{T_n}\P_{\{T_n>0\}}\right)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t, P)$-martingale uniformément intégrable.

Définition 1.18 *Soient $H = (H_t)_{t>0}$ un processus continu et adapté ,$X = (X_t)_{t>0}$ une semi-martingale continue i.e :*

$$X_t = X_0 + M_t + V_t$$

où $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale issue de 0 et $V = (V_t)_{t\geq 0}$ est un processus à variation bornée , continu et issu de 0. On note :

$$(H.X)_t = \int_0^t H_s dX_s.$$

Théorème 1.1 *Si $M = (M_t)_{t\ \geq 0}$ est une martingale locale alors il existe un "unique" processus continu , adapté ,croissant et issu de 0 noté $(< M, M >_t)_{t\ \geq 0}$ tel que :*

$$(M_t^2 - < M, M >_t)_{t\ \geq 0}$$

Soit une martingale locale (continue) .

De plus , pour tout $t > 0$, toute suite $(\Delta_n)_{n\ \geq 0}$ de subdivision de $[0, t]$ avec $| \Delta_n | \to 0$,

$$\sup_{s \leq t}(T_t^{\Delta_n}(M) - < M, M >_t) \xrightarrow{P} 0.$$

Si $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale , on a vu que le $< M, M >_t$est bien défini.

De plus $t \to < M, M >_t$ est une fonction positive croissante , ainsi on peut poser pour $\omega \in \Omega$

$$< M, M >_\infty (\omega) = \lim_{t \to \infty} < M, M >_t (\omega).$$

Définition 1.19 *Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ une semimartingale continue qui se décompose*

$$X_t = X_0 + M_t + V_t$$

-Si $H = (H_t)_{t \geq 0}$ est un processus continu et adapté alors l'intégrale stochastique de H par rapport à X est définie par

$$H.X = H.M + H.V$$

Chapitre 2

Calcul stochastique pour des mesures signée

L'étude des mesures signées a été suggérée par $P.A.$ Meyer pour généraliser le célèbre théorème de Paul Lévy,qui caractérise la mesure de Wiener sur $\Omega = C_\circ\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}\right)$ comme l'unique probabilité sous laquelle (X_t) et $(X_t^2 - t)$ sont des martingales,où (X_t) est le processus canonique sur Ω.Ceci a été étébli par Ruiz de Chavez [9] qui a montré en plus, que la propriété

(∗) ci-dessous des martingales continues (sous les mesures de probabilité)n'est pas satisfaite sous des mesures signées.

(∗) Les seules martingales continues à variation finie sont les constantes.Un contre exemple simple est le temps local l_t en zéro de la densité $D_t = \frac{dQ}{d|Q|}_{\mathcal{F}_t}$,où Q est une mesure signée bornée sur un espace mesurable muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ avec $|Q|(1) = 1$ et D est continue.L'autre remarque importante faite par [9] est la nullité de Q sur certainessous-tribus (voir aussi [4]).Ceci indique qu'il y a une perte d'information surces sous-tribus.La propriété la plus importante ,perdue pour les mesures signées est l'hérédité des ensembles négligeables. En effet,si A et B sont deux ensembles mesurablestels que $B \subset A$ et $Q(A) = 0$,alors on n'a pas forcément $Q(B) = 0$.Dans ce papier on établit quelques propriétés des martingales pour des mesures signées.Le premier paragraphe est consacré à l'étude des martingales pour des mesures signées à variation quadratique finie .On établit une généralisation du Théorème de Paul Lévy pour les mesures signées bornées.Dans le paragraphe **2**,on essaie de définir l'Intégrale stoshastique pour des mesures signées .On établit une formule d'Ito ainsi qu'un Théorème de Girsanov. Enfin, le troisième paragraphe est introduction aux mesures complexes,tout en esseyant de définir un processus de Bessel à valeurs complexes.On donne aussi quelques exemples et applications des mesures signées.

2.1 1.Martingales par rapport à une mesure signées

On considère un espace masurables $(\Omega,\mathcal{F},Q)$,où Q est une mesure signée bornée. On commence par citer la définition d'une martingale sous Q ,donnée dans [9] .

Définition 2.1 (1.1) *Soient Π une probabilité sur $\mathcal{F}_\infty$ telle que $Q \ll \Pi$, $(\mathcal{F}_t)$ une filtration continue à droite,complétée par rapport à Π telle que $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_t \mathcal{F}_t$ et $M_t = \frac{dQ}{d\,\Pi} \mid_{F_t}$ .Un processus (X_t) adapté à $(\mathcal{F}_t)$ est une $(\Pi - Q)$ $-$martingale si :*

1) X est une $\Pi - semimartingale$,

2) XM est une $\Pi - martingale$,

Cette définition impose de se référer toujours à une probabilité Π et donc à la filtration $\mathcal{F}^{\Pi}$ complétée par rapport à Π.Remarquons aussi que dans le cas où Q est une probabilité : si X est une $Q - martingale$,alors l'hypotèse 1) n'est pas forcément satisfaite. Pour ces raisons,on modifie la Définition 1.1 et on la remplace par la Définition 1.1'suivante.Dans la suite, on note $P := |Q|$ et $D_t = \frac{dQ}{dP} \mid_{\mathcal{F}_t}$ (où $\mathcal{F}$ est une filtration continue à droite sur $\mathcal{F}_\infty$,complètée par rapport à P)et on suppose que $|Q|\ (\Omega) = 1$.La notation E designe toujours l'espérance par rapport à P.

Définition 2.2 (1.1') *soit X un prosessus adapté à $\mathcal{F}$.*

1) X est dite une $Q - martingale$ si $E\left[|X_t|\right] < +\infty$, $\forall t \geq 0$ et $Q\left(X_T\right) = Q\left(X_0\right)$ pour tout $\mathcal{F}-$temps d'arrêt T borné.

2) X est dite une $Q - martingale$ uniformément intégrable si la $P-$martingale $X\ D$ est uniformement intégrable.

3) X est dite $Q - martingale$ locale si $X\ D$ est une $P-$martingale locale.

1) Si P'est une probabilité sur $\mathcal{F}_\infty$ telle que $Q = D'_\infty \cdot P'$et $P'\left(D'_\infty = 0\right) = 0$,où D'_∞ est un élément de $L^1\left(\mathcal{F}_\infty\right)$, alors X est une $Q - martingale$ si et seulement si $X\ D'$ est une $P'-$martingale (pour la démonstration, voir par example, le Lemme 48, Chap. VII de [5]).

2) Soit X une Q $-$martingale.Si T est un temps d'arrêt pour $\mathcal{F}$,alors $X^{\ T}$est une $(Q,\mathcal{F})$ $-$martingal et $(X_{T+t})_{t\,\geq\,0}$est-une $\left(\left(\mathcal{F}_{T+t}\right),Q\right)_{t\,\geq 0} - martingale$. La proposition suivante nous donne la relation entre les deux définitions :

Proposition 2.1 (1.1) *Soit P' une probabilité sur $\mathcal{F}_\infty$ telle que $Q \langle\langle P'$. Si X est une $(P'-Q)-martingale$, alors X est une $Q-martingale$.*

Preuve. . Si X est une $(P'-Q)-martingale$, alors $X\ D'$ est une $P'-martingale$ où $D'_t = \frac{dQ}{dP'}\ |_{\mathcal{F}_t}$. Pour tout temps d'arrêt borné T , on a :$Q\ (X_T) = E_{P'}[D'_T\ X_T] = E_{P'}[D'_0 X_0] = Q\ (X_0)$. ■

Proposition 2.2 (1.2) . *Soit P' une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ .On a l''équivalance entre les deux propriétés :*

(i) $Q \ll P'$,

(ii) $D'_t := \frac{dQ}{dp'}\ |_{F_t}$ est une P'–martingale uniformement intégrable.

Preuve. ■

(i) $\Rightarrow$ (ii) . Si $Q \ll P'$, alors il existe une variable aléatoire Δ, F_∞–mesurable telle que $Q = \Delta.P'$ .On a : $\forall t \geq 0$, $E_{P'}[|\Delta|] = |Q|(1) \langle +\infty$ et $D'_t = E_{P'}[\Delta \diagdown \mathcal{F}_t]$.

(ii)$\Rightarrow$(i) . Soit $D'_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} D'_t$. On a :$\forall t \geq 0$, $D'_t = E_{P'}[D'_\infty \mid \mathcal{F}_t]$. D'où $\forall t \geq 0$,$\forall A \in \mathcal{F}_t$, $Q(A) = E_P[D'_\infty.\P_A]$. Notons $C := \{A \in \mathcal{F}_\infty, Q(A) = E_{P'}[D'_\infty.\P_A]\}$ .On a : $\forall t \geq 0$, $\mathcal{F}_\infty \subset C$, et par classe monotone, on obtient $\mathcal{F}_\infty \subset C$, ce qui prouve que $Q \ll P'$ Une martingale pour une mesure signée Q n'est pas forcément à variation quadratique finie (un contre example est donné à la fin du deuxième Pragraphe de ce papier).Ruiz de Chavez a établi le Théorème de caractérisation de Paul Lévy pour des Q–martingales qui sont des processus de Dirichlet pour P . On donne ici une généralisation aux processus à variation quadratique finie (en général,un processus à variation quadratique finie n'est pas un processus de Dirichlet,un contre-exemple est donné dans [10]).

Théorème 2.1 (1.1) . *Si X est une Q–martingale continue, nulle en 0 et à variation quadratique finie avec $[X]_t = t$, alors l'image de Q par X est égale à $Q(1) \cdot W$.*

Preuve. . pour $0 \leq s \leq t$,le processus$(X_{t+s} - X_s)_{t\geq 0}$ est une $(Q, (\mathcal{F}_{t+s}))$ –martingale.D'où (grâce à la formule(3) de [6]), $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, ■

$$Y_t = \exp\left(i\alpha\left(X_{t+s} - X_s\right)\right) - 1 + \frac{\alpha^2}{2}\int_0^t \exp(i\alpha\left(X_{u+s} - X_s\right))du$$

est une $\left(Q - \left(\mathcal{F}_{t+s}\right)_{t \geq 0}\right)$ −martingale.

Alors , pour tout $A \in \mathcal{F}_s$,$Q\left(\P_A Y_t\right) = h\left(t\right) Q\left(t\right)$, $h\left(t\right) = \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}t\right)$ .de la même façon,pour toute suite finie $\{t_1,...,t_n\}$ de $\mathbb{R}^+$:

$$Q(\exp(i\alpha_1 X_{t_1} + i\alpha_2(X_{t_2} - X_{t_1}) + ... + i\alpha_n(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})))$$

$$= Q\left(1\right)\exp(-\frac{1}{2}(t_1\alpha_1^2 + ... + (t_n - t_{n-1})\alpha_n^2).$$

2.2 2. Calcul stochastique pour des mesures signée

Dans ce paragraphe,on suppose que D est continue. Posons $H := \{t\ ,\ D_t = 0\}$, $g = sup\ H$, $\overline{g} = g \vee 0$, $\gamma_t = 0 \vee sup\ \{s \leq t\ ,\ D_s = 0\}$,$\overline{g}_t = 0 \vee sup\ \{s \prec t\ ,\ D_s = 0\}$et G l'ensemble des extrémités gauches de $H^{\ c}$.La plus petite filtration continue à droite contenant $(\mathcal{F}_t)$ pour laquelle $\overline{g}$ est un temps d'arrêt sera notée $(\mathcal{F}_t^g)$. La filtration$\left(\mathcal{F}_{\overline{g}+t}^g\right)$ est alors bien définie et sera notée $\left(\mathcal{F}_{g+t}\right)$ .Si X est un processus $\mathcal{F}-$adapté, on notera $\widetilde{X} := X_{.+\overline{g}}$. On commence par citer la proposition suivante de [1] :

Proposition 2.3 (2.1) . [1] *Soit $\left(V_t\right)_{t \geq 0}$ un processus $\left(\mathcal{F}_{g+t}\right)-$optionnel. Il existe un processus unique $\left(U_t\right)_{t\geq 0}$,$(\mathcal{F}_t)-$optionnel qui s'annule sur H tel que $\forall t \succ 0, U_{\overline{g}+t} = V_t, U_0 = V_0$ sur$\{g = -\infty\}$.Ce qui définit une fonction $\rho : V \rightarrow U = \rho\left(V\right)$. ρ est linéaire, positive et préserve les produits.La proposition suivante est une "généralisation" du Théorème 1.1.*

Proposition 2.4 (2.2) *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ un espase mesurable muni d'une filtration $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t \geq 0}$ et X une $Q-$martingale , continue et nulle en 0. Supposans que $X_t^2 - t$,soit une $Q-$martingale, alors $X\left(Q\right) = Q\left(1\right) \cdot W$ (où W est la mesure de Wiener).*

Preuve. Pour $K \geq 1$, $\left(X_{t\wedge k}\right)$ et $X_{t\wedge k}^2 - t \wedge k$ sont uniformément intégrables,c'est-à-dire que $X_{t\wedge k}\ D_t$ et $\left(X_{t\wedge k}^2 - t \wedge k\right) D_t$ sont deux martingales uniformément intégrables qui s'annulent sur H . D'après le Théorème quotient de [1] (voir aussi Théorème 3.2, Chap III de [2]), les processus $X_{(\overline{g}+t)\wedge k}$ et $X^2_{(\overline{g}+t)\wedge k} - (\overline{g}+t)\wedge k$ sont deux $P-$martingales pour la filtration $(\mathcal{F}_{g+t})_{t\rangle 0}$, En appliquant la formule d'Itô à $X_{(\overline{g}+t)\wedge k}$ avec la fonction $\exp(\iota\alpha\chi)$, on obtient : ■

$$Y_t^k := \exp\left(\iota\alpha X_{(\overline{g}+t)\wedge k}\right) + \frac{\alpha^2}{2}\int_0^{t\wedge(k-\overline{g})^+} \exp\left(\iota\alpha X_{(\overline{g}\ +s)\wedge k}\right) ds - \exp\left(\iota\alpha X_{\overline{g}\wedge k}\right)$$

$$= \exp\left(\iota\alpha X_{(\overline{g}\ +t)\wedge k}\right) + \frac{\alpha^2}{2}\int_{\overline{g}\ \wedge k}^{(\overline{g}+t)\wedge k} \exp\left(\iota\alpha X_{s\ +k}\right) ds - \left(\iota\alpha X_{\overline{g}\ \wedge k}\right)$$

est une $P-$martingale qui s'annule en 0 . D'où $\rho\left(Y^k\right)_t$ est une $Q-$martingale et :

$$d\rho\left(Y^k\right)_t := \exp\left(\iota\alpha X_{t\ \wedge k}\right) + \frac{\alpha^2}{2}\int_{\gamma_t\ \wedge k}^{t\ \wedge k} \exp\left(\iota\alpha X_{s\ \wedge k}\right) s - \exp\left(\iota\alpha X_{\gamma_t\ \wedge k}\right).$$

Ce qui donne que $\exp(\iota\alpha X_t) + \frac{\alpha^2}{2}\int_0^t \exp\left(\iota\alpha X_s\ \right) ds$ est une $Q-martingale\ locale$. En raisonnant de la même façon que dans le Théorème 1.1 (voir aussi [9])on trouve $X(Q) = Q(1).W$.

On suppose dans la suite que toutes les $(P,\mathcal{F})-$martingalent continues,les processus P p.s. croissants introduits ci-dessous,sont continus à droite et que toutes les$Q - martingales$ considérées sont continues sur $[\overline{g},+\infty[$. En effet,on peut toujours se ramener à une $Q-$martingale continue sur $[\overline{g},+\infty[$ grâce au lemme suivant :

Lemme 2.1 (2.1) . *Soit X une $Q-$martingale uniformément intégrable, alors X admet une modification $X\ \prime$ (par rapport à P) continue à droite sur $H^{\ c} \cup G$ .En plus, $X\ \prime_{\gamma_t}$ est aussi une$Q-$martingale uniformément intégrable.*

Preuve. XD est une P $-$martingale continue (par hypotèse),d'où X est continue sur H^c .Posons : ■

$$X\prime_t = \begin{cases} X_t & si\ t\in G^c \\ \lim\limits_{\xi\to+\infty} X_{t\ +\xi}\P_{H^c}(t+\xi) & si\ t\in G \end{cases}$$

D'aprés le Corrollaire 3.2.1 de [1] ,$X\prime$ est bien défini. On a : aussi,pour tout $t \in \mathbb{R}^{+}$,$P\left(X_t = X\prime_t\right) \geq 1-P\left(t \in G\right)=1$ car G évite les temps d'arrêt. Montrons que $X\prime_{\gamma_t}$ .est aussi une $Q-$martingale uniformément intégrable.

$$X\prime_t = X\prime_t \P_{H^c}(t) + X\prime_t \P_H(t)$$

$$= \rho\left(X\prime_{.+\overline{g}} - X\prime_{\overline{g}}\right)_t + \rho\left(X\prime_{\overline{g}}\right)_t + X\prime_{\gamma_t} \P_{H(t)}$$

$$= \rho\left(X\prime_{.+\overline{g}} - X\prime_{\overline{g}}\right)_t + X\prime_{\gamma_t} \P_{H^c(t)} + X\prime_{\gamma_t} \P_{H(t)}.$$

Donc :

$$X\prime_{\gamma_t} = X\prime_t - \rho\left(X\prime_{.+\overline{g}} - X\prime_{\overline{g}}\right)_t.$$

Mais d'après le Théorème quotient de [1],$\rho\left(X\prime_{.+\overline{g}} - X\prime_{\overline{g}}\right)$ est une $Q-$martingale,d'où $X\prime_{\gamma_t}$ est une $Q-$martingale. Il est bien connu que la classe des semimartingales est stable par un changement de probabilité absolument continue, ce qui n'est pas vrai pour un changement de mesure signée absolument continue (voir [4]). Dans le but de récupérer cette stabilité,on prend comme définition d'une semimartingale sous une mesure signée,la définition suivante :

1) Un processus adapté (X_t) est dit croissant (resp. à variation finie) sous Q si le processus $\widetilde{X_t} = (X_{\overline{g}+t})$ est croissant (resp. à variation finie)sous P .

2) Un processus Y est dit une $Q-$semimartingale si $Y = X + A$,ou X est une $Q-$martingale uniformément intégrable et A est un processus à variation finie sous Q.

3) Soient X à variation finie une $Q-$martingale uniformément intégrable (resp. à variation finie sous Q) et h un processus progressif tel que $\int_0^t h_{\overline{g}+s}^2 \, d\left\langle \widetilde{X}\right\rangle_s < +\infty$, $\forall t \geq 0$ (resp. $\int_0^t \left|h_{\overline{g}+s}\right| \left|d\widetilde{X}_S\right| < +\infty$). On définit l'intégrale stochastique de h par rapport à X et on la note :$_Q\int_0^t h_s \, dX_s = \rho\left(\int_0^t h_{s+\overline{g}} \, d\widetilde{X_S}\right)_t$

Remarque 2.1 (2.1)

1) La Définition 2.1 reste valable lorsque Q est une probabilité. En effet, dans ce cas : $D \equiv 1$ et $\overline{g} = 0$ $p.s.$

2) Il est à noter que l'intégrale stochastique sous Q définie ci-dessus,bien qu' elle satisfasse les propriétés habituelles de l'intégrale stochastique (propositions 2.3 et 2.4 ci-dessous), dépend non seulment de X, h et de la mesure Q ,mais aussi de la martingale D (plus précisément de l'ensemble H).L'intégrale$_Q \int h_s \, dX_s$ peut changer d'une filtration à une autre.Notons aussi que $_Q \int h_s \, dX_S$ est continue à droite sur $H^{\,c} \cup G$.La proposition suivante nous permet de passer de l'intégrale stochastique(dans le cas où elle est bien définie et finie) à l'intégrale sous Q.

Proposition 2.5 (2.3) . *Soit h un processus progressif.*

1) Si X est un processus càdlàg, à variation finie sous P et si pour tout $t \geq 0$, $\int_0^t |h_s| \, |dX_s|$ $< +\infty$, alors il est à variation finie sous Q et on a :

$$_Q\int_0^t h_s dX_s = \int_{\gamma t}^t h_s dX_s \quad p.p.s.$$

2) Si X est une $Q-$martingale uniformément intégrable et une $P-$semimartingale càdlàg, et si l'intégrale stochastique $I_t = \int_0^t h_s \, dX_s$ est bien définie et finie, alors $_Q\int h_s dX_s = I_t - I_{\gamma t}$.

3) Si X est une $Q-$martingale uniformément intégrable (resp. à variation finie sous$Q$) , alors $_Q\int h \;\; dX$ est aussi une $Q-$martingale uniformément intégrable (resp. à variation finie sous Q (sous les conditions habituelles de finitude de $\int h_{\cdot+g} \, d\widetilde{X}$).

1) Si X est à variation finie sous P , alors $(X_{\overline{g}+t})_{t>0}$ est aussi à variation finie sous Q et $\int_0^t h_{s+\overline{g}} \, dX_{s+\overline{g}} = \int_{\overline{g}}^{g+t} h_s \, dX_s$ et $\rho\left(\int h_{s+\overline{g}} dX_{s+\overline{g}}\right) = \int_{\gamma t}^t h_s \, dX_s$.

2) De la même façon que 1).

3) Si X est à variation finie sous Q , alors $\int_0^t h_{s+\overline{g}} \, d\widetilde{X}_s$ est à variation finie lorsque h satisfait $\int_0^t |h_{s+\overline{g}}| \left|d\widetilde{X_s}\right| < +\infty$, $\forall t \geq 0$.Si X est une $Q-$martingale uniformément intégrable, alors

$\int_0^t h_{s+\overline{g}}\, d\widetilde{X}_s$ est une $(P, (\mathcal{F}_{g+t}))$ −martingale qui s'annule en 0 . D'où $\rho\left(\int_0^t h_{s+\overline{g}}\, d\widetilde{X_s}\right) =_Q \int_0^t h_s$ dX_s est une $Q-$martingale (Théorème quotient de [1]).La linéarité de ${}_Q\int$ résulte de la linéarité de ρ .Il nous reste à montrer l'associativité de ${}_Q\int$ .Pour H et K convenablement choisis, on a :

$$
\begin{aligned}
{}_Q\int H_s K_s dX_s &= \rho\left(\int H_{s+\overline{g}}\, K_{s+\overline{g}} d\widetilde{X_s}\right) \\
&= \rho\left(\int H_{s+\overline{g}}\, d\left(\int_0^s K_{u+\overline{g}} d\widetilde{X_u}\right)\right) \\
&=_Q \int H_s\, d\left({}_Q\int K_s dX_s\right).
\end{aligned}
$$

Notre but maintenant, est de définir (pour une $Q-$martingale X) le processus croissant sous Q (qui sera noté $[X]^Q$) tel que $X^2 - [X]^Q$ soit une $Q-$martingale.

Proposition 2.6 (2.4) *Supposons que* $\mathcal{F}_g^+ = \mathcal{F}_g \vee \sigma\,(D_\infty > 0)$ *et soit* (σ_t) *un processus progressif nul en 0,tel que* $(\sigma_{\overline{gt}})_{t\geq 0}$ *soit une* $Q-$*martingale. Alors* $\sigma_g\ (Q) = Q\,(1)\cdot\delta_0$*,où 0 (dans* δ_0*)est la fonction constante nulle sur* $C\ (\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$.

Preuve. . Si σ est prévisible,alors $\exp(i\ u\ \sigma_{\overline{gt}})$est une $Q-$martingale.Si σ est progressif et $(\sigma_{\overline{gt}})$ est une $Q-$martingale,alors (d'aprés la Proposition 3.8.1de [1]), $\sigma_{\overline{gt}} = \alpha_{\overline{gt}}$ sur $H^{\ c}$ où α est un processus prévisible. Donc $\exp\,(i\ u\ \sigma_{\overline{gt}})\ D_t = \exp\,(i\ u\ \alpha_{\overline{gt}})\ D_t$ est une $Q-$martingale. On a aussi $\sigma^2_{\overline{gt}}$ est une $Q-$martingale.Dans la suite on va supposer que $\mathcal{F}_g^+ = \mathcal{F}_g \vee \sigma\,(\{D_\infty > 0\})$. ■

Remarquons que sous cette hypothèse,si $(\sigma_{\overline{gt}})$ est une $Q-$martingale,alors $(\sigma^2_{\overline{gt}})$ est aussi une$Q-$martingale.

Définition 2.3 (2.2) . *Soit* X *une* $Q-$*martingale uniformément intégrable.On définit le processus* $[X]^Q = \rho\left(\left[\widetilde{X}\right]\right)$.

Remarque 2.2 (2.2) .*On signale que* $[X]^Q$ *déoend de la filtration par rapport à laquelle* X *est une martingale.*

Proposition 2.7 (2.5)

(i) Le processus $[X]^Q$ est continu à droite, croissant sur toute axcursion de la martingale D.

(ii) $X^{\,2} - [X]^Q$ est une $Q-$martingale uniformément intégrable.

(i) d'apres le Théorème 4.2.1 de [1] , on a : (on note : $M := XD$),

$$[X]_t^Q = \int_{\gamma_t}^t \frac{1}{D_s^{\,2}} \left(d\,\langle M\,\rangle_s + X_s^{\,2} d\ \langle D\,\rangle_s - 2X_s\ d\ \langle M{,}D\,\rangle_s \right)$$

Notons : pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$A_t^k = \int_0^t \P_{\{|D_s| > \frac{1}{k}\}} \frac{1}{D_s^{\,2}} \left(d\,\langle M\,\rangle_s + X_s^{\,2} d\ \langle D\,\rangle_s - 2X_s\ d\ \langle M{,}D\,\rangle_s \right)$$

On a : $A_t^k - A_{\gamma_t}^k \to [X]_t^Q$ p.s. Soient T un temps d'arrêt et $(\xi_n)_{n\,\geq\,0}$ une suite de $\mathbb{R}^+$ qui décroît vers 0. $[X]^Q$ estcontinu en T sur l'ensemble$\{T \in H^{\,c}\}$, montrons qu'il est continu à droite en T sur $\{T \in H\,\}$. Posons $A_{n,k} = A_{T\,+\,\xi_n}^k \ - A_T^k$. On a $A_{n,k} \downarrow 0$ quand n tend vers $+\infty$,$\forall\ k \in \mathbb{N}^*$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup X_{T\,+\,\xi_N}^Q \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{k\to+\infty} A_{n,k} \leq \lim\limits_{k\to+\infty} \inf \lim\limits_{n\to+\infty} A_{n,k} = 0$.Ce qui montre que $[X]^Q$ est continue à droite.

(ii) $\widetilde{X}^{\,2} - \left\langle \widetilde{X} \right\rangle$ est une $(P - \mathcal{F}_{g\,+t})_{t\,>0}$ $-$martingale. D'où $\rho\left(\widetilde{X}^{\,2} - \left\langle \widetilde{X} \right\rangle\right)$ est une $Q-$martingale. Mais $\rho\left(\widetilde{X}^{\,2} - \left\langle \widetilde{X} \right\rangle\right)_t D_t = \left(X_t^{\,2} - [X]_t^Q\right) D_t$ .Donc $X^{\,2} - [X]^Q$ est une $Q-$martingale. On définit le crochet droit de deux $Q-$martingales X et X' par $[X, X']_t^Q = \rho\left(\left\langle \widetilde{X}\ , \widetilde{X}' \right\rangle\right)_t$. On a $[X\ , X']^Q = \frac{1}{4}\left([X + X']^Q - [X - X']^Q\right)$ et $[X + X']^Q = [X]^Q + [X']^Q + 2\,[X + X']$. On donne maintenant le théorème de caractérisation du processus $[]^Q$.

Théorème 2.2 (2.1) *$[X]^Q$ est l'unique processus adapté, continu à droite, croissant sur $[\overline{g}\ ,\ +\infty[$ et nulle sur H tel que $X^2 - [X]^Q$ soit une $Q-$martingale locale.*

Preuve. . Soit A un processus adapté continu à droite, croissant sur $[\overline{g}\ , +\infty[$ et nul sur H tel que $X_t^{\,2} - A_t$ soit une $Q-$martingale locale. Le procassus $\widetilde{X}_t^{\,2} - A_{t\,+g}$ est une $(P\ ,\ \mathcal{F}_{g\,+t})$ $-$martingale continue locale. D'après le Théorème 1.3, Chap. IV de [8] , on a $A_{\cdot+\overline{g}} - \left\langle \widetilde{X} \right\rangle$, d'où $\rho\,(A_{\cdot+\overline{g}}) = \rho\left(\left\langle \widetilde{X} \right\rangle\right)$. Comme A est optionnel et nul sur H , on a : $A \equiv [X]^Q$. ∎

Corollaire 2.1 (2.1) . *Soit X une $Q-$martingale uniformément intégrable.*

1) Si X est continue à variation quadratique finie, alors $[X]_t^Q = [X]_t - [X]_{\gamma t}$.

2) Si $[X]^Q \equiv 0$ alors $X\, 1_{H^c} = \sigma_{\overline{g}t}$ où σ est un processus prévisible.

3) Si T est un $\mathcal{F}-$temps d'arrêt , alors $\left[X^T\right]^Q = \left([X]^Q\right)^T - [X]^Q_{\gamma.\wedge T}$.

4) Si h un processus progressif tel que $E\left[\int\limits_0^t h^2_{\overline{g}+s} d\left\langle \widetilde{X}\right\rangle_s\right] < +\infty$, $\forall t \geq 0$. Pour toute $Q-$martingale uniformément intégrable X',on a :

$$[Y\ , X']^Q =_Q \int h_s d\left[X\ , X'\right]_s^Q \text{ où } Y =_Q \int h_s dX_s. \tag{(1)}$$

En particulier,

$$\left[{}_Q\int h_s\, dX_s\right]^Q =_Q \int h_s^2 d\left[X\right]_s^Q \textit{ et } Q\left({}_Q\int\limits_0^t h_s\, dX_s\right)^2 = Q\left({}_Q\int\limits_0^t h_s^2 d\left[X\right]_s^Q\right)$$

et

$$Q({}_Q\int_0^t h_s dX_s)^2 \quad = \quad Q({}_Q\int_0^t h_s^2 d\left[X\right]_s^Q) \tag{(2)}$$

5) Le processus $Y :=_Q \int h_s\, dX_s$ est l'unique $Q-$martingale uniformément intégrable qui s'annule sur H et qui satisfait la propriété (1) ci-dessus .

6) Si T est un $\mathcal{F}-$ temps d'arrêt, alors :

$$\begin{aligned} {}_Q\int h_s\, dX_s^T &=_Q \int h_s \P_{[0\ ,\ T]}(s)\, dX_s \\ &= \left[{}_Q\int h_s\, dX_s\right]^T - \left[{}_Q\int h_s\, dX_s\right]. \end{aligned}$$

Preuve. ■

1) Le processus $[X]_t - [X]\,\gamma_t$ est càdlage croissant sur $[\overline{g}\ ,\ +\infty[$, nul sur H et $X_t^2 - [X]_t + [X]\,\gamma_t$est une $Q-$martingale. En effet, X_{γ_t} est une $Q-$martingale (Lemme2.1) , d'où $X^2_{\gamma t}$ l'est aussi. Mais $X^2-[X]$ est une $Q-$martingale (voir Corollaire **1.1**,Chap. VI de [2]). Donc $X^2_{\gamma t}-[X]_{\gamma t}$ et $[X]\gamma_t$ sont deux $Q-$martingales.

2) Si $[X]^Q \equiv 0$, alors $\left\langle \widetilde{X} \right\rangle = 0$ et $\widetilde{X}$ est constant. Donc $\widetilde{X} = X_{\overline{g}}$ et $\rho\left(\widetilde{X}\right) = X_{\gamma_t}$ $¶_{H^c}(t) = X_t\, ¶_{H^c}(t) = \sigma_{\overline{g}\, t}\, ¶_{H^c}(t)$, avec σ prévisible en utilisant la Proposition **2.4.**

3) $\left([X]^Q\right)^T - [X]^Q_{\gamma_t \wedge T}$ est croissant sur $\overline{[g\ , +\infty[}$, continu à droite, s'annule sur H et (de la même façon que 1)) $X^{T\,2} - \left([X]^Q\right)^T - [X]^Q_{\gamma t \wedge T}$ est une $Q-$martingale on a :

$$[Y\ , X']^Q = \rho\left(\left\langle \widetilde{Y}\ , \widetilde{X'} \right\rangle\right)$$

$$= \rho\left(\int h_{s\, +\overline{g}} d\left\langle \widetilde{X}\ , \widetilde{X'} \right\rangle_s\right)$$

$$= \rho\left(\int h_{s\, +\overline{g}}\ d\,[X\ , X']^Q_{s\, +\overline{g}}\right)$$

$$=_Q \int h_s d\,[X\ ,\ X']^Q_s .$$

l'égalité (2) résulte du fait que $\left({}_Q\int h_s\ dX_s\right)^2 -_Q \int h_s^2\ d\,[X]^Q_s$ est une $Q-$martingale qui s'annule en 0 (on a $[X]^Q_0 = 0$ et ${}_Q\int_0^0 h_s\ dX_s = 0$).

5) Si Y et Y' sont de tels processus, alors (d'après le Théorème **2.2,** Chap. IV de [8]) , $\widetilde{Y} = \widetilde{Y'}$. D'où $Y = Y'$ par unicité de la fonction ρ (noton que si X est une$Q$ martingale, alors $X\ ¶_{H^c}$ est prévisible) .

6) Supposons que X s'annule sur H (voir la remarque ci-dessous) et montronsd'abord que $X^T =_Q \int ¶_{[0,T]}(s)\, dX_s$. Pour toute $Q-$martingale uniformément intégrable,On a :

$$\left[X^T\ , N\right]^Q_t = \left([X\ , N]^Q\right)^T_t - [X\ , N]^Q_{\gamma t \wedge T}$$

et

$${}_Q ¶_{[0,T]}(s)\, d\,[X\ , N]^Q_s = \rho\left[\int ¶_{[0,T]}(s+\overline{g})\, d\left\langle \widetilde{X}\ , \widetilde{N} \right\rangle_s\right]_t .$$

Mais :

$$\int_0^t \P_{[0,T]}(s + \overline{g})\, d\left\langle \widetilde{X} \ , \ \widetilde{N}\right\rangle_s = \P_{\{T \geq \overline{g}\}} \left\langle \widetilde{X} \ , \ \widetilde{N}\right\rangle_{(T-\overline{g})\wedge t}$$

$$= \P_{\{T \geq \overline{g}\}} [X \ , \ N]^Q_{(t+\overline{g})\wedge T} = \left[X^T \ , \ N\right]^Q_{t+\overline{g}}.$$

D'où , (grâce à **5**)), $X^T =_Q \int \mathbf{1}_{[0,T](s)} dX_s$ .L'associativité de $_Q\int$ nous donne le résultat.

Remarque 2.3 (2.3) *On a :* $_Q\int_0^t h_s\, dX_s = \int_0^t h_s\, d(X \ , \ X_\gamma)_s$ *et* $X - X_\gamma$ *est une* $Q-$*martingale nulle sur* H *.On donne maintenant la formule d'Itô pour des mesures signées.*

Théorème 2.3 (2.2) . *Soit* $X := \left(X^1 \ , \ \cdots \ , X^d\right)$ *un vecteur de* $Q-$*semimartingales continues à droite et* $F \in C^2\left(\mathbb{R}^d \ , \mathbb{R}\right)$ *. Alors* $F(X)$ *est une* $Q-$*semimartingale continue à droite et pour tout* $t \geq 0$ *,*

$$F(X_t) = F(X_{\gamma t}) + \sum_i {}_Q\int_0^t \frac{\partial F}{\partial \chi_i}(X_s)\, dX^i_s + \frac{1}{2}\sum_{i,j} {}_Q\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial \chi_i\, \partial \chi_j}(X_s)\, d\left[X^i \ , X^j\right]^Q_s,$$

(on suppose que les parties martingales sont uniformément intégrables)

Preuve. . Il suffit de montrer que : ■

$$X_t Y_t = X_{\gamma t} Y_{\gamma t} + {}_Q\int_0^t X_s dY_s + {}_Q\int_0^t Y_s dX_s + [X \ , \ Y]^Q_t$$

On a :

$$X_t Y_t = X_{\gamma t} Y_{\gamma t} + \rho\left(X_{t+\overline{g}} Y_{t+\overline{g}} - X_{\overline{g}} Y_{\overline{g}}\right).$$

Mais $X_{t+\overline{g}}$ et $Y_{t+\overline{g}}$ sont deux $(\mathcal{F}_{g+t})-$*semimartingale* ,danc : $X_t Y_t = X_{\gamma t} Y_{\gamma t} + \rho\left(\int_{\overline{g}}^{t+\overline{g}} X_s\, dY_s + \int_{\overline{g}}^{t+\overline{g}} Y_s\, d\right.$

le résultat .

Remarque 2.4 (2.4) .*Si P est une probabilité sur $\mathcal{F}_\infty$, telle que $Q \ll P'$ et $D'_t := \frac{dQ}{dp'} |_{F_t}$ avec $D'_\infty \neq 0$ $P\prime$ p.s., le calcul stochastique fait ci-dessus, reste vrai en remplaçant la martingale $D = \left(\frac{dQ}{d|Q|} |_{\mathcal{F}_t}\right)_{t \leq 0}$ par $(D\prime)_{t \leq 0}$. Voici le Théorème de Girsanov pour des mesures signées :*

Théorème 2.4 (2.3) . *Toute $P-$ semimartingale est une $Q-$ semimartingale. Plus précisément, si X est une $P-$martingale locale, alors $X_t^* = X_t -_Q \int_0^t \frac{d \langle X \ , D \rangle_s}{ds}$ est une$Q-$martingale locale.*

Preuve. Triviale à partir du Théorème 4.1.2 de [1]. ■

Proposition 2.8 (2.6) *Si M est une $(P,\mathcal{F})-$martingale qui a la propriété de représentation prévisible (PRP) dans la filtration $\mathcal{F}$, alors $\rho\left(\widehat{M}\right)$ a la PRP par rapport à $(Q,\mathcal{F})$, où $M_t = M_{t+\overline{g}} - M_{\overline{g}} - \int_{\overline{g}}^{t+\overline{g}} \frac{d \langle M \ , D \rangle_s}{D_s}$.($\rho\left(\widehat{M}\right)$ a la PRP sous Q si, pour toute $Q-$ martingale X , on a : $\forall t \geq$, $X_t = X_{\overline{g_t}} +_Q \int_0^t \eta_s d\rho\left(\widehat{M}\right)$ où $\left(\eta_{t+\overline{g}}\right)_{t \geq 0}$ est un processus $(\mathcal{F}_{g+t})_{t \geq 0} -$ prévisible.)*

Preuve. D'aprés le Théorème 4.1.2 de [1], $\rho\left(\widehat{M}\right)$ est une $Q-martingale$. Soit X une $Q-martingale$, alors, en appliquant la formule d' Itô, on a : $M_{t+\overline{g}} = X_{\overline{g}} + \int_0^t \frac{\widetilde{D_s}\, d\,\widehat{N_s} - \widetilde{N_s}\, d\,\widehat{D_s}}{\widetilde{D_s}^2}$,où $N = DX$. D'où $X_t = X_{\gamma_t} +_Q \int_0^t \frac{D_S\, d\,\rho\left(\widehat{N}\right)_s - N_s d\rho\left(\widehat{D}\right)_s}{\widetilde{D_s}^2}$.Reste à montrer que $\widehat{N}$ est une intégrale stochastique par rapport à $\widehat{M}$. Si $N_t = \int_0^t h_s \, dM_s$ pour un processus h, $\mathcal{F}$-prévisible,alors $\hat{N}_t = \int_0^t h_{s+\overline{g}} \, d\hat{M}_s$.En utilisant le calcul stochastique sous Q, on retrouve dans la proposition suivanteun résultat de [3] : ■

Proposition 2.9 (2.7) *Posons $C_t = v.p \int_0^t \frac{d \langle D \rangle_s}{D_s}$. Pour toute fonction f de classe C^1,on a :*

$$D_t f\left(C_t\right) = D_0 f \ \left(C_0\right) + \int_0^t f\left(C_s\right) dD_s + \int_0^t f'\left(C_s\right) d \langle \ D \ \rangle_s .$$

Preuve. On va montrer la Proposition pour $f\ (x) = x$ et le cas général se fait de façon similaire.

D'aprés le Théorème 2.2, on a : ■

$$D_t C_t = D_{\gamma_t} C_{\gamma_t} +_Q \langle D \rangle + \int_0^t D_s \frac{d\ \langle D \rangle_s \cdot}{D_s}.$$

D'où

$$D_t C_t = \int_0^t C_s dD_s + \langle\ D\ \rangle_s - \left(\int_0^{\gamma_t} C_s\ d\ D_s + \langle\ D\ \rangle_{\gamma_t} \right)$$

$\left(D_{\gamma_t} = 0 \text{ si } \gamma_t \neq 0 \text{ et } C_0 + 0\right)$. Mais $D_t\ C_t$ est continu, donc $\int_0^{\gamma_t} C_s\ d\ D_s + \langle\ D\ \rangle_{\gamma_t}$ est continu, en particulier il est continu en d_t=inf $\{s > t,\ D_s = 0\}$ .Donc :

$$\lim_{\xi \downarrow 0} \left(\int_0^{\gamma(d_s - c)+} C_s\ d\ D_s + \quad \langle\ D\ \rangle_{\gamma_t - \xi} \right) \P_{\{d_t\ \leq +\infty\}}$$

$$= \left(\int_0^{d_t} C_s\ d\ D_s + \langle\ D\ \rangle_{d_t} \right) \P_{\{d_t\ \leq +\infty\}}.$$

Alors

$$-\int_{\overline{g_t}}^{d_t} C_s dD_s = \langle\ D\ \rangle_{d_t} - \langle\ D\ \rangle_{\overline{g_t}}.$$

Danc

$$\int_0^{d_t} C_s dD_s + \langle\ D\ \rangle_{d_t} = 0$$

et puis

$$\int_0^{\gamma_t} C_s dD_s + \langle\ D\ \rangle_{\gamma_t} = 0, \forall t \geq 0.$$

Voici maintenant le contre exemple promis à la suite de la Proposition 1.3 :

Considérons W la mesure de Wiener sur C ([0,1] ,$\mathbb{R}$) et (B_t) le processus canonique sur cet espace, qui est donc un mouvement brownien sous W . Posons $Q := B_1 \cdot W$ et $B_t^* := X_t - v.p \int_0^t \frac{d_s}{B_s}$.Le processus B^* est une $Q-$ *martingale* qui a la PRP par rapport àQ (proposition 2.7 $Y_t :=_Q \int_0^t \frac{1}{\sqrt{|B_s|}} dB_s^*$. Comme : $Q \int_0^t \frac{1}{|B_s|} ds < +\infty$ (Lemme 4.1. de [1]), Y est une $Q-$martingale. Mais le processus de variation quadratique de Y est égal à $\int_0^t \frac{1}{|B_s|} ds = +\infty$, $\forall t > 0$.

2.2.1 3. Exemples et applications :

Exemple 2.1 (3.1) *On considère la mesure de Wiener W sur C ([0,1]) et (X_t) le processus canonique sur cet espace, qui est donc un mouvement brownien sous W .On note :*

$\mathcal{F}_t \equiv \sigma(X_s\ ,\ s\ \leq t)_{t \leq 1}$ *la filcation naturelle de* X . *On définit la mesure signée* $Q = X_1 \cdot W$. *On a :* $Q(1) = 0$ (*on suppose que* $X_0 = 0$). *D'aprés le Théorème1.1 , on a :* $Q\ |_{\sigma(M)}= 0$ *pour tout Q-mouvement brownien* M.

Considérons les deux classes suivantes :

$$C_1 = \{A \in \mathcal{F}_1, Q(A) = 0\},$$

$$C_2 = \{A \in \mathcal{F}_1, W\ \ (\P_A.sgnX) = 0\}$$

(i) $\Omega \in C_j\ ,\ j = 1{,}2.$

(ii) Si $A \in C_j$, alors $A^c \in C_j$, $j = 1{,}2.$

(iii) Si (A_n) est une suite croissante d'éléments deC_j ,alors : $\underset{n}{\cup} A_n \in C_j$, $j = 1{,}2.$

(iv) Si A et B sont deux ensembles disjoints de C_j ,alors : $A \cup B \in C_j\ \ ,\ j = 1{,}2.$

Preuve. . Évident. ∎

Lemme 2.2 (3.2)

(i) $\sigma(C_1) = \mathcal{F}_1$ (ce qui montre que C_1n'est pas une tribu).

(ii) $C_1 = \{A\ ,\ A$ est $P\prime -$ indépendant de sgn $X\}$. où $P\prime = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,|X_1| \cdot W.$

Preuve. ∎

(i) Il est facile de voir que la tribu ς_1 de la filtration de Goswami-rao de X est incluse dans C_1 (car Q est impaire : $Q\ (H\ (X))) = -Q\ (H\ (-X)))$.Soit $X_t^{\ *} = X_t - v.p \int_0^t \frac{1}{X_s} ds$. X^* est un Q-mouvement brownien, d'où $\sigma(X^*) \subset C_1$.On a, si $g_1 = \sup\{t < 1,\ X_t = 0\}$, alors $|X_{t+g_1}| = sgn\ X_1\left(X^*_{t+g_1} - X^*_{g_1}\right) + \int_0^t \frac{1}{|X_{t+g_1}|} ds$.Comme $X^*_{t+g_1} - X^*_{g_1}$ est un $(P\prime,\mathcal{F}_{g_1+t})$-mouvement brownien,on a :

$$\sigma\left(|X|_{(s+g_1)\wedge 1}\ ,s \geq 0\right) = \sigma\left(sgnX\left(X^*_{(s+g_1)\wedge 1} - X^{\ *}_{g_1}\right),s \geq 0\right).$$

De même façon :

$$\sigma\left(|X|_{(s+g_t)\wedge 1}\ ,s \geq 0\right) = \sigma\left(sgnX_t\left(X^*_{(s+g_t)\wedge 1} - X^*_{g_1}\right),s \geq 0\right)\quad ,\quad \forall t \in [0{,}1].$$

Donc :

$$\sigma(|X|) \quad \vee \sigma(X^{*}) \ = \mathcal{F}_1 \quad \subset \sigma(C_1).$$

(ii) Évident.

QUESTION 3.1. Peut-on caractériser plus explisitement les classes C_1et C_2 ?

Exemple 2.2 (3.2) . *Martingales mesures et mesures signées.Considérons W la mesure de Wiener sur C $([0,1],\mathbb{R})$ et (X_t) le processus canonique sur cet espace, qui est donc un mouvement brownien sous W. On note $(\mathcal{F}_t := \sigma\{X_s, s \leq t\})_{t \leq 1}$ la filtration naturelle du processus canonique, et on concidère :*

$$X_t^{\emptyset} := X_t - \int_0^1 \emptyset_s ds, \tag{(3)}$$

pour un processus $\{\emptyset_s\}$ $(\mathcal{F}_s)$ −prévisible, dont on suppose que :

$$\int_0^1 |\emptyset_s| \, ds < \infty \tag{(4)}$$

On se pose ensuite la question suivante :

QUESTION 3.2.

Existe-il une mesure de probabilité $\widetilde{W}$ équivalente au sens de Radon-Nikodym à W telle que sous $\widetilde{W}$, $(X_t{}^{\emptyset}, t \leq 1)$ soit une $(\mathcal{F}_t)$ − *martingale* ?

Posons $\widetilde{W}\mid_{\mathcal{F}_t} = D_t \cdot W\mid_{\mathcal{F}_t}$,et supposons que la réponse à la question soit affirmative. Alors, nécessairement on doit avoir :

$$\frac{d\langle D \ , \ X\rangle_s}{D_s} = \emptyset_s ds, \tag{(5)}$$

d'où,$D_t = 1 + \int\limits_0^t D_s \emptyset_s dX_s$,et on doit avoir :

$$\int\limits_0^t \emptyset_s^2 ds < \infty \ p.s, \tag{(6)}$$

Si on a seulement l'hypothèse (4), et non pas (6) ,on peut se demander s'il n'est pas possible de réaliser le même type de construction, mais avec

$$\widetilde{W} \mid_{\mathcal{F}_t} = \Delta_t \cdot W \mid_{\mathcal{F}_t}, \tag{(7)}$$

(Δ_t) pouvant être signée. La ralaxation de la condition de stricte positivité pouvant peyt-être permettre d'atteindre les processus $\emptyset$ satisfaisant seulement (4) .Puisque l'on a supposé que (Δ_t) peut changer de signe, autant faire commencer (Δ_t) en 0 au temps 0.Notons donc : $\Delta_t = \int_0^t \delta_s dX_s$,et l'identité (5) avec Δ au lieu de D va nous donner l'équation :

$$\frac{\delta_s}{\Delta_s} = \emptyset_s. \tag{(5')}$$

Une sous-question est donc maintenant posée :

QUESTION 3.3.

Pour quelles martingales continues (Δ_t) telles que $\Delta_0 = 0$,a-t-on:

$$\int_0^t \frac{|\delta_s|\, ds}{|\Delta_s|} < \infty? \tag{(8)}$$

Supposons que $\{s,\ \delta_s = 0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle, on peut alors écrire :

$$\int_0^t \frac{|\delta_s|\, d_s}{|\Delta_s|} \equiv \int_0^t \frac{\delta_s^2 ds}{|\delta_s|\ |\Delta_s|} \equiv \int_0^t \frac{(d\langle\Delta\rangle_s)}{|\delta_s|\,|\Delta_s|} = \int_0^{\langle\Delta\rangle_t} \frac{du}{|\delta_{T_u}|\,|\beta_u|}, \tag{(9)}$$

où (T_u) est l'inverse de $(\langle\Delta\rangle_t\ ,\ t \geq 0)$ et $(\beta_u\ ,\ u \geq 0)$ est le mouvement brownien de DDS attaché à (Δ_t).Remarquons maintenant que si le processus $(\delta_s\ ,\ s \geq 0)$ est localement borné, alors d'après (9) par example, la propriété d'intégrabilité (8) ne peut être satisfaite.Néanmoins, il existe des processus prévisibles (δ_s) tels que (8) soit satisfaite. En effet ,Voici un exemple : Soit Δ la martingale $\Delta_t = \int_0^t \frac{1}{\Delta_s^{2\ n}} dX_s$, Δ est adaptée à $\mathcal{F}$ (d'après le Théorème **3.3,** Chap. III de [2]).Si Y est une $Q-$semimartingale $Y_t = X_t - \int_0^t \frac{1}{\Delta_s^{2n+1}} ds$, alors $\frac{d\langle \Delta , Y \rangle_s}{\Delta_s} = \frac{ds}{\Delta_s^{2n+1}}$, avec $\int_0^t \frac{1}{|\Delta_s|^{2n+1}} ds < +\infty$ .D'où, Y est une $Q-$martingale, où $Q = \Delta_1 \cdot \mathbf{P}$ et $\int_0^t \frac{1}{|\Delta_s|^{4n+1}} ds = +\infty$ (sinon $L_t(\Delta) = 0$).

Exemple 2.3 (3.3) . *Mesures complexes.*

a) Considérons W la mesure de Wiener sur $\Omega := C([0,1], \mathbb{R})$, X le processus des coordonnées et $\mathcal{F}$ la filtration de X .Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, posons $T_{-a} = \inf\{t \geq 0 , X_t = -a\}$. Il est bien connuque, sous $\mathbf{P}_a^{(3)} := \frac{(X_{1 \wedge T_{-a}} + a)}{a} \cdot W$, $(X_t + a)_{t \geq 0}$ est un BES (3) issu de a .Pour définir un processus "type Bessel" à valeurs complexes, on procède de la même façon que ci-dessus .Un processus adapté χ est dit une martingale pour une mesure complexe $Q := Q_1 + iQ_2$ avec Q_1 et Q_2 deux mesures réelles, si χ est une martingale pour Q_1 et pour Q_2 .Considérons la mesure complexe suivant : $Q^z = \frac{(z + X_1)}{z} \cdot W$, avec $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.Posons $\widehat{X}_t = X_t - C_t$ où $C_t = \int_0^t \frac{ds}{z + X_s}$.

Proposition 2.10 (3.1)

(i) $\widehat{X}$ est une Q^z-martingale issue de 0 et $\widehat{X}$ est un mouvement brownien réel sousQ^z .

(ii) On considère l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\chi_t = z + B_t + \int_0^t \frac{1}{\chi_s} ds, \tag{(E)}$$

où $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ et B est un mouvement brownien réel .$\left((\Omega , \mathcal{F}, Q^z), z, \widehat{X}\right)$ est une solution de cette équation qui n'est pas forte.

Preuve. On vérifie facilement que $\widehat{X}(z + X)$ est une $W-$martingale. ■

(i) Notons $a := \Re\frac{1}{z}$ et $b := \Im\frac{1}{z}$, $Q_1^z := (1 + aX_1) \cdot W$ et $Q_2^z := bX_1 \cdot W$. On a : $Q^z = Q_1^z + iQ_2^z$. $\widehat{X}$ est une Q_1^z-martingale avec $\left\langle \widehat{X} \right\rangle_t = t$. D'où $\widehat{X}$ est un Q_1^z-mouvement brownien réel.De le même façon, $Q_2^z\mid_{\sigma(\widehat{X})}=0$ d'après le Théorème **1.1.** Ce qui montre que, pour une fonction mesurable F bornée , on a : $Q^z\left(F\left(\widehat{X}\right)\right)=Q_1^z\left(F\left(\widehat{X}\right)\right)=W(F)$.

(ii) On a clairement que $\sigma\left(\widehat{X}\right)\subsetneqq\sigma(X)$, car sur $\sigma\left(\widehat{X}\right)$, Q^z est une probabilité et est sur $\sigma(X)$ une mesure complexe $(Q^z(X_1^2)=z)$.D'où, $X+z$ est une solution de l'équation (E) qui n'est pas forte.

b) Soit $(\Omega,\ \mathcal{F},\ W_z^{\mathbb{C}})$ l'éspace canonique d'un mouvement brownien plan $Z=X+iY$ issu de $z=a+ib\in\mathbb{C}$ .On considère la mesure complexe : $\widehat{Q}=Z_1\cdot W_z^{\mathbb{C}}$. Remarquons que sous $\widehat{Q}$, le processus des coordonnées Z est une martingale (et donc Z^n est aussi une $\widehat{Q}-$martingale pour tout $n\in\mathbb{N}$).La proposition suivante nous donne une caractérisation des mesures complexes Q qui sont absolument continues par rapport à $W_z^{\mathbb{C}}$ et telles que Z soit une $Q-$martingale.

Proposition 2.11 (3.2) *Si Q est une mesure sur $C([0,\ 1],\mathbb{C})$ telle que $Q\ll W_z^{\mathbb{C}}$, alors Z est une $Q-$martingale si et seulement si :$D_t:=\frac{dQ}{dW_z^{\mathbb{C}}}\mid_{\mathcal{F}_t}=\delta+\int_0^t u_s dZ_s$,où $\delta\in\mathbb{C}$ et u un processus $\mathcal{F}-$prévisible.*

Preuve. Il existe deux processus prévisibles u et v tels que $D_t=\delta+\int_0^t u_s\ dZ_s+\int_0^t u_s\ d\overline{Z_s}$. $Z\ D$ est une $W_z^{\mathbb{C}}-$martingale si et seulement si $v_t=0\ \ dt\ dP\ p.s.$ ■

(i) $\widehat{Z}_t=\overline{Z_t}-2\int_0^t\frac{1}{Z_s}ds$ est une $\widehat{Q}-$martingale et on a :si $z=0$, alors $\widehat{Q}\mid_{\sigma(\widehat{Z})}=0$;si $z\neq 0$, alors $\widehat{Z}$ est un mouvement brownien plan sous $\frac{1}{z}\cdot\widehat{Q}$.

(ii) Si $z\neq 0$, le triplet $\left(\left(\Omega\ ,\mathcal{F}\ ,\widehat{Q}\right),\overline{Z}\ ,\widehat{Z}\right)$ est une solution de l'équation différentielle stochastique : $\chi_t=z+B_t+\int_0^t\frac{d_s}{\overline{\chi}_s}$ où B est un mouvement brownien plan.

Preuve. ■

(i) En appliquant la formule d'Itô, on obtient facilement que pour tout $t\geq 0$, $\widehat{Z}_tZ_t=M_t+\langle Z\ ,\overline{Z}\rangle_t-2\int_0^t\frac{Z_s}{Z_s}ds=M_t$,où M est une $W_z^{\mathbb{C}}-$martingale.On a :

$$\widehat{Q} = X \cdot W_z^{\mathbb{C}} + iYW_z^{\mathbb{C}} = \widehat{Q}_1 + i\widehat{Q}_2,$$

$$\left\langle R\widehat{Z} \right\rangle_t = \left\langle \widehat{Z} \right\rangle = t \text{ et } \left\langle R\widehat{Z}\ , \zeta\widehat{Z} \right\rangle_t = 0$$

D'où $\widehat{Z}$ est un $\frac{1}{a}\widehat{Q}_1$ et $\frac{1}{b}\widehat{Q}_2$−mouvement brownien plan (si a et b sont différents de $\mathbf{0}$) . Si F est une fonction mesurable borné, alors

$$\widehat{Q}\ (F(Z)) = aW_z^{\mathbb{C}}\ (F) + ibW_z^{\mathbb{C}}(F)$$

$$= zW_z^{\mathbb{C}}(F).$$

Remarque 2.5 (3.1)

Dans les derniers mois, nous avons vu au moins deux sources d'intérêt pour des processus complexes, ou des mesures complexes proches de ceux que nous avonsconsidérés dans ce papier ; citons seulement les travaux récents de Lawer-Schramm-Werner [7] où l'équation (E) ci-dessus joue un rôle important, ainsi que Jarrow(1999), dans : Review of Finance Studies, où figurent certaines mesures signées.

Chapitre 3

Références

[1] Azéma J., Yor M. (1992) : Sur les zéros des martingales continues, Sém. Pro.XXVI, Lec. Not. in MATH. 1526, p. 248-306, Springer.

[2] BEGHDADI-SAKRANI S. (2000) : Martingales continues, filtration faiblement brownienne et mesures signées, Thèse de l'Univ. P. et M. Curie, Paris.

[3] BERTON J. (1989) : Application de la théorie spectrale des cordes vibrantes aux fonctionnelles additives principales d'un brownien réflichi. Ann I.H.P.25, 3, p.307-323.

[4] BIANE PH., YOR M. (1987) : Valeurs principales associées aux temps locaux browniens, Bull. Sc. Math. 2ème série, 111, p. 23-101. Not. in Math. 1526, p.248-306, Springer.

[5] DELLACHERIE C., MEYER P. A. (1980) : Probabilités et potentiel, Chap. V à VIII, Théorie des martingales, Hermann.

[6] FÖLLMER H. (1981) : Calcul d'Itô sans probabilités, Sém. Pro. XV, Lec. Not. in Math. 850, p. 143-150, Springer.

[7] LAWER G. F., SCHRAMM O., WERNER W. : Values of Brownian intersection exponents I : Half-plane exponants, à paraitre.

[8] REVUZ D., YOR M. (1994) : Continuous Martingales and Brownian Motion, second edition, Grundlegren der mathematischen Wissenschasten, Springer.

[9] RUIZ DE CHAVEZ J. (1984) : Le Théorème de Paul Lévy pour des mesure signées Sém. Pro. XVIII, Lec. Not. in Math. 1059, p. 245-255, Springer.

[10] RUSSO F., VALLIOIS P. Stochastic calculus with respect to continuous finite quadratique variation processes à paraître.