République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP et Analyse Numérique**

Par : **MAZI Asma**

Intitulé

Contrôlabilité d'équations différentielles dans les espaces de Banach

Dirigé par : Pr. BADRAOUI Salah

Devant le jury

Président	**Pr. Boussetila Nadjib**	**Univ. 8 Mai 1945 Guelma**
Examinateur	**Dr. Berhail Amel**	**Univ. 8 Mai 1945 Guelma**

Session Juin 2018

Remerciement

Je remercie avant tout Allah, le tout puissant de m'avoir aidé pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements et présenter mon plus profond respect à mon encadreur : Monsieur S.badraoui.

A mes chers parents secrets de ma force merci pour tous vos sacrifices pour que vos enfants Grandissent prospérent ,Merci d'être tout simplement mes parents.

Je Veux dèdie cette mémoire A mon mari et mon ami Badr

Je le remercie pour Leur encouragement à compléter ce travail

Je dois cette réussite A mes sœurs : hanane, maissa et khadidja et je suis fière de vous l'offrir

Je vous dèdie se travail aussi A mes cher frères : oussama et adem

A mes chers amies : nadjiba ,amani, amina ,abir ,khadidja et sarra . nesrine… Merci pour vos encouragements

Je donne aussi une spécial dédicace Pour ma copine et ma ɜocur Nahla rabi yarhamha

Je tiens également à remercier toutes les personnes qui m'ont enseignées ,et toutes les personnes qui m'ont aidées durant ma formation.

Table des matières

Introduction

La théorie du contrôle (ou commande) analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères.

Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie...

L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation : contrôle optimal.

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles,intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques, etc.

Dans ce mémoire on se limite à étuider la contrôlabilité de systèmes linéaires autonôme en dimension finie et en dimension infini en fournissant de critères qui permettent de déterminer si ces systèmes sont contrôlables ou non.

Chapitre 1

Controlabilité des équations différentielles linéaires en dimension finie

Soit le sysème linéaire de contrôle suivant :

$$u'(t) = Au(t) + Bv(t) \tag{S}$$

où

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \tag{Sa}$$

$$u : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{Sb}$$

est une fonction.

$$B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \tag{Sc}$$

$$v : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^m \tag{Sd}$$

est une application continue.

Définition. Le système (S) est controlable sur [0,T] si :

Pour tout $u^0, u^1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ qui tranfere u^0 à u^1 au temps $T > 0$, c'est-à-dire : $u(T, u^0, v) = u^1$, où $u(t, u^0, v)$ est la solution de (S) avec la condition initiale :

$$u(0) = u^0 \tag{S0}$$

Donc :

$$u(t, u^0, v) = e^{At}u^0 + \int_0^t e^{A(t-s)} Bv(s)ds \tag{1}$$

Si on note par :

$$L_T : L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

l'application définie par :

$$L_T v = \int_0^T e^{A(T-s)} Bv(s)ds \tag{2}$$

la solution s'écrit :

$$u(t, u^0, v) = e^{At}u^0 + L_t v \tag{3}$$

On note ici que l'opérateur L_T est linéaire et est continu.

On a démontré dans le cours le résultat suivant :

Théorème 1. (Caractérisation de la contrôlabilité)

lesystème (S) estcontrôlable au temps $T > 0$

$\Longleftrightarrow$ l'opérateurlinéaire L_T est surjectif

$\Longleftrightarrow$ l'opérateuradjoint $L_T^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ est injectif.

L'opérateur L_T^* est défini par :

$$(L_T^* u)(.) = B^* \left(e^{A(T-.)}\right)^* u \tag{4}$$

où B^* est la transposée de la matrice B.
$\left(e^{A(T-s)}\right)^*$ est la transposée de la matrice $e^{A(T-s)}$.

Dans ce qui suit on va donner une autre caractérisation de la contrôlabilité de (S) :

Théorème 2. (2ème Caractérisation de la contrôlabilité)

le système (S) est contrôlable au temps $T > 0 \Longleftrightarrow$

$$\text{la matrice } \; Q_T \equiv L_T L_T^* \equiv \int_0^T e^{A(T-s)} B B^* \left(e^{A(T-s)}\right)^* ds \; \text{ est inversible}$$

La matrice Q_T se nomme : le gramien de controlabilité de (S).

Démonstration

Etape 1. Montrons que :

$$L_T L_T^* \equiv \int_0^T e^{A(T-s)} B B^* \left(e^{A(T-s)}\right)^* ds \tag{5}$$

On a :

$$L_T L_T^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

D'après (4) puis (2) :

$$\begin{aligned} L_T L_T^* u &= L_T \left[B^* \left(e^{A(T-s)}\right)^* u\right] \\ &= \int_0^T e^{A(T-s)} B B^* \left(e^{A(T-s)}\right)^* u \, ds \end{aligned}$$

d'où la relation (5).

Etape 2. On démontre que :

$$L^2(0,T;\mathbb{R}^m) = \operatorname{Im} L_T^* \overset{\perp}{\oplus} \ker L_T \tag{6}$$

Il est connu que dans un espace de Hilbert H on a un sous espace fermé $M \subset H$, alors on a :

$$H = M \overset{\perp}{\oplus} M^\perp \tag{7}$$

Comme $\operatorname{Im} L_T^*$ est un sous espace de $L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ de dimension finie, alors $\operatorname{Im} L_T^*$ est fermé.

D'après (7) :

$$L^2(0,T;\mathbb{R}^m) = \operatorname{Im} L_T^* \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Im} L_T^*)^\perp \tag{8}$$

Mais :

$$\begin{aligned} v \in (\operatorname{Im} L_T^*)^\perp &\Longleftrightarrow \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in \operatorname{Im} L_T^* \\ &\Longleftrightarrow \langle v, L_T^* y \rangle = 0, \forall y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$\iff \langle L_T v, y \rangle = 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$\iff L_T v = 0 \iff v \in \ker(L_T)$$

ce qui montre que :

$$(\mathrm{Im}\, L_T^*)^\perp = \ker(L_T) \tag{9}$$

De (9) dans (8) on obtient (6).

Etape 3. La restriction de L_T à l'image de $\mathrm{Im}\, L_T^*$ est une application bijective entre $\mathrm{Im}\, L_T^*$ et $\mathrm{Im}\, L_T$.

c-à-d :

pour tout $y \in \mathrm{Im}\, L_T$ $(\subset \mathbb{R}^n)$, il existe un seul élément $u \in \mathrm{Im}\, L_T^*$ $(\subset L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$: $L_T u = y$.

Soit $L : \mathrm{Im}\, L_T^* \longrightarrow \mathrm{Im}\, L_T$ défini par :

$$Lv \equiv L_T v = y \tag{10}$$

Montrons que L est une application bijective.

L est surjective :

Soit $y \in \mathrm{Im}\, L_T$:

$$\exists v^* \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)\ t.q. : y = L_T v^* \tag{11}$$

Mais on a d'après (6) : $L^2(0,T;\mathbb{R}^m) = \mathrm{Im}\, L_T^* \overset{\perp}{\oplus} \ker L_T$, donc :

$$\exists v \in \mathrm{Im}\, L_T^*,\ \widehat{v} \in \ker L_T : v^* = v + \widehat{v} \tag{12}$$

De (11) et (12) :

$$y = L_T(v + \widehat{v}) = L_T v \tag{13}$$

Donc, pour tout $y \in \mathrm{Im}\, L_T$, il existe $v \in \mathrm{Im}\, L_T^* : y = L_T v$, ce qui montre que L est surjectif.

L est injective :

Soit $v \in \ker L$, alors $v \in \mathrm{Im}\, L_T^*$, ce qui implique que :

$$\exists y \in \mathbb{R}^n : L_T^* y = v$$

donc $v \in \ker L \cap \operatorname{Im} L_T^* = \{0\}$, par conséquent $v = 0$.

Etape 4. Montrons que :

$$\operatorname{Im} L_T L_T^* = \operatorname{Im} L_T \tag{14}$$

On a :

$$\operatorname{Im} L_T = \Big\{y \in \mathbb{R}^n \text{ t.q } \exists v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m) : y = L_T v\Big\}$$

D'après l'étape 3 et comme $y \in \operatorname{Im} L_T$, alors il existe $\widehat{v} \in \operatorname{Im} L_T^* : y = L_T \widehat{v}$, donc :

$$\operatorname{Im} L_T = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ t.q } \exists \widehat{v} \in \operatorname{Im} L_T^* : y = L_T \widehat{v}\}$$

et comme $\widehat{v} \in \operatorname{Im} L_T^* : \widehat{v} = L_T^* x$ où $x \in \mathbb{R}^n$, donc :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} L_T &= \{y \in \mathbb{R}^n \text{ t.q } \exists x \in \mathbb{R}^n : y = L_T\left(L_T^* x\right)\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \text{ t.q } \exists x \in \mathbb{R}^n : y = L_T L_T^* x\} \\ &= \operatorname{Im} L_T L_T^*\end{aligned}$$

Etape 5. Montrons que :

$$\operatorname{Im} L_T L_T^* = \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow Q_T \text{ est inversible} \tag{15}$$

D'après le théorème 1 : (S) est controlable au temps $T \Longleftrightarrow \operatorname{Im} L_T = \mathbb{R}^n$ et comme $\operatorname{Im} L_T = \operatorname{Im} L_T L_T^*$ (d'après 14) ; alors :

$$(S) \text{ est controlable au temps } T \Longleftrightarrow \operatorname{Im} L_T L_T^* = \mathbb{R}^n \tag{16}$$

et comme $L_T L_T^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, alors est surjective $\Longrightarrow L_T L_T^*$ est bijective, donc

$$\begin{aligned}(S) \text{ est controlable au temps } T &\Longleftrightarrow L_T L_T^* \text{ est bijective} \\ &\Longleftrightarrow \det L_T L_T^* = \det Q_T \neq 0\end{aligned}$$

Exemple Illustratif.

Soit le sstème de contrôle :

$$u'(t) = Au(t) + Bv(t) \tag{S}$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$Q_T = \int_0^T e^{A(T-s)} BB^* \left(e^{A(T-s)}\right)^* ds,$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$e^{A(T-s)} = \begin{pmatrix} e^{T-s} & 0 \\ 0 & e^{T-s} \end{pmatrix} \text{ et } \left(e^{A(T-s)}\right)^* = \begin{pmatrix} e^{T-s} & 0 \\ 0 & e^{T-s} \end{pmatrix}$$

et

$$e^{A(T-s)}B = \begin{pmatrix} e^{T-s} & 0 \\ 0 & e^{T-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{T-s} \\ 5e^{T-s} \end{pmatrix},$$

$$B^* \left(e^{A(T-s)}\right)^* = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{T-s} & 0 \\ 0 & e^{T-s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{T-s} & 5e^{T-s} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} e^{A(T-s)} BB^* \left(e^{A(T-s)}\right)^* &= \begin{pmatrix} 3e^{T-s} \\ 5e^{T-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{T-s} & 5e^{T-s} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9e^{2(T-s)} & 15e^{2(T-s)} \\ 15e^{2(T-s)} & 25e^{2(T-s)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme :

$$\int_0^T e^{\alpha(T-s)} ds = \frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha T} - 1\right),$$

$$Q_T = \begin{pmatrix} \frac{9}{2}\left(e^{2T}-1\right) & \frac{15}{2}\left(e^{2T}-1\right) \\ \frac{15}{2}\left(e^{2T}-1\right) & \frac{25}{2}\left(e^{2T}-1\right) \end{pmatrix}$$

alors :

$$2Q_T = \begin{pmatrix} 9\left(e^{2T}-1\right) & 15\left(e^{2T}-1\right) \\ 15\left(e^{2T}-1\right) & 25\left(e^{2T}-1\right) \end{pmatrix},$$

et

$$\det 2Q_T = \left(25(9) - 15^2\right)\left(e^{2T}-1\right)^2 = 0$$

Le système n'est donc pas contrôlable.

On peut vérifier cela en utlisant le critère de Kalman :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

donc,

$$[B\ AB] = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Le rang de $[B\ AB]$ est

$$Rg\,[B\ AB] = 1 < 2 = ordre(A)$$

Le système n'est pas contrôlable.

Remarque. Le gramien de controlabilité s'applique aussi pour les système linéaire instationnaire (non autonôme) :

$$u' = A(t)u(t) + B(t)v(t)$$

où e^{At} se remplce par la matrice de transition $\Phi(t, s)$.

Dans ce cas, le critère de Kalman ne s'applique pas.

Chapitre 2

Théorie du Semigroupe et problèmes de Cauchy

Dans cette section, nous rappelons quelques éléments de base de la théorie des semigroupes.

2.1 Définitions

Soit X un espace de Banach.

Définition 2.1. Une famille à un paramètre $(S(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés de X dans X est appelé un semigroupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si :

(i) $s(0) = I$

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, pour tout $t, s \geq 0$.

Définition 2.2.

L'opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ défini par :

$$D(A) = \left\{ u \in X \mid \lim_{t\to 0^+} \frac{s(t)u - u}{t} \quad \text{existe} \right\},$$

$$Au = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t}, \quad \text{pour} \quad u \in D(A)$$

se nomme le *générateur infinitésimal* du semigroupe $S(.)$.

Définition 2.3.

Un semigroupe $S(t)$ d'opérateurs linéaires bornés est dit :

1.*uniformément continu* si :

$$\lim_{t\to 0^+} \| S(t) - I \| = 0;$$

2. *fortement continu* (ou C^0 semigroupe) si :

$$\lim_{t\to 0^+} S(t)u = u, \quad \text{pour tout} \quad u \in X$$

2.2 Théorèmes

Théorème 2.1. Un opérateur linéaire A est **le générateur infinitésimal** d'un semigroupe uniformément continu si et seulement si A est borné.

Dans ce qui suit, $\rho(A)$ désigne l'ensemble résolvant de A, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes λ tels que $\lambda I - A$ est *intrinsèquement inversible.* Pour $\lambda \in \rho(A)$, laissez

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

dénote *la résolvante* de A.

Théorème .2.2. (Hille-Yosida)

Un opérateur linéaire A est *le générateur infinitésimal* d'un C_0 semi-groupe $S(.)$ si et seulement si :

(i)A est fermé,et $D(A)$ est dense en X;

(ii) $(w, +\infty) \subset \rho(A)$, et

$\| R(\lambda, A)^n \| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, et chaque $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $S(.)$ est un C_0 semigroupe, alors il existe deux constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que :

$$\| S(t) \| \leq Me^{\omega t}, \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0.$$

Remarque 2.1. Soit $S(t)$ un semi-groupe satisfaisant

$$\| S(t) \| \leq M \exp(\omega t), \text{ pour tout } t \geq 0$$

pour certains $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$, alors

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda > \omega\} \subset \rho(A),$$

et

$$R(\lambda, A)u \equiv (\lambda I - A)^{-1} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) u dt,$$

pour chaque $u \in X$, et tous λ vérifiant $\operatorname{Re} \lambda > \omega$.

2.3 Probleme de cauchy

2.3.1 Solutions classiques

Soit $A : D(A) \to X$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach X, tel que $D(A)$ est *dense* dans X.

Considérons le problème de Cauchy

$$u'(t) = Au(t); \quad \text{pour } t > 0 \tag{2.1.a}$$

$$u(0) = u_0 \in D(A) \tag{2.1.b}$$

Théorème 2.3. Supposons que A est le *générateur infinitésimal* d'un C_0 semi-groupe $S(.)$ sur X.

Le problème de Cauchy (1) possède une solution unique :

$$u(.) \in C^0(0, T; D(A)) \cap C^1(0, T; X),$$

donnée par :

$$u(t) = S(t)u_0, \quad \text{pour chaque } t \geq 0.$$

2.3.2 Solutions faibles

Soit X un espace de Bannach de norme $\|\cdot\|$, $A : D(A) \subset X \to X$ un operateur linéaire (non borné).

On note par :

X_1 : l'espace de Banach $D(A)$, muni de la norme :

$$\|u\|_1 = \|(\beta I - A)u\|$$

où $\beta \in \rho(A)$ (*l'ensemble résolvant de* A).

X_{-1} : la *complétion* de X par rapport à la norme :

$$\|u\|_{-1} = \left\|(\beta I - A)^{-1}u\right\| \equiv \|R_\beta(A)u\|,$$

$(X, \|\cdot\|_{-1})$ n'est pas *complet.*

Il est facile de voir que la norme $\| \cdot \|_1$sur X_1 est équivalente à la norme de graphe :

$$\|u\|_G = \|u\| + \|Au\|$$

Remarque 2.2. Comme $(D(A), \|\cdot\|_G)$ est *complet* et $\|.\|_G \sim \|.\|_1$, alors d'après le théorème du graphe fermé on peut conclure que $X_1 = (D(A), \| \cdot \|_1)$ est *complet.*

Exemple 2.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble *ouvert borné* de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2 et $X = L^2(\Omega)$, alors l'opérateur linéaire A

$$A = -\Delta : D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

est un *isomorphisme.*

Donc

$$X_1 = D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

et

$$X_{-1} = (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))'$$

On a le résultat suivant :

$X_1 \subset X \subset X_{-1}$, avec des plongements *continus* et *denses*.

Définition 2.4. L'opérateur adjoint $A^* : D(A^*) \to X'$, de l'opérateur A, est défini par :

$$D(A^*) = \{u \in X' \mid \exists v \in X', \forall w \in D(A) : \langle u, Aw \rangle = \langle v, w \rangle\},$$

et, si $u \in D(A^*)$, alors :

$$v = A^* u.$$

Notez que, puisque $D(A)$ est *dense* dans X, il existe au plus un tel v.

Nous dotons $D(A^*)$ de la norme graphique

$$\|v\|_1 = \|(\beta I - A^*)v\|$$

où $\beta \in \rho(A^*) = \rho(A)$.

Notez que si X est *reflexif*, et si $S(.)$ est un C^0 semi-groupe sur X de générateur A, alors $S(.)^*$ est un C^0 semi-groupe sur X' de générateur A^*.

Theoréme 2.4. Si X est *reflexif* alors X_{-1} est *isomorphe* à $D(A^*)'$.

Theoréme 2.5. **(Chitour)** L'opérateur $A : D(A) \subset X \to X$ se prolonge à un opérateur $A_{-1} : D(A_{-1}) = X \subset X_{-1} \to X_{-1}$, et le semigroupe $S(.)$ sur X se prolonge à un semigroupe $S_{-1}(.)$ sur X_{-1}, engendré par A_{-1}.

Définition 2.5. Pour $u_0 \in X$ le probléme :

$$\begin{aligned} u'(t) &= A_{-1}u(t), \ t > 0, \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

possède une solution unique

$$u \in C^0(0, +\infty; X_{-1}) \cap C^1(0, +\infty; X_{-1})$$

où

$$u(t) = S_{-1}(t)u_0$$

cette solution s'appelle **solution faible.**

Exemple 2.2. Le Problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} u' &= \Delta u \\ u &= 0; \text{ sur } \partial\Omega \\ u(0) &= u_0 \in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert borné de classe C^2, possède une solution faible unique.

$$u \in C^0(0,+\infty; L^2(\Omega)) \cap C^1(0,+\infty; (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))');$$

De plus, il existe $M, \omega > 0$ tel que

$$\|u(t)\|_2 \leq Me^{-\omega t} \|u_0\|_2 .$$

2.3.3 Problèmes non-homogènes

Considérons le problème de Cauchy

$$u'(t) = Au(t) + f(t),\ t > 0 \tag{2.2.a}$$

$$u(0) = u_0 \tag{2.2.b}$$

où $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire générant un C_0-semi-groupe $S(.)$ sur X.

Théorème 2.6. Si $u_0 \in D(A)$ et $f \in L^1(0,T; D(A))$, alors le problème (2.2) possède une solution unique

$$u \in C^0(0,T; D(A)) \cap C^1(0,T; X)$$

donnée par :

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \tag{2.3}$$

Définition 2.6. Si $u_0 \in X$ et $f \in L^1(0,T;X)$, alors la fonction u donné par (2.3) se nomme solution mild du problème (2.2).

Chapitre 3

Controlabilité d'équations linéaires aux DP

Dans cette partie on s'intéresse par la classe de systèmes de contrôle linéaire suivante :

$$u' = Au(t) + Bv(t) \tag{3.1a}$$

$$u(0) = u^0 \tag{3.1b}$$

$$w(t) = Cu(t) \tag{3.1c}$$

où $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire engendrant un C_0 semi-groupe $S(.)$ sur un espace de Banach X. L'opérateur A fournit le dynamique du système.

$B : Y \longrightarrow X$ un opérateur linéaire borné défini sur X à valeurs dans un espace de Banach Y. L'opérateur B excite le système pour modifier l'état.

$C : X \longrightarrow Z$ un opérateur linéaire borné qui récupère les informations d'observation.

L'espace X se nomme l'espace d'état du système.

L'espace Y se nomme l'espace de contrôle (ou d'entrée) du système.

L'espace Z se nomme l'espace d'observation du système.

La fonction u se nomme : l'état du système.

La fonction v se nomme : le contrôle (ou d'entrée) du système.

La fonction w se nomme : la sortie du système.

3.1 Définitions

Définition 3.1. L'opérateur de *contrôle* B se nomme *borné* si $B \in \mathcal{B}(Y, X)$, dans les autres cas B est considére comme *non borné.*

Si $v \in L^2(0, T; Y)$, alors :

$$u(t) = S(t)u^0 + L_t v \tag{3.2}$$

où

$$L_t v = \int_0^t S(t-s)Bv(s)ds \tag{3.3}$$

Définition 3.2. (a) Le système $(3.1a - 3.1b)$ ou la paire (A, B) se nomme exactement contrôlable au temps $T > 0$ si :

pour tout u^0, et tout u^1, il existe un contrôle $v \in L^2(0, T; Y)$ tel que la solution de (3.1a-3.1b) associée à v vérifie : $u(T) = u^1$.

(b) Le système $(3.1a - 3.1b - 3.1c)$ ou le triplet (A, B, C) se nomme exactement contrôlable au temps $T > 0$ si :

pour tout u^0, et tout w^1, il existe un contrôle $v \in L^2(0, T; Y)$ tel que : $w(T) = w^1$.

Définition 3.3. (a) Le système $(3.1a - 3.1b)$ ou la paire (A, B) se nomme approximativement contrôlable au temps $T > 0$ si :

pour tout u^0, et tout u^1 et tout $\varepsilon > 0$, il existe un contrôle $v \in L^2(0, T; Y)$ tel que la solution de (3.1a-3.1b) associée à v vérifie :

$$\left\| u(T) - u^1 \right\| \leq \varepsilon.$$

(b) Le système $(3.1a - 3.1b - 3.1c)$ ou le triplet (A, B, C) se nomme approximativement contrôlable au temps $T > 0$ si :

pour tout u^0, et tout w^1 et tout $\varepsilon > 0$, il existe un un contrôle $v \in L^2(0, T; Y)$ tel que :

$$\left\| w(T) - w^1 \right\| \leq \varepsilon.$$

Définition 3.4. (a) Le système $(3.1a - 3.1b)$ ou la paire (A, B) se nomme contrôlable à zéro au temps $T > 0$ si pour tout u^0, il existe un contrôle $v \in L^2(0,T;Y)$ tel que la solution de (3.1a-3.1b) associée à v vérifie :

$$u(T) = 0$$

(b) Le système $(3.1a - 3.1b - 3.1c)$ ou la paire triplet (A, B, C) se nomme contrôlable à zéro au temps $T > 0$ si :

pour tout u^0, il existe un contrôle $v \in L^2(0,T;Y)$ tel que :

$$w(T) = 0$$

3.2 Caractérisation de la contrôlabilité

Voici à présent un résultat qui est la base de la notion de contrôlabilité en dimension infinie.

Théorème 3.1 (Khodja) Soit X, Y, Z des espaces de Banch avec Y reflexif. Si $F \in \mathcal{B}(X,Z)$ et $G \in \mathcal{B}(Y,Z)$, alors on a l'équivalence suivante :

$$R(F) \subset R(G) \Longleftrightarrow \exists c > 0 : \|F^* w\| \leq c \|G^* w\|, \text{ pour tout } w \in Z$$

où $R(A) = \operatorname{Im} A$, $R(B) = \operatorname{Im} B$.

Théorème 3.2. Le système (3.1a-3.1b) est exactement contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si :

Il existe $c > 0$ telle que pour tout $u \in X$:

$$\int_0^T \|B^* S^*(T-t)u\|^2 \, dt \geq c \|u\|^2 .$$

Démonstration. Supposons que (3.1a-3.1b) est exactement contrôlable au temps $T > 0$, alors il est contrôlable à partir de $u^0 = 0$, c-à-d, pour tout $u^1 \in X$, il existe un $v \in L^2(0,T;Y) : L_T(v) = u^1$, c-à-d, $R(L_T) = X$, où :

$$L_T v = \int_0^T S(T-s)Bv(s)ds$$

Appliquons le théorème **3.1** pour $F = I \in \mathcal{B}(X)$ et $G = L_T \in \mathcal{B}(L^2(0,T;Y), X)$. Comme $R(I) \subset X = R(L_T)$, alors il existe une constante $c' > 0$ telle que pour tout $u \in X$:

$$\|Iu\| \leq c' \|L_T^* u\|, \text{ pour tout } u \in X$$

c-à-d

$$\|u\| \leq c' \|B^*S^*(T-.)u\|, \text{ pour tout } u \in X$$

mais :

$$\|L_T^*u\|^2 = \|B^*S^*(T-.)u\|^2 = \int_0^T \|B^*S^*(T-s)u\|^2 ds$$

Donc :

$$\int_0^T \|B^*S^*(T-s)u\|^2 ds \geq \frac{1}{c'^2} \|u\|^2 = c \|u\|^2$$

avec $c = \frac{1}{c'^2}$.

Théorème 3.3. Le triplet (A, B, C) est *exactement contrôlable* au temps $T > 0$ si et seulement si :

$$\text{Im } M_T = Z \tag{3.4}$$

où M_T est l'opérateur défini par :

$$\begin{aligned} M_T : L^2(0, T, Y) &\longrightarrow Z \\ v \longmapsto M_T v &= C \int_0^T S(T-s)Bv(s)ds \end{aligned} \tag{3.5}$$

Il est ànoter que M_T est linéaire borné.

Démonstration. Supposons que le triplet (A, B, C) est *exactement contrôlable* alors selon la définition on a :

$$\forall u^0 \in X, \ \forall w^1 \in Z, \ \exists v \in L^2(0, T; Y) \text{ tel que : } CS(t)u_0 + M_T v = w^1 \tag{3.6}$$

Pour $u^0 = 0$ on a :

$$\forall w^1 \in Z, \ \exists v \in L^2(0; T; Y) \text{ tel que : } M_T v = w^1 \tag{3.7}$$

Par conséquent

$$\text{Im } M_T = Z$$

Maintenant, supposons que (3.4) est vérifiée et soit $u^0 \in X$, $w^1 \in Z$, alors $(w^1 - CS(t)u^0) \in Z$.

D'après (3.4) on conclut que :

$$\exists v \in L^2(0;T;Y) \text{ tel que : } M_T v = w^1 - CS(t)u^1 \tag{3.8}$$

c-à-d :

$$\exists v \in L^2(0;T;Y) \text{ tel que : } CS(t)u^0 + M_T v = w^1$$

et on déduit finalement que :

$$\forall u^0 \in X,\ \forall w^1 \in Z,\ \exists v \in L^2(0;T;Y) \text{ tel que : } w(T) = w^1$$

d'où la *contrôlabilité exacte* du triplet (A, B, C).

Théorème 3.4. Le triplet (A, B, C) est *exactement contrôlable* au temps $T > 0$ si et seulement si :

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que : } \|M_T^* w\|_{L^2(0,T;Y)} \geq \delta \|w\|_Z \ , \forall w \in Z \tag{3.9}$$

où : M_T^* est l'opérateur *adjoint* de M_T.

Démonstration. D'après le théorème **3.3**, le triplet (A, B, C) est *exactement contrôlable* si et seulement si l'opérateur M_T est *surjectif*, et d'après le théorème 3.1 et par le même raisonnement du théorème 3.2 on conclut que l'opérateur M_T est *surjectif* si et seulement si :

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que : } \|M_T^* w\|_{L^2(0,T;Y)} \geq \delta \|w\|_Z , \text{ pour tout } w \in Z.$$

Théorème 3.5. Le triplet (A, B, C) est *exactement contrôlable* au temps $T > 0$ si et seulement si :

$$\ker M_T^* = \{0\} \text{ et } \operatorname{Im} \mathcal{L}_T^* \text{ est fermé} \tag{3.10}$$

Démonstration. On suppose que le triplet (A, B, C) est *exactement contrôlable* au temps $T > 0$, alors selon le théorème 3.4 on a :

$$\exists \delta > 0 \text{ telque : } \|M_T^* w\|_{L^2(0,T;Y)} \geq \delta \|w\|_Z \ , \text{ pour tout } w \in Z$$

De cette inégalité on tire que : $\ker M_T^* = \{0\}$.

Reste à montrer que Im M_T^* est *fermé* : soit $(v_n = M_T^* w_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $L^2(0,T;Y)$.

De l'inégalité précédente on obtient :

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que : } \|M_T^* w_n\|^2_{L^2(0,T;Y)} \geq \delta \|w_n\|^2_Z \ , \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est de *Cauchy* et comme l'opérateur M_T^* est *linéaire borné* alors :

$$\lim_{n\to\infty} M_T^* w_n = M_T^* w$$

et donc Im M_T est fermé

Maintenant on suppose que $\ker M_T^* = \{0\}$ et Im M_T^* est fermé alors l'opérateur M_T^* réalise une *bijection* sur son image c-à-d :

$$\exists (M_T^*)^{-1} : \operatorname{Im} M_T^* \longrightarrow Z$$

et comme M_T^* est *borné* et Im M_T^* est de Hilbert alors $(M_T^*)^{-1}$ est borné donc :

$$\exists \delta_1 > 0 : \left\|(M_T^*)^{-1} v\right\|_Z \leq \delta_1 \|v\|_{L^2(0,T;Y)} , \forall v \in \operatorname{Im} \pounds_T^*$$

pour $v = M_T^* w \in D((\pounds_T^*)^{-1}) = \operatorname{Im}\,(\pounds_T^*)$ on obtient :

$$\exists \delta_1 > 0 \ \text{ tel que : } \|w\|_Z \leq \delta_1 \|M_T^* w\|_{L^2(0,T;Y)}$$

Alors :

$$\exists \delta = \frac{1}{\delta_1} > 0 \ \text{ tel que : } \|M_T^* w\|_{L^2(0,T;Y)} \geq \delta \|w\|_Z$$

et d'après le théorème 3.4, le triplet (A, B, C) est *exactement contrôlable.*

Corollaire 3.6. Une condition nécessaire pour que le triplet (A, B, C) soit *exactement contrôlable* sur l'intervalle $[0, T]$ est la surjectivité de l'opérateur C.

Démonstration. On suppose que le triplet (A, B, C) soit *exactement contrôlable* sur l'intervalle $[0, T]$ alors selon le théorème 3.3 on a : $\operatorname{Im} M_T = Z$ et selon la structure de l'opérateur M_T on obtient :

$$Z = \operatorname{Im}\ M_T \subset \operatorname{Im} C \subset Z$$

et donc l'opérateur C est *surjectif.*

Bibliographie

[1] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial diferential equations, Applied Mathematical Sciences, 44, Springer-Verlag, NewYork, 1983.

[2] H.Brézis,Analyse fonctionnelle-Théorie et applications.

[3] C J. Lygeros et F. A. Ramponi, la théorie du système linéaire, 2015.

[4] R. F. Curtain et A. J. Pritchard, Infinite Dimensional Linear Systems Theory, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[5] R. F. Curtain et H. J. Zwart, An introduction to infinite dimensional linear systems theory,Springer-Verlag, New York, 1995.

[6] G. Weiss, Admissible observation operators for linear semigroups, Israel J. Math., 65 (1989), 1, pp. 17-43.

[7] G. Weiss, Admissibility of unbounded control operators, SIAM J. Control Optim., 27 (1989), 3, pp.527-545.

[8] F. A. Khodja & A. Benabdallah, Une introduction à la théorie du contrôle, Internet, 2005.

[9] E. Trélat, Control in finite and infinite dimension, notes de cours de M2 ; 2015.