République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP** et **Analyse numérique**

Par :

Hadjer Aissaoui

Intitulé

Mesure de Hausdorff

Dirigé par : Dr. Slimane Bouhadjar

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. M. Karboua	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. S. Bouhadjar	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. S. Sekrani	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2018

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciement

Je veux tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui je a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

En second lieu, je veux à remercier notre encadreur Mr : Slimane Bouhajar , son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon recherche en acceptant d'examiner mon travail Et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, Je veux également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

A mes parents. Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler. Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

A celui que j'aime beaucoup et qui m'a soutenue tout au long de ce projet : ma tante Laila , Salwa et bien sûr à mes frères Romaissa, Zakariya et Yahya, sans oublié ma grand-mère Aicha

A toute amies, et surtout Aicha et Nabila, Sihem, basma et Mofida, Saher.

A toute la famille Aissaoui, et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible, je vous dis merci.

Hadjer

Table des matières

0.1 Introduction

Dans ce travail nous étudions la mesure de Hausdorff qui généralise la mesure de Lebesgue.

Avant de discuter la mesure de Hausdorff il faut rappeler quelques notions de base sur la topologie et la théorie de la mesure.

Pour le but de mesurer la taille d'un certain ensemble on introduit la notion de la mesure. La théorie de la mesure est un procédé qui associe à tout ensemble A. Un nombre positive $\mu(A)$ appelé mesure de A qui vérifie certaines propriétés (Monotonie, $\sigma-$additivité,...).

On a besoin en fait d'une notion (plus restrictive) de classe de parties de E dans laquelle on définit la mesure, appelée une tribu d'où un élément de cette tribu appelée un ensemble mesurable.

Parmi les déférentes tribus la mesure de Lebesgue était définit sur la tribu de Borel de $\mathbb{R}^d$ (engendrée par des parties ouverts). La mesure de Lebesgue est une mesure qui étend le concept intuitif de volume à une très large classe de parties de l'espace, elle est la plus importante en analyse (et en probabilité) mesurant la longueur dans le cas de $\mathbb{R}$ la surface dans $\mathbb{R}^2$ le volume dans $\mathbb{R}^3$, etc.... Elle donne un sens mathématique à la notion physique .

On va parler de la théorie abstraire de la mesure et donnée l'existence (et l'unicité) de la mesure de Lebesgue et la construction de cette mesure à partir d'une mesure extérieure μ^*. Les propriétés d'une mesure extérieure est moins contraignantes que celle d'une mesure. En particulier une mesure extérieure est définie sur toutes les parties de E alors que les mesures sont définie sur des tribus.

La mesure de Hausdorff H^s est une mesure généralise la mesure de Lebesgue il est utile dans de nombreux domaines mathématiques. La théorie des mesures de Hausdorff née en quinzaine d'année après celle de la mesure de Lebesgue rependait à plusieurs notifications principales, notamment :

La mesure d'objets de dimension inférieure. En effet, si on se place en dimension 3, on a vu que la mesure de Lebesgue λ_3 permet d'attribuer à toutes les parties mesurables de $\mathbb{R}_3$ un "volume". Cependant, si l'on a besoin de définir "l'aire" d'une surface, ou la "longueur" d'une courbe tracée dans $\mathbb{R}_3$, la mesure de Lebesgue de tels objets est bien sûr nulle... D'où l'introduction d'une mesure en dimension 3 permettant de "classer" les ensembles négligeables du point de vue de la mesure de Lebesgue. Du coup, appliquée à un ensemble de"volume"non nul, on s'attend à ce que cette nouvelle mesure soit infinie.

Ce travail est structuré en deux chapitres :

Le chapitre 1 : présente quelques notions de base de la mesure et la topologie.

Le chapitre 2 : est énoncé à l'étude de la mesure de Hausdorff. Le but de ce chapitre est de définir cette dernière mesure et de donner ses propriétés, avec l'étude de la dimension de la mesure de Hausdorff.

Chapitre 1

Rappel sur les mesures et la topologie

Dans ce chapitre on va rappeler quelques notions de base concernant la topologie et la théorie de la mesure.

1.1 Notions générales sur la théorie de la topologie

1.1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1.1.1 Une topologie sur un ensemble X est la donnée d'un ensemble τ de parties de X (dits ouverts de X) vérifiant les 3 axiomes suivantes :

1) toute réunion d'ouverts est un ouvert,

2) une intersection finie d'ouverts est un ouvert,

3) X et $\varnothing$ sont des ouverts.

Définition 1.1.1.2 Dans un espace topologie (X, τ) on appelle fermé toute partie de X dont le complémentaire est un ouvert. On note F la famille de tous les fermés. On déduit (de la définition d'ouvert) par passage au complémentaire les propriétés suivantes :

1) Toute intersection des fermés est un fermé.

2) Une réunion finie des fermés est un fermé.

3) X et $\varnothing$ sont des fermés.

Définition 1.1.1.3 Soit (X, τ) un espace topologie et soit $x \in X$ on appelle voisinage de x dans X, toute partie de X contenant un ouvert contenant x. On note $V(x)$ l'ensemble des voisinages de x :

$$V(x) = \{ V \in P(X), \exists\, O \in \tau, x \in O \in V \}$$

Propriétés 1.1.1.1

Les voisinages de $x \in X$ vérifient les propriétés suivantes :

1-L'espace entier X est un voisinage de x.

2-L'intersection de deux voisinages de x est un voisinage de x.

3-Tout voisinage de x contient x.

4-Toute partie de X qui contient un voisinage de x est un voisinage de x.

Définition 1.1.1.4 Un espace topologie est dit séparable s'il admet une partie dénombrable dense. (Un ouvert $\mathbb{R}^n$ est séparable).

Définition 1.1.1.5 On dit que X est séparé si pour tout $x, y \in X$, il existe v, w des voisinage de x et y respectivement tels que :

$$v \cap w = \varnothing.$$

Exemple 1.1.1.1 (Des espaces topologies)

1) Le premier exemple des espaces topologiques est l'ensemble des nombres réels muni de sa topologie usuelle (ou la topologie de la droite réelle) : est une structure mathématique qui donne pour l'ensemble des nombres réels des définitions précises aux notions de limite et de continuité).

2) Les espaces métriques et les espaces vectoriels normés sont des espaces topologiques.

3) Topologie discrète : tous les ensembles sont des ouverts, pour vérifier qu'une topologie est discrète il suffit de vérifier que tous les singletons sont des ouverts.

4) Topologie grossière : c'est la topologie qui a le moins des ouverts (de fermés) possibles.

1.1.2 Espace métrique

Les espaces topologiques étant très généraux, ils ont des fois des propriétés inattendues. Pour un comportement plus intuitif on étudie souvent une classe restreinte d'espace à savoir les espaces métriques.

Définition 1.1.2.1 Soit X un ensemble, une distance sur X est une application $d : X \times X \to R$ vérifie les propriétés suivantes pour tous $x, y, z \in X$:

1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x = y)$.

2) $d(y, x) = d(x, y)$ symétrie.

3) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

On appelle espace métrique le couple (X, d).

Définition 1.1.2.2 Soit (X, d) un espace métrique, soit A et B deux parties de X on appelle distance entre A et B la quantité :

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y), x \in A, y \in B\}.$$

Si on prend $A = \{0\}$ et $B = \{\frac{1}{n+1}, n \in N\}$ on a : $d(A, B\} = 0$ tandis que $A \neq B$ ainsi la distance entre les parties ne définit pas vraiment une distance sur $P(\mathbb{R})$ ou $P(X)$ en générale, il faut bien interpréter $d(A, B)$ comme l'infinimum de la distance entre les points de A et B.

Définition 1.1.2.3 Soit (X, d) un espace métrique avec $x \in X$ et $r \in R_+^*$, on appelle boule ouvert (resp boule fermé) de centre x et de rayon r l'ensemble $B(x, r)$ tel que :

$$B(x, r) = \{y \in X, d(x, y) < r\}.$$
$$B_f(x, r) = \{y \in X, d(x, y) \leq r\}.$$

Définition 1.1.2.4 Soit (X, d) un espace métrique, on appelle un ouvert de (X, d) toute partie O (qui vérifie les axiomes d'un ouvert) de X tel que :

$$\forall x \in O, \exists\, r > 0,\ B(x, r) \subset O.$$

Définition 4.1.2.5 On appelle espace métrisable un espace topologique homéomorphe à un espace métrique (correspondance).

1.2 Tribus et mesure

1.2.1 Définitions et propriétés

Imaginons qu'on veut mesurer la taille des ensembles d'un espace E, comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$. Comme on ne peut pas en général mesurer tous les sous-ensembles de E, il faut ainsi commencer par définir la classe des ensembles qu'on peut mesurer.

Définition 1.2.1.1 Soit E un ensemble quelconque. Une tribu ou (δ-algèbre) est une collection $\mathcal{F} \subset P(E)$ de sous ensembles de E telle que :

1) $E \in \mathcal{F}$,

2) Si $A \in \mathcal{F}$ alors $A^c = E \backslash A \in \mathcal{F}$,

3) Soit $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, alors $\cup_{n \geqslant 1} A_n \in \mathcal{F}$.

On appelle espace mesurable le couple $(E, \mathcal{F})$.

Définition 1.2.1.2 Soit $(E, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Une mesure sur $(E, \mathcal{F})$ est une fonction $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$ telle que :

1) $\mu(\varnothing) = 0$,

2) Si $(A_n)_{n \in N}$ une famille dénombrable d'ensembles de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints alors :

$$\mu(\cup_{n \in N} A_n) = \textstyle\sum_{n \in N} \mu(A_n).$$

On appelle le triplet $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré.

Proposition 1.2.1.1 propriétés élémentaires d'une mesure

1) Monotonie : si $A, B \in \mathcal{F}$ et $A \subset B$ alors $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

2) Sous-additivité : si $A_n \in \mathcal{F}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$\mu(\cup_{\forall n \in \mathbb{N}} A_n) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

3) Si $A_n \in \mathcal{F}$pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(A_n).$$

4) Si $A_n \in \mathcal{F}$pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $A_n \supset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $\mu(A_0) < \infty$, alors :

$$\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Démonstration

1) On a $B = A \cup (B \backslash A)$ union disjointe d'éléments de $\mathcal{F}$, donc :

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geqslant \mu(A)$$

Si $\mu(A) < \infty$, ce qui donne

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A).$$

2) Posons $B_0 = A_0 \ \forall n \geqslant 1, B_n = A_n \backslash \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k = \bigcup_{k=0}^{n} B_k.$$

En outre les $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints et $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$ alors :

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

3) Posons $B_0 = A_0, \forall n \geqslant 1, B_n = A_n \backslash A_{n-1}$ alors les B_n sont deux à deux disjoints et $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$ ainsi :

$$\mu(A_n) = \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_k) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n).$$

4) Posons $B_n = A_0 \backslash A_n, \forall n \in \mathbb{N}$, alors la suite $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante avec $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = A_0 \backslash \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ en outre :

$$\mu(B_n) = \mu(A_0) - \mu(A_n) \text{ car } \mu(A_0) < \infty$$

par *3)* on a donc :

$$\mu(A_0) - \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n).$$

Proposition 1.2.1.2 Soit E un ensemble et $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur E , alors $\cap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ est une tribu sur E

Ce qui important dans cette proposition est que la famille $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ est quelconque, on ne demande pas qu'elle finie ou dénombrable.

Définition 1.2.1.3 Soit E un ensemble et $A \subset P(E)$. La tribu engendrée par A est la tribu $\delta(A) = \underset{\mathcal{F}\ tribu, A\subset\mathcal{F}}{\cap\mathcal{F}}$.

Proposition 1.2.1.3 Soit E un ensemble et $A \subset P(E)$. Alors $\delta(A)$ est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant A plus précisément si $\mathcal{F}$ est une tribu sur E avec $A \subset \mathcal{F}$,on a $\delta(A) \subset \mathcal{F}$

Définition 1.2.1.4 La tribu borélienne $B(E)$ d'un espace topologique E est la tribu engendrée par l'ensemble des parties ouverts de E. Formallement :

$$B(E) = \delta(\{U \subset E, U : ouvert\}).$$

Exemple 1.2.1.1 Quelques exemples de mesure :

1) La mesure nulle est définie sur $P(E)$ (et donc sur toute autre tribu) par $\mu(A) = 0$ pout tout $A \subseteq E$.

2) La mesure grossière sur $P(E)$: $\mu(A) = +\infty$ dés que $A \neq \varnothing$ ($\mu(\varnothing) = 0$), ou est dit la mesure dégénérée.

3) Pour tout $a \in E$ la mesure de Dirac est définie pour tout $A \in P(E)$:

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in A \\ 0 \quad \text{ sinon.} \end{cases}$$

Cette mesure est souvent notée δ_a

4) La mesure de comptage sur $P(E)$:

$$\mu(A) = \begin{cases} card(A) \text{ si } A \text{ est finie;} \\ +\infty \qquad\qquad \text{sinon.} \end{cases}$$

Où le $card(A)$ désigne le nombre d'élément de l'ensemble A.

Définition 1.2.1.5 Une mesure μ sur un espace mesurable $(E, \mathcal{F})$ est dite :

1) finie, ou bornée : si $\mu(E) < \infty$ (ce qui équivaut à $\mu(A) < \infty$ pour tout $A \in \mathcal{F}$), le nombre réel $\mu(E)$ est appelé masse totale de μ.

2) $\delta - finie$: s'il existe une suite (E_n) des parties mesurables de E telle que :$\mu(E_n) < \infty$ et $\cup_n E_n = E$

Définition 1.2.1.6 Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré :

1) On dit que $A \subset \mathcal{F}$ est négligeable pour la mesure μ si $\mu(A) = 0$.

2) Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que la mesure μ est complète si pour tout élément $N \in \mathcal{F}$ vérifiant $\mu(N) = 0$ et pour toute partie $M \subset N$, alors : $M \in \mathcal{F}$.

Autrement dit, μ est complète si tout ensemble négligeable pour μ appartient à la tribu $\mathcal{F}$.

1.2.2 Classe monotone : unicité des mesures

Définition 1.2.2.1 Un sous ensemble $\mathcal{M} \subset P(E)$ est appelé une classe monotone si :

i) $E \in \mathcal{M}$.

ii) Si $A, B \in \mathcal{M}$ et $A \subset B$ alors : $B \backslash A \in \mathcal{M}$.

iii) Si $A_n \in \mathcal{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $A_n \subset A_{n+1}$ alors $\cup A_n \in \mathcal{M}$.

Remarque 1.2.2.1

i) Si $A \in \mathcal{M}$ alors $A^c = E \backslash A \in \mathcal{M}$.

ii) Une tribu est une classe monotone.

iii) Une classe monotone est une tribu si et seulement si stable par intersection finie c-à-d :

$$A_1, A_2 \in \mathcal{M}, A_1 \cap A_2 \in \mathcal{M}.$$

Comme dans le cas d'une tribu, toute intersection de classe monotone est encore une classe monotone. Si F est une famille de parties de E on peut définir :

$$\mathcal{M}(F) = \underset{\mathcal{M} \text{ une classe monotone } F \subset \mathcal{M}}{\cap \mathcal{M}}.$$

Alors $\mathcal{M}(F)$ est une classe monotone sur E, appelée la classe monotone engendrée par F, c'est la plus petite classe monotone sur E qui contient F.

Théorème 1.2.2.1 (Lemme de classe monotone)

Soit E un ensemble $\mathcal{M}$ une classe monotone et $\mathcal{A} \subset P(E)$ une collection de sous-ensemble stable par intersection finie c'est à dire : $\forall A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ alors : $\delta(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$

Exemple 1.2.1.1 (Unicité de la mesure de Lebesgue)

Il existe au plus une mesure λ sur $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ telle que :

$$\lambda([a,b]) = a - b \ \forall a < b.$$

Démonstration 1.2.2.2 Soit λ, ν deux mesures sur $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$. Définissons $\mathcal{A} \subset P(\mathbb{R})$ l'ensemble des segments de $\mathbb{R}$ alors $\lambda(A) = \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ de plus, $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie fixons $M > 0$ et posons :

$$\mathcal{M}= \{A \in B(\mathbb{R}), \lambda(A \cap [-M, M]) = v(A \cap [-M, M])\}.$$

$\mathcal{M}$ est une classe monotone car :

i) $\lambda([-M, M]) = v([-M, M]) = 2M$ donc $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$.

ii) Si A, $B \in \mathcal{M}$ sont tels que $A \subset B$ alors :

$$\begin{aligned} \lambda((B \backslash A) \cap [-M, M]) &= \lambda(B \cap [-M, M]) - \lambda(A \cap [-M, M]) \\ &= \nu(B \cap [-M, M]) - \nu(A \cap [-M, M]) \\ &= \nu((B \backslash A) \cap [-M, M]) \end{aligned}$$

Donc :

$$B \backslash A \in \mathcal{M}.$$

iii) Si $A_1, A_2, ... \in \mathcal{M}$ sont tels que $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset$ alors :

$$\lambda(\cup_{n \geqslant 1} A_n \cap [-M, M]) = \lim_n \lambda(A_n \cap [-M, M]) = \lim_n \nu(A_n \cap [-M, M]) = \nu(\cup_{n \geqslant 1} A_n \cap [-M, M])$$

Donc :

$$\cup_{n \geqslant 1} A_n \in \mathcal{M}$$

Ainsi par le lemme de classe monotone

$$B(\mathbb{R}) = \delta(A) \subset \mathcal{M}.$$

On déduit que pour tout $A \in B(\mathbb{R})$ et $M > 0$ $\lambda(A \cap [-M, M]) = v(A \cap [-M, M])$,en prenant $M \longrightarrow \infty$ on obtient :

$$\lambda(A) = v(A) \ \forall A \in B(\mathbb{R}).$$

1.3 Construction des mesures

1.3.1 Mesure extérieures : théorème de carathéodory

Les propriétés d'une mesure extérieure sont moins contraignantes que celles d'une mesure. En particulier, une mesure extérieure est définie sur toutes les parties de l'ensemble E alors que les mesures sont définies sur des tribus.

Définition 1.3.1.1 Soient E un ensemble. Une mesure extérieure sur E est une fonction $\mu^* : P(E) \longrightarrow [0, \infty]$ vérifie les propriétés suivantes :

i) $\mu^*(\varnothing) = 0$.

ii) Si $A \subset B$ alors $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$. (Monotonie).

iii) Si $A_n \subset P(E)$ pour $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$\mu^*(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n) \leqslant \textstyle\sum_{n\geqslant 1} \mu^*(A_n).$$

On dit qu'un ensemble $A \subset E$ est $\mu^* - \textit{mesurable}$ si pour tout $B \subset E$:

$$\mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B).$$

On note $\mathcal{N}(\mu^*)$ l'ensemble des parties μ^*-mesurable de E.

Exemple 1.3.1.1

a) La fonction μ^* définit par $\mu^*(A) = 0$ pour tout $A \subset E$ est une mesure extérieure .

b) $\mu^*(A) = \{0 \text{ si } A = \emptyset, \text{et } +\infty \text{ si } A \neq \emptyset\}$ est une mesure extérieure.

c) $\mu^*(A) = \{card(A) \text{ si } A \text{ fini, et } +\infty \text{ sinon}\}$ est une mesure extérieure.

d) La mesure extérieure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ qui est la fonction $\lambda^* : P(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ définie par la formule :

$$\lambda^*(A) = \inf\{\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : A \subset \cup_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i).$$

1.3.2 Construction des mesures extérieure

Le théorème suivant montre comment construire une mesure extérieure à partir d'une algèbre $\mathcal{A} \subset E$ et ρ une fonction *sous − additivité* sur $\mathcal{A}$, cette procédure va être utilisée pour construire différentes mesures.

Définition 1.3.2.1 Une classe $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble E est appelée algèbre ou algèbre de Boole si :

1) Elle contient E.

2) Elle est stable par passage au complémentaire.

3) Elle est stable par réunions finies $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Une tribu est une algèbre de Boole stable par réunion dénombrable.

Théorème 1.3.2.1 *a)* Soient E un ensemble et $\mathcal{A} \subset E$ une collection de sous-ensembles avec $\emptyset \in \mathcal{A}$ de plus , soit $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ une fonction avec $\rho(\emptyset) = 0$ posons :

$$\mu(A) = \inf\{\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho(A_n) : A_1, A_2, ... \in \mathcal{A},\ A \subset \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\} \text{ pour tout } A \subset E.$$

Alors μ est une mesure extérieure sur E.

b) Supposons de plus que $\mathcal{A}$ est une algèbre et que ρ est $\delta -$ *additive* c-à-d pour $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ deux à deux disjoints avec :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \mathcal{A} \quad \rho(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho(A_n).$$

Alors $\mathcal{A}$ est incluse dans la tribu des parties $\mu -$ *mesurable* de E et pour tout $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu(A) = \rho(A).$$

c) Si μ est $\delta - finie$ alors : μ est l'unique mesure par la propriété $\mu(A) = \rho(A)$, pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Démonstration *a)* Montrons que μ est une mesure extérieure :

$\mu(\emptyset) = 0$ et la monotonie sont évidents.

Soient $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite des ensembles, la conclusion est triviale si $\mu(A_n) = \infty$ pour au moins un n ainsi on se limite au cas $\mu(A_n) < \infty$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $B_{n,k} \in \mathcal{A}$ tels que, pour chaque n, $A_n \in \cup_k B_{n,k}$ et $\mu(A_n) + \varepsilon 2^{-n} \geqslant \sum_k \rho(B_{n,k})$ alors : $\cup_n A_n \subset \cup_{n,k} B_{n,k}$ donc :

$$\mu(\bigcup_n A_n) \leqslant \textstyle\sum_{n,k} \rho(B_{n,k}) \leqslant \sum_n [\mu(A_n) + \varepsilon 2^{-n}] = \varepsilon + \sum_n \mu(A_n).$$

Si on retient que ε est arbitraire, on déduit que μ est sous-additive donc que c'est une mesure extérieure.

b) Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ est une algèbre et que ρ est $\delta - additive$, mentionnons que $\mathcal{A}$ est alors stable aussi par différences et intersections finies. De plus comme $\rho(\emptyset) = 0$ on déduit que ρ est aussi additive et monotone sur $\mathcal{A}$.

Soit $A \in \mathcal{A}$, montrons que : $\mu(A) = \rho(A)$.

Evidement $\mu(A) \leqslant \rho(A)$, on doit donc montrer l'inégalité inverse. Soient $A_n \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbb{N}^*$tels que $A \subset \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$, posons :

$$A_n^{'} = A \cap (A_n \backslash \bigcup_{k\leqslant n} A_k).$$

Alors $A_n^{'} \in \mathcal{A}$, ces ensembles sont deux à deux disjoints et $A = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n^{'}$ ainsi :$\rho(A) = \sum_{n\geqslant 1} \rho(A_n^{'})$.

Mais ρ est monotone sur $\mathcal{A}$ et par construction $A_n^{'} \subset A_n$ on obtient donc $\rho(A) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \rho(A_n)$, ainsi $\rho(A) \leqslant \mu(A)$.

Montrons que $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}(\mu^*)$ par additivité de ρ on a bien :

$$\mu(A \cap B) + \mu(A^c \cap B) = \rho(A \cap B) + \rho(A^c \cap B) = \rho(B) = \mu(B).$$

Fixons $A \in \mathcal{A}$ et prenons $B \subset E$ quelconque, on veut montrer que :

$$\mu(B) \geqslant \mu(A \cap B) + \mu(A^c \cap B).$$

L'inégalité inverse étant toujours satisfaite grâce à la sous-additivité de μ .

Soient $B_n \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que : $B \subset \cup_n B_n$ .Alors $A \cap B \subset \cup_n (A \cap B_n)$ et $A^c \cap B \subset \cup_n (A^c \cap B_n)$ donc par sous-additivité de μ :

$$\mu(A \cap B) + \mu(A^c \cap B) \leqslant \sum_n \mu(A \cap B_n) + \mu(A^c \cap B_n) = \sum_n \rho(A \cap B_n) + \rho(A^c \cap B_n) = \sum_n \rho(B_n).$$

Ainsi :

$$\mu(B) = \inf\{\sum_n \rho(B_n) : B_n \in \mathcal{A}\ B \subset \cup_n B_n\} \geqslant \mu(A \cap B) + \mu(A^c \cap B)$$

Ce qui est ce qu'on devrait montrer.

c) Supposons qu'il existe une suite croissante d'ensembles $\underset{n \in \mathbb{N}}{(A_n)} \in \mathcal{A}$ avec $E = \cup_n A_n$ et $\rho(A_n) < \infty$ alors le lemme de classe monotone nous donne l'unicité de $\mu(. \cap A_n)$.

Mais pour tout $B \in \mathcal{N}(\mu^*)$. $\mu(B) = \lim \mu(B \cap A_n)$, on déduit l'unicité de μ^*.

Théorème 1.3.2.2 (Critère de Carathéodory)

Soient (E, d) un espace métrique et μ^* une mesure extérieure sur E. Si pour toutes parties $A, B \subset E$:

$$dis(A, B) = \inf\{d(x, y), x \in A, y \in B\} > 0$$

On a :

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Alors :

$$B(E) \subset \mathcal{N}(\mu^*).$$

Démonstration Soit U un ouvert de E et $B \subset E$. On aimerait montrer que $U \in \mathcal{N}(\mu^*)$ ou en autre mots que :

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap U^c) + \mu^*(B \cap U).$$

Vu que μ^* est sous-additive, il suffit de montrer que :

$$\mu^*(B) \geqslant \mu^*(A \cap U^c) + \mu^*(A \cap U).$$

On peut donc se limiter au cas où $\mu^*(B) < \infty$. Posons $F_n = \{x \in E : dis(x, U^c) \geqslant 1/n\}$ et $A_n = F_{n+1} \backslash F_n$. On va commencer par montrer que $\sum_{n \geqslant 1} \mu^*(A_n \cap B) < \infty$. Observons que pour tout $K \geqslant 1$ on a $d(A_k, A_{k+2}) > 0$. Ainsi, pour tout $N \geqslant 1$, par la condition sur μ^* :

$$\sum_{k=1}^{N} \mu^*(A_{2k} \cap B) = \mu^*(\bigcup_{k=1}^{N} A_{2k} \cap B) \leqslant \mu^*(B) < \infty$$
$$\text{et} \sum_{k=0}^{N} \mu^*(A_{2k+1} \cap B) = \mu^*(\bigcup_{k=0}^{N} A_{2k+1} \cap B) \leqslant \mu^*(B) < \infty.$$

Ainsi :

$$\sum_{k \geqslant 1} \mu^*(A_n \cap B) = \sum_{k \geqslant 1} \mu^*(A_{2n} \cap B) + \sum_{k \geqslant 0} \mu^*(A_{2n+1} \cap B) \leqslant 2\mu^*(B) < \infty.$$

Maintenant, montrons que $\mu^*(F_n \cap B) \longrightarrow \mu^*(U \cap B)$ quand $n \longrightarrow \infty$ pour $n \geqslant 1$ comme U est un ouvert $U = F_n \cup \bigcup_{k \geqslant n} A_n$, ainsi :

$$\mu^*(U \cap B) = \mu^*[(F_n \cup \bigcup_{k \geqslant n} A_n) \cap B] \leqslant \mu^*(F_n \cap B) + \mu^*[\bigcup_{k \geqslant n} (A_k \cap B)].$$

Mais :

$$\mu^*[\bigcup_{k \geqslant n} A_k \cap B] \leqslant \textstyle\sum_{k \geqslant n} \mu^*(A_k \cap B) \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

On arrive donc à la conclusion que :

$$\mu^*(F_n \cap B) \longrightarrow \mu^*(U \cap B).$$

On utilise implicitement que : $\mu^*(F_n \cap B) \leqslant \mu^*(U \cap B)$ pour tout n .

En fin observons que, due à la condition imposé sur μ^* :

$$\mu^*(F_n \cap B) + \mu^*(U^c \cap B) = \mu^*((F_n \cup U^c) \cap B) \leqslant \mu^*(B).$$

1.3.3 La mesure de Lebesgue

Définition 1.3.3.1 Dans ce paragraphe nous définissons la mesure qui est de loin la plus importante en analyse (et en probabilités), qui est la mesure de Lebesgue (mesurant la "longueur" dans le cas de $\mathbb{R}$, la "surface" dans $\mathbb{R}^2$, le "volume" dans $\mathbb{R}^3$, etc...).

Nous commençons par le cas de $\mathbb{R}$, qu'on munit de la tribu borélienne $B(\mathbb{R})$:

$$\lambda([a, b]) = b - a, \forall a < b.$$

Passons maintenant au cas de $\mathbb{R}^d$, qu'on munit de la tribu borélienne $B(\mathbb{R}^d)$. Le volume d'un rectangle de la forme $A = \prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[$ est :

$$\lambda_d(A) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i).$$

Application Prenons le cas de $\mathbb{R}^2$. La mesure de Lebesgue λ_2, sur cette espace coïncide sur les rectangles de la forme $[a; b]*\ [c; d]$, avec la notion d'aire de ceux-ci. En effet, on prouve qu'on a $\lambda_2([a; b]*\ [c; d]) = (b - a) * (d - c)$. Plus généralement, la mesure de Lebesgue λ_2, d'un sous-ensemble borélien de $\mathbb{R}^2$ correspond à notre définition intuitive de l'aire : par exemple, la mesure de Lebesgue d'un disque de rayon a est égale à πa^2. De la même manière, si on considère l'espace $\mathbb{R}^3$, la mesure de Lebesgue λ_3, sur cet espace correspond à notre définition intuitive du volume, et c'est donc sans surprise que la mesure de Lebesgue d'une boule de rayon a vaut $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Construction de la mesure de Lebesgue

Théorème 1.3.3.1 Il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ telle que pour tout $a < b, \lambda([a,b]) = b - a$. On appelle cette mesure la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

La mesure de Lebesgue ainsi construite est $\delta - finie$.

Démonstration L'unicité de la mesure de Lebesgue à déjà était établit on se concentre donc sur son existence .On a la mesure extérieure λ^*sur $\mathbb{R}$:

Pour $A \subset \mathbb{R}$, soit :

$$\lambda^*(A) = \inf\{\textstyle\sum_{n\geqslant 0} b_n - a_n : A \subset \displaystyle\bigcup_{n\geqslant 0}]a_n, b_n[\}.$$

Ainsi si A, B sont tels que $dist(A,B) = \varepsilon > 0$; chaque intervalle $]a_n, b_n[$ dans cette seconde définition intersecté au plus des ensembles A, B donc :

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

Par le critère de caratheodory $B \subset \mathcal{N}(\lambda^*)$.

Ce qu'il nous reste à montrer est que la restriction de λ à $B(\mathbb{R})$ est la mesure recherchée c-à-d que pour $a < b$

$$\lambda^*([a,b]) = b - a.$$

Vu que : $[a,b] \subset]a - \varepsilon, b + \varepsilon[$ pour tout $\varepsilon > 0$ on déduit que :

$$\lambda^*([a,b]) \leqslant b - a$$

On va maintenant se concentrer sur l'inégalité inverse . Soit $a_i, b_i \in \mathbb{R} : i \geqslant 0$ tels que

$$[a,b] \subset \bigcup_{n\geqslant 0}]a_n, b_n[.$$

Comme $[a,b]$ est un compact, il existe N tel que :

$$[a,b] \subset \bigcup_{n=0}^{N}]a_n, b_n[.$$

On peut alors réarranger les couples (a_i, b_i) de telle sorte que $a_0 \leq a_1 ... \leq a_n$ et on peut éliminer tous les intervalles $]a_i, b_i[$ entièrement couverts par les autres (c-à-d par $\bigcup\limits_{n \in \{0.......N\} \setminus \{i\}}]a_n, b_n[$) ainsi que ceux qui n'intersecté pas $[a, b]$, alors les intervalles $]a_n, b_n[$ avec $n = 0...N$ se chevauchent plus précisément on a :

$$a_0 < a < a_1 < b_0 < a_2 < b_1 < ... < a_n < b_{N-1} < b < b_N,$$

on en déduit que :

$$\textstyle\sum_{n=1}^{N}(b_n - a_n) \geqslant b_1 - a + \sum_{n=2}^{N}(b_n - b_{n-1}) = b_N - a > b - a$$

Cela montre bien que :

$$\lambda^*([a, b]) \geqslant b - a.$$

Proposition 1.3.3.1 Pour tout $A \in B(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\lambda(\alpha A + \beta) = \lambda(\alpha A + \beta : a \in A) = |\alpha| \, \lambda(A).$$

De plus si μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ invariante par translation et telle que $\mu([0, 1]) < \infty$ alors μ est multiple de la mesure de Lebesgue.

Démonstration Commençons par montrer que :

$$\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha| \, \lambda(A).$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On peut supposer $\alpha \neq 0$ sinon la conclusion est évidente notons pour $A \in B(\mathbb{R})$:

$$\mu(A) = \tfrac{1}{|\alpha|}\lambda([\alpha a - \beta, \alpha b - \beta]) = b - a.$$

Si $\alpha < 0$ l'intervalle $[\alpha a - \beta, \alpha b - \beta]$ est remplacer par $[\alpha b - \beta, \alpha a - \beta]$. Par l'unicité de la mesure de Lebesgue $\mu = \lambda$ donc :$\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha| \, \lambda(A)$ pour tout $A \in B(\mathbb{R})$.

Passons à la démonstration de $\mu = c\lambda$ .Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ invariante par translation, avec $\mu([0, 1[) = \alpha < \infty$ alors :

$$\mu([0,\tfrac{1}{n}[) = \mu([\tfrac{1}{n},\tfrac{2}{n}[) = ... = \mu([\tfrac{n-1}{n},1[) = \tfrac{1}{n}\alpha.$$

En utilisant à nouveau l'invariance par translation, on trouve, pour $k \leq l, k, l \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mu([\tfrac{k}{n},\tfrac{l}{n}[) = \sum_{j=k}^{l-1} \mu([\tfrac{j}{n},\tfrac{j+1}{n}[) = \alpha\tfrac{l-k}{n}$$

En autre mots $\mu([a,b[) = \alpha(b-a)$ pour tous $a, b \in \mathbb{Q}$. Cela implique facilement que $\mu([a,b[) = \alpha(b-a)$ pour tous $a < b$ réels. En fin, l'unicité de la mesure de Lebesgue implique alors que :

$$\mu = \alpha\lambda$$

Définition 1.3.3.2 On dit que $A \subset E$ est une partie μ-négligeable s'il existe $B \in B(E)$

avec $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$. On écrit $\mathcal{K}_\mu$ pour l'ensemble des parties μ-négligeable.

Proposition 1.3.3.2 (Propriétés de la mesure de Lebesgue)

La mesure de Lebesgue est une mesure sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. Cependant, cette tribu n'est pas la plus grosse sur laquelle on puisse définir cette mesure. λ se prolonge en une mesure sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ où $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ est la tribu de Lebesgue.

Rappel :$\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = \delta(B(\mathbb{R}^d), \mathcal{K})$ òu $\mathcal{K}$ est l'ensemble des parties négligeables.

Régularité de la mesure de Lebesgue

Proposition 1.3.3.3 Pour tout $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ on a :

$\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) : U$ est un ouvert, $U \supset A\}$ (c'est la régularité extérieure).

$\lambda(A) = \sup\{\lambda(k) : k$ est un compacte, $k \subset A\}$ (c'est la régularité intérieure).

Démonstration Il faut montrer que :

$$\lambda(A) \geqslant \inf\{\lambda(U) : U \text{ est un ouvert, } U \supset A\}$$

L'autre inégalité étant immédiate. On peut supposer que $\lambda(A) < \infty$ sans quoi il n'ya rien à montrer pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de pavés ouverts tels que :

$$A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} p_i \text{ et } \sum_{i\in\mathbb{N}} diam(p_i) \leqslant \lambda(A) + \varepsilon.$$

Notons $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} p_i$ alors U un ouvert contenant A et :

$$\lambda(U) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(p_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} diam(p_i) \leqslant \lambda(A) + \varepsilon.$$

On a l'inégalité voulue.

De même il faut montrer que :

$$\lambda(A) \geqslant \sup\{\lambda(k) : k \text{ est un compacte, } k \subset A\}.$$

Comme :

$$\lambda(A) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \lambda(A \cap [-n, n]^d)$$

On peut supposer sans perte de généralité que A est inclue dans un pavé compacte. Par régularité extérieure pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $U \in \mathbb{R}^d, U \supset p\backslash A$ tels que :

$$\lambda(U) \leqslant \lambda(p\backslash A) + \varepsilon$$

Alors $k = p\backslash U$ est un fermé (donc compacte) tels que $k \subset A$ et :

$$\lambda(k) = \lambda(p) - \lambda(p \cap U) \geqslant \lambda(A) - \lambda(U) \geqslant \lambda(A) - \varepsilon.$$

Il reste l'invariance de la mesure de Lebesgue par rotation à montrer. Cependant, si on applique une rotation à un pavé, on n'obtient pas nécessairement un pavé, ni même un pavage.

Les ensembles négligeables pour la mesure de Lebesgue

Proposition 1.3.3.4 Soit N, une partie de $\mathbb{R}$. On dit que N, est un ensemble négligeable pour la mesure de Lebesgue s'il existe un borélien $A \in B(\mathbb{R})$ tel que :

1-$N \subset A$,

2-$\lambda(A) = 0$.

Les parties négligeables de $\mathbb{R}$ sont donc les ensembles inclus dans un borélien de mesure de Lebesgue nulle. On note $\mathcal{K}(\lambda)$ l'ensemble des parties négligeables de $\mathbb{R}$.

Soit λ^*la mesure extérieure de Lebesgue alors : $\mathcal{N}(\lambda^*) = \overline{B(\mathbb{R})}$ où la complétion est par rapport à la mesure de Lebesgue.

Démonstration Vu que $\mathcal{N}(\lambda^*)$ contient $B(\mathbb{R})$ est une tribu complétés il est évident que $\overline{B(\mathbb{R})} \subset \mathcal{N}(\lambda^*)$.

Montrons l'inverse soit $A \subset \mathcal{N}(\lambda^*)$ et supposons pour commencer que : $\lambda^*(A) = 0$.

Alors que la définition de $\mathcal{N}(\lambda^*)$ il existe une suite croissante d'ouverts $U_n \subset \mathbb{R}$ avec $A \subset U_n$ pour tout n et

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \lambda(U_n) = \lambda^*(A) = 0.$$

Posons $V = \cap_n U_n$ alors : $V \in B(\mathbb{R}), A \subset V$ et $\lambda(V) = 0$ ainsi $A \in \overline{B(\mathbb{R})}$.

On considère maintenant $A \subset \mathcal{N}(\lambda^*)$ de mesure finie, comme avant on peut construire une suite décroissante d'ouverts $U_n \subset \mathbb{R}$ avec $A \subset U_n$ pout tout n et :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \lambda(U_n) = \lambda^*(A) = 0.$$

Posons a nouveau $V = \cap_n U_n \in B(\mathbb{R})$ et observons que : $\lambda^*(V \backslash A) = 0$ ainsi $V \backslash A \in \overline{B(\mathbb{R})}$ et donc :

$$A = V \backslash (V \backslash A) \in \overline{B(\mathbb{R})}.$$

En fin si $A \subset \mathcal{N}(\lambda^*)$ n'est pas de mesure finie, on considère $A_n = A \cap [-n, n]$ pour $n \in \mathbb{N}$. Chaque ensemble A_n est de mesure finie donc appartient à $\overline{B(\mathbb{R})}$ par le point précédent il s'en suit que $A = \cup_n A_n \in \overline{B(\mathbb{R})}$.

Chapitre 2

Mesure de Hausdorff

La mesure de Lebesgue d-dimensionnelle λ_d est une mesure sur $\mathbb{R}^d$ conforme à la notion intuitive de volume dans $\mathbb{R}^d$. Plus précisément, il s'agit de l'unique prolongement de la fonction volume définie sur les pavés de $\mathbb{R}^d$, en une mesure sur tous les boréliens de $\mathbb{R}^d$ (et même sur tous les ensembles Lebesgue-mesurables).

2.1 Complément sur les mesures extérieures

Soit (X, d) un espace métrique séparable ainsi pour tout $\delta > 0$ et E une partie de X . On peut recouvrir E par une suites des boules de diamètre $\leq \delta$ et plus généralement de partie de diamètre $\leq \delta$.

Définition 2.1.1 Soit $\delta > 0$. Une famille $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de parties de X est appelée un $\delta-$recouvrement si :

$$X \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} X_i,\ diam(X_i) < \delta,\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

On rappelle que le diamètre d'une partie E de X est donné par la formule :

$$diam(E) = \sup_{\substack{x\in E \\ y\in E}} d(x, y)$$

Soit (X, d) un espace métrique séparable. Ainsi, pour tout $\delta > 0$ et partie E de X, on peut recouvrir E par une suite de boules de diamètres $\leq \delta$, et plus généralement, de parties de diamètres $\leq \delta$.

Définition 2.1.2 (mesure métrique extérieure). Une mesure extérieure $\mu*$ est appelée mesure métrique extérieure si pour tous ensembles $E, F \subset X$ tels que $d(E, F) > 0$, on a $\mu * (E \cup F) = \mu * (E) + \mu * (F)$.

On rappelle que la distance entre deux parties E et F est donnée par la formule :

$$d(E, F) = \inf_{\substack{x \in E \\ y \in E}} f(x, y).$$

2.2 Définition de la Mesure de Hausdorff

Maintenant que l'on a énoncé des définitions et des résultats généraux pour les mesures extérieures métriques. On va définir une mesure extérieure qui, en passant à la limite sur les recouvrements de l'ensemble, donnera la définition de la mesure de Hausdorff. Pour toute partie X de E, pour tout $s \in [0, +\infty[$ et pour tout $\delta > 0$, on note :

$$H^s_\delta(F) = \inf\{\sum_{i \in \mathbb{N}} diam\, |U_i|^s : F \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i : (U_i) \text{ est un } \delta - recouvrement \text{ de } F\} \in \overline{\mathbb{R}_+}.$$

On a clairement :

$$H^s_\delta(\emptyset) = 0 \quad \text{(A,1)}$$

De plus, si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, alors un $\delta - recouvrement$ de B est un $\delta - recouvrement$ de A, et comme l'infimum est sur tous les recouvrements, on a :

$$H^s_\delta(A) \leq H^s_\delta(B). \quad \text{(A,2)}$$

Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de parties de E, et on note $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in N$, il existe un $\delta - recouvrement$ de A_n que l'on note $\{A^i_n\}_{i \in \mathbb{N}}$ tel que :

$$\left| H_\delta^s(A_n) - \sum_{i\in\mathbb{N}} diam(A_n^i)^s \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$$

On a alors $\{A_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}^{i\in\mathbb{N}}$ qui est un $\delta - recouvrement$ dénombrable de A, donc :

$$H_\delta^s(A) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} diam(A_n^i)^s \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}}(H_\delta^s(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) \leqslant 2\varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} H_\delta^s(A_n)$$

Comme ε était arbitraire, on a :

$$H_\delta^s(A) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} H_\delta^s(A_n) \qquad \text{(A,3)}$$

Finalement, H_δ^s est une mesure extérieure.

Définition 2.2.1 Pour toute partie F de E, pour tout $s \in [0, +\infty[$, on note :

$$H^s(F) = \lim_{\delta \longrightarrow 0} H_\delta^s(F)$$

$H^s(F)$ est une mesure métrique extérieure, donc elle définit une mesure borélienne. On l'appelle mesure de

Hausdorff (de dimension s).

Démonstration L'application $\delta > 0 \longrightarrow H_\delta^s(A)$, pour tout partie A de E, est décroissante (puisque l'infimum est pris sur des recouvrements de diamètre de plus en plus petits) et admet donc une limite en 0. De ce fait, on peut faire tendre δ vers 0 dans $(A.1), (A.2)et(A.3)$,et on obtient :

$$H^s(\emptyset) = 0, H^s(A) \leqslant H^s(B), H^s(\cup_{n\in\mathbb{N}} A) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} H^s(A_n)$$

Pour toutes A, B parties de E et $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ famille de parties de E.

Reste à montrer que cette mesure extérieure est métrique. Soient A et B deux parties de E telles que $d(A, B) > 0$. On sait déjà, H^s étant une mesure, et que :

$$H^s(A \cup B) \leqslant H^s(A) + H^s(B)$$

Pour l'inégalité dans l'autre sens, fixons $\delta \in]0, \frac{d(A,B)}{3}]$ et $\varepsilon > 0$. Soit $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un $\delta-$ *recouvrement* de $A \cup B$ tel que :

$$\left| H^s_\delta(A \cup B) - -\sum_{i\in\mathbb{N}} diam(C_i)^s \right| \leqslant \varepsilon$$

On pose

$$I = \{i \in \mathbb{N} : C_i \cap A \neq \emptyset\} \text{ et } J = \{i \in \mathbb{N} : C_i \cap B \neq \emptyset\}$$

Comme $\delta < \frac{d(A,B)}{3}$, I et J sont disjoints, et de plus $\{C_i\}_{i\in I}$ (resp.$\{C_i\}_{i\in J}$) est un $\delta -$ *recouvrement* de A(resp.de B).On déduit que :

$$H^s_\delta(A \cup B) + \varepsilon \geqslant \sum_{i\in I} diam(C_i)^s + \sum_{i\in J} diam(C_i)^s \geqslant H^s(A) + H^s(B)$$

En faisant tendre δ vers 0, on obtient

$$H^s(A \cup B) + \varepsilon \geqslant H^s(A) + H^s(B)$$

Finalement, en faisant tendre ε vers 0, on obtient l'inégalité voulue.

2.2.1 Propriétés de la mesure de Hausdorff

Proposition 2.2.1.1 Homogénéité (de degré s) : Pour $\lambda > 0$, on a

$$H^s(\lambda F) = \lambda^s H^s(F).$$

Démonstration Si $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de F alors $(\lambda U_i)_i$ est un recouvrement de λF ainsi :

$$H^s_{\lambda\delta}(\lambda F) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum_{i\in\mathbb{N}} |U_i|^s$$

Donc, on prenant l'infinimum $H^s_{\lambda\delta}(\lambda F) \leqslant \lambda^s H^s_\delta(F)$ avec $\delta \longrightarrow 0$ il vient :

$$H^s(F) \leqslant \lambda^s H^s(F)$$

L'autre inégalité s'obtient en remplaçant λ par $\frac{1}{\lambda}$.

Proposition 2.2.1.2 Soit $f : E \longrightarrow E$ une similitude de rapport $r > 0$:

$$\forall x, y \in E \ d(f(x), f(y)) = rd(x, y)$$

Alors pour tout $s \geqslant 0$ on a :

$$H^s(f(A)) = r^s H^s(A) \ \forall A \subset E$$

Démonstration Soit $A \subset E$ et $\varepsilon > 0$ on remarque que :

$$f(\mathcal{R}_\varepsilon(A)) = \mathcal{R}_{r\varepsilon}(f(A))$$

On a alors :

$$H^s_{r\varepsilon}(f(A)) = \inf_{D \in f(\mathcal{R}_\varepsilon(A))} \sum_{X \in D} (diam X)^s$$
$$= \inf_{D' \in \mathcal{R}_\varepsilon(A)} \sum_{X' \in D'} (diam\ f(X'))^s = r^s \inf_{D' \in \mathcal{R}_\varepsilon(A)} \sum_{X' \in D} (diam X')^s = r^s H^s_\varepsilon(A)$$

En laissant tendre ε vers 0, on obtient bien le résultat.

Proposition 2.2.1.3 Soit $F \subset \mathbb{R}^n$.Soit $f : F \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (telle qu'il existe $C > 0$,$\alpha > 0$ tels que pour tout $x, y \in F$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C |x - y|^\alpha .$$

On dit alors que f est $\alpha - Holderienne$ (lipshitzien si $\alpha = 1$) alors pour tout s :

$$H^{s/\alpha}(f(F)) = C^{s/\alpha} H^s(F).$$

Démonstration Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un $\delta-$recouvrement de F alors :

$$|f(F \cap U_i)| \leqslant C |U_i|^\alpha .$$

Donc $(f(F \cap U_i))_i$ est un est un ε−recouvrement de $f(F)$ avec $\varepsilon = C\delta^\alpha$

$$H_\varepsilon^{s/\alpha}(f(F)) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leqslant C^{s/\alpha} \sum_{i\in\mathbb{N}} |U_i|^s .$$

En prenant l'infinimum sur les δ−recouvrement :

$$H_\varepsilon^{s/\alpha}(f(F)) \leqslant C^{s/\alpha} H_\delta^s(F)$$

L'inégalité recherche s'obtient alors en faisant tendre δ avec 0.

Si f est une isométrie ($|f(x) - f(y)| = |x - y|$) alors : $H^s(f(F)) = H^s(F)$. En particulier ceci démontre que H^s est invariante par translation.

Théorème 2.2.1.1 La tribu de partie H^d − *mesurables* contient la tribu borélienne $B(\mathbb{R}^n)$ ainsi H^d est une mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}(H^d))$.

Démonstration Montrons que $\mathcal{N}(H^d)$ contient la tribu borélienne $B(\mathbb{R}^n)$ Le critrère de carathcodory garantit ce fait, dès que pour deux ensembles A, A' à distance positive :

$$H^d(A \cup A') = H^d(A) + H^d(A').$$

Soit $A, A' \subset \mathbb{R}^n$ avec $dis(A, A') > 0$.Soit $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < dis(A, A')$ et considérons un recouvrement $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $A \cup A'$ avec $\dim(B_k) \leqslant \varepsilon$, pour tout k. Alors chaque ensemble B_k intersecte au plus un des ensembles A ou A'. On peut donc en extraire un recouvrement $(B_k)_{k\in I}$ de A et un recouvrement $(B_k)_{k\in J}$ de A' disjoints.

Ainsi

$$H^d(A) + H^d(A') \leqslant H^d(A \cup A').$$

L'inégalité inverse est assurée par la sous-additivité de H^d.On a donc :

$$H^d(A \cup A') = H^d(A) + H^d(A')$$

ce qui implique que :

$$B(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{N}(H^d).$$

2.3 Propriétés et dimension de Hausdorff Besicovitch

On aimerait pour un objet quelconque une mesure de sa taille mais on peut construire dans l'espace euclidien usuel des objets de surface nulle et de périmètre infini (pour une bonne définition de ces notions).

On voudrait donc définir une notion de dimension qui tienne compte de ces objets intermédiaire.

En mathématiques, et plus précisément en topologie, la dimension de Hausdorff d'un espace métrique (E, d) est un nombre réel positif ou nul, éventuellement l'infini. Introduite en 1918 par le mathématicien Felix Hausdorff, elle a été développée par Abram Besicovitch, c'est pourquoi elle est parfois appelée dimension de Hausdorff-Besicovitch.

Définition 2.3.1 On définit la dimension de Hausdorff de l'ensemble F par :

$$\dim_H(F) = \inf\{s : H^s(F) = 0\} = \sup\{s : H^s(F) = \infty\}$$

Autrement dit la dimension de Hausdorff est la valeur de s pour laquelle le s-mesure de recouvrement fait un saut de l'infini à 0

Il est admis que la dimension de Hausdorff est la plus ancienne et la plus importante.

De fait elle définit pour tous les ensembles et elle est satisfaisante d'un point de vue mathématique puisqu'elle est basée sur une mesure cependant elle est souvent à évaluer.

on a donc :

$$H^s(F) = \{\infty : si\ s < \dim_H(F), 0\ si\ s > \dim_H(F)\}$$

Remarque 2.3.1

Pour $s = \dim_H(F)$ les trois cas peuvent se produire :

$H^{\dim_H(F)}(F) = 0$ par exemple si $F = \emptyset$.

$H^{\dim_H(F)}(F) = \infty$ par exemple si $F = \mathbb{R}^n$.

$0 < H^{\dim_H(F)}(F) < \infty$ par exemple si F est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.3.1 Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble et $f : F \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application satisfaisant à la condition de Hölder :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x - y|^{\alpha} \text{ pour les constantes } C > 0, \alpha > 0$$

Alors :

$$\dim_H(f(F)) \leqslant \tfrac{1}{\alpha}\dim_H(F).$$

Démonstration Si $s > \dim_H(F)$ alors :

$$H^{s/\alpha}(f(F)) \leqslant C^{s/\alpha} H^s(F) = 0 \text{ car } H^s(F) = 0\ .$$

Alors :

$$H^{s/\alpha}(f(F)) = 0 \Longrightarrow \tfrac{s}{\alpha} > \dim_H(f(F)).$$

Ainsi :

$$s > \dim_H(F) \Longrightarrow s > \alpha \dim_H(f(F)).$$

Donc :

$$\dim_H(f(F)) \leqslant \tfrac{1}{\alpha}\dim_H(F).$$

Corollaire 2.3.1 Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application :
a) Si f est lipchitzienne i.e $\exists\ C > 0\ |f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x - y|$ Alors :

$$\dim_H(f(A)) \leq \dim_H(A).$$

b) Si f est c, C-lipchitzienne pour des constantes $0 < c < C$:

$$c\,|x - y| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x - y|\,.$$

Alors

$$\dim_H(f(A) = \dim_H(A).$$

Démonstration Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ C-lipchitzienne. À tout recouvrement $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de A , on associe le recouvrement $f((B_j))_{j\in\mathbb{N}}$ de $f(A)$. Notons que, grâce au fait que f est lipchitzienne :

$$diam(f(B_j)) \leqslant C diam(B_j) \text{ pour tout } j$$

Ainsi :

$$H^d(f(A)) \leqslant C^d H^d(A).$$

Si f est c,C-bilipchitzienne, alors :$H^d(f(A)) \leqslant C^d H^d(A)$ suit du premier point. De plus, f est une bijection entre A et $\mathrm{Im}(A)$ avec f^{-1} étant $1/c$-lipschitzienne. En appliquant le premier point à l'ensemble $f(A)$ et la fonction f^{-1} on obtient :

$$H^d(f^{-1}(f(A)) = H^d(A) \leqslant c^{-d} H^d(f(A))$$

Ce qui donne l'inégalité désirée. Les inégalités sur la dimension de Hausdorff de $f(A)$ suivent directement des inégalités sur la mesure de Hausdorff.

Proposition 2.3.2 Un ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ $\dim_H(F) < 1$ alors F est totalement discontinu.

Démonstration Soient x et y deux points distincts de F .

Définissons une application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty[$ par $f(z) = |z - x|$. Comme f est contractante car $|f(z) - f(w)| \leqslant |z - w|$, et comme elle est lipchitzienne on a que :

$$\dim_H(f(F)) \leqslant \dim_H(F) < 1.$$

Ainsi $f(F)$ est un sous- ensemble de $\mathbb{R}$ de mesure H^1 ou longueur nulle et à donc un complément dense.

Choisissons r avec $r \notin f(F)$ et $0 < r < f(F)$ il s'ensuit que :

$$F = \{z \in F : |z - x| < r\} \cup \{z \in F : |z - x| > r\}$$

Donc F est la réunion des deux ouverts disjoints l'un contenant x et l'autre y. Donc x et y appartiennent à deux composantes connexes différentes de F.

Proposition 2.3.3 Soit F un ensemble si $H^s(F) < \infty$ alors :

$$H^t(F) = 0 \ \forall \ t > s.$$

Démonstration Soit U_i un $\delta - recouvrement$ de F donc $0 \leqslant |U_i| \leqslant \delta \ \forall \ i$ on a :

$$\textstyle\sum_i |U_i|^t = \sum_i |U_i|^s |U_i|^{t-s} \leqslant \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s .$$

D'où l'on obtient,

$$H^t_\delta(F) \leqslant \delta^{t-s} H^s_\delta(F)$$

Or $H^s_\delta(F) < \infty$,donc en faisant tendre δ vers 0. On trouve :

$$H^t(F) \leqslant 0 \Longrightarrow H^t(F) = 0 \ \forall \ t > s.$$

Les mesures de Hausdorff sont en fait une généralisation des notions de longueur, d'aire, de volume, etc. Il peut être montré que pour des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, H^n est la mesure de Lebesgue en dimension n, multipliée par une constante qui est le volume n-dimensionnel de la boule unité.

Le saut de l'infini à zéro pour la mesure se retrouve sur l'exemple du disque, qui a un volume nul, mais une longueur infinie, le saut s'effectuant sur la dimension, qui ici est 2, H^2 mesurant les aires. D'autre part, des sous-ensembles assez réguliers comme des ouverts ou des boréliens dans $\mathbb{R}^n$ ont n comme dimension de Hausdorff.

Proposition 2.3.4 Si $\mathcal{B}$ est un borélien borné de $\mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{L}^n(\mathcal{B}) > 0$ alors :

$$\dim_H(\mathcal{B}) = n.$$

$\mathcal{L}^n$ étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Commençons par le suivante :

Lemme 2.3.1 (lemme de recouvrement de Vitali) Soit M une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ et F un ensemble des boules recouvrant M, de rayon majoré. On peut extraire de F un sous-ensemble ε constitué des boules deux-à-deux disjointes tel que :

$$M \subset \cup_{\mathcal{B}\in\varepsilon}\widetilde{\mathcal{B}},$$

où $\widetilde{\mathcal{B}}$ est la boule de même centre que $\mathcal{B}$ et de rayon quatre fois celui de $\mathcal{B}$.

Démonstration On construit par récurrence deux suites d'ensembles $\{\varepsilon_n\}_n$ et $\{F_n\}_n$ et une suite de réels $\{r_n\}_n$. On pose $F_0 = F$ et $r_0 = \sup\{R(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \in F_0\}$ où $R(\mathcal{B})$ est le rayon de la boule $\mathcal{B}$.

On fixe $\mathcal{B}_0 \subset F_0$ tel que $R(\mathcal{B}_0) \geqslant \frac{r_0}{2}$ et on pose $\varepsilon_0 = \{\mathcal{B}_0\}$. On construit :

$$F_{n+1} = \{\mathcal{B} \in F, \forall \mathcal{B}' \in \varepsilon_n : \mathcal{B} \cap \mathcal{B}' = \varnothing\}.$$

Et on pose

$$r_{n+1} = \sup\{R(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \in F_{n+1}\}.$$

On fixe $\mathcal{B}_{n+1} \in F_{n+1}$ tel que $R(\mathcal{B}_{n+1}) \geqslant \frac{r_{n+1}}{2}$ et on pose :

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \cup \{\mathcal{B}_{n+1}\}.$$

Montrons que l'ensemble $\varepsilon = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} \varepsilon_n$ convient.

Soit $x \in M, \exists \mathcal{B} \in F, x \in \mathcal{B}$. Soit $n \geqslant 0$ tel que $\mathcal{B} \in F_n \backslash F_{n+1}$. Il existe alors $\mathcal{B}' \in \varepsilon_n \subset \varepsilon$ tel que $\mathcal{B}' \cap \mathcal{B} \neq \varnothing$ sinon on aurait choisi $\mathcal{B}$ au lieu de $\mathcal{B}_n$.On a : $R(\mathcal{B}') \geqslant \frac{R(\mathcal{B})}{2}$ donc :

$$2R(\mathcal{B}') \geqslant R(\mathcal{B}) \text{ et } x \in \mathcal{B}' \subset \widetilde{\mathcal{B}'}$$

D'ou le résultat.

Démonstration de la proposition Soit $\mathcal{B}$ un borélien borné avec $\mathcal{L}^n(\mathcal{B}) > 0$.

Il existe M tel que :

$$diam(\mathcal{B}) \leqslant M$$

Recouvrons $\mathcal{B}$ par un quadrillage de l'espace composé de k_δ n-cubes et le diamètre ($\delta < M$). Soit $D > M$ le diamètre du plus petit quadrillage n-cubique recouvrant $\mathcal{B}$.

On a alors $k_\delta < D^n$ d'où $k_\delta \delta^n < D^{2n}$, donc :

$$H_\delta^n(\mathcal{B}) \leqslant D^{2n}$$

Puis $H^n(\mathcal{B}) \leqslant D^{2n}$. On a bien $H^n(\mathcal{B}) < \infty$.

Pour l'autre inégalité, soit $\delta > 0$ $\varepsilon > 0$ Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un $\delta - recouvrement$ de $\mathcal{B}$ tel que :

$$\left| H_\delta^n(\mathcal{B}) - \textstyle\sum_{i \in I} diam(U_i) \right| < \varepsilon$$

Soit $\mathcal{B}_i$ $\forall i \in I$ une boule contenant U_i et de rayon $2\,|U_i|$. $\mathcal{B}$ et $\{\mathcal{B}_i : i \in I\}$ vérifient les hypothèses du lemme, donc on extrait un sous-ensemble $\{\mathcal{B}_j : j \in J\}$ des boules deux-à-deux disjointes tel que $\mathcal{B} \subset \cup_{j \in J} \widetilde{\mathcal{B}}_j$ d'où :

$$\begin{aligned} 0 < \mathcal{L}^n(\mathcal{B}) \leqslant \sum_{j \in J} \mathcal{L}^n(\widetilde{\mathcal{B}}_j) \leqslant 4^n \sum_{j \in J} \mathcal{L}^n(\mathcal{B}_j) \\ \leqslant 4^n \sum_{j \subset J} vol^n(\mathcal{B}_u)(4\,|U_j|^n) = 16^n vol^n(\mathcal{B}_u) \sum_{j \in J} |U_j|^n \leqslant k^n \sum_{i \in I} |U_i|^n, \end{aligned}$$

où $vol^n(\mathcal{B}_u)$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et k la constante $k = 16^n vol^n(\mathcal{B}_u)$. Ainsi :

$$H_\delta^n(\mathcal{B}) + \varepsilon > \sum_{i \in I} |U_i|^n > \tfrac{1}{k^d} > 0.$$

En faisant tendre ε, puis δ vers 0, on obtient :

$$\dim_H(\mathcal{B}) = n.$$

Propriété 2.3.1 Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de $\mathbb{R}_n$. Alors

$$\dim_H(\cup_k A_k) = \sup\{\dim_H A_k : k \in \mathbb{N}\}$$

Démonstration Soit $d > \sup\{\dim_H A_k : k \in \mathbb{N}\}$. Alors :

$$H^d(\cup_k A_k) \leqslant \sum_k H^d(A_k) = 0$$

Donc $d \geqslant \dim_H(\cup_k A_k)$ .Comme d est arbitraire, il s'en suit que :

$$\dim_H(\cup_k A_k) \leqslant \sup\{\dim_H A_k : k \in \mathbb{N}\}$$

L'inégalité inverse est non-triviale seulement quand :

$$\sup\{\dim_H A_k : k \in \mathbb{N}\} > 0 \ .$$

Supposons ce fait et soit $0 \leqslant d < \sup\{\dim_H A_k : k \in \mathbb{N}\}$. Alors il existe k tel que $\dim_H A_k > d$ donc $H^d(A_k) = \infty$.On en déduit que

$$H^d(\cup_k A_k) = \infty$$

Donc :

$$\dim_H(\cup_k A_k) \geqslant d$$

Alors :

$$\dim_H(\cup_k A_k) \geqslant \sup\{\dim_H A_k : k \in \mathbb{N}\}$$

Théorème 2.3.1 Si F est un ensemble dénombrable alors :

$$\dim_H(F) = 0.$$

Démonstration Il suffit de montrer pour les parties dénombrables bornées de $\mathbb{R}^n$. Soit $F = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ une telle partie. La famille dénombrable $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ constitue bien un recouvrement de F par des parties de $\mathbb{R}^n$ de diamètre 0. On a donc pour tous $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$

$$H^s_\delta(F) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} diam(x_k)^s = 0$$

Il s'ensuit que $H^s_\delta(F) = 0 \ \forall(\alpha > 0,\ \varepsilon > 0)$ et puis que :

$$H^s(F) = 0 \ \forall(\alpha > 0).$$

Ce qui entraîne (par définition même de la dimension de Hausdorff) que l'on a effectivement $\dim_H(F) = 0$. La démonstration est achevée.

Lemme 2.3.2 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide. Alors E muni de la distance $d(x, y) = \|x - y\|$ est un espace métrique. De plus, pour tout $d \geqslant 0$, la mesure de Hausdorff de dimension d sur E est identique à la restriction à E de la mesure de Hausdorff de dimensions d sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration Le fait que (E, d) est un espace métrique est évident.

Pour cette preuve, notons $H^d_{\mathbb{R}^n}$ et H^d_E les mesures de Hausdorff de dimension d dans $\mathbb{R}^n$ et E respectivement. Soient $A \subset E$, $\varepsilon > 0$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ un recouvrement de A avec $diam(B_k) \leq \varepsilon$ pout tout k.

Posons $\widetilde{B_K} = B_K \cap E$ alors :

$$diam(\widetilde{B_K}) \leqslant diam(B_k)$$

Et $(\widetilde{B_K})_{k\in\mathbb{N}}$ est toujours un recouvrement (dans E) de A.

Ainsi :

$$H^d_E(A) \leqslant H^d_{\mathbb{R}^n}(A).$$

Inversement, si $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ un recouvrement de A (dans E), c'est aussi un recouvrement de A dans $\mathbb{R}^n$.

De plus le diamètre de B_k ne dépend pas de si on regarde B_k comme sous-ensemble de E ou $\mathbb{R}^n$.

Ainsi

$$H^d_{\mathbb{R}^n}(A) \leqslant H^d_E(A).$$

2.3.1 Hausdorff et Lebesgue :

Théorème 2.3.1.1 Soit $n \in \mathbb{N}$ alors la mesure H^n sur $\mathbb{R}^n$ est la mesure de Lebesgue. Soit $d \in \mathbb{N}$, $d < n$ et soit F un espace affine de dimension d dans $\mathbb{R}^n$ alors la mesure H^d restreinte à F est la mesure de Lebesgue sur F .

Ainsi si $A \subset F$ est un borélien :

$$H^d(A) = \lambda_d$$

Démonstration Soit $n \in N$. On va commencer par prouver que H^n est proportionnelle à la mesure de Lebesgue λ_n. Rappelons que dans la définition de H^n on peut se limiter aux recouvrements par des ensembles fermés. Calculons $H^n((B(0,1))$.

Pour un recouvrement $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ de $B(0,1)$ par des ensembles fermés, et :

$$\textstyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_n(B_k) \geqslant \lambda_n(B(0,1)) = \alpha_n.$$

Mais $\lambda_n(B_k) \leq \alpha_n diam(B_k)^n$,donc :

$$\alpha_n 2^{-n} \sum_k diam(B_k)^n \geqslant 2^{-n} \sum_k \lambda_n(B_k) \geqslant 2^{-n}\lambda_n(B(0,1)) \qquad (*)$$

Ainsi $H^n((B(0,1)) \geqslant 2^{-n}\lambda_n$ donc H^n est une mesure non-nulle sur $\mathbb{R}^n$.

D'autre part, $m > 0$ on peut recouvrir $B(0,1)$ par les cubes $C(k_1, ..., k_n) = \prod_{j=1}^{n}[(k_j - 2^{-m}; k_j 2^{-m})]$ pour $k_1, ..., k_n \in \{-2^m + 1, 2^m\}$ chacun ayant un diamètre $\sqrt{n}2^{-m}$ ainsi :

$$H^n((B(0,1)) \leqslant \alpha_n 2^{-n} \sum_{k_1,\ldots,k_n \in\{-2^m+1,2^m\}} \sqrt{n}2^{-mn} = \sqrt{n}\alpha_n$$

En conclusion H^n est une mesure δ-finie sur $\mathbb{R}^n$. De plus H^n est invariante par isométries .Il s'ensuit que H^n est un multiple non nul de la mesure de Lebesgue . Les arguments donnés ici montre que :

$$2^{-n}\lambda_n \leqslant H^n \leqslant \sqrt{n}\lambda_n.$$

Pour prouver que le facteur de multiplicité est exactement 1, c-à-d . que $H^n = \lambda_n$ il faut travailler plus précisément dans les inégalités obtenues au-dessus. On donne par la suite une ébauche de cet argument. Acceptons le fait (loin d'être trivial) que l'ensemble de diamètre 2 de mesure de Lebesgue maximale est la boule unité $B(0,1)$. Alors, l'inégalité (*) devient :

$$\alpha_n 2^{-n} \sum_k diam(B_k)^n \geqslant \sum_k \lambda_n(B_k) \geqslant \lambda_n(B(0,1))$$

ce qui entraine que :

$$H^n((B(0,1)) \geqslant \lambda_n(B(0,1)).$$

Pour l'inégalité inverse supposons par l'absurde que :$H^n = (1+\delta)\lambda_n$ avec $\delta > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. On va essayer construire un recouvrement du cube $[0,1]^n$ par des ensembles de diamètre au plus ε, qui va induire une mesure de Hausdorff strictement plus petite que $1+\delta$,Soit $m \in \mathbb{N}$ pair avec $m > 2/\varepsilon$.Prenons $B_1, ..., B_{(m/2)^n}$ les boules de rayons $1/m$ (donc de diamètre de plus que ε) centrées au points $\{(k_1, ..., k_n)\}$ avec $(k_1, ..., k_n) \in \{\frac{1}{m}, \frac{3}{m}, ..., \frac{m-1}{m}\}$ on a :

$$\lambda_n(\bigcup_{j=1}^{(m/2)^n} B_j) = \sum_{j=1}^{(m/2)^n} \lambda_n(B_j)^n = \frac{\alpha(n)}{2^n} \sum_{j=1}^{(m/2)^n} diam(B_j)^n = \frac{\alpha(n)}{2^n}$$

Notons $A = \frac{[0,1]^n}{\bigcup_{j=1}^{(m/2)^n} B_j}$ alors A peut être couverte par des ensembles $(B_k)_{k>(m/2)^n}$ de diamètre au plus ε de sort que :

$$\frac{\alpha(n)}{2^n} \sum_{j \geqslant (m/2)^n} diam(B_j)^n \leqslant H^n(A) + \frac{\delta\alpha(n)}{2^{n+1}} = (1+\delta)\lambda_n(A) + \frac{\delta\alpha(n)}{2^{n+1}} = (1+\delta)(1-\frac{\alpha(n)}{2^n}) + \frac{\delta\alpha(n)}{2^{n+1}}$$

Ainsi on obtenu un recouvrement $(B_k)_{k\geqslant 1}$de $[0,1]^n$ avec $diam(B_k) \leqslant \varepsilon$

pour tout k et :

$$\frac{\alpha(n)}{2^n} \sum_{j\geqslant 1} diam(B_j)^n \leqslant \frac{\alpha(n)}{2^n} + (1+\delta)(1-\frac{\alpha(n)}{2^n}) + \frac{\delta\alpha(n)}{2^{n+1}} = (1+\delta)(1-\frac{\delta\alpha(n)}{2^{n+1}})$$

Cela montre que :

$$H^n([0,1]^n) \leqslant (1+\delta)(1-\frac{\delta\alpha(n)}{2^{n+1}})$$

Ce qui contredit le fais que :

$$H^n = (1+\delta)\lambda_n.$$

Ainsi on conclut que :

$$H^n = \lambda_n.$$

Théorème 2.3.1.2 Toute partie de $\mathbb{R}^n$ ayant une mesure de Lebesgue non nulle est de dimension de Hausdorff n.

Pour ne pas confondre la mesure de Hausdorff avec celle de Lebesgue, on notera vol (comme volume) la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. La démonstration du ce théorème utilise le lemme élémentaire suivant :

Lemme 2.3.1.1 Pour toute partie Lebesgue mesurable A de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$vol(A) \leqslant \delta(A)^n.$$

Démonstration Soit A une partie Lebesgue-mesurable de $\mathbb{R}^n$. Si A est non bornée, on a $\delta(A) = +\infty$ et l'inégalité $vol(A) \leqslant \delta(A)^n$ est triviale. Supposons maintenant que A est bornée. Les projections $\pi_1, ..., \pi_n$ de A sur les n axes des coordonnées de $\mathbb{R}^n$ sont bien des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ de diamètres $\leq \delta(A)$ (car une projection ne fait que diminuer le diamètre). Chaque $\pi_i(A)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est donc inclus dans un intervalle I_i de $\mathbb{R}$ de longueur $\delta(A)$. Il s'ensuit que l'on a :

$$A \subset \pi_1(A) \times ... \times \pi_n(A) \subset I_1 \times ... \times I_n.$$

D'où (en comparant les volumes) :

$$vol(A) \leqslant vol(I_i \times ... \times I_n) = \delta(A)^n$$

qui n'est rien d'autre que l'inégalité désirée. Le lemme est démontré.

Démonstration (du théorème) Il suffit de démontrer le théorème pour les parties bornées de $\mathbb{R}^n$. Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ ayant une mesure de Lebesgue > 0. Puisque $dim_H(A) \leqslant n$, l'égalité $dim_H(A) = n$ a lieu si et seulement si l'on a pour tout $0 < s < n$: $H^s(A) = +\infty$. Soit $0 < s < n$ fixé. Pour tout $0 < \varepsilon < 1$ et pour tout ε-recouvrement $(A_k)_k$ de A, on a :

$$\begin{aligned} \sum_k \delta(A_k)^s &= \sum_k \delta(A_k)^{s-n}\delta(A_k)^n \\ &\geqslant \varepsilon^{s-n}\sum_k \delta(A_k)^n \text{ (car } s-n<0 \text{ et } \delta(A_k) \leq \varepsilon < 1 \text{ pour tout } k) \\ &\geqslant \varepsilon^{s-n}\sum_k vol(A_k) \text{ (d'apré le lemme précédant)} \\ &\geqslant \varepsilon^{s-n} vol(A) \text{ (car } (A_k)_k \text{ recouvre } A) \end{aligned}$$

Comme ceci étant vrai pour tout $(A_k)_k \in R_\varepsilon(A)$, on en déduit que :

$$\inf_{(A_k)_k \in R_\varepsilon(A)} \sum_k \delta(A_k)^s \geqslant \varepsilon^{s-n} vol(A)$$

c'est-à-dire :

$$H^s_\varepsilon(A) \geqslant \varepsilon^{s-n} vol(A)$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient finalement (puisque $vol(A) > 0$) : $H^s_\varepsilon(A) = +\infty$. Ce qui achève cette démonstration.

2.4 Exemples de mesure et dimension de Hausdorff

Exemple 2.4.1

Considérons un disque de rayon 1 dans l'espace $\mathbb{R}^3$:

$H^1(F) = \infty$ (longueur infinie).

$H^2(F) = \frac{4}{\pi}A(F) = 4$.

$H^3(F) = 0$ (volume nul).

On trouve bien que la $\dim_H(F) = 2$.

Exemple 2.4.2

1) H^0 est la mesure de comptage .

2) H^1 est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

3) Pour tout ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ à support compact, $H^s(F) = 0$ si $s > n$.

Démonstration

1) Soit F une partie finie de $\mathbb{R}^n$ Notons :

$$\delta_0 = \min\{|x-y|, x \neq y,\ x, y \in F\}.$$

Soit δ tel que $0 < \delta < \delta_0$, alors :

$$H^0_\delta(F) = card(F).$$

En effet, comme :

$$F \subset \bigcup_{x \in F} \{x\}, H^0_\delta(F) \leqslant \sum_{x \in F} 1 = card(F).$$

D'autre part, si $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ où I est dénombrable et $|U_i| < \delta$ alors $card(F) \leqslant card(I)$ car δ est plus petit que la plus petite distance entre deux points de F. Donc :

$$\sum_{i \in I} |U_i|^0 = card(I) \geqslant card(F)$$

puis en prenant $H^0_\delta(F) \geqslant card(F)$ on obtient l'inégalité en faisant tendre δ vers 0.

Si F est infini, on obtient le résultat en prenant une suite

$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset$ ...d'ensembles finis convergente vers F,

$H^0(E_1) \leqslant H^0(E_2) \leqslant H^0(E_3) \leqslant ... \leqslant H^0(F)$

comme $\{H^0(E_n)\}_n$ diverge vers l'infini, on obtient bien $H^0(F) = \infty$.

2) Comme H^1 est une mesure invariante par translation, il suffit de montrer que $H^1([0,1]) = 1$ car la mesure de Lebesgue est l'unique mesure invariante par translation sur $\mathbb{R}$ vérifiant cette égalité.

Découpons l'intervalle $[0,1]$ en $U_i = [\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]$ pour $i = 1...k$ alors :

$$H^1_{1/k}([0,1]) \leqslant \sum_{i=1}^{k} |U_i|^1 = 1$$

Quand $k \longrightarrow \infty$ on a :

$$H^1([0,1]) \leqslant 1$$

Soient $\delta > 0, \varepsilon > 0$,soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un $\delta - recouvrement$ de $[0,1]$ par des ouverts tel que :

$$\left| H^1_\delta([0,1]) - \textstyle\sum_{i\in I} diam(U_i) \right| < \varepsilon.$$

Il existe une famille $(a_p)_{0\leq p\leq q}$ tel que $0 = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_{q-1} < a_q = 1$ et chaque intervalle $[a_p, a_{p+1}]$ est inclus dans un seul ensemble U_i.

ainsi :

$$H^1_\delta([0,1]) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{q} diam([a_i a_{i+1}]) = 1$$

Il suffit de faire tendre ε puis δ vers 0 pour obtenir que :

$$H^1_\delta([0,1]) > 1.$$

donc l'inégalité :

$$H^1_\delta([0,1]) = 1.$$

2.4.1 Calcule de la dimension de Hausdorff sur des exemples simples

L'ensemble triadique de Contour

Définition 2.4.1.1 On part de l'intervalle $K_0 := [0,1]$. On le découpe en trois intervalles fermés de même longueur, on enlève la partie centrale et on garde les deux parties tantes, à savoir $[0,1/3]$ et $[2/3,1]$. On obtient l'ensemble $K_1 := [0,1/3] \cup [2/3,1]$. On refait la même procédure pour chaque composante connexe de K_1 pour obtenir K_2 $:= [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$ et la même procédure pour obtenir K_3 à partie de K_2 et ainsi de suite. Plus généralement, si K_n est la réunion disjointe des intervalles $I_{n,k}$ $= [x_{n,k}, y_{n,k}]$, l'ensemble K_{n+1} serait la réunion des intervalles $[x_{n,k}, x_{n,k+1} + \frac{1}{3}(y_{n,k} - x_{n,k})]$et $[x_{n,k} + \frac{2}{3}(y_{n,k} - x_{n,k}), y_{n,k}]$. On obtient ainsi une suite $(K_n)_n$ des compactes (non vides) emboîtés. D'après un théorème bien connu en topologie, l'ensemble intersection $K := \cap_n K_n$ serait un compact non vide de $\mathbb{R}$ inclus dans $[0,1]$. Ce dernier s'appelle "l'ensemble triadique de Cantor". L'ensemble de Cantor possède plusieurs propriétés intéressantes de topologie, de la théorie de la mesure ou encore d'algèbre; nous allons dans ce qui suit donner certaines de ces propriétés en démontrant les plus importantes d'entre elles.

A la fin, nous allons calculer la dimension de IIausdorff de K.

Théorème 2.4.1.1 L'ensemble K est de mesure de Lebesgue nulle.

Démonstration Comme K étant l'intersection des ensembles K_n $(n \in \mathbb{N})$, les quels sont des compacts emboîtés, on a d'après l'une des propriétés bien connue des mesures :

$$\lambda(K) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \lambda(K_n),$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue. Maintenant, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble K_n est une réunion disjointes de 2^n intervalles de longueur $\frac{1}{3^n}$ chacun, on a :

$$\lambda(K_n) = \frac{2^n}{3^n} = (2/3)^n \text{ pour tout } n.$$

D'où :

$$\lambda(K) = \lim_{n \longrightarrow \infty} (2/3)^n = 0$$

Comme il fallait le prouver.

Théorème 2.4.1.2 La dimension de Hausdorff de l'ensemble K de Cantor est égale à $\frac{\log 2}{\log 3}$. On a de plus : $\frac{1}{2} \leqslant H^{\frac{\log 2}{\log 3}}(K) \leqslant 1$.

Démonstration Montrons premièrement que l'on a $\dim_H(K) \leqslant \frac{\log 2}{\log 3}$. Cela revient à montrer que pour tout réel $s > \frac{\log 2}{\log 3}$, on a $H^s(K) = 0$. Soit $s > \frac{\log 2}{\log 3}$ un réel fixé. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des composantes connexes de K_n est un recouvrement fini pour K, constitué de 2^n intervalles de longueur (ou diamètre) $\frac{1}{3^n}$, alors on a :

$$H^s_{\frac{1}{3^n}}(K) \leq 2^n (\tfrac{1}{3^n})^s = (\tfrac{2}{3^s})^n \ (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Maintenant $s > \frac{\log 2}{\log 3}$ entraîne $\frac{2}{3^s} < 1$, ce qui entraîne que $(\frac{2}{3^s})^n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il s'ensuit que l'on a $\lim_{n \longrightarrow \infty} H^s_{\frac{1}{3^n}}(K) = 0$, c'est-à-dire $H^s(K) = 0$ comme il fallait le prouver. L'inégalité $\dim_H(K) \leqslant \frac{\log 2}{\log 3}$ est ainsi établie. Remarquer par ailleurs qu'en reprenant le raisonnement ci-dessus avec le réel $\frac{\log 2}{\log 3}$ au lieu d'un réel $s > \frac{\log 2}{\log 3}$, on obtient $H^{\frac{\log 2}{\log 3}}(K) \leq 1$. Montrons maintenant la partie restante du théorème, à savoir les faits que $\dim_H(K) \geqslant \frac{\log 2}{\log 3}$ et $H^{\frac{\log 2}{\log 3}}(K) \geqslant \frac{1}{2}$. Comme il est bien clair que le premier fait est entraîné par le second, on montrera juste ce dernier. Pour simplifier les écritures, posons $t = \frac{\log 2}{\log 3}$. On doit donc montrer que l'on a $H^t(K) \geqslant \frac{1}{2}$. Donnons-nous un $\varepsilon > 0$ et un ε-recouvrement $(A_n)_{n \geqslant 1}$ de K. Posons pour tout $n \geqslant 1$:

$$x_n := \inf(A_n \cap K), \quad y_n := \sup(A_n \cap K)$$

On a :

$$\sum_n \delta(A_n)^t \geqslant \sum_n \delta(A_n \cap K)^t = \sum_n (y_n - x_n)^t \quad (1)$$

Maintenant, étant donné $\eta > 0$ quelconque, la famille au plus dénombrable des intervalles ouverts $(]x_n - \frac{\eta}{2^{n+1}}; y_n + \frac{\eta}{2^{n+1}}[)_n$ constitue évidemment un recouvrement ouverts pour K et, puisque K est compact, on peut en extraire de ce dernier recouvrement un sous-recouvrement fini. Qui à faire un réordonnement, soit $(]x_n - \frac{\eta}{2^{n+1}}; y_n + \frac{\eta}{2^{n+1}}[)_{1\leqslant n\leqslant N}$ un tel sous-recouvrement de K. Posons pour tout $1 \leqslant n \leqslant N$:

$$u_n := \max(x_n - \tfrac{\eta}{2^{n+1}}, 0) \text{ et } v_n := \min(y_n + \tfrac{\eta}{2^{n+1}}, 1)$$

Puisque $K \subset [0,1]$, la famille finie $([u_n, v_n])$ constitue évidemment un recouvrement pour K. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_n (y_n - x_n)^t &\geqslant \sum_{n=1}^{N} (y_n - x_n)^t \\
&\geqslant \sum_{n=1}^{N} (v_n - u_n - \tfrac{\eta}{2^n})^t \\
&\geqslant \sum_{n=1}^{N} \{(v_n - u_n)^t - (\tfrac{\eta}{2^n})^t\} \\
&\geqslant \sum_{n=1}^{N} (v_n - u_n)^t - \eta
\end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_n (y_n - x_n)^t \geqslant \sum_{n=1}^{N} (v_n - u_n)^t - \eta \qquad (2)$$

Nous allons maintenant minorer la somme $\sum\limits_{n=1}^{N} (v_n - u_n)^t$. Pour tout $1 \leqslant n \leqslant N$, introduisons $r = r(n)$ le plus grand entier positif pour lequel l'intervalle férmé $[u_n, v_n]$ rencontre une seule composante connexe $I_n := [a_n, b_n]$ de K_r ($r(n)$ existe

Car un intervalle rencontrant une seule composante connexe de K_r est de longueur $\leqslant 3.\frac{1}{3^r}$, donc s'approchant de plus en plus de 0 quand r s'agrandit, alors que la longueur de $[u_n, v_n]$ est $v_n - u_n > 0$). Ainsi, pour tout $1 \leqslant n \leqslant N$, l'intervalle $[u_n, v_n]$ rencontre au moins deux composantes connexes distinctes de $K_{r(n)+1}$. Telles composantes sont certainement celles qui proviennent de $[a_n, b_n]$, à savoir $[a_n, a_n + \frac{1}{3}(b_n - a_n)]$ et $[a_n + \frac{2}{3}(b_n - a_n), b_n]$. Comme la distance entre ces deux dernières vaut $\frac{1}{3}(b_n - a_n)$, alors on a forcément :

$$v_n - u_n \geqslant \tfrac{1}{3}(b_n - a_n) \text{ (pour tout } 1 \leqslant n \leqslant N).(3)$$

Par ailleurs, étant donné $1 \leqslant n \leqslant N$, puisque l'intervalle $[u_n, v_n]$ rencontre une seule composante connexe I_n de $K_{r(n)}$, alors on a $[u_n, v_n] \cap K \subset [u_n, v_n] \cap K_{r(n)} \subset I_n$. Ce qui entraîne que la famille $(I_n)_{1 \leq n \leq N}$ constitue à fortiori un recouvrement pour K. Posons $r := \max\{r(n) : 1 \leqslant n \leqslant N\}$. En substituant dans le recouvrement $(I_n)_{1 \leq n \leq N}$ de K, chaque I_n par les composantes connexes $(I_{n,m})$m de K_r qu'il contient, on obtient clairement un recouvrement fini $(I_{n,m})_{n,m}$ de K, constitué de composantes connexes de K_r. Ce recouvrement de K contient forcément toutes les composantes connexes de K_r. Il s'ensuit (puisque K_r compte exactement 2^r composantes connexes et chacune de ces composantes est de longueur $\frac{1}{3^r}$) :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}(b_n - a_n)^t &= \sum_{n=1}^{N} \delta(I_n)^t \\
&\geqslant \sum_{n,m} \delta(I_{n,m})^t \\
&\geqslant 2^r \left(\tfrac{1}{3^r}\right)^t \\
&= 1 \quad (\text{car } 3^t = 2)
\end{aligned}
$$

Par suite (grâce à (3)) :

$$\sum_{n=1}^{N}(v_n - u_n)^t \geqslant \frac{1}{3^t} = \frac{1}{2}$$

En reportant cette estimation dans (2), puis celle qui en résulte dans (1), on obtient :

$$\sum_n \delta(A_n)^t \geqslant \frac{1}{2} - \eta\ .$$

Comme η est arbitraire, on en déduit que :

$$\sum_n \delta(A_n)^t \geqslant \frac{1}{2}\ .$$

Maintenant, puisque $(A_n)_{n \geqslant 1}$ étant arbitraire (en tant que ε-recouvrement de K), on en déduit que :

$$H^t_\varepsilon(K) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Finalement, en faisant tendre ε vers 0, il vient que :

$$H^t(K) \geqslant \frac{1}{2}$$

Comme il fallait le prouver. Notre démonstration est complète.

Triangle de Sierpinsky

La dimension de Hausdorff du triangle de Sierpinsky est $\frac{\ln 3}{\ln 2}$.

On va recouvrée cette triangle par des boules de diamètre $\sqrt{2}\frac{1}{2^n}$. En effet, l'hypoténuse d'un triangle rectangle inscrit dans un cercle définit le diamètre de celui-ci. Notons que tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Dans chaque cas, on utilise 3^n boules. Ainsi, en supposant que ce recouvrement est celui pour lequel l'infimum est atteint, on trouve la s-mesure de recouvrement :

$$H^s(F) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf\{\sum diam(V_i)^s : F \subset \cup V_i : diam(V_i) < \varepsilon\} = \lim_{n \longrightarrow \infty} 3^n(\sqrt{2}\tfrac{1}{2^n})^s$$

Après réarrangement des termes,

$$H^s(F) = (\sqrt{2})^s \lim_{n \longrightarrow \infty} (\tfrac{3}{2^s})^n \ .$$

Or, cette limite tend vers 0 lorsque $\frac{3}{2^s} < 1$ et elle diverge à l'infini pour $\frac{3}{2^s} > 1$. Autrement dit, elle se situe entre 0 et ∞ lorsque $\frac{3}{2^s} = 1$, c'est-à-dire pour $s = \frac{\ln 3}{\ln 2}$. Donc, la dimension de Hausdorff du triangle de Sierpinsky est $\frac{\ln 3}{\ln 2}$.

La mesure de Hausdorff d'une courbe rectifiable

Définition 2.4.1.2 Une courbe sur $\mathbb{R}^d$ est l'image d'une fonction continue injective $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^d$.Pour une telle fonction f posons :

$$L(f) = \sup\{\sum_{j=1}^{n} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| : 0 = t_0 < ... < t_n = 1\}$$

On dit que f est rectifiable si $L(f) < \infty$. Dans ce cas on appelle $L(p)$ la longueur de f.

On peut facilement montrer que si f, g sont deux fonctions injectives de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^d$ de même image, alors $L(f) = L(g)$. Ainsi, on peut parler de courbe rectifiable et de longueur d'une courbe. Si $t = (t_0, ..., t_n)$ et $s = (s_0, ..., s_n)$ sont des subdivisions de $[0,1]$, avec s qui est plus fine que t alors :

$$\sum_{j=1}^{n}\|f(t_j)-f(t_{j-1})\| \leqslant \sum_{j=1}^{m}\|f(s_j)-f(s_{j-1})\|$$

De plus, si f est rectifiable, alors $L(f)$ est obtenue comme la limite de $\sum_{j=1}^{n_k}\left\|f(t_j^k)-f(t_{j-1}^k)\right\|$ pour toute suite de subdivisions

$(t_1^k...t_{n_k}^k)$ de pas tendant vers 0.

Une courbe rectifiable et une approximation de sa longueur par une subdivision.

Proposition 2.4.1.1 Soit f une courbe rectifiable dans $\mathbb{R}^n$ alors:

$$H^1(\mathrm{Im}(f)) = L(f) \text{ et } \dim_H(\mathrm{Im}(f)) = 1.$$

Démonstration Commençons par montrer que :

$$H^1(\mathrm{Im}(f)) \leq L(f).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x, y \in [0,1]$ avec $|x-y| \leq \frac{1}{n}$ on a : $\|f(x)-f(y)\| \leq \varepsilon$ (un tel n existe par uniforme continuité de la fonction continue f.)

Considérons la subdivision régulière de $[0,1]$ de pas $1/n$ à savoir $(t_j = \frac{j}{n})_{0\leq j\leq n}$. On y associe le recouvrement de $Im(f)$ donné par $B_j = f([t_{j-1}, t_j])$ avec $j = 1...n$ .Par compacité, le diamètre de chaque ensemble B_j est réalisé par une parie de points $t_{j-1} \leq s_j \leq s_j^{'} \leq t_j$:

$$diam(B_j) = \left\|f(s_j^{'})-f(s_j)\right\|$$

Mais la suite $(0, s_1, s_1^{'}, s_2, ..., s_n, s_n^{'}, 1)$ est une subdivision de $[0,1]$, donc :

$$\sum_j diam(B_j) = \sum_j \left\|f(s_j^{'})-f(s_j)\right\|$$
$$\leqslant \|f(s_1)-f(0)\| + \left\|f(s_1^{'})-f(s_1)\right\| + ... + \left\|f(s_n^{'})-f(s_n)\right\| + \left\|f(s_n^{'})-f(1)\right\| \leqslant L(f)$$

Gardant en tête que $\alpha(1)/2 = 1$,on obtient :

$$H^d(\mathrm{Im}(f)) \leqslant L(f).$$

Passons à l'inégalité inverse. Soit $0 \leqslant t < s \leqslant 1$ et soit π la projection de $\mathbb{R}^n$ sur la droite d qui passe par $f(t)$ et $f(s)$. Alors π est 1-lipschitzienne et $\pi(f([s,t])$ est un intervalle sur la droite d, contenant $f(t)$ et $f(s)$. Ainsi :

$$H^1(f([s,t]) \geqslant H^1(\pi(f([s,t])) \geqslant \|f(t) - f(s)\|$$

On en déduit que, pour toute subdivision $(t_0, ..., t_n)$ de $[0,1]$:

$$H^1(f([0,1])) = \sum_{j=1}^{n} H^1(f([t_{j-1}, t_j])) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| .$$

Il s'en suit que :

$$H^1(f([0,1]) \geqslant L(f)$$

Il existe des courbes continues (comme la courbe de Peano, le contour du flocon de Koch ou les trajectoires typiques du mouvement Brownien) avec dimensions de Hausdorff strictement plus grande que 1. Il s'agit évidemment des courbes qui ne sont pas rectifiables.

Bibliographie

[1] N. Bourbaki, Eléments de mathématiques, Herman, Paris.

[2] M. Briamce et G. Pagés, Théorie de l'intégration, Vuibert, Paris, 2000.

[3] G Choquet cours de la topologie.Massons,1992.

[4] D. L. Cohn, Measure Theory, Birkhäuser, Boston, 1980.

[5] R.L. Devaney Chaotic Dynamical Systems (Second Edition).

[6] L Doob, Measure Theory, Graduate Texts in Mathematics 143, Springer, New-York, 1994.

[7] R. M. Dudley, /em Real analysis and probability, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 74, Cambridge University Press, 2002.

[8] N. Dunford and J.T. Schwartz, Linear Operators part I : General Theory, Wiley (1988).

[9] K. Falconer, Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications, 2nd ed, Wiley (2003).

[10] P. R. Halmos, Measure Theory, Springer-Verlag (1950).

[11] Jean-François Le Gall. Arbres aléatoires et applications. Cours du DEA Probabilités et Applications de l'université Paris VI. 2003-2004.

[12] J.F. Le Gall, Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires, http ://www.math.u-psud. fr/~jflegall/IPPA2.pdf.

[13] Peter Mörters. Five lectures on Hausdorff Dimension, Random Trees and Brownian Motion. Material zur Winterschule des Graduiertenkollegs« Stochastische Prozesse und probabilistische Analysis ». 2003.

[14] W. Rudin, Analyse réelle et complexe,Masson, Paris, 1980.

[15] W. Rudin, Real and complex analysis (3ème éd.),McGraw-Hill, New York, 1987.

[16] D. W. Stroock, A concise introduction to the theory of integration (3ème éd.), Birkhäuser,Boston, 1999.

[17] S. Wagon, The Banach-Tarski Paradox, Cambridge University Press (1993).

[18] J. Yeh, Real analysis. Theory of measure and integration (2ème éd.),World Scientific, Hackensack, 2006.

[19] S. Wagon, The Banach-Tarski Paradox, Cambridge University Press (1993).