République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP et Analyse numérique**

Par : **BOUNEFLA Mereim**

Intitulé

Un problème parabolique à coefficient non local

Dirigé par : **CHAOUI Abderezak**

Devant le jury

PRESIDENT	Mr: BOULARES Hamid	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Mr: CHAOUI Abderezak	PR	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Mr: BOUAFIA Mousaab	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Table des Matières

Introduction

Ces dernières années , on a constaté un intéret croissant pour l'étude des équations parabolique à coefficient non local$[2-8]$. Cet intétret provient de leur contribution à la modélisation de nombreux phénomènes physiques et biologiques . par exemple ; la solution u du notre problème pouvrait décrire la densité de la population de bacteries sujettes à l'épandage , le coefficient de terme de diffusion Δu dans le problème dépend d'une quantité non local $\int_\Omega u(x,t)dx$ lié à la population totale du domaine Ω .

Dans la littérature , l'accent à été mis sur la preuve de la solvabilité du problèmes aux coefficients non locaux stationnaires dépendants du temps mais il y a peu de travail sur l'approximation numérique de tel problèmes sauf dans $[2,4-6]$.

Dans [2] les auteurs ont étudié l'analyse de convergence de la solution d'éléments finis pour le problème à coefficient non local éliptique , òu Ω est un domaine borné à frontière lipshtitzienne

Le plan de ce mémoire est le suivant :

① Le chapitre 1 , nous présentons quelques notions de bases , définitions élémentaires , les propriétées essentielles d'analyse fonctionnelle qui sont utilisées dans la suite .

② Le chapitre 2 , nous dérivons des estimations a priori qui seront utilisées pour montrer l'existence , unicité de la solution et dans l'analyse d'erreur

③ Le chapitre 3 , nous faisons la discrtisation complète du problème et Quelques estimations de l'erreur .

Chapitre 1

Rappel d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre , on va présenter quelques notions d'analyse fonctionnelle qu'on va utiliser ultérieurement .

1.1 Espace de Banach

Tout espace vectoriel normé complet est appellé espace de Banach .

1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.2.0 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (donc normé) , et complet pour la norme induite . Un espace de Hilbert est donc un cas particulier d'éspace de Banach*
(la norme est définie à partir d'un produit scalaire)

1.3 Espace de Lebesgue

Définition 1.3.0 *Soit p un élément de $[1, +\infty[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on appelle espace de Lebesgue , et on note $\mathbb{L}^P(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques u de Ω dans $\mathbb{C}$ Lebesgue mesurables vérifiant :*

– *Si* $1 \leq p \leq +\infty \qquad \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty.$

– *Si* $p = \infty$ $\qquad \underset{x\in\Omega}{supess}\,|u(x)| < +\infty$

où

$$\underset{x\in\Omega}{supess}\,|u(x)| = \inf\{M \ telque \quad |u(x)| \leq M \quad p.p\}$$

Quelques propriétés

1) L'application de $\mathbb{L}^P(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^+$:

$$u \to \begin{cases} \|u\|_p = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p \leq +\infty \\ \\ \|u\|_\infty = \underset{x\in\Omega}{supess}\,|u(x)| & p = +\infty \end{cases}$$

définit une norme sur $\mathbb{L}^P(\Omega)$, par laquelle $\mathbb{L}^P(\Omega)$ est un espace de Banach .

2) Dual pour tout réel p dans $[1, +\infty[$, le dual de $\mathbb{L}^P(\Omega)$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à $\mathbb{L}^q(\Omega)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, l'application de dualité est définie par :

$$\begin{array}{rcl} L^P(\Omega) \times \mathbb{L}^q(\Omega) & \to & \mathbb{C} \\ (u, v) & \to & \int\limits_{\Omega} u(x)v(x)dx. \end{array}$$

pour tout réel p dans $[1, +\infty[$, le bidual de $\mathbb{L}^P(\Omega)$ s'identifie algébriquement et topologiquement à $\mathbb{L}^P(\Omega)$. On dit que l'espace $\mathbb{L}^P(\Omega)$ est reflexif .

1.4 l'espace de $\mathbb{L}^2(\Omega)$

Définition 1.4.0 *On note par* $\mathbb{L}^2(\Omega)$ *l'espace des fonctions de carées sommables sur* Ω *, où* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *c'est -à- dire :*

$$\mathbb{L}^2(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ mesurable tel que } \int_\Omega |f(x)|^2 < +\infty\right\}$$

muni du produit scalaire :

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\,g(x)\,dx.$$

$\mathbb{L}^2(\Omega)$ *est un espace de Hilbert .*

1.5 Espace de Sobolev

Définition 1.5.0 *Soit $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$. On définit l'espace de Sobolev $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$ par :*

$$\mathbb{W}^{k,p}(\Omega) = \{ f \in \mathbb{L}^P(\Omega) \ tq \ D^\alpha f \text{ existe et } D^\alpha f \ \in \mathbb{L}^P(\Omega).\forall |\alpha| \leq k\}$$

On muni les espaces de Sobolev par une structure d'espace normé dont les normes sont définies par

$$\|f\|_{\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < +\infty.$$

$$\|f\|_{\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha f(x)| \qquad p = +\infty.$$

Si $p = 2$: $\mathbb{H}^k$ est un espace de Hilbert où $\mathbb{H}^k = \mathbb{W}^{k,2}$.

1.5.1 Espace de Sobolev $\mathbb{H}^1(\Omega)$

Définition 1.5.0 *On appele espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω , l'espace*

$$\mathbb{H}^1(\Omega) = \{f \in \mathbb{L}^2(\Omega), \ \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^2(\Omega), \ 1 \leq i \leq n\}.$$

On munit $\mathbb{H}^1(\Omega)$ du produit scalaire

$$\begin{aligned}(f,g) &= \int_\Omega f.gdx + \int_\Omega \nabla f.\nabla gdx \\ &= \int_\Omega f.gdx + \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dx.\end{aligned}$$

La norme correspondante sera :

$$\|f\|_{1,\Omega} = \sqrt{(f,f)_{1,\Omega}}.$$

1.5.2 Espace de Sobolev $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$

Définition 1.5.0 *On note par $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ la fermeture de $\mathbb{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$*

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) = \overline{\mathbb{D}(\Omega)}^{\mathbb{H}^1(\Omega)}$$

Théorème 1.5.1 *Soit Ω un ouvert borné régulier . Alors $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ est donné par :*

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega),\ v_{|\partial\Omega} = 0 \ sur\ \partial\Omega\}.$$

1.6 Les espaces de Boschner

Définition 1.6.0

1) $\mathbb{C}(I, \mathbb{L}^2(\Omega)) = \{f : I \to \mathbb{L}^2(\Omega)$ *qui associé à* t , $f(t) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$*continue*$\}$

muni de la norme :

$$\|f\|_{\mathbb{C}(I,\mathbb{L}^2(\Omega))} = \max_{t \subset I} \|f\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

2)$\mathbb{L}^\infty(I, \mathbb{H}_0^1(\Omega)) = \{f : I \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ *essentiellement bornées*$\}$.

muni de la norme :

$$\|f\|_{\mathbb{L}^\infty(I,\mathbb{H}_0^1(\Omega))} = \sup_{t \in I} \|f\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} .$$

3) $\mathbb{L}^2(I, \mathbb{L}^2(\Omega)) \ = \{ \ f : I \to \mathbb{L}^2(\Omega)$ *à carrée intégrable*$\}$

muni de la norme

$$\|f\|_{\mathbb{L}^2(I,\mathbb{L}^2(\Omega))} = \int_\Omega \|f\|^2_{\mathbb{L}^2(I)} \, dt \ < \infty.$$

1.7 Convergence faible

Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach

Définition 1.7.0 (x_n) *converge faiblement dans* $\mathbb{E}$ *vers* x *si l'on a :*

$$\lim_{n \to +\infty} \langle x', x_n \rangle = \langle x', x \rangle \leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \langle x', x_n - x \rangle = 0 \qquad \forall x' \in \mathbb{E}'$$

avec $\mathbb{E}'$ *l'espace dual de* $\mathbb{E}$.

Notation :

1. on note $x_n \longrightarrow x$ faiblement dans $\mathbb{E}$ par : $x_n \rightharpoonup x$
2. on note $x_n \longrightarrow x$ fortement dans $\mathbb{E}$ par : $x_n \longrightarrow x$ (c'est-à-dire la convergence en norme)

Remarque :

– Si $x_n \longrightarrow x$ fortement ($\|x_n - x\|_{\mathbb{E}} \longrightarrow 0$) $\Longrightarrow$ $x_n \rightharpoonup x$ car

$$\forall x' \subset \mathbb{E} : |(x', x_n - x)| \leq x' \|x'\| . \|x_n - x\| \longrightarrow 0$$

– Si $dim\mathbb{E} < \infty$ on a équivalence de deux notions

En effet

$x^m = (x_1^m , x_2^m, ..., x_n^m)$, $\dim \mathbb{E}' = n$; $\{e_1 , e_2, e_n\}$ base de $E \Longrightarrow \{e_j^*\}_{j=1}^n$ base dual tel que

$$e_j^*(e) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$x^m \rightharpoonup x = (x_1, x_2, ..., x_n) \Longrightarrow \forall i = 1, ..., n, x' = e_i^*$$

$$(e_i^*, x^m - x) = x_i^m - x_i \underset{m \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i^m - x_i| \underset{m \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

Alors

$$\|x^m - x\|_1 \longrightarrow 0 \quad \text{ce qui donne } \|x^m - x\| \longrightarrow 0$$

Car toutes les normes de $\mathbb{E}$ sont équivalentes .

Théorème 1.7.1 *Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach reflexif et x_n une suite bornée dans $\mathbb{E}$, alors il est possible d'extraire une sous suite de x_n qui converge faiblement dans $\mathbb{E}$.*

Théorème 1.7.2 *Toute suite borné dans un espace de Hilbert possède une sous suite faiblement convergente .*

1.8 Espace dual

Si $\mathbb{E}$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$, le dual de $\mathbb{E}$ est l'espace $\pounds(\mathbb{E}, \mathbb{k})$ des formes linéaires continues sur $\mathbb{k}$, on le note $\mathbb{E}'$ de la norme subordonnée à la norme de $\mathbb{E}$.

1.9 Les inégalités utilisées

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

1.9.1 L'inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1.9.1 $\forall\ u, v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$

$$\left|\int_\Omega uvdx\right| \leq \left(\int_\Omega |u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\sum_{i=1}^N u_iv_idx \leq \left(\sum_{i=1}^N u_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N v_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve.pour $\lambda \in \mathbb{R}$, définissions le trinôme du second degré

$$p(\lambda) = (u + \lambda v, u + \lambda v) = \lambda^2(v, v) + 2\lambda(u, v) + (u, u)$$

comme $p(\lambda) \geq 0 \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$, nécessairement le discriminant

$$\triangle = (u, v) - (u, u)(v, v)$$

doit être négatif ou nul . soit $|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}}(v, v)^{\frac{1}{2}}$.
si $\triangle = 0$ alors le polynome $p(\lambda) = 0$ admet une racine double c'est-à-dire il existe λ_1 tq $q(\lambda_2) = 0$ donc u et v sont colinéaires .

1.9.2 L'ξ inégalité

Définition 1.9.1

$$\boxed{|xy| \leq \frac{\varepsilon}{2}x^2 + \frac{1}{2\varepsilon}y^2 \quad \forall\varepsilon \geq 0\ , \forall xy \in \mathbb{R}}$$

1.9.3 Inégalité de Gronwall

Lemme 1.9.1

① ***Le cas continue :*** *Soient* $x(t) \geq 0$, $h(t)$, $y(t)$ *des fonctions intégrables sur* $[a, b]$.*Si*

$$y(t) \leq h(t) + \int_a^b x(\tau)y(\tau)d\tau \quad \forall t \in [a, b].$$

Alors

$$y(t) \leq h(t) + \int_0^t \left(h(\tau)x(\tau)\exp\left(\int_t^\tau x(s)ds \right) \right) d\tau \quad \forall t \in [a, b] \; .$$

En particulier si $x(t) = c$ *et* $h(\tau)$ *est croissant , alors*

$$y(t) \leq h(t) + \exp(c(t - a)) \quad \forall t \in [a, b]$$

② ***Le cas discret :*** *Soit* $\{a_i\}$ *une suite des nombres réels positifs tels que* $a_1 \leq a$ *et* $a_i \leq a + bh \sum_{k=1}^{i-1} a_k$ $\forall i = 2, ...$ *avec* a, b *et* h *sont des constantes positives Alors*

$$\boldsymbol{a_i \leq a \exp(b(i - 1)h) \qquad i = 2, ... \; .}$$

1.9.4 Inégalité de Poincaré

Définition 1.9.1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n, \Omega \subset \overline{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^n, a < b$ *pour certain* $\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| = 1, a, b \in \mathbb{R}^n\}$.*(c'est -à-dire* Ω *est située entre deux hyperplans parallèles avec* $\xi = b - a$*). Alors il existe une constante universelle* $c_0 > 0$*(i . e independante de* Ω *) tel que :*

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c_0 \xi \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

En particuler l'expression $\|\nabla u\|_p$ *est une norme sur* $W_0^1(\Omega)$ *qui est équivalente à la norme* $\|u\|_{W^{k,p}}$ *sur* $H_0^1(\Omega)$. *l'expression* $\int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ *est un produit scalaire qui induit la norme* $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$*équivalente à la norme* $\|u\|_{H^1}$.

1.10 Quelques théorèmes utilisées

1.10.1 Théorème de représentation de Riesz

Théorème 1.10.1 *Soit l une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert $\mathbb{H}$. Alors il existe un unique vecteur $y_l \in \mathbb{H}$ tel que , pour tout $x \in \mathbb{H}$*

$$\boxed{l(x) = \langle x, y_l \rangle.}$$

1.10.2 Formule de Green

Théorème 1.10.2 *On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ régulière , alors $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ on a*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} uv\gamma_i d\sigma.$$

où γ_i la $i \stackrel{\text{ème}}{=}$ composante du vecteur unitaire normal extérieur .
En remarquant $\triangle u = div(\nabla u)$, alors on a

$$\int_{\Omega} \triangle uv dx = -\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma} (\nabla u \eta) v.$$

1.10.3 Théorème de point fixe (Brouwer)

Théorème 1.10.3 *Soit $\mathbb{K}$ un compact convenxe de $\mathbb{R}^n$. Alors toute fonction continue $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ admet ou moins un point fixe .*

1.10.4 Théorème de Laxe-Milgram

Théorème 1.10.4 *Si $a(,.,)$ est une forme bilinéaire continue et coersive sur l'espace de Hilbert $\mathbb{V} * \mathbb{V}$, et $l(.)$ est une forme linéaire continue sur $\mathbb{V}$, Alors le problème variationnel suivant :*

$$(P): \quad \begin{cases} \text{trouver } u \in V tq : \\ a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

admet une unique solution .

Chapitre 2

Position du problème et Quelques estimations a priori

2.1 Position du problème

Dans ce chapitre , on est concerné par l'étude du problème suivant

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} - \mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{u}))(\Delta \mathrm{u}) = \mathrm{f}(\mathrm{t}, \mathrm{x}) \quad \text{dans} \quad \mathbb{Q} \quad (2.1)$$

$$u(x,t) = 0, \quad dans \quad \Sigma \quad (2_a)$$

$$u(x,0) = u_0 \quad \text{dans } \ \Omega. \qquad (2_b)$$

où $Q = \Omega \times \ (0,T)$
Ω un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ de frontiere $\partial\Omega$
$\Sigma = \partial\Omega \times \ (0,T)$
$l(u) = \int_\Omega u(x,t)dx$

2.2 Hypothèses et schéma de discrétisation

Dans cette section , nous donnons les hypothèses qui assurent l'existence et l'unicité d'une solution faible .
Nontons le produit scalaire et la norme par (,) et $\| \ .\|$
respectivement , et $\| \ .\|_{-1}$ représente la norme dans $H^{-1}(\Omega)$ (L'espace dual à $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$).
On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1. **H(1)** $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $f \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$.
2. **H(2)** $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est telle que $\infty > M \geq a(s) \geq m > 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}$
3. **H(3)** a est lipschitz continue avec la constante lipschitz L_M

Définition 2.2.0 *Par une solution faible du problème* (2.1) *on entend une fonction* u *satisfaisante*

① $u \in \mathbb{L}^2(0,T,\mathbb{H}_0^1(\Omega)) \cap \mathbb{C}^0(0,T,\mathbb{L}^2(\Omega))$

② $u_t \in \mathbb{L}^2(0,T,\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$

③ *telle que pour tous* $v \in V = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$

$$\boxed{\begin{array}{l} (\frac{\partial u}{\partial t}, v) + a(l(v))(\nabla u, \nabla v) = (f,v) \quad p.p \\ u(x,0) = u_0 \quad dans \quad \Omega \end{array}} \tag{2.2}$$

2.3 Existence , Unicité et Estimation a priori

Théorème 2.3.1 *supposons* $u_0 \in V$ *et* $f \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$. *alors la solution* u *du problème satisfait aux estimations suivante :*

① $\| u \|_{\mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}_0^1(\Omega))} \leq C$

② $\| u_t \|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))} \leq C$

③ $\| \Delta u \|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C$

tant que C *est une constante depend de* m , f , u_0

Preuve.
Nous allons démontrer la premiere inégalité du théorème :
nous écrivons le problème (2.1) sous forme variationnel
nous cherchons $u \in V = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ qui vérifie

$$(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}, \mathrm{v}) - \mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{u}))(\nabla \mathrm{u}, \mathrm{v}) = (\mathrm{f}, \mathrm{v}) \quad \forall \mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \quad (3.1)$$

Nous appliquons la formule de Green

$$(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}, \mathrm{v}) - \mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{u}))[(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \zeta}, \mathrm{v}) - (\nabla \mathrm{u}, \nabla \mathrm{v})] = (\mathrm{f}, \mathrm{v}) \quad (3.2)$$

qui ce implique

$$(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}, \mathrm{v}) + \mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{u}))(\nabla \mathrm{u}, \nabla \mathrm{v}) = (\mathrm{f}, \mathrm{v}) \qquad (3.3)$$

choisissons $v = u$,

$$(\frac{\partial u}{\partial t}, u) + a(l(u))(\nabla u, \nabla u) \quad = \quad (f, u)$$

donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u, u) + a(l(u))(\nabla u, \nabla u) = (f, u)$$

Nous utilisons l'hypothése H2 et l'inégalite du Cauchy-Schwartz , on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel u \parallel^2 + m \parallel \nabla u \parallel^2 \leq \parallel f \parallel \parallel u \parallel$$

L'ξ inégalité implique

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel u \parallel^2 + m \parallel \nabla u \parallel^2 \leq \frac{1}{2} \parallel f \parallel^2 + \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2$$

Nous intégrons de 0 á t , nous obtenons

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt} \parallel u \parallel^2 ds + m\int_0^t \parallel \nabla u \parallel^2 ds \leq \frac{1}{2}\int_0^t \parallel f \parallel^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \parallel u \parallel^2 ds$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2}(\parallel u \parallel^2 - \parallel u_0 \parallel^2) + m\int_0^t \parallel \nabla u \parallel^2 ds \leq \frac{1}{2}\int_0^t \parallel$$

par suite

$$f \parallel^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \parallel u \parallel^2 ds \parallel u \parallel^2 + 2m\int_0^t \parallel \nabla u \parallel^2 ds \leq \int_0^t \parallel f \parallel^2 ds + \int_0^t \parallel u \parallel^2 ds + \parallel u_0 \parallel^2$$

En appliquant l'ingalité de Gronwall , en choisissant

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \parallel u \parallel^2 + 2m\int_0^t \parallel \nabla u \parallel^2 ds \\
\alpha(t) &= \int_0^t \parallel f \parallel^2 ds + \parallel u_0 \parallel, \beta(s) = 1 \\
\gamma(s) &= \parallel u \parallel^2 + 2m\int_0^s \parallel \nabla u \parallel^2 dk
\end{aligned}$$

On arrive à

$$\| u \|^2 + 2m \int_0^t \| \nabla u \|^2 \, ds \leq \left(\int_0^t \| f \|^2 + \| u_0 \| \right) \exp\left(\int_0^t 1 \right) ds$$

i.e

$$\| u \|^2 + 2m \int_0^t \| \nabla u \|^2 \, ds \leq C$$

$$\| u \|_{\mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))} \leq C.$$

$$\| u \|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}_0^1(\Omega))} \leq C$$

Par conséquent

$$\boxed{\boldsymbol{u \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))}} \qquad (3.4)$$

$$\boxed{\boldsymbol{u \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}_0^1(\Omega))}} \qquad (3.5)$$

Nous choisissions $v = u_t$ dans (3.2)

$$(\mathrm{u_t}, \mathrm{u_t}) + \mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{u}))(\nabla \mathrm{u}, \nabla \mathrm{u_t}) = (\mathrm{f}, \mathrm{u_t}) \qquad (4.1)$$

on aura

$$\| \mathrm{u_t} \|^2 + \mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{u}))(\nabla \mathrm{u}, \nabla \mathrm{u_t}) = (\mathrm{f}, \mathrm{u_t}) \qquad (4.2)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz , on aura

$$\| u_t \|^2 + a(l(u))(\nabla u, \nabla u_t) = (f, u_t) \leq \| f \| \| u_t \|$$

Nous utilisons l'ξ inégalité nous obtenons

$$\| u_t \|^2 + a(l(u)) \frac{d}{dt} \| \nabla u \|^2 \leq \| f \| \| u_t \| \leq \frac{1}{2} \| u_t \|^2 + \frac{1}{2} \| f \|^2$$

Alors

$$\| u_t \|^2 - \frac{1}{2} \| u_t \|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(l(u)) \| \nabla u \|^2 \leq \frac{1}{2} \| f \|^2$$

Par suit

$$\frac{1}{2}\parallel u_t \parallel^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(l(u)) \parallel \nabla u \parallel^2 \leq \frac{1}{2} \parallel f \parallel^2$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(l(u)) \parallel \nabla u \parallel^2 \leq \frac{1}{2} \parallel f \parallel^2$$

ce qui implique

$$\frac{d}{dt}a(l(u)) \parallel \nabla u \parallel^2 \leq \parallel f \parallel^2$$

Donc

$$\frac{d}{dt} \parallel \nabla u \parallel^2 \leq \frac{\parallel f \parallel^2}{a(l(u))}$$

$H2$, on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \parallel \nabla u \parallel^2 \leq \frac{\parallel f \parallel^2}{m}$$

Intègre de 0 à t , on a

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \parallel \nabla u \parallel^2 ds \leq \int_0^t \frac{\parallel f \parallel^2}{m} ds$$

i,e

$$\parallel \nabla u \parallel^2 - \parallel \nabla u_0 \parallel^2 \leq \int_0^t \frac{\parallel f \parallel^2}{m} ds + \parallel \nabla u_0 \parallel^2$$

Ce qui donne ;

$$\parallel \nabla u \parallel^2 \leq \frac{1}{m} \int_0^t \parallel f \parallel^2 ds + \parallel \nabla u_0 \parallel^2 = R^2$$

Donc

$$\parallel \nabla \mathrm{u} \parallel^2 \leq \mathrm{R}^2 \quad (4.3)$$

avec $R = R(f, m, u_0)$ et ansi

$$\boxed{u \in L^\infty(0, T, \mathbb{H}_0^1(\Omega))} \quad (4.4)$$

Multiplions (2.1) par $(-\Delta u)$ et intégrons sur (Ω)

$$(\mathrm{u_t}, -\Delta \mathrm{u}) - \mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{u}))(\Delta \mathrm{u}, -\Delta \mathrm{u}) = (\mathrm{f}, -\Delta \mathrm{u}) \quad (5.1)$$

maintenant l'intégration par partie du première terme dans le côté gauche de l'equation nous donne

$$(u_t, -\Delta u) + (\nabla u, \nabla u) + a(l(u))(\Delta u, \Delta u) = (f, -\Delta u)$$

$$(\nabla u, \nabla u) + a(l(u))(\Delta u, \Delta u) = (f, -\Delta u)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla u \parallel^2 + a(l(u)) \parallel \Delta u \parallel^2 = (f, -\Delta u).$$

utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz , nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla u \parallel^2 + a(l(u)) \parallel \Delta u \parallel^2 = (f, \Delta u) \leq \parallel f \parallel \parallel \Delta u \parallel .$$

l'ζinégalité avec $\zeta = m$, implique

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla u \parallel^2 + a(l(u)) \parallel \Delta u \parallel^2 \leq \frac{1}{2m} \parallel f \parallel^2 + \frac{m}{2} \parallel \Delta u \parallel^2 .$$

maintenant l'utilisation de H2 peut être estimer comme suite

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla u \parallel^2 + m \parallel \Delta u \parallel^2 \leq \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla u \parallel^2 + a(l(u)) \parallel \Delta u \parallel^2$$

$$\leq \frac{1}{2m} \parallel f \parallel^2 + \frac{m}{2} \parallel \Delta u \parallel^2 .$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla u \parallel^2 + m \parallel \Delta u \parallel^2 - \frac{m}{2} \parallel \Delta u \parallel^2 \leq \frac{1}{2m} \parallel f \parallel^2 .$$

Alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla u \parallel^2 + \frac{m}{2} \parallel \Delta u \parallel^2 \leq \frac{1}{2m} \parallel f \parallel^2 .$$

Intégrons de 0 à t nous obtenous

$$\parallel \nabla u \parallel^2 + \int_0^t \parallel \Delta u \parallel^2 ds \leq C \int_0^t \parallel f \parallel^2 ds + \parallel \nabla u_0 \parallel^2$$

i.e

$$\parallel \nabla u \parallel^2 + \int_0^t \parallel \Delta u \parallel^2 ds \leq C$$

avec $C = C(f, m, u_0)$. par suite

$$\boxed{\boldsymbol{u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega))}} \qquad (5.2)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta u \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))}} \qquad (5.3)$$

Récriver (2.1) comme suit

$$\frac{du}{dt} = f + a(l(u))\Delta u \in \mathbb{L}^2(\Omega)$$

ceci implique que $\| u \|_{\mathbb{L}^2(0.T;\mathbb{L}^2(\Omega))}$ Dans le théorème suivant , nous énonçons un résultat concernant l'existence et l'unicité de la solution forte

Théorème 2.3.2 *Sous l'hypothèse H2-H3 , le problème* (2.1) *admet une solution globale unique u pour* $t \in [0, T], T > 0$.

Afin de garantir la convergence du schéma proposé , nous supposons

$$\boxed{\| \boldsymbol{u} \|_{\mathbb{L}^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \leq \boldsymbol{R_e}} \qquad (5.4)$$

Chapitre 3

Discrtisation du probleme et Quelques estimations de l'erreur

3.1 Probleme semi-discrète

Soit τ_h une partition de Ω en triangle disjoint T_k tel qu'aucun sommet d'un triangle ne se trouve a l'intérieur d'un coté d'un autre triangle .
Définissons V_h comme suit :

$$V_h := \{\phi \in \mathbb{C}^0(\overline{\Omega}) \mid \phi_{|T_k} \text{ est polynome de degrée un } \forall T_k \in \tau_h\}$$

Soit $\{P_i\}_{j=1}^{N}$ les sommets intérieurs de τ_h et $\phi_j(x)$ est la fonction pyramidale dans V_h qui prend la valeur 1 à chaque sommet intérieur qui s'annule à d'autre sommet . comme $\{\phi_j(x)\}_{j=1}^{N}$ forme une base pour l'espace V_h , nous avons :

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t)\phi_i(x) \in V_h.$$

donc , la formulation semi-discrète donne par trouver $u_h(t) \in V_h$ tel que :

$$\boxed{(u_{ht}, v_h) + a(l(u_h))(\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \qquad u_h(0) = u_h(x,0) = u_h^0} \tag{6.1}$$

Où u_h^0 est approximation de u_0 et $u_{ht} = \frac{\partial u_h}{\partial t}$. L'existence et l'unicité de la solution semi-discrète assmé en utilisant le théorème de Lax Miligrme dans un intervalle fini $[0, T]$. une telle solution peut être étendue à un intervalle entier en utilisant les estimations a priori suivantes :

Théorème 3.1.1 *Soit $u_h^0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ et $f \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$ alors la solution u_h de (6.1) sataisfait :*

① $\| u_h \|_{\mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))} \leq C.$

② $\| \nabla u_h \|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}_0^1(\Omega))} \leq C.$

Où C est une constante positive indépendante de h

Preuve.
choisissons $v_h = u_h$ dans (6.1)

$$(u_{ht}, u_h) + a(l(u))(\nabla u_h, \nabla u_h) = (f, u_h)$$

Par suit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| u_h \|^2 + a(l(u)) \| \nabla u_h \|^2 = (f, u_h)$$

utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz , nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| u_h \|^2 + a(l(u)) \| \nabla u_h \|^2 \leq \| f \| \| u_h \|$$

L'hypothése H2 implique

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| u_h \|^2 + m \| \nabla u_h \|^2 \leq \| f \| \| u_h \|$$

à l'aide de l'ξ inégalité il résulte

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| u_h \|^2 + m \| \nabla u_h \|^2 \leq \frac{1}{2} \| f \|^2 + \frac{1}{2} \| u_h \|^2$$

Alors

$$\frac{d}{dt} \| u_h \|^2 + 2m \| \nabla u_h \|^2 \leq \| f \|^2 + \| u_h \|^2$$

Intégrons de 0 à t pour $t \in [0,T]$ on aura

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \| u_h \|^2 ds + m \int_0^t \| \nabla u_h(s) \|^2 ds \leq (\int_0^t \| f \|^2 + \int_0^t \| u_h \|^2) ds$$

Donc

$$\| u_h \|^2 + m(\int_0^t \| \nabla u_h(s) \|^2 ds) \leq (\int_0^t \| f \|^2 + \int_0^t \| u_h \|^2) ds + \| u_h^0 \|^2$$

L'application de l'inégalité de Gronwall nous donne

$$\| u_h(t) \|^2 + m(\int_0^t \| \nabla u_h(s) \|^2 ds) \leq C(t)(\| u_h^0 \|^2 + \int_0^t \| f \|^2 ds)$$

Par conséquent

$$\boxed{\| \boldsymbol{u_h} \|_{\mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))} \leq \boldsymbol{C}} \quad (6.2)$$

$$\boxed{\| \boldsymbol{\nabla u_h} \|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}_0^2(\Omega))} \leq \boldsymbol{C}} \quad (6.3)$$

Maintenant , nous fournissons d'abord une estimation a priori pour l'approximation semi-discrète en utilisant projection du Ritz , nous définissons projection du Ritz R_h : $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \longrightarrow V_h$ telle que

$$(\nabla \mathrm{w}, \nabla \mathrm{v}) = (\nabla \mathrm{R_h w}, \nabla \mathrm{v}) \quad \forall \mathrm{w} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \mathrm{v} \in \mathrm{V_h}. \quad (6.4)$$

Un comparaison directe entre u, u_h ne peut pas donner une convergence optimale . donc , en utilisant la projection intermédaire , nous pouvons écrire l'erreur comme suit .

$$e = u - u_h = u - R_h u + R_h u - u_h,$$
$$= \rho + \theta. \quad (6.5)$$

Pour que notre analyse soit plus approfondie , nous avons besoin des estimations suivantes

Théorème 3.1.2 *([13]). il existe une constante positive C , indépendante de h telle que*

$$\| w - R_h w \|_j \leq C h^{i-j} \| w \|_i \qquad \forall w \in H^i \cap \mathbb{H}_0^1, j = 0, 10; i = 1, 2$$

$$\| w_t - R_h w_t \|_j \leq C h^{i-j} \| w_t \|_i \qquad \forall w \in H^i \cap \mathbb{H}_0^1, j = 0, 1; i = 1, 2$$

Lemme 3.1.2 *Pour R_h satisfait l'Eq (6.1) il existe R une constante positive telle que*

$$\boxed{\| \boldsymbol{\nabla R_h u} \| \leq \boldsymbol{R}.} \quad (6.6)$$

òu

Preuve.
pour $w = u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ dans (6.1) , nous obtenons

$$(\nabla \mathrm{u}, \nabla \mathrm{v_h}) = (\nabla \mathrm{R_h u}, \nabla \mathrm{v_h}). \quad (6.7)$$

Nous choisissons $v_h = R_h u$, il s'ensuit

$$\| \nabla R_h u \|^2 = (\nabla u, \nabla R_h u)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz , donne

$$\| \nabla R_h u \|^2 \leq \| \nabla u \| \| \nabla R_h u \|$$

Donc ;

$$\| \nabla R_h u \| \leq \| \nabla u \|$$

et ainsi

$$\boxed{\| \boldsymbol{\nabla R_h u} \| \leq \boldsymbol{R}} \quad (6.8)$$

Théorème 3.1.3 *Soit u est la solution de* (2.1) *et u_h est la solution de* (6.1) *. Alors*

$$\| \mathrm{u} - \mathrm{u_h} \|_{\mathrm{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathrm{L}^2(\Omega))} \leq \mathrm{Ch}^2. \quad (6.9)$$

Òu C est constante indépendante de h

Preuve.
pour simplicité , nous désignons $a_h = a(l(u_h))$ et $a = (l(u))$

$$\begin{aligned}
(\theta_t, v_h) + a_h(\nabla\theta, \nabla v_h) &= -((u_{ht}, v_h) + a_h(\nabla u_h, \nabla v_h) \\
&\quad -a_h(\nabla R_h u, \nabla v_h)) \\
&= -((f, v_h) - (u_t, v_h) - a(\nabla R_h u, \nabla v_h) - (\rho_t, v_h) \\
&\quad +(a - a_h)(\nabla R_h u, \nabla v_h)) \\
&= -((f, v_h) - (u_t, v_h) - a(\nabla u, \nabla v_h) - (\rho_t, v_t) \\
&\quad +(a - a_h)(\nabla R_h u, \nabla v_h)) \\
&= (\rho_t, \mathrm{v_h}) - (\mathrm{a} - \mathrm{a_h})(\nabla \mathrm{R_h u}, \nabla \mathrm{v_h}). \quad (6.10)
\end{aligned}$$

Pour $v_h = \theta$, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \theta \parallel^2 + m \parallel \nabla\theta \parallel^2 \leq \parallel \rho_t \parallel \parallel \theta \parallel + \parallel \nabla R_h u \parallel \parallel \nabla\theta \parallel$$

en utilisant la continuié Lipschitz de a il résulte :

$$\mid a - a_h \mid \leq L_M(\parallel u - u_h \parallel)$$

$$\leq L_M(\parallel \theta + \rho \parallel)$$

$$= \leq \mathrm{L_M}(\parallel \theta \parallel + \parallel \rho \parallel). \quad (6.11)$$

L'inégalité de Poincaré implique , $\parallel \rho \parallel \leq C_p \parallel \parallel \nabla\theta \parallel$ (C_p désigne la connstante de Poincaré pour θ) obtenir :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \theta \parallel^2 + m \parallel \nabla\theta \parallel^2 \leq C(\parallel \theta \parallel^2 + \parallel \rho \parallel^2 + \parallel \rho_t \parallel^2)$$

Alors

$$\rho \parallel^2 + \parallel \rho_t \parallel^2) + m \parallel \nabla\theta \parallel^2 \frac{d}{dt} \parallel \theta \parallel^2 \leq C(\parallel \theta \parallel^2 + \parallel \rho \parallel^2 + \parallel \rho_t \parallel^2)$$

Òu C est constant en fonction de C_p , m , R. Intégrant de 0à t òu $t \in (0, T)$ on a :

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \parallel \theta \parallel^2 ds \leq C \int_0^T (\parallel \theta \parallel^2 + \parallel \rho \parallel^2 + \parallel \rho_t \parallel^2) ds$$

Par suit

$$\parallel \theta \parallel^2 \leq \parallel \theta(0) \parallel^2 + C \int_0^T (\parallel \theta \parallel^2 + \parallel \rho \parallel^2 + \parallel \rho_t \parallel^2) ds$$

En appliquant lemme de Gronwall , on arrive à

$$\parallel \theta \parallel^2 \leq \parallel \theta(0) \parallel^2 + C \int_0^T (\parallel \rho \parallel^2 + \parallel \rho_t \parallel^2) ds$$

- Si nous choisissons $u_h^0 = R_h u_0$ et $\theta(0) = 0$. de plus si , $u_h^0 = P_h u_0$, ou $I_h u_0$ avec P_h et I_h sont la projection de Ritz et interpolant , respectivement de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ sur V_h , alors

$$\begin{aligned}
\parallel \theta(0) \parallel &= \parallel R_h u_0 - u_h^0 \parallel \\
&\leq \parallel R_h u_0 - u_0 \parallel + \parallel u_0 - u_h^0 \parallel \\
\parallel \theta(0) \parallel &\leq c h^2 \parallel u_0 \parallel_2
\end{aligned}$$

D'aprés du théorème (3.1.2) , nous avons

$$\begin{aligned} \| \rho \| &\leq ch^2 \| u \|_2 \\ \| \rho(t) \| &\leq ch^2 \| u_t \|_2 . \end{aligned}$$

donc , nous concluons

$$\| \theta \|^2 \leq ch^4$$

$$\boxed{\| \boldsymbol{\theta} \|_{\mathbb{L}^\infty(0,T,\mathbb{L}^2(\Omega))} \leq \boldsymbol{ch^2}.} \quad (6.12)$$

Òu C est une constante en fonction de $\| u_0 \|_2$,
$\| u_t \|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))}$, $\| u \|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))}$. Maintenant à l'application de l'inégalité triangulaire et les estimations du théorème (3.1.2) compléte le reste de la preuve

Théorème 3.1.4 *Soit u est la solution de(2.1) et u_h est la solution de (6.1) . Alors*

$$\| \mathrm{u} - \mathrm{u_h} \|_{\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega))} \leq \mathrm{Ch}^2. \quad (6.13)$$

Òu C est constante indépendante de h

Preuve.
De Eq (6.10) , nous avons l'estimation suivante par θ

$$\begin{aligned} (\theta_t, v_h) + a_h(\nabla\theta, \nabla v_h) &= (\rho_t, v_h) - (a - a_h)(\nabla R_h u, \nabla v_h) \\ &= (\rho_t, v_h) - (a - a_h)(\nabla u, \nabla v_h) \end{aligned}$$

$$= (\rho_t, \mathrm{v_h}) + (\mathrm{a} - \mathrm{a_h})(\nabla \mathrm{u}, \nabla \mathrm{v_h}). \quad (6.14)$$

Là , nous utilisons la définition de la projection élliptique (Ritz) R_h . réglage
$v_h = \theta_t$, dans (6.13) on arrive à

$$(\theta_t, \theta_t) + a_h(\nabla\theta, \nabla\theta_t) = (\rho_t, \theta_t) + (a - a_h)(\Delta u, \theta_t)$$

Maintenant on divise Eq (6.13) par a_h , il vient :

$$\frac{(\theta_t, \theta_t)}{\mathrm{a_h}} + (\nabla\theta, \nabla\theta_t) = \frac{(\rho_t, \theta_t)}{\mathrm{a_h}} + \frac{(\mathrm{a} - \mathrm{a_h})}{\mathrm{a_h}}(\Delta \mathrm{u}, \theta_t). \quad (6.15)$$

L'négalité de Cauchy-Shwartz , implique

$$\frac{1}{\mathrm{M}} \parallel \theta_t \parallel^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \parallel \nabla\theta \parallel^2 \leq \frac{1}{\mathrm{m}} \parallel \rho_t \parallel \parallel \theta_t \parallel + \frac{\mid (\mathrm{a}-\mathrm{a_h}) \mid}{\mathrm{m}} \parallel \Delta \mathrm{u} \parallel \parallel \theta_t \parallel . \quad (6.16)$$

Maintenant , en utilisant l'estimation (6.11) dans (6.16) , il résulte :

$$\frac{1}{M} \parallel \theta_t \parallel^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla\theta \parallel^2 \leq C(\parallel \theta \parallel^2 + \parallel \rho \parallel^2 + \parallel \rho_t \parallel^2) + \frac{1}{2M} \parallel \theta_t \parallel^2,$$

Alors

$$\frac{1}{2M} \parallel \theta_t \parallel^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla\theta \parallel^2 \leq C(\parallel \theta \parallel^2 + \parallel \rho \parallel^2 + \parallel \rho_t \parallel^2)$$

-Òu C est constant en fonction de m, M, L_M, R_e , on utilisant l'inégalité de Poincaré , nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}(\parallel \nabla\theta \parallel^2) \leq C(\parallel \nabla\theta \parallel^2 + \parallel \rho \parallel^2 + \parallel \rho_t \parallel^2)$$

L'ntégration de 0 à t òu $t \in (0, T)$ donne :

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(\parallel \nabla\theta \parallel^2)ds \leq C \int_0^T (\parallel \nabla\theta \parallel^2 + \parallel \rho \parallel^2 + \parallel \rho_s \parallel^2)ds$$

Alors

$$\parallel \nabla\theta \parallel^2 \leq \parallel \nabla\theta(0) \parallel^2 + C \int_0^T (\parallel \nabla\theta \parallel^2 + \parallel \rho \parallel^2 + \parallel \rho_s \parallel^2)ds$$

utilisant lemme de Gronwall , on a

$$\parallel \nabla\theta \parallel^2 \leq \parallel \nabla\theta(0) \parallel^2 + C \int_0^T (\parallel \rho \parallel^2 + \parallel \rho_s \parallel^2)ds$$

et

$$\begin{aligned} \parallel \nabla\theta(0) \parallel &= \parallel \nabla(R_h u_0 - u_h^0) \parallel \\ &\leq \parallel \nabla(R_h u_0 - u_0) \parallel + \parallel \nabla(u_0 - u_h^0) \parallel \end{aligned}$$

Maintenant si $u_h^0 = R_h u_0$ ou $I_h u_0$ òu R_h et I_h sont projection elliptique et interplant respectivement , sur V_h , alors :

$$\parallel \nabla\theta(0) \parallel \leq ch \parallel u_0 \parallel_2 .$$

Aussi du théorèm (3.1.2) , on aura

$$\| \rho \| \leq Ch \| u \|_1 \| \rho_t \| \qquad \leq Ch \| u_t \|_1 .$$

Donc , nous concluons :

$$\| \nabla\theta \|^2 \leq Ch^2,$$

$$\boxed{\| \boldsymbol{\theta} \|_{\mathbb{L}^\infty(0,T,\mathbb{H}_0^1(\Omega))} \leq \boldsymbol{Ch.}} \qquad (6.17)$$

Òu C est constant en fonction de $\| u_0 \|_2, \| u_t \|_{\mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega))}, \| u \|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega))}$. Donc le gradient de θ est de second ordre $O(h^2)$, Alors que le graddient de l'erreur total est seulement d'ordre $O(h)$ comme $h \longrightarrow 0$. donc u_h est la meulleure approximation à $R_h u$ que est possible à ∇u. Pour l'erreur , Nous avons la corollaire suivante .

Lemme 3.1.4 *l'erreur définie ci-dessus satisfait :*

$$\boxed{\| \boldsymbol{u - u_h} \|_{\mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega))} \leq \boldsymbol{C(h + \Delta t)}} \qquad (6.18)$$

òu C est constant en fonction de h

Preuve.
En utilisant l'inégalité de Poincaré , nous pouvons écrire

$$\| \mathrm{u - u_h} \|_{\mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega))} \leq \mathrm{C}(\| \mathrm{u - u_h} \|_{\mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}_0^1(\Omega))}). \quad (6.19)$$

Maintenant ,en utiliisant l'estimation de $\| \nabla\rho \|, \| \nabla\theta \|$ avec l'inégalité triangulaire nous obtenons l'estimation de l'erreur (6.20) Ceci compléte la preuve

3.2 Formulation complètement discrète

Soit $0 = t_0 < t_1 < t_2.....t_j$ être une partition donnée de l'intervalle de temps $(0, T)$ avec longueur de pas $\Delta t = \frac{T}{J}$ pour un certain nombre entier positif j.
Soit U^n indique l'approximation de u_n à
$t = t_n$. ensemble $\overline{\partial_t} U^n := \frac{U^n - U^{n-1}}{\Delta t}, \partial_t u(t_n) := \frac{du(t_n)}{dt}$.

Puis le shéma complètement discret cherche une suite $U^n \in V_h$ tel que pour chaque $n = 1, 2, 3...., J$, Nous avons

$$\boxed{(\overline{\partial}_t U^n, v_h) + a(l(U^n))(\nabla U^n, \nabla v_h) = (f^n, v_h) \quad \forall v_h \in V_h U^0 = u_h^0 \quad pour \quad n = 0.} \tag{7.1}$$

Soit X un espace de Banach et $u \in X$, nous utilisons la norme suivante en version discrète .

$$\boxed{(\| u \|_{\mathbb{L}^\infty(0,T,\Delta t,X)} := \max_{0\leq m\leq j} \| u^m \|_X .} \tag{7.2}$$

$$\boxed{(\| u \|^2_{\mathbb{L}^\infty(0,T,\Delta t,X)} := \Delta t \sum_{m=1}^{j} \| u^m \|_X^2 .} \tag{7.3}$$

À partir de formulation faible discrète (7.1) , nous avons

$$(\mathrm{U^n - U^{(n-1)}, v_h) + \Delta ta(l(U^n))(\nabla U, \nabla v_h) = \Delta t(f^n, v_h)}. \quad (7.4)$$

Alors

$$\boxed{((U^n, v_h) + \Delta ta(l(U^n))(\nabla U, \nabla v_h) = \Delta t(f^n, v_h) + (U^{(n-1)}, v_h)s.} \tag{7.5}$$

Théorème 3.2.1 *Soit $U^0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ et $f \in \mathbb{L}^2(0, T, \Delta t, \mathbb{L}^2(\Omega))$*

$$\| \nabla U^0 \|^2 + \frac{\Delta t}{m} \sum_{i=1}^{n} \| f^i \|^2 = R_1^2,$$

alors pour $1 \leq n \leq J$ la solution U^m de (7.1) satisfait

$$\| \nabla U^0 \| \leq C$$

pour une constante C indépendente de h

$$\||\| \nabla U^n \| \leq R_1.$$

Preuve.
Soit $1 \leq i \leq n \leq J$ et $v_h = U^i$ dans Eq (7.1) avec $n = i$. alors

$$(\overline{\partial}_t U^i, U^i) + a(l(U^i))(\nabla U^n, \nabla U^i) - (f^i, U^i).$$

L'inégalité de Cauchy-Shwartz , implique

$$\frac{1}{2}\overline{\partial_t} \parallel U^i \parallel^2 + m \parallel \nabla U^i \parallel^2 \leq \parallel f^i \parallel \parallel U^i \parallel .$$

pour certains $\xi > 0$, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{\parallel U^i \parallel^2 - \parallel U^{i-1} \parallel^2}{\Delta t} + m \parallel \nabla U^i \parallel^2 \leq \frac{1}{2\xi} \parallel f^i \parallel^2 + \frac{\xi}{2} \parallel U^i \parallel^2 .$$

faisons la somme de $i = 1$ à n et choisissons $\xi > 0, \Delta t < 1$ tel que $1 - \xi\Delta t > 0$ on obtient

$$(1 - \xi\Delta t) \parallel U^n \parallel^2 \leq C(\parallel U^0 \parallel^2 + \Delta t \sum_{i=1}^{n} \parallel f^i \parallel^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \parallel U^i \parallel^2).$$

utilisant lemme de Gronwall implique

$$\parallel U^n \parallel^2 \leq C(\parallel U^0 \parallel^2 + \Delta t \sum_{i=1}^{n} \parallel f^i \parallel^2) \quad C. \quad (7.6)$$

Ceci , complète la preuve de la premiére partie , prouver la deuxième partie , nous fixons $v_h = \overline{\partial_t} U^i$ dans (7.1) avec $n = 1$ obtenir

$$(\overline{\partial_t} U^i, \overline{\partial_t} U^i) + a(l(U^i))(\nabla U^i, \nabla \overline{\partial_t} U^i) = (f^i, \overline{\partial_t} U^i),$$

$$\parallel \overline{\partial_t} U^i \parallel^2 + \frac{a(l(U^i))}{2\Delta t}((\nabla U^i, \nabla U^i) - (\nabla U^{i-l}, \nabla U^{i-l}) + \parallel \nabla(u^i - u^{i-l}) \parallel^2)$$

$$= (f^i, \overline{\partial_t} U^i),$$

utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz , nous obtenons

$$\parallel \overline{\partial_t} U^i \parallel^2 + \frac{a(l(U^i))}{2\Delta t}((\nabla U^i, \nabla U^i) - (\nabla U^{i-l}, \nabla U^{i-l}) + \parallel \nabla(u^i - u^{i-l}) \parallel^2) \leq \parallel f^i \parallel \parallel \overline{\partial_t} U^i \parallel,$$

à l'aide de l'ξ inégalité on arrive à

$$\parallel \overline{\partial_t} U^i \parallel^2 + \frac{a(l(U^i))}{2\Delta t}((\nabla U^i, \nabla U^i) - (\nabla U^{i-l}, \nabla U^{i-l}) + \parallel \nabla(u^i - u^{i-l}) \parallel^2) \leq \frac{1}{2} \parallel f^i \parallel^2 + \frac{1}{2} \parallel \overline{\partial_t} U^i \parallel^2,$$

Donc

$$\frac{1}{2} \parallel \overline{\partial}_t U^i \parallel^2 + \frac{a(l(U^i))}{2\Delta t}((\nabla U^i, \nabla U^i) - (\nabla U^{i-l}, \nabla U^{i-l}) + \parallel \nabla (u^i - u^{i-l}) \parallel^2) \leq \frac{1}{2} \parallel f^i \parallel^2,$$

Cela nous donne

$$a(l(U^i))((\nabla U^i, \nabla U^i) - (\nabla U^{i-l}, \nabla U^{i-l})) \leq \Delta t \parallel f^i \parallel^2$$

i.e

$$(\nabla U^i, \nabla U^i) - (\nabla U^{i-l}, \nabla U^{i-l}) \leq \Delta t \frac{\parallel f^i \parallel^2}{a(l(U^i))}$$

faisons la somme de $i = 1$ à n on trouve ;

$$(\parallel \nabla U^n \parallel^2 - (\parallel \nabla U^0 \parallel^2) \leq \Delta t \sum_{i=1}^{n} \frac{\parallel f^i \parallel^2}{a(l(U^i))}$$

Vu à l'hypothése H2 , on peut écrire

$$(\parallel \nabla U^n \parallel^2 - (\parallel \nabla U^0 \parallel^2) \leq \frac{\Delta t}{m} \sum_{i=1}^{n} \parallel f^i \parallel^2$$

Cela nous donne

$$\parallel \nabla \mathrm{U}^{\mathrm{n}} \parallel^2 \leq \parallel \nabla \mathrm{U}^0 \parallel + \frac{\Delta \mathrm{t}}{\mathrm{m}} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \parallel \mathrm{f}^{\mathrm{i}} \parallel^2 = \mathrm{R}_1^2.. \quad (7.7)$$

Donc

$$\boxed{\parallel \boldsymbol{\nabla U^n} \parallel \leq \boldsymbol{R_1}.} \quad (7.8)$$

Ceci achève la preuve ,
L'objectif suivant est de prouver d'une solution complètement discréte ,

Théorème 3.2.2 *Soient* $U^0, U^1, ..., U^{n-1}$ *sont donneés , Alors pour tout* $1 \leq n \leq J$
il existe une solution unique $U^n \in V_h$ *de* (7.1)

Preuve.
Réecrivons d Eq (7.1) comme suit

$$(U^n, v_h) + (\Delta t)a(l(U^n))(\nabla U^n, \nabla v_h) - (\Delta t)(f^n, v_h) - (U^{n-1}, v_h) = 0,$$

Maintenant , si nous définissons l'application $F : V_h \longrightarrow V_h$ tel que

$$(F(U^n), v_h) = (U^n, v_h) + (\Delta t)a(l(U^n)(\nabla U^n, \nabla v_h) - (\Delta t)(f^n, v_h)$$
$$-(\mathrm{U}^{\mathrm{n}-1}, \mathrm{v_h}). \quad (7.9)$$

puis , F est l'application continue , Maintenant en choisissant $v_h = U^n$ dans (7.8) Nous obtenons

$$(F(U^n), U^n) = (U^n, U^n) + (\Delta t)a(l(U^n)(\nabla U^n, \nabla U^n) - (\Delta t)(f^n, U^n)$$

$$-(\mathrm{U}^{\mathrm{n}-1}, \mathrm{U}^{\mathrm{n}}). \quad (7.10)$$

Donc

$$\begin{aligned}
(F(U^n), U^n) &\geq \| U^n \|^2 + (\Delta t)m \| \nabla U^n \|^2 - (\Delta t) \| f^n \| \| U^n \| - \| U^{n-1} \| \| U^n \| \\
(F(U^n), U^n) &\geq \| U^n \|^2 - (\Delta t) \| f^n \| \| U^n \| - \| U^{n-1} \| \| U^n \| \\
(F(U^n), U^n) &\geq (\| U^n \| - (\Delta t) \| f^n \| - \| U^{n-1} \|) \| U^n \| .
\end{aligned}$$

En choisissant $\| U^n \| > \| f^n \| + \| U^{n-1} \|$, on aura ;

$$(\mathrm{F}(\mathrm{U}^{\mathrm{n}}), \mathrm{U}^{\mathrm{n}}) > 0. \quad (7.11)$$

Ainsi par le point fixe de Brouwer on peut assurer l'existence de la solution . Maintenant nous prouvons l'unicité de la solution U^n pour le problème (7.1) , Nous supposons que U_1^n, U_2^n etre deux solution de (7.1) à $t = t_n$
Pour simplicité , nous désignons $U_1 = U_1^n, U_2 = U_2^n$, puis de Eq (7.1) Nous obtenons

$$(U_1 - U_2, v_h) + (\Delta t)a(l(U_1)(\nabla U_1, \nabla v_h) - (\Delta t)a(l(U_2)(\nabla U_2, \nabla v_h) = 0$$

Soit $U_1 - U_2 = r$. alors ;

$$(\mathrm{r}, \mathrm{v_h}) + (\Delta \mathrm{t})\mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{U}_1)(\nabla \mathrm{U}_1, \nabla \mathrm{v_h}) - (\Delta \mathrm{t})\mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{U}_2)(\nabla \mathrm{U}_2, \nabla \mathrm{v_h}) = 0. \quad (7.12)$$

posons $v_h = r$ dans (7.12) . on trouve ;

$$\| \mathrm{r} \|^2 + (\Delta \mathrm{t})\mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{U}_1)) \| \nabla \mathrm{r} \|^2 = (\Delta \mathrm{t})(\mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{U}_2)) - (\Delta \mathrm{t})\mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{U}_1)))(\nabla \mathrm{U}_2, \nabla \mathrm{r}). \quad (7.13)$$

l'hypothése H3-H4 , donne

$$\begin{aligned} \| r \|^2 + \Delta t m (\| \nabla r \|^2) &\leq \Delta t (L_M \| \nabla U_2 \| \| U_2 - U_1 \|) \| \nabla r \| . \\ &\leq \Delta t (L_M R_1 \| U_2 - U_1 \|) \| \nabla r \| \end{aligned}$$

L'ξ inégalité pour $\xi = m$ implique ;

$$\| r \|^2 + \Delta t m (\| \nabla r \|^2) \leq \Delta t (\frac{L_M^2 R_1^2}{2m} \| r \|^2 + \frac{m}{2} \| \nabla r \|^2).$$

Ainsi , nous obtenons

$$\begin{aligned} \| r \|^2 &\leq \frac{\Delta t L_M^2 R_1^2}{m} (\| r \|^2). \\ (1 - \frac{\Delta t L_M^2 R_1^2}{m})(\| r \|^2) &\leq 0. \end{aligned}$$

prenant $\Delta t < 1$ assez petit tel que $(m - \Delta t L_M^2 R_1^2) > 0$. on aura

$$\boxed{\| r \|^2 \leq 0} \qquad (7.14)$$

Ceci compléte la preuve ,
Dans le prochain théorème , nous , montrons la convergence de la solution complètement discrète , dans ce but , nous définissons $u(t_n) := u(x, t_n)$

$$u(x, t_n) - U^n = u(t_n) - U^n$$

$$= (u(t_n - R_h u(t_n)) + (R_h u(t_n) - U^n)$$

$$= \rho^n + \theta^n.$$

Théorème 3.2.3 *Soit $U^n, n \geq 1$ etre la solution de shéma complètement discret (7.1) et u etre la solution de (2.1) , Alors , il existe une constante C indépendante de h et Δt*

$$\| \mathrm{u}(\mathrm{t_n}) - \mathrm{U^n} \|_{\mathrm{L}^\infty(0,\mathrm{T},\Delta \mathrm{t},\mathrm{L}^2(\Omega))} \leq \mathrm{C}(\mathrm{h}^2 + \Delta \mathrm{t}). \quad (7.15)$$

Preuve.
De Eq (7.1) , nous avons

$$(\overline{\partial}_t\theta^n, v_h) - (\overline{\partial}_t R_h u(t_n, v_h) + a(l(U^n))(\nabla\theta^n, \nabla v_h) - a(l(U^n))(\nabla R_h u(t_n), \nabla v_h).$$

$$= -(f^n, v_h) - a(l(t_n)))(\nabla R_h u(t_n), \nabla v_h) + a(l(u(t_n)(\nabla u(t_n), \nabla v_h).$$

Cela implique

$$(\overline{\partial}_t\theta^n, v_h) + a(l(U^n))(\nabla\theta^n, \nabla v_h) = -(f^n, v_h) + a(l(u(t_n)(\nabla u(t_n, \nabla v_h)$$

$$+(\overline{\partial}_t R_h u(t_n, v_h) - (a(l(U^n)) - a(l(u(t_n))))(\nabla R_h u(t_n), \nabla v_h).$$

$$(\overline{\partial}_t\theta^n, v_h) + a(l(U^n))(\nabla\theta^n, \nabla v_h) = -(\partial_t u(t_n) - \overline{\partial}_t R_h u(t_n, v_h))$$

$$-(a(l(U^n)) - a(l(u(t_n))))(\nabla R_h u(t_n), \nabla v_h). \quad (7.16)$$

En choisissant $v_h = \theta^n$, Nous obtenons

$$(\overline{\partial}_t\theta^n, \theta^n) + a(l(U^n))(\nabla\theta^n, \nabla\theta^n) = -(\partial_t u(t_n) - \overline{\partial}_t R_h u(t_n, \theta^n))$$

$$-(a(l(U^n)) - a(l(u(t_n))))(\nabla R_h u(t_n), \nabla\theta^n),$$

$$= -(\partial_t u(t_n) - (\overline{\partial}_t u(t_n) + (\overline{\partial}_t u(t_n) - \overline{\partial}_t R_h u(t_n, \theta^n))$$

$$-(a(l(U^n)) - a(l(u(t_n))))(\nabla R_h u(t_n), \nabla\theta^n)$$

$$= -(\tau^n - \overline{\partial}_t \rho^n, \theta^n) - (a(l(U^n)) - a(l(u(t_n))))(\nabla R_h u(t_n), \nabla\theta^n). \quad (7.16)$$

Où $\tau^n = \partial_t u(t_n) - \overline{\partial}_t u(t_n)$ Maintenant la coté gauche de (7.16) peut etre éstimée comme suit :

$$(\overline{\partial}_t\theta^n, v_h) + a(l(U^n))(\nabla\theta^n, \nabla v_h) =\geq \frac{1}{2}\overline{\partial}_t \parallel \theta^n \parallel^2 + m \parallel \nabla\theta^n \parallel^2 . \quad (7.17)$$

de plus , à l'aide de l'inégalité de Poincaré la coté droite de (7.16) peut être estimé comme suit

$$| (\tau^n - \overline{\partial}_t\rho^n, \theta^n + (a(l(U^n)) - a(l(u(t_n))))(\nabla R_h u(t_n), \nabla\theta^n)) |$$

$$\begin{aligned}
&\leq\| \tau^n - \overline{\partial}_t\rho^n \|\| \theta^n \| + | (a(l(U^n)) - a(l(u(t_n)))) | \| \nabla R_h u(t_n) \|\| \nabla\theta^n \|,\\
&\leq\| \tau^n - \overline{\partial}_t\rho^n \|\| \theta^n \| + L_M(\| u(t_n) - U^n \|) \| \nabla R_h u(t_n) \|\| \nabla\theta^n \|,\\
&\leq\| \tau^n - \overline{\partial}_t\rho^n \|\| \theta^n \| + L_M(\| \theta^n \| + \| \rho^n \|) \| \nabla R_h u(t_n) \|\| \nabla\theta^n \|\\
&\leq C_p \| \tau^n - \overline{\partial}_t\rho^n \|\| \nabla\theta^n \| + L_M(\| \theta^n \| + \| \rho^n \|) \| \nabla R_h u(t_n) \|\| \nabla\theta^n \|\\
&\leq \frac{C_p^2}{2m}(\| \tau^n \|^2 + \| \overline{\partial}_t\rho^n \|^2) + \frac{m}{2} \| \nabla\theta^n \|^2 + \frac{L_M^2 R^2}{2m}(\| \theta^n \|^2 + \| \rho^n \|^2) + \frac{m}{2} \| \nabla\theta^n \|^2 .
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{2}\overline{\partial}_t \| \theta^n \|^2 + m \| \nabla\theta^n \|^2 \leq \frac{C_p^2}{2m}(\| \tau^n \|^2 + \| \overline{\partial}_t\rho^n \|^2)$$
$$+ \|^2 + \frac{\mathrm{L_M^2 R^2}}{2\mathrm{m}}(\| \theta^n \|^2 + \| \rho^n \|^2) + \mathrm{m} \| \nabla\theta^n \|^2 . \quad (7.18)$$

De (7.18) nous pouvons écrire

$$\frac{1}{2}\overline{\partial}_t \| \theta^n \|^2 \leq \mathrm{C}(\| \tau^n \|^2 + \| \overline{\partial}_t\rho^n \|^2 + \| \rho^n \|^2 + \| \theta^n \|^2). \quad (7.19)$$

Ou C est une constante en fonction de (R, C_p, m, L_M) de plus de (7.19)

$$\frac{\| \theta^n \|^2 - \| \theta^{n-1} \|^2}{\Delta t} \leq C(\| \tau^n \|^2 + \| \overline{\partial}_t\rho^n \|^2 + \| \rho^n \|^2 + \| \theta^n \|^2)$$

En prennant la some de $i = 1$ jusqu'à j on trouver

$$\| \theta^j \|^2 \leq \| \theta^0 \|^2 + \Delta t C(\sum_{n=1}^{j} \| \tau^n \|^2 + \sum_{n=1}^{j} \| \overline{\partial}_t\rho^n \|^2 + \sum_{n=1}^{j} \| \rho^n \|^2) + \Delta t C(\sum_{n=1}^{j} \| \theta^n \|^2).$$

Donc

$$(1 - C\Delta t)(\| \theta^j \|^2) \leq \| \theta^0 \|^2 + \Delta t C((\sum_{n=1}^{j} \| \tau^n \|^2 + \sum_{n=1}^{j} \| \overline{\partial}_t\rho^n \|^2 + \sum_{n=1}^{j} \| \rho^n \|^2)$$
$$+ \Delta \mathrm{t} \mathrm{C}(\sum_{\mathrm{n}=1}^{\mathrm{j}-1} \| \theta^n \|^2). \quad (7.20)$$

choisir Δt assez petit pour que $(1 - C\Delta t) > 0$, il s'ensuit

$$\| \theta^{\mathrm{j}} \|^2 \leq \| \theta^0 \|^2 + \Delta \mathrm{tC}((\sum_{\mathrm{n}=1}^{\mathrm{j}} \| \tau^{\mathrm{n}} \|^2 + \sum_{\mathrm{n}=1}^{\mathrm{j}} \| \overline{\partial_t} \rho^{\mathrm{n}} \|^2 + \sum_{\mathrm{n}=1}^{\mathrm{j}} \| \rho^{\mathrm{n}} \|^2) + \Delta \mathrm{tC}(\sum_{\mathrm{n}=1}^{\mathrm{j}} \| \theta^{\mathrm{n}} \|^2).). \quad (7.21)$$

Maintenant en utilisant l'inégalié de Gronwall dans (7.21) , nous obtenons

$$\| \theta^{\mathrm{j}} \|^2 \leq \| \theta^0 \|^2 + \Delta \mathrm{tC}((\sum_{\mathrm{n}=1}^{\mathrm{j}} \| \tau^{\mathrm{n}} \|^2 + \sum_{\mathrm{n}=1}^{\mathrm{j}} \| \overline{\partial_t} \rho^{\mathrm{n}} \|^2 + \sum_{\mathrm{n}=1}^{\mathrm{j}} \| \rho^{\mathrm{n}} \|^2). \quad (7.22)$$

Si on pose $U^0 = R_h u_0$, alors $\theta^0 = 0$ de plus si $U^0 = P_h u_0$ ou $I_h u_0$ tel que P_h et I_h sont projection et interpolant de $\mathbb{L}^2$ sur V_h , donc

$$\| \theta^0 \| = \| R_h u_0 - U^0 \|$$

$$\leq \| R_h u_0 - u^0 \| + \| u_0 - U^0 \|$$

$$\| \theta^0 \| \leq \mathrm{ch}^2 \| \mathrm{u}_0 \|_2 . \quad (7.23)$$

encore , nous remarqueons que

$$\overline{\partial_t} \rho^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \rho_s(s) ds.$$

Ceci montre

$$\| \overline{\partial_t} \rho^n \|^2 \leq \frac{1}{\Delta t} \| \rho_t \|^2_{\mathbb{L}^2(t_{n-1},t_n;\mathbb{L}^2(\Omega))},$$

et

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_{n=1}^{j} \| \overline{\partial_t} \rho^n \|^2 \quad & \leq \| \rho_t \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ & \leq ch^4 \| u_t \|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))} . \end{aligned}$$

De plus

$$\| \tau^n \| = \| \overline{\partial_t} u(t_n) - \partial_t u(t_n) \|$$

$$=\| \frac{1}{\Delta t}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(s-t_{n-1})u_{ss}ds \| .$$

Donc

$$\Delta t\sum_{n=1}^{j}\| \tau^n \|^2\leq c(\Delta t)^2\int_0^T \| u_{ss} \| ds,$$

$$= \mathrm{c}(\Delta \mathrm{t})^2 \| \mathrm{u}_{tt} \|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))} . \quad (7.24)$$

finallement

$$\Delta t\sum_{n=1}^{j}\| \rho^n \|^2\leq \int_0^T \| \rho^n \|^2 ds,$$

$$= \mathrm{ch}^4 \| \mathrm{u} \|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))} . \quad (7.25)$$

Maintenant en utilisant l'estimation $(7.23-7.25)$ dans (7.22) , on arrive à

$$(\| \theta^j \|^2)\leq h^4(\| u_0 \|_2^2)+c(\Delta t)^2 \| u_{tt} \|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))}$$

$$+\mathrm{h}^4 \| \mathrm{u}_t \|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))} +\mathrm{h}^4 \| \mathrm{u} \|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))} . \quad (7.26)$$

D'òu

$$\boxed{\| \theta^j \|^2\leq C(h^4+(\Delta t))} \quad (7.27)$$

Òu C est constant en fonction de

$$\| u_t \|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))}), \| u \|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))}), \| u_{tt} \|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))}, \| u_0 \|_2^2$$

Maintenant une application de l'inégalité triangulaire et les estimations dans le théorème (3.1.2) on conclut le reste de la preuve .

Théorème 3.2.4 *Soit $U^n, n\geq 1$ être la solution du régine complètement discréte (7.1) et u être la solutin de (2.1) , Alors il existe une constante indépendante de h et Δt telle que :*

$$\| \mathrm{u}(\mathrm{t_n})-\mathrm{U^n} \|_{\mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^1_0(\Omega))}\leq \mathrm{C}(\mathrm{h}+\Delta \mathrm{t}). \quad (7.28)$$

Preuve.
De Eq (7.16) , Nous avons l'estimation suivante pour θ

$$(\overline{\partial}_t\theta^n, v_h) + (a(l(U^n))(\nabla theta^n, \nabla v_h) = (\partial_t u(t_n) - \overline{\partial}_t R_h u(t_n), v_h)$$

$$-(\mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{U}^\mathrm{n})) - \mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{u}(\mathrm{t_n})))(\nabla \mathrm{R_h u}(\mathrm{t_n}), \nabla \mathrm{v_h}). \quad (7.29)$$

choisissant $v_h = \overline{\partial}_t\theta^n$

$$(\overline{\partial}_t\theta^n, \partial_t\theta^n) + (a(l(U^n))(\nabla\theta^n, \partial_t\theta^n) = (\partial_t u(t_n) - \overline{\partial}_t R_h u(t_n), \partial_t\theta^n)$$

$$-(a(l(U^n)) - a(l(u(t_n)))(\nabla R_h u(t_n), \nabla\partial_t\theta^n)$$

$$= -(\partial_t u(t_n) - \overline{\partial}_t u(t_n)) + \overline{\partial}_t u(t_n) - \overline{\partial}_t R_h u(t_n), \overline{\partial}_t\theta^n)$$

$$-(a(l(U^n)) - a(l(u(t_n)))(\nabla R_h u(t_n), \nabla\partial_t\theta^n)$$

$$-(\tau^\mathrm{n} - \overline{\partial}_t\rho^\mathrm{n}, \overline{\partial}_t\theta^\mathrm{n}) - (\mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{U}^\mathrm{n})) - \mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{u}(\mathrm{t_n})))(\nabla \mathrm{R_h u}(\mathrm{t_n}), \nabla\partial_t\theta^\mathrm{n})). \quad (7.30)$$

Maintenent en utilisant la définition de la projection de Ritz , Nous obtenons

$$(\overline{\partial}_t\theta^n, \overline{\partial}_t\theta^n) + a(l(U^n))(\nabla\partial_t\theta^n, \overline{\partial}_t\nabla\partial_t\theta^n) = -(\tau^n - \overline{\partial}_t\rho^n, \overline{\partial}_t\theta^n)$$

$$-(a(l(U^n)) - a(l(u(t_n)))(u(t_n), \nabla\partial_t\theta^n)$$

$$= -(\tau^\mathrm{n} - \overline{\partial}_t\rho^\mathrm{n}, \overline{\partial}_t\theta^\mathrm{n}) - (\mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{U}^\mathrm{n})) - \mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{u}(\mathrm{t_n})))(\nabla\Delta \mathrm{u}(\mathrm{t_n}), \overline{\partial}_t\theta^\mathrm{n})). \quad (7.31)$$

$$\frac{1}{(a(l(U^n))}(\overline{\partial}_t\theta^n, \overline{\partial}_t\theta^n) + (\nabla\theta^n, \nabla\overline{\partial}_t\theta^n) = -\frac{(\tau^n - \overline{\partial}_t\rho^n, \overline{\partial}_t\theta^n)}{(a(l(U^n))}$$

$$\frac{(\mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{U}^\mathrm{n})) - \mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{u}(\mathrm{t_n}))))}{(\mathrm{a}(\mathrm{l}(\mathrm{U}^\mathrm{n})))(\Delta \mathrm{u}(\mathrm{t_n}), \overline{\partial}_t\theta^\mathrm{n})} \quad (7.32)$$

d'autre part le coté gauche de (7.31) peut être éstimée comme :

$$\frac{1}{\mathrm{a(l(U^n))}}(\overline{\partial}_t\theta^n,\theta^n)+(\nabla\theta^n,\nabla\overline{\partial}_t\theta^n)\geq\frac{1}{\mathrm{M}}\parallel\overline{\partial}_t\theta^n\parallel^2+\frac{1}{2}\overline{\partial}_t\parallel\nabla\theta^n\parallel^2. \quad (7.33)$$

de plus , on peut estimer le cote gauche du (7.16) de la manière suivante :

$$|-\frac{(\tau^n-\overline{\partial}_t\rho^n,\overline{\partial}_t\theta^n}{(a(l(U^n))}+\frac{(a(l(U^n))-a(l(u(t_n)))}{(a(l(U^n))}(\Delta u(t_n),\overline{\partial}_t\theta^n\;|$$

$$\begin{aligned}
&\leq\frac{1}{m}\parallel\tau^n-\overline{\partial}_t\rho^n\parallel\parallel\overline{\partial}_t\theta^n\parallel+\frac{1}{m}\mid(a(l(U^n))-a(l(u(t_n)))\mid\parallel\Delta u(t_n)\parallel\parallel\overline{\partial}_t\theta^n\parallel\\
&\leq\frac{1}{m}\parallel\tau^n-\overline{\partial}_t\rho^n\parallel\parallel\overline{\partial}_t\theta^n)\parallel+\frac{L_M}{m}(\parallel u(t_n)-U^n\parallel)\parallel\Delta u(t_n)\parallel\parallel\overline{\partial}_t\theta^n)\parallel,\\
&\leq\frac{1}{m}\parallel\tau^n-\overline{\partial}_t\rho^n\parallel\parallel\overline{\partial}_t\theta^n\parallel+\frac{L_{MR_e}}{m}(\parallel\theta^n\parallel+\parallel\rho^n\parallel)\parallel\overline{\partial}_t\theta^n\parallel
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{M}\parallel\overline{\partial}_t\theta^n\parallel^2+\frac{1}{2}\overline{\partial}_t\parallel\nabla\theta^n\parallel^2\leq\frac{M}{m^2}(\parallel\tau^n\parallel^2+\parallel\overline{\partial}_t\rho^n\parallel^2)+\frac{L_{M^2}R_e^2}{m^2}(\parallel\theta^n\parallel^2+\parallel\rho^n\parallel^2)$$

$$+\frac{1}{2\mathrm{M}}\parallel\overline{\partial}_t\theta^n\parallel^2. \quad (7.34)$$

$$\frac{1}{2\mathrm{M}}\parallel\overline{\partial}_t\theta^n\parallel^2+\parallel\overline{\partial}_t\nabla\theta^n\parallel^2\leq\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{m}^2}(\parallel\tau^n\parallel^2+\parallel\overline{\partial}_t\rho^n\parallel^2)+\frac{\mathrm{L_M^2R_e^2}}{\mathrm{m}}\parallel\theta^n\parallel^2+\parallel\rho^n\parallel^2 \quad (7.35)$$

En utilisant l'inégalité de poincaré , on aura :

$$\frac{1}{2\mathrm{M}}\parallel\overline{\partial}_t\theta^n\parallel^2+\frac{1}{2}\overline{\partial}_t\parallel\nabla\theta^n\parallel^2\leq\mathrm{C}(\parallel\tau^n\parallel^2+\parallel\overline{\partial}_t\rho^n\parallel^2+\parallel\rho^n\parallel^2+\parallel\nabla\theta^n\parallel^2) \quad (7.36)$$

Òu C est une constante en fonction de (R_eC_p,m,M,L_M) . la constante de régularité R appartait dans Eq (5.4)

$$\frac{\parallel\nabla\theta^n\parallel^2-\parallel\nabla\theta^{n-1}\parallel^2}{\Delta\mathrm{t}}\leq\mathrm{C}(\parallel\tau^n\parallel^2+\parallel\overline{\partial}_t\rho^n\parallel^2+\parallel\rho^n\parallel^2)+\mathrm{C}(\parallel\nabla\theta^n\parallel^2) \quad (7.37)$$

faisons la somme de $n=\overline{1,j}$, on obtient

$$\| \nabla\theta^j \|^2 \leq \| \theta^0 \|^2 + \Delta t C(\sum_{n=1}^{j} \| \tau^n \|^2 + \sum_{n=1}^{j} \| \overline{\partial}_t \rho^n \|^2 + \sum_{n=1}^{j} \| \rho^n \|^2)$$

$$+\Delta t C(\sum_{n=1}^{j} \| \theta^n \|^2). \quad (7.38)$$

Ce qui donne ;

$$(1-\Delta t C) \| \nabla\theta^j \|^2 \leq \| \theta^0 \|^2 + \Delta t C(\sum_{n=1}^{j} \| \tau^n \|^2 + \sum_{n=1}^{j} \| \overline{\partial}_t \rho^n \|^2 + \sum_{n=1}^{j} \| \rho^n \|^2)$$

$$+\Delta t C(\sum_{n=1}^{j-1} \| \theta^n \|^2). \quad (7.39)$$

choisissons Δt suffisament petit pour que $(1-\Delta t C) > 0$ il résulte

$$(\| \nabla\theta^j \|^2) \leq \| \theta^0 \|^2 + \Delta t C(\sum_{n=1}^{j} \| \tau^n \|^2 + \sum_{n=1}^{j} \| \overline{\partial}_t \rho^n \|^2 + \sum_{n=1}^{j} \| \rho^n \|^2)$$

$$+\Delta t C(\sum_{n=1}^{j-1} \| \theta^n \|^2). \quad (7.40)$$

L'inégalité de Granwall(le cas discrète) dans (7.39) donne

$$(\| \nabla\theta^j \|^2) \leq \| \theta^0 \|^2 + \Delta t 0 C(\sum_{n=1}^{j} \| \tau^n \|^2 + \sum_{n=1}^{j} \| \overline{\partial}_t \rho^n \|^2 + \sum_{n=1}^{j} \| \rho^n \|^2). \quad (7.41)$$

similaire au cas semidiscret , ici nous pouvons observer que si nous choisissons $U^0 = R_h u_0$, et $\theta^0 = 0$ de plus si $U^0 = R^h u_0$, ou $I_h u_0$ tel que R_h et I_h sont la projection et interpolant sur V_h alors

$$\| \nabla\theta^0 \| = \| \nabla(R_h u_0 - U^0) \|$$

$$\leq \| \nabla(R_h u_0 u_0) \| + \| (u_0 - U^0) \|$$

$$\| \nabla\theta^0 \| \leq \mathrm{ch} \| \mathrm{u}_0 \|_2 \quad (7.42)$$

De plus , notons

$$\Delta t \sum_{n=1}^{j} \| \overline{\partial}_t \rho^n \|^2 \leq \| \rho_t \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} .$$

$$\leq \mathrm{ch}^2 \| \mathrm{u_t} \|^2_{\mathrm{L^2(0,T;H^1(\Omega))}}, \quad (7.43)$$

$$\Delta t \sum_{n=1}^{j} \| \rho^n \|^2 \leq \int_0^T \| \rho^n \|^2 \, ds,$$

$$\leq \mathrm{ch}^2 \| \mathrm{u} \|^2_{\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^1(\Omega))}, \quad (7.44)$$

Maintenant on utilisant l'estimation $(7.42 - 7.44)$ et (7.24) dans (7.43) , on peut écrir

$$(\| \nabla \theta^j \|^2) \leq h^2(\| u_0 \|_2^2) + c((\Delta t \| u_{tt} \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + h^2 \| u_t \|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$$

$$+ \mathrm{h}^2 \| \mathrm{u} \|^2_{\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^1(\Omega))}). \quad (7.45)$$

Finallement

$$\boxed{\| \nabla \theta^j \|^2 \leq C(h^2 + (\Delta t)^2),} \quad (7.46)$$

Òu C est une constante en fonction de

$$\| u_t \|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega))}, \| u \|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega))}, \| u_{tt} \|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))}, \| u_0 \|_2^2$$

Lemme 3.2.4 *l'erreur discrete définie ci-dessus satisfait :*

$$\boxed{\| u - U \|_{\mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega))} \leq C(h + \Delta t)} \quad (7.47)$$

Òu C est une constante indépantente de h , Δt .

Preuve.
En utilisant l'inégalité de Poincaré , nous pouvons écrire

$$\| \mathrm{u} - \mathrm{U} \|_{\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^1(\Omega))} \leq \mathrm{C}(\| \mathrm{u} - \mathrm{U} \|_{\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^1_0(\Omega))}). \quad (7.48)$$

Maintenant , en utiliisant l'estimation de $\| \nabla\rho \|$ (théorème (3.1.2)) , de $\| \nabla\theta \|$ (théorème (3.2.4)) et puis en utillisant l'inégalité triangulaire nous obtenons l'estimation de l'erreur (7.47) Ceci compléte la preuve

Bibliography

[1] M.R.M.P.Almeida,C.M.Duque,J,Ferreira,and R.J.Robalo,The Crranck-Nicolson Galerkin xifinite element methode for a nonlocal parabolic equation with moving boundaries,Numer Methods Partial Differentail Equation 31(2015),1515-1533.

[2] Sudhakar Chaudhary , Vimal Srivastava V .V.K .Srinivas Kumar Balaji Srinivasan , finit element approximation of nonlocal parabolic problem , mai 2017 786-813.

[3] Chipot and B. Lavot, Remarks on a nonlocal problem involvingà the Dirichlet enerqy, Rend Sem Mat Univ Padova 110(2003),199-220.T.

[4] M. Chipot,Element of nonlinear analysis,Birkhauser Advanced Texts,Berlin,2000.

[5] W.Govaerts and J.D.Pryce,Block elimination,with one refinement solves bordered linear system accurately,BIT,30(1990),490-507.

[6] Gudi, Finite element methode for a nonlocal problem of Kirchhoff type ,SIAM J Numer anal 50(2012),657-668

[7] P.A.Lott.H.F.Woodward,and U.M.Yang,An accelerate Picard method for nonlinear systems related to variated to variably saturated floow,Adv Water Res,38(2012),92-101.

[8] C.Paniconi and M.Putti,A comparison of Picard and Newton iteration in the numerical-solution of multidimensional variably saturated flow problems ,Water Resour Res 30(1994),3357-3374

[9] R.Rannacher and R.Scott,Some optimal error estimates for piecewise linear finite element approximation,Math Comp 38(1982),437-445.

[10] T.F.Ma,Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type,Nonlinear Anal 63(2005),1967-1977.

[11] R.J.Robalo,R.M.P.Almeida,M.do C.Coimbra,and J.Ferreira,A reaction diffusion model for a class of nonlinear parabolic equations with moving boundaries:existence,uniqueness,exponentialdecay and simulation, Appl Math Model 38-23(2014),5609-5622.

[12] Y.Sahki, Sur un problème pseudo-parabolique d'ordre fractionnaire , 2016-2017.

[13] N. Sharma and K.K. Sharma,Unconditionally stable numerical methode for a nonlinear partial inegro-differential equatio,Comput Math Appl,67(2014),62-76.

[14] V.Srivastava,S.Chaudhary,V.V.K.Srinivas Kumar,and B.Srinivasan,Fully discrete finite element sheme for nonlocal parabolic problem involving the Dirichlet energy ,J Appl Math Comput (2015),to appear .doi:10.1007/s12190-015-0975-6.

[15] M.F.Wheeler,A Priori l_2 error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations,SIAM J Numer Anal 10(1973),723-759.

[16] S.Zheng and M.Chipot,Asymptotic behavior of solutions to nonlinear parabolic equations with nonlocal terms,Asymptot Anal 45(2005),301-312.

Merci

– Fin –