République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **Analyse mathématique appliquée**

Par :

Mr. Chouchane Younes

Intitulé

Quelques exemples de control optimal linéaire

Dirigé par :
Pr. Badraoui Salah

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. Berhail Amel**	**Univ. 8 mai 1945 Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. Belaouar Djamel**	**Univ. 8 mai 1945 Guelma**

Session Juin 2018

Remerciements

On remercie le bon Dieu qui nous a donné la force, le courage et la santé pour Pouvoir mener à terme ce travail.

On tient à exprimer notre profonde gratitude et nos remerciements les plus Sincères à Mr.Badraoui Salah, professeur à l'université de Guelma sous la Direction du quel on a eu le plaisir de travailler. Ses conseils, ses critiques et sa Rigueur scientifique nous ont permis de mener à bien ce travail de mémoire.

On exprime nos sincères remerciements à Mr. Berhail amel , professeur à l'université de Guelma Qui nous a fait l.honneur de présider le jury de ce Mémoire. On est honoré de la présence dans ce jury de Mr. Belaouar djamel à l'université de Guelma et de l'intérêt Qu'il a porté à ce mémoire.

Qu'il trouve ici l'expression de nos profonds respects.

On remercie tous ceux qui de prêt ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce Mémoire.

Enfin, on exprime notre profonde gratitude à notre chères familles, Particulièrement nos

Parents, qui nous ont soutenus et encouragés tout au long de nos études, à tous nos Amis(es), ce modeste travail leur est dédié.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents,

A mes frères,

A toute la famille chouchane,

A tous mes amis (es) et connaissances,

Table des matières

Chapitre 1

Introduction génétrale

La théorie du contrôle (ou commande) analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certainétat final, en respectant éventuellement certains critères.

Les systèmes étudiés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard, etc.

Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie, etc. L'objectif est de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), Ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal).

En mathématiques, la théorie du contrôle optimal s'inscrit dans la continuité du calcul des variations. Elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, Notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique du vol. Historiquement, la théorie du contrôle optimal est très liée à la mécanique classique, en particulier aux principes variationnels de la Mécanique.

La théorie moderne du contrôle optimal a commencé dans les années 1950, avec la formulation du principe du maximum de Pontryaguine, formulé par ce dernier en 1956, donnant une condition nécessaire D'optimalité et permettant ainsi de calculer les trajectoires optimales, dès lors, la théorie a connu un essor spectaculaire, ainsi que de nombreuses applications. De nos jours, les systèmes automatisés font Complètement partie de notre quotidien (nous en sommes souvent inconscients), ayant pour but d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certaines tâches : système de freinage ABS, assistance à la Conduite, servomoteurs, thermostats, régulation hygrométrique, circuits frigorifiques, contrôle des flux routiers, ferroviaires, aériens, boursiers, fluviaux, photographie numérique, filtrage et reconstruction D'images, lecteurs CD et DVD, réseaux informatiques, moteurs de recherche sur internet, circuits électriques, électroniques, télécommunications en général, chaînes industrielles de Montage, opérations au Laser, c'est-à-dire une action sur un système dynamique avec une notion de rendement optimal.

1.1 Exemple 1. Economie.

L'économie d'un pays est un système constitué d'une population (consommateurs-producteurs) de compagnies, de bourses, etcL'état de ce système est une collection importante de données (salaires, Profits, couts de production, taux d'inflation, chômage, etc.) on peut agir sur ce système en agissant sur les taux, en débloquant Des crédits etc .

1.2 Exemple 2. Stockage de l'eau dans un réservoir.

On considère un réservoir, le flotteur régule le niveau de l'eau, L'eau dans le réservoir est le système, le contrôle est la position du flotteur.
L'état à chaque instant est un vecteur constitué par la hauteur de l'eau dans le réservoir $h(t)$ Le débit d'entrée et le débit de sortie de l'eau.

1.3 Exemple 3.

On considère un véhicule sur une route supposée droite avec une origine 0 et un sens positive. On suppose qu'au moment $t = 0$ le véhicule se trouve à une position $u_1^0 \in \mathbb{R}$. On souhaite grâce à une accélération a donnée au véhicule, faire en sorte qu'il s'arrête à un point $u_1^1 \in \mathbb{R}$ donné.
Ici le système est le véhicule et l'état du système est la fonction à valeurs vectorielles

$$t \in [0, \infty[\longrightarrow u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

où $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont respectivement la position et la vitesse au temps t.

Les variables d'état satisfont le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = a(t) \end{cases} \tag{A1}$$

Avec $a =$ l'accélération du véhicule.

Nous avons aussi les conditions initiales :

$$\begin{cases} u_1(0) = u_1^0(t) \\ u_2(0) = u_2^0(t) \end{cases} \tag{A2}$$

On peut voir ce système comme un système contrôlé où le contrôle est l'accélération a qui est une fonction du temps

$$t \in [0, \infty[\longrightarrow a(t) \in \mathbb{R}.$$

Il faut faire une hypothèse "raisonnable" sur le contrôle a ; on supposera par exemple que a est une fonction continue, ou continue par morceaux, ou $u \in L^2(0, \infty; \mathbb{R})$, etc ..

On peut aussi supposer que a est bornée :

$$|a(t)| \leq \alpha, \text{ pour tout } t \in [0, \infty[.$$

On mettra toutes les fonctions u satisfaisant ces conditions dans un ensemble "Admissible" que nous notons U_{ad}. Il faut maintenant introduire un **critère d'optimisation**

Il y a plusieurs possibilités qui sont utilisées habituellement dans la pratique :

Possibilité 1 : Trouver "le meilleur" a parmi tous les $a \in U_{ad}$ tel que le véhicule s'arrête au point $u_1^1 \in \mathbb{R}$ (donné) dans un **temps minimum**. Le problème peut alors s'écrire :

$$\min \left\{ \begin{array}{c} T > 0, u_1(T) = u_1^1 \text{ et } u_2(T) = 0 \text{ où } (u_1, u_2, a) \\ \text{satisfont A1-A2-}U_{ad} \end{array} \right\}. \tag{OC1}$$

On peut aussi "relaxer" le problème et considérer pour un $\varepsilon > 0$ assez petit donné le problème

$$\min \left\{ \begin{array}{c} T > 0, (u_1(T), u_2(T)) \in [u_1^1 - \varepsilon, u_1^1 + \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \text{ où } (u_1, u_2, a) \\ \text{satisfont A1-A2-}U_{ad} \end{array} \right\}. \tag{OC2}$$

On se contente donc d'amener (u_1, u_2) "proche" de $(u_1^1, 0)$ dans un temps minimum ; c'est un problème moins contraignant.

Possibilité 2 : Amener le véhicule à l'arêt au point u_1^1 en consomant le moins d'énergie possible, ceci dans un temps donné $T > 0$. On introduit alors une fonctionnelle

$$J : U_{ad} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Qui donne la consommation d'énergie en fonction de l'accélération ; l'exemple le plus utilisé est :

$$J(a) = \int_0^T a^2(t)dt, \text{ pour tout } u \in U_{ad}$$

Pour cela il faut choisir U_{ad} de telle manière que l'intégrale définissant J existe pour tout $u \in U_{ad}$.

Alors le problème de contrôle optimal sera :

$$\min \left\{ \begin{array}{c} J(u), (u_1(T), u_2(T)) \in (u_1^1, 0) \text{ où } (u_1, u_2, a) \\ \text{satisfont A1-A2-}U_{ad} \end{array} \right\}. \tag{OC3}$$

Ou de manière relaxée :

$$\min \left\{ \begin{array}{c} J(u), (u_1(T), u_2(T)) \in [u_1^1 - \varepsilon, u_1^1 + \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \text{ où } (u_1, u_2, a) \\ \text{satisfont A1-A2-}U_{ad} \end{array} \right\}. \tag{OC3}$$

Ou

$$\min \left\{ J_\varepsilon(u), \text{ où } (u_1, u_2, a) \text{ satisfont A1-A2-}U_{ad} \right\}. \tag{OC4}$$

Où

$$J_\varepsilon(a) = J(a) + \frac{1}{\varepsilon} \left| u_1(T) - u_1^1 \right|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left| a(t) \right|^2$$

L'idée de cette méthode est de pénaliser "l'éloignement" de $u_1(T)$ par rapport à u_1^1 et celui de $u_2(T)$ par rapport à 0. Ce problème est bien plus facile à manier mathématiquement, car il n'y a pas des Contraintes explicites sur l'état final.

Chapitre 2

Introduction au contrôle des systèmes dynamiques linéaires

Le problème général étudié dans cette mémoire est le suivant, Soient n et m deux entiers naturels non nuls, I un intervales de $\mathbb{R}$ et soient A, B et r trois applications L^∞ sur I (en fait, localement Intégrables, L^1_{loc}, suffit) à valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{R})$, $M_{n,m}(\mathbb{R})$, et $M_{n,1}(\mathbb{R})$ (identifié à $\mathbb{R}^n$).
Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$ (l'ensemble des contraintes du contrôle), et soit $u^0 \in \mathbb{R}^n$.
Le système de contrôle linéaire auquel on s'intéresse est

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + B(t)v(t) + r(t), \quad t \in I \\ u(0) = u^0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Où l'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble des applications mesurables et localement bornées sur I, à valeurs dans le sous-ensemble $\subset \mathbb{R}^m$.
Les théorèmes d'existence de solutions d'équations différentielles nous assurent que, pour tout contrôle u, le système (1.1) admet une unique solution
$u(\cdot) : I \to \mathbb{R}^n$ Absolument continue.
Soit $M(\cdot) : I \to M_n(\mathbb{R})$ la résolvante du système linéaire homogène $u'(t) = A(t)u(t)$ définie par

$$\begin{aligned} M(t)' &= A(t)M(t), \\ M(0) &= Id \end{aligned}$$

Notons que si $A(t) = A$ est constante sur I, alors $M(t) = e^{tA}$. Alors, la solution $u(\cdot)$ du système (1.1) associée au contrôle v est donnée par

$$u(t) = M(t)u^0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}(B(s)v(s) + r(s))ds, \text{ pour tout } \ t \in I$$

La question se pose alors naturellement :

Etant donné un point $u^1 \in \mathbb{R}^n$, existe-t-il un contrôle v tel que la trajectoire associée à ce contrôle joigne u^0 à u^1 en un temps fini T.

2.1 Contrôlabilité

2.1.1 Définition du problème de contrôle

Définition 1.1.2

Soit $n, m \in \mathbb{N}^\star$ et $f : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$(t, u(t), v(t)) \longrightarrow f\,[t, u(t), v(t)]$$

Une fonction de classe C^1 par rapport à (u, v).

Un problème de contrôle de dimension finie est un systéme d'équations différentielles ou ordinaires $u'(t) = f\,[t, u(t), v(t)]$ où u et v deux applications sur I à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$.

- Si

$$f\,[t, u(t), v(t)] = A(t)u(t) + B(t)v(t) \tag{1.2}$$

Avec $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$, $B(t) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ le probèlme s'appele problème de contrôle linéaire.

-Le problème (1.2) s'appele autonôme si $A(t) = A$ et $B(t) = B$ (ne dépendent pas de t).

Définition 1.1.3

On se donne $T > 0$ un nombre réel, deux fonctions à valeurs matricielles

$$A : [0; T] \longrightarrow M_n(\mathbb{R}), \quad A(t) = (A_{ij}(t)), \ i, j = 1, ..., n$$

Et

$$B : [0; T] \longrightarrow M_{n,m}(\mathbb{R}), \quad B(t) = (B_{ij}(t)), \ i = 1, ..., n, \ j = 1, ..., m$$

Une fonction à valeurs vectorielles

$$g : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g(t) = (g_1(t), ...g_n(t))^T$$

Et un vecteur $u^0 = (u_1^0, ..., u_n^0) \in \mathbb{R}^n$.

On considère le système d'équations différentielles ordinaires (EDO) linéaire suivant :

Trouver $u : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $u(t) = (u_1(t); u_2(t), ..u_n(t))^T$ satisfaisant le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + B(t)v(t) + g(t); t \in [0; T] \\ u(0) = u^0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Avec

$$v : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^m, v(t) = (v_1(t), v_2(t), ..v_m(t))$$

Le système (1.3) est appellé système contrôlé.

$u(t)$ s'appelle l'état du système (1.3).

$v(t)$ s'appelle le contrôle du système (1.3).

Définition 1.1.4

On dit que le contrôle v transfére un état initial u^0 à un état cible u^1 au temps T si $u(T, u^0, v) = u^1$.

2.1.2 Ensemble accessible

Considérons le système contrôlé (1.1)

$$\begin{aligned} \forall t \in I \;\; u'(t) &= A(t)u(t) + B(t)v(t) + r(t) \\ u(0) &= u^0 \end{aligned}$$

Définition 1.1.5

L'ensemble des points accessibles à partir de u^o en un temps $T > 0$ est défini par

$$Acc(u^0, T) = \{u_v(T) | v \in L^\infty([0, T], \Omega)\}$$

Où $u_v(\cdot)$ est la solution du système (1.2) associée au contrôle v, autrement dit $Acc(u^0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de (1.2) au temps T.
Lorsqu'on fait varier le contrôle v pour la cohérence, on pose $Acc(u^0, 0) = \{u^0\}$.

Définition 1.1.6

Soit $\{\Omega(t)\}_{t \in I} \subset \mathbb{R}^m$ une famille d'ensembles ($I \subset \mathbb{R}$ un intervalle).
On dit que cette famille varie continûment avec t si pour tout $t_1, t_2 \in I$ $(t_1 < t_2)$

$$\lim_{t_1 \to t_2} dist(\Omega(t_1), \Omega(t_2)) = 0$$

2.1.3 Topologie des ensembles accessibles

Théorème 1.1.2 Considérons le système de contrôle linéaire dans $\mathbb{R}^n$ (1.1) où $\subset \mathbb{R}^m$ est compact. Soient $T > 0$ et $u^0 \in \mathbb{R}^n$. Alors pour tout $t \in [0, T]$, $Acc(u^0, t)$ est Compact, convexe, et varie continûment avec t sur $[0, T]$.

Demonstration 1.1.2

-Si Ω est convexe :soient $u^1, u^2 \in Acc(u^0, T)$,et $\lambda \in [0, 1]$. On veut montrer que

$$\lambda u^1 + (1 - \lambda) u^2 \in Acc(u^0, T).$$

Par définition, pour $k = 1, 2$, il existe un contrôle $v^k : [0, t] \to \Omega$ tel que la trajectoire $u^k(\cdot)$ associée à v^k vérifie

$$u^k(0) = u^0, u^k(t) = u^k, u^{k'}(s) = A(s) u^k(s) + B(s) v^k(s) + r(s).$$

La solution de (1.1) est donnée par cette formule :

$$u^k(t) = M(t) u^0 + \int_0^t M(t) M(s)^{-1} (B(s) v^k(s) + r(s)) ds$$

Où $M(t) \in M_n(\mathbb{R})$ est la résolvante du systéme linéaire homogéne $u'(t) = A(t) u(t)$.

Pour tout $s \in [0,T]$, posons $v(s) = \lambda v^1(s) + (1-\lambda)v^2(s)$, Le contrôle v est dans $L^2([0,T];\Omega)$ car Ω est convexe.

Soit $u(\cdot)$ la trajectoire associée à v. Alors, par définition de $Acc(u^0,T)$, on a

$$u(t) = M(t)u^0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}(B(s)v(s) + r(s))ds \in Acc(u^0,T)$$

Or,

$$\begin{aligned}
\lambda u_1^1 + (1-\lambda)u_1^2 &= \lambda M(t)u^0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}(B(s)\lambda v^1(s) + \lambda r(s))ds + (1-\lambda)M(t)u^0 \\
&+ \int_0^t M(t)M(s)^{-1}(B(s)(1-\lambda)v^2(s) + (1-\lambda)r(s))ds \\
&= M(t)u^0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}(B(s)v(s) + r(s))ds \\
&= u(t) \in Acc(u^0,T)
\end{aligned}$$

Donc $\lambda u_1^1 + (1-\lambda)u_2^1 \in Acc(u^0,T)$, ce qui prouve la convexité de $Acc(u^0,T)$.

-Si Ω n'est pas convexe :la preuve de la convexité dans cette cas nécessite un lemme de Lyapunov en théorie de la mesure.

lemme 1.1.2

Soient $T > 0$ *et* $f \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ l'ensemble$\{\int_A f(s)ds \mid A \subset [0,T] \text{ mesurable}\}$ estconvexe dans $\mathbb{R}^n$.

-Soient alors $u^1, u^2 \in Acc(u^0,T)$,et $\lambda \in [0,1]$. On veut montrer que $\lambda u^1 + (1-\lambda)u^2 \in Acc(u^0,T)$.

Par définition, pour $k = 1,2$, il existe un contrôle $v^k : [0,t] \to \Omega$ tel que

$$u^k = u^* + M(t)y^k$$

où

$$u^* = M(t)u^0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}r(s)ds$$

Et

$$y^k = \int_0^t M(s)^{-1}B(s)v^k(s)ds$$

D'apès le lemme l'ensemble

$$c = \left\{ U_A = \left(\begin{array}{c} \int_A M(s)^{-1}B(s)v^1(s)ds \\ \int_A M(s)^{-1}B(s)v^2(s)ds \end{array} \right) \mid A \subset [0,T] \text{ mesurable} \right\}$$

Est convexe dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Notons en particulier que

$$u^0 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right)$$

Et

$$U_{[0,t]} = \left(\begin{array}{c} y^1 \\ y^2 \end{array} \right)$$

Par convexité il existe un sous ensemble $A \subset [0,t]$ mesurable tel que

$$U_A = \left(\begin{array}{c} \lambda y^1 \\ \lambda y^2 \end{array} \right)$$

De plus en notant A^c le complémentaire de A dans $[0,t]$ on a

$$U_A + U_{A^c} = \left(\begin{array}{c} y^1 \\ y^2 \end{array} \right)$$

Et donc

$$U_{A^c} = \left(\begin{array}{c} (1-\lambda)y^1 \\ (1-\lambda)y^2 \end{array} \right)$$

Par conséquent si l'on pose pour $s \in [0,t]$

$$v(t) = \left\{ \begin{array}{c} v^1(t) \text{ si } t \in A \\ v^2(t) \text{ si } t \in A^c \end{array} \right\}$$

Alors on aura

$$\int_0^t M(s)^{-1}B(s)v(s)ds = \left(\int_A + \int_{A^C}\right) M(s)^{-1}B(s)v(s)ds = \lambda y^1 + (1-\lambda)y^2$$

Bien entendu le controle v est mesurable et à valeurs dans Ω ce qui prouve la convexité de $Acc(u^0, T)$.

-Montrons maintenant la compacité de $Acc(u^0, T)$, Cela revient à montrer que toute suite $(u^n)_{n\geq 1}$ de points de $Acc(u^0, t)$ admet une sous-suite convergente.

Pour tout entier n, soit v^n un un contrôle reliant u^0 à u^n en temps t, et soit $u^n(\cdot)$

La trajectoire correspondante. On a donc

$$u^n = u^n(t) = M(t)u^0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}(B(s)v^n(s) + r(s))ds \tag{1.4}$$

Par définition, les contrôles v^n un sont à valeurs dans le compact Ω, et par conséquent la suite $(v^n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^2([0,t], \mathbb{R}^m)$.

Comme l'espace $L^2([0,t], \mathbb{R}^m)$ est un espace de banach réflixif alors on peut extraire une sous-suite de $(v^n)_{n\geq 1}$ qui converge faiblement vers v dans $L^2([0,t], \mathbb{R}^m)$.

Comme Ω est supposé convexe, on a de plus $v \in L^2([0,t], \Omega)$, Par ailleurs, de la formule de représentation (1.4) on déduit aisément que la suite $(u^n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^2([0,t], \mathbb{R}^n)$

Car

$$u^n(t) = M(t)u^0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}(B(s)v^n(s) + r(s))ds$$

Et

$$\begin{aligned}
\|u^n\|_{L^2([0,t],\mathbb{R}^n)} &\leq \left\|M(t)u^0\right\| + \int_0^t \left\|M(t)M(s)^{-1}B(s)\right\| \|v^n\| \, ds + \int_0^t \|r(s)\| \\
&\leq c_1 + c_2 + c_3 \int_0^t \|v^n\| \, ds \\
&\leq c_1 + c_2 + c_3 c_0 \\
&\leq C \text{ , pour tout } n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

De plus, de l'égalité $u^{n\prime} = Au^n + Bv^n + r$,et utilisant le fait que A, B et r sont dans L^∞ sur $[0,T]$, on conclut que la suite $(u^{n\prime})_{n\geq 1}$ est également bornée dans $L^2([0,t], \mathbb{R}^n)$ car

$$\|u^{n\prime}\| \leq \|A\| \, \|u^n\| + \|B\| \, \|v^n\| + \|r\|$$

$$\leq \infty$$

On a démontré que la suite $(u^n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^2([0,t],\mathbb{R}^n)$ et $(u^{n\prime})_{n\geq 1}$ est également bornée dans $L^2([0,t],\mathbb{R}^n)$, autrement dit que cette suite est bornée dans $H^1([0,t],\mathbb{R}^n)$. Mais comme cet espace de Sobolev est réflexif t se plonge de manière compacte dans $C^0([0,t],\mathbb{R}^n)$ muni de la topologie uniforme, on conclut que la suite $(u^n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers une Application $u((t)$ sur $[0,t]$ en passant à la limite dans (1.4) Il vient alors

$$u(t) = M(t)u^0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}(B(s)v(s) + r(s))ds \in Acc(u^0, T)$$

Ce qui prouve la compacité de l'ensemble accessible.

-Montrons enfin la continuité par rapport à t de $Acc(u^0,t)$.

Soit $\epsilon > 0$ On va chercher $\delta > 0$ tel que

$$\forall t_1, t_2 \in [0,T] \ \ |t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow d(Acc(t_1), Acc(t_2)) \leq \epsilon$$

Où on note pour simplifier $Acc(t) = Acc(u^0,t)$, et où

$$d(Acc_\Omega(t_1), Acc_\Omega(t_2)) = \sup\Big(\sup_{y\in Acc_\Omega(t_2)} d(y, Acc(t_1)), \sup_{y\in Acc_\Omega(t_1)} d(y, Acc(t_2))\Big)$$

Par la suite, on suppose $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$. Il suffit de montrer que

1. pour tout $y \in Acc_\Omega(t_2)$ $d(y, Acc_\Omega(t_1) \leq \epsilon$.

2. pour tout $y \in Acc_\Omega(t_1)$ $d(y, Acc_\Omega(t_2) \leq \epsilon$.

Montrons juste le premier point (le deuxième étant similaire) :

Soit $y \in Acc(t_2)$, Il suffit de montrer que

$$\exists\ z \in Acc_\Omega(t_1) \ \mid\ d(y,z) \leq \epsilon$$

Par définition de $Acc_\Omega(t_2)$, il existe un contrôle $v \in L^2([0,t],\Omega)$, tel que la trajectoire associée à v, Partant de u^0, vérifie $u(t_2) = y$, On va voir que $z = u(t_1)$ convient. En effet on a

$$\begin{aligned} u(t_2) - u(t_1) &= M(t_2)u^0 + \int_0^{t_2} M(t_2)M(s)^{-1}(B(s)v(s) + r(s))ds \\ &\quad -(M(t_1)u^0 + \int_0^{t} M(t_1)M(s)^{-1}(B(s)v(s) + r(s))ds \\ &= M(t_2)\int_{t_1}^{t_2} M(s)^{-1}(B(s)v(s) + r(s))ds \\ &\quad +(M(t_2) - M(t_1))(u^0 + \int_0^{t_1} M(s)^{-1}(B(s)v(s) + r(s))ds \end{aligned}$$

Si $|t_1 - t_2|$ est petit, le premier terme de cette somme est petit par continuité de l'intégrale. Le deuxième terme est petit par continuité de$t \longrightarrow M(t)$. D'où le résultat.

2.1.4 Définition de la contrôlabilité

Définition 1.1.7

Le système contrôlé

$$u'(t) = A(t)u(t) + B(t)v(t) + r(t)$$

Est dit contrôlable en temps T depuis le point u^0 nsi $Acc(u^0, T) = \mathbb{R}^n$, i.e. , pour tous $u^0, u^1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $v \in L^\infty([0,T];\Omega)$ tel que la trajectoire associée relie u^0 à u^1 en temps T.

2.1.5 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

1.Cas sans contrainte sur le contrôle : condition de Kalman

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t.

Théorème 1.1.3

On suppose que $\Omega = \mathbb{R}^m$ (pas de contrainte sur le contrôle).
Le système

$$u'(t) = A(t)u(t) + B(t)v(t) + r(t)$$

Est contrôlable (en temps T quelconque depuis un point initial quelconque) si et seulement si la matrice

$$C = (B.\ AB, ..., A^{n-1}B)$$

Est de $rang\ n$.

Remarque 1.1.2

La matrice C est appelée matrice de Kalman, et la condition $rangC = n$ est appelée condition de Kalman.

2. Cas avec contrainte sur le contrôle

Théorème 1.1.4

Soit $b \in \mathbb{R}^n$ et $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0 dans son intérieur.
Considérons le système

$$u'(t) = A(t)u(t) + B(t)v(t), \text{ avec } u(t) \in \Omega$$

Alors tout point de $\mathbb{R}^n$ peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si la paire (A, b) vérifie la condition de Kalman et la partie Réelle de chaque valeur propre de A est inférieure ou égale à 0.

Chapitre 3

Temps-optimalité

3.1 Existence de trajectoires temps-optimales

Il faut tout d'abord formaliser, à l'aide de $Acc(u^0, t)$, la notion de temps minimal.

Considérons comme précédemment le système de contrôle dans $\mathbb{R}^n$

$$u'(t) = A(t)u(t) + B(t)v(t) + r(t)$$

Où les contrôles v sont à valeurs dans un compact d'intérieur non vide $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Soient u^0 et u^1 deux points de $\mathbb{R}^n$. Supposons que u^1 soit accessible depuis u^0, c'est-à-dire qu'il existe au moins une trajectoire reliant u^0 à u^1. Parmi toutes les trajectoires reliant u^0 à u^1, on aimerait caractériser celles qui le font en temps minimal t^*.

Si t^* est le temps minimal, alors pour tout $t < t^*$, $u^1 \notin Acc(u^0, t)$; en effet sinon u^1 serait accessible à partir de u^0 en un temps inférieur à t^*.

Par conséquent,

$$t^* = \inf \left\{ t > 0 : u^1 \in Acc(u^0, t) \right\}$$

Théorème 2.1.1

Si le point u^1 est accessible depuis u^0 alors il existe une trajectoire temps minimale reliant u^0 à u^1.

Démonstration

On note $M = \{t > 0 : u^1 \in Acc(u^0, t)\}$.

- Montrons que l'ensemble M est fermé dans $\mathbb{R}$:

Soit l'application $f : 0 < t \longmapsto f(t) = u^1$

Soient f et φ deux application continues telles que $f : t \longrightarrow Acc(u^0, t) \subset \mathbb{R}^n$.

f est continue car $Acc(u^0, t)$ varie continûment d'après le théorème (1.1.2).

$\varphi : Acc(u^0, t) \longmapsto \varphi(Acc(u^0, t)) = u^1$.

On remarque que $g = \varphi \circ f$ est une application continue car elle est une composée de deux fonctions continues.

On a $t = g^{-1}(u^1)$ donc l'ensemble M est fermé Dans $\mathbb{R}$(l'image réciproque d'un fermé par une application continue).

-Montrons maintenant que $\inf M = \alpha \in M$ càd(cette borne inférieure est atteinte).

Comme l'ensemble M est fermé Dans $\mathbb{R}$ alors $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ x \in M$ tel que $\alpha \leq x \leq \alpha + \epsilon$

Si on prend $\epsilon = \frac{1}{n}$ alors $\alpha \leq x = x_n \leq \alpha + \frac{1}{n}$

En passant à la limite nous obtenons que $\alpha \in M$.

Donc il existe une trajectoire temps minimale reliant u^0 à u^1.

Remarque 2.1.1

Le temps $t = t^*$ est le premier temps pour lequel $Acc(u^0, t)$ contient u^1.

D'autre part, on a nécessairement

$$u^1 \in \partial Acc(u^0, t^*) = Acc_\Omega(u^0, t^*) \backslash Int(Acc(u^0, t^*))$$

En effet, si u^1 appartenait à l'intérieur de $Acc(u^0, t^*)$, alors pour $t < t^*$ proche de t^*, u^1 appartiendrait encore à $Acc(u^0, t)$ car $Acc(u^0, t)$ varie continûment avec t, mais ceci contredit le fait que t^* soit Le temps minimal.

Définition 2.1.1

Le contrôle v est dit extrémal sur $[0, t]$ si la trajectoire du système (1.1) associée à v vérifie $u(t) \in \partial Acc(v^0, t)$.

Remarque 2.1.2

En particulier, tout contrôle temps-minimal est extrémal. La réciproque est évidemment fausse, car l'extrémalité ne fait pas la différence entre la minimalité et la maximalité.

Dans le paragraphe suivant on donne une caractérisation de cette propriété.

3.2 Condition nécessaire d'optimalité : principe du maximum dans le cas linéaire

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un contrôle soit extrémal.

Théorème 2.1.2

Considérons le système de contrôle linéaire (1.1) où le domaine de contraintes $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sur le contrôle est compact. Soit $T > 0$. Le contrôle v est extrémal sur $[0, T]$ si et seulement s'il existe une Solution non triviale $p(t)$ de l'équation

$$p'(t) = -p(t)A(t)$$

Telle que

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)B(t) \tag{2.1}$$

Pour tout $t \in [0, T]$.
Le vecteur ligne $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint.

Remarque 2.1.3

Dans le cas contrôle scalaire et si de plus $\Omega = [-a, a]$ où $a > 0$, la condition de maximisation implique immédiatement que

$$v(t) = a.sign(p(t)B(t))$$

La fonction

$$\Phi(t) = p(t)B(t)$$

Est appelée fonction de commutation, et un temps t_c auquel le contrôle extrémal $v(t)$ change de signe est appelé un temps de commutation. C'est en particulier un zéro de la fonction Φ.

Chapitre 4

Quelques exemples du calcul du contrôle optimal

Dans ce chapitre, nous allons discuter de quelques exemples dans le calcul du contrôle optimal en utilisant ce que nous avons discuté dans les chapitres précéddents.

4.1 Exemple1. Problème de l'oscillateur harmonique linéaire

Le système s'écrit

$$\begin{aligned} u' &= Au + Bv \\ u(0) &= u^0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On démontre facilement que $rang(B, AB) = 2$; par ailleurs les valeurs propres de A sont de partie réelle nulle; donc, d'après le théorème (1.1.4) le système est contrôlable à zéro.

Calcul du contrôle optimal

On cherche maintenant à le faire en temps minimal. Pour cela, on applique le théorème (2.1.2) selon lequel

$$v(t) = signe(p(t)B),$$

Où $p(t) \in \mathbb{R}^2$ est solution de l'équation différentielle

$$p'(t) = -p(t)A$$

Posons $p = (p_1, p_2)$, alors $u(t) = signe(p2(t))$ et $p_1' = p_2, p_2' = -p_1$, d'où $p_2'' + p_2 = 0$. Donc

$$p_2(t) = \lambda cost + \beta sint$$

En particulier, la durée entre deux zéros consécutifs de $p_2(t)$ est exactement π.

Par conséquent le contrôle optimal est constant par morceaux sur des intervalles de longueur π, et prend alternativement les valeurs ± 1.

– Si $v = -1$, on obtient le système différentiel

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -u_1 - 1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

– Si $v = +1$,

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -u_1 + 1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Solutions de (3.2).

On obtient facilement :

$$u_1(t) = -1 + Rcost, \quad u_2(t) = Rsint$$

Donc

$$(u_1 + 1)^2 + (u_2)^2 = const. = R^2$$

Par conséquent, les courbes solutions de (3.2) sont des cercles centrés en $(-1, 0)$, et de période $2\,\pi$.

Solutions de (3.3).

On obtient :

$$u_1(t) = 1 + Rcost, \qquad u_2(t) = Rsint$$

Les solutions sont des cercles centrés en $(1, 0)$, de période 2 ■.

La trajectoire optimale de u^0 à 0 doit donc suivre alternativement un arc de cercle centré en $(-1,0)$, et un arc de cercle centré en $(1,0)$.
La trajectoire optimale de u^0 à 0 doit donc suivre alternativement un arc de cercle centré en $(-1,0)$, et un arc de cercle centré en $(1,0)$.

Quitte à changer t en $-t$, nous allons raisonner en temps inverse, et construire la trajectoire optimale menant de 0 à u^0. Pour cela, nous allons considérer toutes les trajectoires optimales partant de 0, et Nous sélectionnerons celle qui passe par u^0.
En faisant varier $p(0)$, on fait varier la trajectoire optimale. En effet, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $p(0)$ détermine $p(t)$ pour tout t, ce qui définit un contrôle optimal $v(t)$, et donc une Trajectoire optimale.

4.2 Exemple 2

Considérons le problème de contrôle optimale suivant :

$$\text{minimiser } J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T [x^\tau(t)L(t)x(t) + u^\tau(t)u(t)]\, dt + \frac{1}{2}x^\tau(T)Qx(T) \tag{P}$$

Assujetté à

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) a.e. t \in [0,T), \; x \text{ est continue} \tag{1}$$

$$x(0) = x^0 \tag{2}$$

$$u \in \mathcal{U} \tag{3}$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $A(t)$, $L(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont continues, $B(t) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $L(t)$ (pour tout $t \in [0,T)$) et Q sont supposées symétriques.

Le lemme suivant est la clé de résudre ce problème.

Lemme Fundamental 3.1.1 :

Soit $A(.)$ et $B(.)$ deux applications continues à valeurs matricielles et $K(\cdot) = K^\tau(\cdot)$ une application continue à valeurs matricielles, continument differentiable sur $[0,T]$. Alors; si

$x(t)$ et $u(t)$ sont liées Par :

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \text{ a.e. } t \in [0, T)$$

Alors :

$$\begin{aligned} & x^{\tau}(T)K(T)x(T) - x^{\tau}(0)K(0)x(0) \\ = & \int_0^T \left\{ x^{\tau}(t) \left[K'(t) + A^{\tau}(t)K(t) + K(t)A(t) \right] x(t) + 2x^{\tau}(t)K(t)B(t)u(t) \right\} dt \end{aligned}$$

C-à-d, cette intégrale dépend seulement des points finaux de la trajectoire $x(.)$

Il est indépendant des trajectoires $x(.)$ et $u(.)$.

Démonstration.

On a :

$$\begin{aligned} x^{\tau}(T)K(T)x(T) - x^{\tau}(0)K(0)x(0) &= \int_0^T \frac{d}{dt} x^{\tau}(t)K(t)x(t)dt \\ &= \int_0^T \left[x'^{\tau}(t)K(t)x(t) + x^{\tau}(t)K'(t)x(t) + x^{\tau}(t)K(t)x'(t) \right] dt \end{aligned}$$

Et comme $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ et $(AB)^{\tau} = B^{\tau}A^{\tau}$:

$$\begin{aligned} x^{\tau}(T)K(T)x(T) - x^{\tau}(0)K(0)x(0) &= \int_0^T \left\{ \begin{array}{c} \left[x^{\tau}(t)A^{\tau}(t) + u^{\tau}(t)B^{\tau}(t) \right] K(t)x(t) \\ +x^{\tau}(t)K'(t)x(t) \\ +x^{\tau}(t)K(t) \left[A(t)x(t) + B(t)u(t) \right] \end{array} \right\} dt \\ &= \int_0^T \left\{ \begin{array}{c} x^{\tau}(t) \left[K'(t) + A^{\tau}(t)K(t) + K(t)A(t) \right] x(t) \\ +u^{\tau}(t)B^{\tau}(t)K(t)x(t) + x^{\tau}(t)K(t)B(t)u(t) \end{array} \right\} dt \\ &= \int_0^T \left\{ \begin{array}{c} x^{\tau}(t) \left[K'(t) + A^{\tau}(t)K(t) + K(t)A(t) \right] x(t) \\ +x^{\tau}(t)K^{\tau}(t)B(t)u(t) + x^{\tau}(t)K(t)B(t)u(t) \end{array} \right\} dt \\ &= \int_0^T \left\{ \begin{array}{c} x^{\tau}(t) \left[K'(t) + A^{\tau}(t)K(t) + K(t)A(t) \right] x(t) \\ +2x^{\tau}(t)K^{\tau}(t)B(t)u(t) \end{array} \right\} dt \\ (\text{car } K(\cdot) &= K^{\tau}(\cdot)) \end{aligned}$$

Résolution du problème

Posons

$$\varphi(K(t), K'(t), x(t), u(t)) = x^{\tau}(t)\left[K'(t) + A^{\tau}(t)K(t) + K(t)A(t)\right]x(t) + 2x^{\tau}(t)K(t)B(t)u(t)$$

On obtient pour $K(.)$ arbitraire satisfaisant les hypothèses :

$$2J(u) = 2J(u) - x^{\tau}(T)K(T)x(T) + x^{\tau}(0)K(0)x(0) + \int_0^T \varphi(K(t), K'(t), x(t), u(t))dt$$

Ptenons $K(T) = Q$:

$$2J(u) = 2J(u) - x^{\tau}(T)Qx(T) + x^{\tau}(0)K(0)x(0) + \int_0^T \varphi(K(t), K'(t), x(t), u(t))dt$$

Et comme

$$2J(u) = \int_0^T \{x^{\tau}(t)L(t)x(t) + u^{\tau}(t)u(t)\}\, dt + x^{\tau}(T)Qx(T)$$

On obtient

$$\begin{aligned} 2J(u) &= \int_0^T \{x^{\tau}(t)L(t)x(t) + u^{\tau}(t)u(t) + \varphi(K(t), K'(t), x(t), u(t))\}\, dt + x^{\tau}(0)K(0)x(0) \\ &= \int_0^T \{x^{\tau}(K' + A^{\tau}K + L)x + u(K^{\tau}B + B^{\tau}K)x + u^{\tau}u\}\, dt + x^{\tau}(0)K(0)x(0) \end{aligned}$$

Où nous avons enlevé la dépendance explicite à t.

On choisit K solution de l'équation différentielle :

$$K' + A^{\tau}K + L = KBB^{\tau}K$$

Avec la condition terminale $K(T) = Q$, la dernière expression se simplifie à :

$$2J(u) = \int_0^T \{x^{\tau}KBB^{\tau}Kx + 2x^{\tau}KBu + u^{\tau}u\}\, dt + x^{\tau}(0)K(0)x(0)$$

C-à-d

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \|B^{\tau}Kx + u\|^2 + \frac{1}{2}x^{\tau}(0)K(0)x(0)$$

Il est à noter que l'équation différentielle est de Riccati, elle admet une solution unique et symétrique.

Par conséquent, la fonctionnelle J est minimisée lorsque

$$u(t) = B^{\tau}(t)K(t)x(t)$$

Et sa valeur optimamle est

$$J_{\min} = \frac{1}{2}x^{\tau}(0)K(0)x(0)$$

Illustrons ceci par l'exemple scalaire suivant.

Prenons $A = 0$, $B = 1$, $L = -1$, $Q = 0$:

$$\begin{aligned} &\min \int_0^{t_1} \left(u^2(t) - x^2(t)\right) dt \quad \text{tel que} \\ x'(t) &= u(t), \text{ pour } t \in [0, t_1[\,,\ u \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

L'équation de Riccati correspondante est :

$$k'(t) = 1 + k^2(t), k(t_1) = 0$$

Sa solution est

$$\arctan k(t) - \arctan k(t_1) = t - t_1$$

Ce qui donne

$$k(t) = \tan(t - t_1)$$

Aves un temps de saut fini en $t^* = t_1 - \frac{\pi}{2}$.