République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques Appliquées**

Par :

Melle. Mohatet Soulaf

Intitulé

Sur un problème intégro-differentiel d'ordre fractionnel avec retard

Dirigé par : Dr Chaoui Abderrezak

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. ELLAGOUNE Fateh**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. CHAOUI Abderrezak**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. HITTA Amara**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2016

Remerciements

C'est avec un grand plaisir que je réserve ces lignes en signe de gratitude et de reconnaissance à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

*En tout premier lieu, je tiens à remercier le professeur **CHAOUI Abderrezak** d'avoir encadré ce travail, tout au long de ce mémoire, ses conseils m'ont été très précieux.*

*Je remercie vivement le docteur, **ELLAGOUNE Fateh** de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury. Je remercie également le docteur **HITTA Amara** membres de jury l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail .*

Il m'aurait été impossible de réaliser ce travail sans le soutien de ma famille, en particulier mon père de l'affection dont il a su m'entourer depuis toujours.

J'adresse également mes remerciements envers mes amis et mes collègues pour leur soutien.

Enfin, je dédie ce travail à celle qui ma soutenu avec toute sa tendresse et son affection ma mère, que dieu la bénisse.

Table des matières

0.1 Introduction

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du $17^{ème}$ siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la $n^{ème}$ dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu :Que signifiie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$. cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695,Leibniz écrivit prophétiquement :« Ainsi il s'ensuit que $d^{\frac{1}{2}}$ sera égal à $x\sqrt[2]{dx : x}$ un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences ». Sur ces questions, nous retrouvons Une liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au caclul fractionnaire jusqu'au milieu du $20^{ème}$ siècle, inclut : P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832- 1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A.K. Grunwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912) S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. L'evy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945) E.R. Amour (1938-1996), A. Erd'elyi (1939- 1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949).

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peu plus de trente années elle a été objet de conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commencé en 1968.

L'étude des problèmes fractionnaires est d'actualité et plusieurs méthodes sont appliquées pour la résolution de ces problèmes. Néanmoins les méthodes basées sur le principe du point fixe jouent un grand role. Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base, montrant l'existence des solutions dans divers genres d'équations. La théorie de point fixe est au coeur de l'analyse non linéaire puisqu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans nombreux problèmes non linéaires différents.

Le développement de la thèorie du point fixe, qui ast la branche cardinale de l'analyse non linéaire a donné de grands effets sur l'avancement de l'analyse non linéaire, considérée comme une branche autonome des mathématiques, l'analyses non linéaire a été élaboré dans les années 1950 par des mathématiciens comme Felix Browder comme une combinaison de l'analyse fonctionnelle et l'analyse variationnelle.

Cette méthde est associée aux noms de mathématiciens célèbres tels que Cauchy,Liouville, Lipschitz et surtout, Picard. En fait, les précurseurs de la thèorie du poin fixe approché sont explicites dans les travaux de Picard. Toutefois, c'est le mathématicien polonais Stefan Banach, qui est crédité sur le placement d'une idée abstraite.

Le principe de l'application contractante est l'un des rares thèorémes constructifs de l'analyse mathématique.Il constitue un outil de grande importance vue l'étendue de son champs d'applications à priori, dans l'étude des équations non linéaires qui jouent un rôle crucial aussi bien en mathématique qu'en sciences appliquées. Le principe est le thèoréme du point fixe de Banach ou celui de Picard qui assure l'éxistence d'un unique point fixe pour une application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même. Le point fixe est la limite d'un procédé itératif défini à partir d'une répétition d'image par cette application contractante d'un point initial arbitraire dans cet espace. Ce concept a été prouvé en premier, par Banach en 1922 puis dévloppé par plusieurs mathématiciens (Krasnoselski en 1955) .

Le thèoréme de Banach affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est donc pas nécessairement d'établir des majorations sur la fonction mais simplement sa continuité.

Le thèoréme du point fixe de Krasnoselski appuie par ses grandes mésures le domaine trés actif des applications. Il apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité des solutions pour des opérateurs non linéaire qui sont étroitement, liés au équations différentielles non linéaires et équations intégrales qui sont fait l'objet d'études intensives ces dernières décennies.

On peut noter ici que la plupart des traveaux sur le calcul fractionaire sont consacrés à la solvabilité des problèmes aux engendrés par des équations différentielles fractionnaires linéaires à la base des fonctions spéciales.Récemment, d'autres résultat traitant l'existence, l'unicité et la multiplicité des solutions ou des solutions positives des problèmes fractionnaires non linéaire par l'utilisation des téchniques d'analyse non linéaire comme les théorèmes de point fixe sont apparues.

Dans ce mémoire, nous commençons par rappeler dans :

Chapitre 1 : contient un ensemble de définitions et notions de dérivation et d'intégration fractionnaire avec des exemples et nous donnons quelques thèorémes du point fixe, et le lemme d'Ascoli-Arzela.

Chapitre 2 : intitulé "Existence de la solution d'une équation integro-différentiel d'ordre fractionnaire avec retard" on traitera l'existence de solutions pour le problème intégro-différentielle avec retard suivant :

$$^{c}D^{q}x\left(t\right)=f\left(t;x\left(t-\tau\right)\right)+I^{r}g\left(t;x\left(t\right)\right),t\in\left[0,1\right]$$

$$x\left(t\right)=\varphi\left(t\right),t\in\left[-\tau,0\right],\tau\geq0$$

où $^{c}D^{q}$ est la dérivée fractionnaire du Caputo d'ordre $q, f, g : [0,1]\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ sont deux fonctions, $1<q\leq2$ et $0<r<1$.

on termine ce mémoire par une bibliographie.

Chapitre 1

Notions et préliminaires

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base de la dérivation non entiére.

Nous avons repertorié quelque notions de cet outil mathématique, deux approches des dérivées fractionnaires sont introduites à savoir, l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo ainsi que leurs propriétés et quelques exemples de calcul.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons particuliérement à définir des notions fondamentales et à rappeler quelque théorèmes importants dans la théorie du point fixe, notamment le principe de contraction de Banach, le théorème bien connu krasnoselski.

1.1 Espace fonctionnel :

Tout d'abord nous présentons les espaces fonctionnels concernés par notre travail.

1.1.1 Espace L^p :

Les espaces L^p sont des espaces de fonctions dont la puissance p-iéme de la fonction est intégrable, au sens de Lebesgue.

soit $\Omega = [a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1 : On note par $L^p\ (a, b)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ l'espaces des fonctions f mésurables intégrables au sens de Lebesgue à valeurs réelles dans Ω telle que la norme$\|f\|_p <$

$+\infty$

où

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} (1 \leq p < +\infty)$$

et pour $p = +\infty$ on a

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} . |f(x)| = \inf \{k \geq 0; |f(x)| \leq k; p.p.sur\Omega\}.$$

et $L^\infty(a,b)$ est l'espace des fonctions mésurable bornées sur (a,b).

1.1.2 Espace $C^\eta[a,b]$:

Définition 1.2 :[3] Soit $\Omega = [a,b]$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ et $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, ..\}$.

soit $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui on leur dérivées d'ordre inférieur ou égale à n continues sur Ω , muni de la norme

$$\|f\|_{C^n} = \sum_{k=0}^{n} \left\|f^{(k)}\right\|_C = \sum_{k=0}^{n} \max_{x\in\Omega} \left|f^{(k)}(x)\right|, n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $n = 0$, $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω , muni de la norme

$$\|f\|_C = \max_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Définition 1.3 :[3] On note par $C([a,b], \mathbb{R})$ l'espace de banach de toutes les fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|y\|_\infty = \sup \{|y(t)| : t \in [a,b]\}.$$

1.1.3 Espace $AC^n[a,b]$:

Soit $[a,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini

Définition 1.4 :[3] On note par $AC[a,b]$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$.

Définition 1.5 : Pour $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, ..\}$ on note par $AC^n [a, b]$ l'espace des fonctions à valeurs complexes $f(x)$ ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ continues sur $[a, b]$ telle que $f^{(n-1)}(x) \in AC[a, b]$,

c'est-à-dire

$$AC^n [a, b] = \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{C} \text{ et } \left(D^{(n-1)} f\right)(x) \in AC[a, b] \left(D = \frac{d}{dx}\right) \right\},$$

où $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

En particulier on a $AC^1 [a, b] = AC[a, b]$.

Lemme 1.1 : L'espace $AC[a, b]$ coincïde avec l'espace des primitives de fonctions sommables de Lebesgue, c'est-à-dire :

$$f \in AC[a, b] \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\, dt, \left(\varphi \in L^1(a, b)\right).$$

Ainsi une fonction absolument continue $f(x)$ a une dérivée sommable $f'(x) = \varphi(x)$ dans $[a, b]$. Alors

$$\varphi(t) = f'(t) \text{ et } c = f(a).$$

1.2 Fonction spécifiques pour la dérivation fractionnaire :

Dans ce qui suit, nous présentons les fonctions Gamma et Bêta, qui seront utilisées . Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théoric du calcul fractionnaire.

1.2.1 Fonction Gamma :

La fonction Gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes.

Définition 1.6 :[7] La fonction gamma d'Euler $\Gamma(r)$ est définie par

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \,(\Re(r) > 0)$$

où

$$t^{z-1} = e^{(z-1)\log(t)}$$

cette intégrale est convergente pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$ $(\Re(z) > 0)$.

Remarque 1.1 :[7] la fonction gamma d'Euler posséde la propriété suivante

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\Re(z) > 0).$$

On utilise cette relation pour prolonger la fonction gamma d'Euler sur le demi-plan $\Re(z) \leq 0$, on obtien alors

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} \;\left(\Re(z) > -n\,;\, n \in \mathbb{N}\,;\, z \notin \mathbb{Z}_0^- := \{..., -2, -1, 0\}\right).$$

Ici $(z)_n$ désigne le symbole de Pochhammer défini pour un complexe $z \in \mathbb{C}$ et un entier non-négatif $n \in \mathbb{N}_0$ par

$$(z)_0 = 1 \text{ et } (z)_n = z\;(z+1)\;...(z+n-1) \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Alors on déduit que

$$\Gamma(n+1) = (1)_n = n! \;(n \in \mathbb{N}_0)$$

avec $0! = 1$.

1.2.2 Fonction Bêta :

La fonction Bêta est donnée par

$$B(z,\omega) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}, \Re(z) > 0, \Re(\omega) > 0.$$

Remarque 1.2 :[7] La fontion Bêta est liée à la fonction Gamma comme suit :

$$B(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}, \Re(z) > 0, \Re(\omega) > 0.$$

1.3 Théorémes du point fixe :

Définition 1.7 : Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$ et $T : E \to E$ une application. Un élément x de E est dit point fixe de T si $T(x) = x$.

Définition 1.8 : **(application contractante)**[9] Soit $(M;d)$ un espace métrique complet et l'application $T : M \to M$, on dit que T est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments x ; y de M, l'inégalité

$$d(T(x), T(y)) \leq k\ (d(x,y))$$

Si $k \leq 1$, l'application T est appelée non expansive.

Si $k < 1$, l'application T est appelée contraction.

Définition 1.9 : Soit E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F . on dit que f complétement continue si elle est continue et transforme tout borné de E en un ensemble relativement compact dans F . f est dite compact si $f(E)$ est relativemant compact dans F.

Théorème 1.1 : **(théoreme du point fixe de Banach)**[6] Soit $(M;d)$ un espace métrique complet et soit $T : M \to M$ une application contractante avec la constante de contraction k, alors T a un unique point fixe $x \subset M$.

Remarque 1.3 : Si T est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées T^p est une contraction, alors T a un seul point fixe. En effet, soit x l'unique point fixe de T^p on a

$$T^p(T(x)) = T(T^p(x)) = T(x)$$

ce qui convient à dire que $T(x)$ est aussi un point fixe de T^p et grâce à l'unicité $T(x) = x$. Ce résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

Théorème1.2 : (théoreme du point fixe de Schaefer)$[2-8]$ Soient X un espace de Banach et $A : X \to X$ opérateur complétement continu.
Si l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{u \in X : \lambda Au = u, \ pour\ un\ certain\ \lambda\ \in]0,1[\}$$

est borné, alors A posséde au moins un point fixe.

Théorème 1.3 : (Krasnoselski)[10] Soit X un espase de Banach, soit $D \subset X$ un convexe fermé borné, et soit $A, B : D \to X$ tel que $Au + Bv \in D$ pour tout $(u,\ v) \in D$. Si A est une contraction et B est complètement continu, alors l'équation $Aw + Bw = w$ admet une solution w sur D.

Théorème 1.4 : (Krasnoselski-Schaefer-Dhage)[5] **:** Soit $(X, \|\|)$ espace de Banach et $A, B : X \to X$ deux applications tel que

i) B est un compact.

ii) A est une application linéaire borné et il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que A^p est une contraction non linéaire

$$\|A^p x - A^p y\| \leq \phi(\|x - y\|)$$

puis, soit équation

$$Bx + \lambda Ax = x$$

a une solution pour $\lambda = 1$, ou l'ensemble

$$\Sigma = \{x \in X,\ Ax + \lambda Bx = x,\ 0 < \lambda < 1\}$$

est non bornée.

Lemme 1.2 : (d'Ascoli Arzela) Soient k un espace compact $X = C(k)$ l'espace des fonctions continues dans k. un sous ensemble $F \subset X$ est relativement compact si et seulement s'il uniformement bornée et équicontinue.

Définition 1.10 : On dit que F un ensemble équicontinue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall f \in F$ et $\forall x_1, x_2 \in [a, b], |x_1 - x_2| < \delta$ on a $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

Définition 1.11 : On dit que F un ensemble uniformement bornée s'il existe une constante $M > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq M$, pour tout $f \in F$.

Définition 1.12 : l'application $B : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est appellée L^1-**Carathéodory** si :

i) $t \to B(t, x)$ est mésurable, $\forall x \in \mathbb{R}$

ii) $x \to B(t, x)$ est continue, a.e $t \in [0, 1]$

iii) $\forall r > 0, \exists h_r(t) \in L^1((0, 1), \mathbb{R})$ tel que $|B(t, x)| \leq h_r(t)$ a.e $t \in [0, 1]$, et $\forall x \in \mathbb{R}$ avec $|x| \leq r$.

1.4 Diverses approches de la dérivation fractionnaire :

1.4.1 Théorie de Riemann-Liouville :

Nous allons définir d'abord l'intégrale de Riemann-liouville. On peut commencer par examiner une formule (unique) qui donne des primitives successives d'une fonction continue par exemple

soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (ou à valeurs vectorielles) une fonction continue. Une primitive de f est donnée par

$$\left(I_a^1 f\right)(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Pour une primitive seconde on aura

$$\left(I_a^2 f\right)(x) = \int_a^x \left(\int_a^s f(t)\,dt\right) ds.$$

Par le théorème de Fubini l'intégrale double ce ramène à une intégrale simple

$$\left(I_a^2 f\right)(x) = \int_a^x (x-t)\, f(t)\,dt.$$

Puis une itération donne

$$\left(I_a^n f\right)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt.$$

Définition 1.12 : Soit $f \in L^1([a,b])$ et $\alpha > 0$. on appelle intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α l'intégrale suivant

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds$$

et l'intégrale

$$I_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds.$$

est appelé intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α.

Exemple 1.1 *Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$. alors*

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta\, dt.$$

En effectuent le changement de variable $t = a + (x-a)\tau$ et en utilisant la fonction

Bêta il résulte que

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta \, dt \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)},
\end{aligned}$$

Donc

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = (x-a)^{\beta+\alpha} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}.$$

Lemme 1.1 [4] *soit* $p, q \geq 0$, $f \in L^1([a,b])$, *alors l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe suivante*

$$I_a^p I_a^q f(t) = I_a^{p+q} f(t) = I_a^q I_a^p f(t).$$

1.4.2 Dérivée fractionnare au sens de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est la plus connue et la plus répandue ,cette définition est basée sur la primitive ou intégrale $k^{éme}$ d'une fonction qui peut naturellement s'étendre au réel β et lorsque ce réel est piégé entre $(n-1) < \alpha < n$ on l'appelle dans ce cas dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville .

une primitive $k^{éme}$ de $f(t)$ est donnée par

$$D_t^{-k} f(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{k-1} f(\tau) \, d\tau$$

s'etend naturellement aux réels $\beta > 0$, comme suit

$$D_t^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) \, d\tau$$

et la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ s'obtient on remplaçant $n - \alpha = -\beta$

$$D^{\alpha}_{RL} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \quad (n-1) < \alpha < n.$$

Exemple 1.2 *En général, la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville est ni nulle ni constante. A titre d'exemple si $p > 0$ est non entier alors*

$$D^{p}_{RL} C = \frac{C}{\Gamma(1-p)} (t-a)^{-p}$$

Considérons maintenant la fonction $f(t) = (t-a)^{\alpha}$, Soit $p \geq 0$ et $\alpha > -1$, alors on a :

$$D^{p}_{RL} (t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (t-a)^{\alpha}\, d\tau$$

il s'ensuit que si $p - \alpha \in \mathbb{N}^*$, alors

$$D^{p} f(t) = 0,$$

et si $p - \alpha \notin \mathbb{N}^*$, on trouve

$$D^{p}_{RL} f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p}$$

1.4.3 Dérivée fractionnaire au sens du Caputo

Beaucoup de problèmes concrets utilisent les dérivées fractionnaires essujetties à des conditions initiales plus au moins naturelles. Malheureusement, l'approche de Riemann-Liouville méne à des conditions initiales contenant des valeurs limites de dérivées fractionnaires au sens de Reimann-Liouville en la borne inférieure $t = a$. malgré la possibilité de résoudre mathématiquement avec de telle condition initiales, leurs solutions ne sont pas encore bien comprises, puisque il n'y a pas d'interprétation physique adéquate de tel type de conditions initiales. En 1964 M. Caputo proposa un concept modifié de la dérivation fractionnaire, qui prévoit la formulatoin des conditions initiales sous forme qui fait apparaitre seulement les valeures limites des dérivées d'ordre entier en la borne inférieure (l'instant initial) $t = a$ comme $f(a), f'(a), f''(a), ...$

Définition 1.13 : Soit $\alpha \geq 0$ tel que $n = [\alpha] + 1$. la dérivée fractionnaire à gauche au sens de Caputo d'ordre $\alpha \geq 0$ sur $[a, b]$, est défini par

$$^{c}D_{a+}^{\alpha} f(t) = D^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^{k}\right]$$

où $n = [\alpha] + 1$, pour $\alpha \notin \mathbb{N}, n = \alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.3 *Soit $\alpha > 0$ tel que $n - 1 \leq \alpha < n$ et soit $f(t) = (t-a)^{\beta}$ avec $\beta > -1$, alors on a*

$$^{c}D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds.$$

Si $\beta \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ alors

$$^{c}D_{a+}^{\alpha} f(t) = 0.$$

Si $\beta > n - 1$, alors

$$f^{(n)}(s) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(s-a)^{\beta-n}$$

En effectuant le changement de variable $s = a + \tau(t-a), (0 \leq \tau \leq 1)$ on aura

$$\begin{aligned}
^{c}D_{a+}^{\alpha} f(t) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \int_{0}^{1} (1-\tau)^{n-\alpha-1} \tau^{\beta-n} d\tau \\
&= \frac{B(n-\alpha, \beta-n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Contrairement à a dérivées de Riemann-Liouville, la dérivées fractionnaire d Caputo *d'une fonction constante et nulle*

$$^{c}D_{a+}^{\alpha}C = 0.$$

Théorème1.6 :[3] Soit $\alpha \geq 0, n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^{n}[a,b]$, la dérivées fractionnaire au sens du Caputo existe presque partout sur $[a,b]$.

a) si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors

$$^{c}D_{a+}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}\frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}ds$$

b) si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$^{c}D_{a+}^{\alpha}f(t) = f^{(n)}(t).$$

En particulier

$$^{c}D_{a+}^{0}f(t) = f(t).$$

Propriétés :

Nous présentons maintenant quelques propriétés de l'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville et Caputo.

Lemme 1.2 [3] *Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^{n}[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire $D^{\alpha}f$ existe presque partout sur $[a,b]$; en plus, elle est donnée par*

$$D_{RL}^{\alpha}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{(1+k-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}\frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}ds.$$

La dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est linéaire comme c'est le cas de la dérivation usuelle.

Lemme 1.3 [3] *Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^{1}([a,b])$, alors on a :*

$$D_{RLa}^{\alpha}I_{a}^{\alpha}f(t) = f(t), \forall t \in [a,b].$$

Ce qui signifie que l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est l'inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire.

En générale on a

$$D^{\alpha}_{RLa} I^{\beta}_{a} f(t) = I^{\beta-\alpha}_{a} f(t), \forall t \in [a, b],$$

si $\beta - \alpha > 0$ *et*

$$D^{\alpha}_{RLa} I^{\beta}_{a} f(t) = I^{\alpha-\beta}_{a} f(t), \forall t \in [a, b],$$

pour $\beta - \alpha < 0$.

Théorème1.7 :[3] Soient $\alpha, \beta > 0$, tels que $n - 1 \leq \alpha < n$ et $m - 1 \leq \beta < m\,(n, m \in \mathbb{N}^*)$, Alors on a

1. Si $f \in L^1([a, b])$ et $I^{n-\alpha}_{a} f \in AC^n[a, b]$, alors l'égalité

$$I^{\alpha}_{a} D^{\alpha}_{RL} f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{D^{n-k}\left[I^{n-\alpha}_{a} f\right](a)}{\Gamma(1 - k + \alpha)} (t - a)^{\alpha-k}.$$

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, si les dériveés fractionnaires $D^{\alpha}_{a} f$ et $D^{\alpha+k}_{a} f$ existent, alors

$$D^{k}_{RL}(D^{\alpha} f(t)) = D^{\alpha+k} f(t), \forall t \in [a, b].$$

3. Pour $f \in L^1([a, b])$, si $I^{m-\alpha}_{a} f \in AC^m[a, b]$ et $\alpha + \beta < n$, alors on a

$$D^{\alpha}_{RLa}\left(D^{\beta} f(t)\right) = \left(D^{\alpha+\beta} f\right)(t) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\left(D^{\beta-k} f\right)(a)}{\Gamma(1 - k + \alpha)} (t - a)^{-\alpha-k}, \forall t \in [a, b].$$

Lemme 1.4 [3] *Soit* $\beta > \alpha > 0$,*alors pour toute* $f \in L^1([a, b])$, *on a :*

$${}^{c}D^{\alpha}_{a+} I^{\beta}_{a+} f(t) = I^{\beta-\alpha}_{0+} f(t).$$

ainsi

$${}^{c}D^{\alpha}_{a+} I^{\alpha}_{a+} f(t) = f(t), \forall t \in [a, b]$$

Théorème 1.8 :[3] Soit $\alpha > 0$ si $f \in AC^n([a,b])$, alors on a

$$I_{a+}^{\alpha c}D^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$$

Lemme 1.5 [3] *Soit $\alpha, \beta > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, ainsi les relations suivantes sont vérifiées :*

$$^{c}D_{a+}^{\alpha} t^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha-1}, \beta > n$$

et

$$^{c}D_{a+}^{\alpha} t^{k} = 0, k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Lemme 1.6 [3] *Soit $\alpha > 0$ et $g(t) \in C([a,b])$, alors l'equation differentielle fractionnaire $^{c}D_{a+}^{\alpha} g(t) = 0$ admet la solution*

$$g(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + ... + c_n t^{n-1}.$$

où $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, ..., n,$ et $n = [\alpha] + 1$.

Chapitre 2

Existence de la solution d'une équation intégro-differentiel d'ordre fractionnel avec retard

Dans ce chapitre on est consernée par l'application du théorème de (Krasnosilski-Scheafer-Dhage) pour démontrer la souvabilité du problème fractionnaire intégro-différentiel suivant :

$$^{c}D^{q}x\left(t\right)=f\left(t;x\left(t-\tau\right)\right)+I^{r}g\left(t;x\left(t\right)\right),t\in\left[0,1\right] \tag{1}$$

$$x\left(t\right)=\varphi\left(t\right),t\in\left[-\tau,0\right],\tau\geq0$$

où $^{c}D^{q}$ est la dérivée fractionnaire du Caputo d'ordre $q, f, g : [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont deux fonctions, $1<q\leq2$ et $0<r<1$.

Apartir de lemmes (1.3) et théorème (1.8) on déduire que la solution $x\left(t\right)$ du problème

(1) est

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(0) + Bt + I^q f(t, x(t-\tau)) + I^{q+r} g(t, x(t)) \\ &= \varphi(0) + Bt + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s-\tau))\, ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q+r)} \int_0^t (t-s)^{q+r-1} g(s, x(s)) \end{aligned} \tag{2}$$

pour $t \in [0,1]$ et $x(t) = \varphi(t)$ pour $t \in [-\tau, 0]$, où $B \in \mathbb{R}$.

On note par $BM([0,1], \mathbb{R})$, espace de Banach des fonctions mésurable bornée $[0,1] \to \mathbb{R}$ munni avec la norme définée par $\|x\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$.

aussi par $L^1([0,1], \mathbb{R})$ on note l'espace de Banach des fonctions mésurable $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ intégrale du Lebesgue et normée par $\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|\, dt$.

on suppose que g est continue Lipschitizienne avec L_g une constante Lipschitizienne.

On définée les opérateures A et B par :

$$\begin{aligned} Ax(t) &= \varphi(0) + Bt + \frac{1}{\Gamma(q+r)} \int_0^t (t-s)^{q+r-1} g(s, x(s)) \\ B(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s-\tau))\, ds \end{aligned}$$

Lemme 2.1 *: il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que A^p est une contraction nonlineaire nonbornée.*

Preuve. il est facile de voire que

$$|Ax(t) - Ay(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(q+r)} \int_0^t (t-s)^{q+r-1} |g(s, x(s)) - g(s, y(s))|\, ds$$

comme g est Lipschitizienne

$$|Ax(t) - Ay(t)| \leq \frac{L_g}{\Gamma(q+r)} \int_0^t (t-s)^{q+r-1} |x(s) - y(s)|\, ds$$

on prend $s\prime = t - s$, et $s = t - s\prime$, $ds = -ds\prime$

si $s=0 \Longrightarrow s\prime = t$,et si $s=t \Longrightarrow s\prime = 0$

$$\begin{aligned} |Ax(t) - Ay(t)| &\leq \frac{L_g}{\Gamma(q+r)} \|x-y\| \int_0^t s\prime^{q+r-1} ds \\ &\leq \frac{L_g}{(q+r)\Gamma(q+r)} \|x-y\| = \frac{L_g}{\Gamma(q+r+1)} \|x-y\| \end{aligned} \quad (3)$$

alors

$$\|Ax - Ay\| = \frac{L_g}{\Gamma(q+r+1)} \|x-y\|$$

on étulise

$$\begin{aligned} \left|A^2x(t) - A^2y(t)\right| &= |A(Ax(t)) - A(Ay(t))| \\ &\leq \int_0^t \frac{L_g}{\Gamma(q+r+1)} \int_0^s (s-\tau)^{q-1} \|x-y\| \, d\tau ds \\ &\leq \left[\frac{L_g}{\Gamma(q+r+1)}\right]^2 \times \frac{1}{2!} \|x-y\| \end{aligned}$$

par induction, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} : |A^n x(t) - A^n y(t)| \leq \frac{\left[\frac{L_g}{\Gamma(q+r+1)}\right]^n}{n!} \|x-y\|$$

comme depuis A^p est une contraction nonlinéaire.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left[\frac{L_g}{\Gamma(q+r+1)}\right]^n}{n!} = 0$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq p \ , \ \frac{\left(\frac{L_g}{\Gamma(q+r+1)}\right)^p}{p!} < \epsilon$

pour $\epsilon = 1$,

$$\frac{\left[\frac{L_g}{\Gamma(q+r+1)}\right]^p}{p!} < 1.$$

alors A^p est une contraction nonlinéaire. ■

maintenant on va démontrer que B est un opérateur compact. on suppose que

H1) f est L^1-Carathéodory.

H2) il existe $\phi \in L^1(J, \mathbb{R})$, et $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante continue tel que

$$|f(t,x)| \leq \phi(t)\,\psi(|x|) \text{ i.e } t \in J = [-\tau, 1] \text{ et } \int_{M_0}^{\infty} \frac{ds}{s + \psi(s)} > M_2$$

où $M_0 = \max_J |\phi(0) + Bt|$, et $M_2 = \max\left\{\frac{\max_J (t-s)^{q+r-1} M_1}{\Gamma(q+r)}, \frac{\max_J (t-s)^{q-1} \|\phi\|_1}{\Gamma(q)}\right\}$.

H3) $|g(t, x(t))| \leq M_1 |x(t)|$ pour certein $M_1 > 0$.

Lemme 2.2 *suppose que **(H1)-(H3)** sont satisfié , alors B est un opérateur compact.*

Preuve. : il est facile de vérifier que B est une application continue, considérons la suite $\{x_n\} \subset BM(J, \mathbb{R})$ tel que $\|x_n\| \leq r$ pour certain $r > 0$, il résulte

$$\|Bx_n\| \leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} |f(s, x(s-\tau))|\, ds$$

comme $q - 1 > 0$,$\max |E - r|^{q-1} = c > 0$, $c = \|h_r\|_1$

$$\|Bx_n\| \leq \frac{\max_{t,s\in J}(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \|h_r\|_1$$

par conséquent, l'ensemble $\{Bx_n, n \in \mathbb{N}\}$ est uniformement borné. $\{Bx_n, n \in \mathbb{N}\}$ est equicontinue, en fait, on pose $t_1 \leq t_2 \leq 1$ ensuite on a

$$
\begin{aligned}
\left|Bx_n(t_2) - Bx_n(t_1)\right| &\le \frac{1}{\Gamma(q)}\left|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{q-1} f(s,x_n(s-\tau))\,ds - \int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1} f(s,x_n(s-\right. \\
&\le \frac{1}{\Gamma(q)}\left|\begin{array}{r} \int_0^{t_1}(t_2-s)^{q-1} f(s,x_n(s-\tau))\,ds + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1} f(s,x_n(s-\right. \\ - \int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1} f(s;x_n(s-\tau))\,ds \end{array}\right. \\
&\le \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{t_1}\left|(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\right|\left|f(s,x_n(s-\tau))\,ds\right| \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_1}^{t_2}\left|(t_2-s)^{q-1}\right|\left|f(s,x_n(s-\tau))\,ds\right| \\
&\le \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{t_1}\left|(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\right| h_r(s)\,ds \\
&\quad +\frac{\max_{t_2,s\in J}(t_2-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\left(H_r(t_2)-H_r(t_1)\right).
\end{aligned}
$$

où $H_r(t) = \int_0^t h_r(s)\,ds$. noter que le côté droit de (4) ne dépend pas x et H_r est fonction absolument continue depuis $h_r \in L^1(0,1)$. laisser $t_1 \to t_2$ dans (4). alors $|Bx_n(t_2) - Bx_n(t_1)|$ tend vers 0 par conséquent $\{Bx_n, n \in \mathbb{N}\}$ est equicontinue . D'aprés le théorème de (Arzela-ascoli) on déduire que B est compact. ■

Remarque 2.1 *Notez que $x(t)$ est une solution du problème (1) si et seulement si $x(t)$ est un point fixe de l'opérateur $A+B$.*

Maintenant, on applique Krasnoselski Schaefer Dhage alternative à prouver que le problème (1) a au moins une solution.

Théorème 2.1 : sous les hypothèse du lemmes $[1-2]$, le problème (1) a au moins une solution.

Preuve : En vue de théorème (1.4) ,et lemmes (2.1) (2.2) , on déduire que $x(t)$ est une solution du problème (1) si l'ensemble $\Sigma = \{x \in X, Ax + \lambda Bx = x, 0 < \lambda < 1\}$ est borné. en effet, soit x un élément quelconque de Σ i.e

$$x(t) = \varphi(0) + Bt + \frac{1}{\Gamma(q+r)} \int_0^t (t-s)^{q+r-1} g(s; x(s))\, ds$$
$$+\frac{\lambda}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s-\tau))\, ds, 0 < \lambda < 1$$

Alors

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |\varphi(0) + Bt| + \frac{1}{\Gamma(q+r)} \int_0^t (t-s)^{q+r-1} |g(s; x(s))|\, ds \\ &+\frac{\lambda}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} |f(s, x(s-\tau))|\, ds \end{aligned}$$

Soit $t^* \in [0, t]$ tel que

$$W(t) = \max_{[0,t]} |x(s)| = |x(t^*)|.$$

il est facile de vérifier que

$$x(t) \leq W(t), \forall t \in J$$

De l'inégalité ci-dessus, nous avons

$$
\begin{aligned}
W(t) &= |x(t^*)| \leq |\varphi(0) + Bt| + \frac{1}{\Gamma(q+r)} \int_0^{t^*} (t-s)^{q+r-1} |g(s, x(s))| \, ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t^*} (t-s)^{q-1} |f(s, x(s-\tau))| \, ds \\
&\leq M_0 + \frac{\max_J (t-s)^{q+r-1}}{\Gamma(q+r)} M_1 \int_0^t |x(s)| \, ds \\
&\quad + \frac{\max_J (t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_0^t \phi(s) \psi(W(s)) \, ds \\
&\leq M_0 + \frac{\max_J (t-s)^{q+r-1}}{\Gamma(q+r)} M_1 \int_0^t W(s) \, ds \\
&\quad + \frac{\max_J (t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \|\phi\|_1 \int_0^t \psi(W(s)) \, ds \\
&\leq M_0 + M_2 \int_0^t [W(s) + \psi(W(s))] \, ds
\end{aligned}
$$

où $M_2 = \max\left\{ \frac{\max_J (t-s)^{q+r-1} M_1}{\Gamma(q+r)}, \frac{\max_J (t-s)^{q-1} \|\phi\|_1}{\Gamma(q)} \right\}$.

On pose

$$v(t) = M_0 + M_2 \int_0^t [W(s) + \psi(W(s))] \, ds$$

Alors $v(0) = M_0, W(t) \leq v(t), \forall t \in J$ et $v\prime(t) = M_2 [W(t) + \psi(W(t))] \leq M_2 [v(t) + \psi(v(t)$

par conséquent

$$\int_0^t \frac{v\prime(s)}{v(s) + \psi(v(s))} ds \leq M_2$$

cela implique

$$\int_{M_0}^{v(t)} \frac{ds}{s + \psi(s)} ds \leq M_2, \forall t \in J$$

alors, si $\max_J v(t) = +\infty$, on a

$$\int_{M_0}^{\infty} \frac{ds}{s + \psi(s)} ds \leq M_2$$

Cela contredit le fait que

$$\int_{M_0}^{\infty} \frac{ds}{s+\psi(s)} ds > M_2 \text{ (voire l'hypothése } \mathbf{H2}\text{)}$$

ce qui nous permet de conclure qu'il existe $C > 0$ tel que

$$|x(t)| \leq v(t) \leq C, \forall t \in J$$

i.e

$$\exists C > 0, \|x\| \leq C$$

Par conséquent, l'équation (1) comporte au moins une solution.

Bibliographie

[1] **A. Chaoui and A. Guezane-Lakoud, Solution to an integrodifferential equation with integral condition, applied Mathematics and Computation. 266(2015) 903-908.**

[2] **A. Granas** and **J. Dugundji,** Fixed point theory Sringer-Verlas, New York 2003.

[3] **A.Kilbas, Hari M., Srivastava, Juan J. Trujillo,** Theory and applications of fractional differential equations, in North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier Science B.V. Amsterdam.

[4] **B.Ahmed, s. k. Ntouyas, Jessada Tariboon,** A study of mixed Hadamard and Riemann-Liouville fractional integro-differential inclusions via end point theory, applied Mathematics Letters, 52 (2016) 9-14.

[5] **Dhage b. c.** On a fixed point Krasnoselski-Schaefer type, E. J. Q. T. D. E, No6(2002), 1-9.

[6] **D. R. Smart,** fixed point theory, Combridge Uni. Press, Combridge 1974

[7] **Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger F.,** and **Tricomi, F.,** Higher Transcendental Function, vol I-III, Kriger Pub, Melbourne, Florida 1981..

[8] **J.K Hale and S.Verduyn Lunel,** introduction to fractional sciences 99, Springer-VERlag New York, 1993.

[9] **K. Belakroum,** Existance et positivité du la solution d'un problème aux limites fractionnaircs (2013).

[10] **R. P. Agarwal, Y. Zhou and Y. He Agarwal, Y. He,** Existence of fractional nentral functional differential equation, comput, Math. appel 59(3)(2010),1095-1100.