République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématique Appliqué**

Par :

Mr. Ahmed Moustapha Senoussi

Intitulé

Stabilité des systèmes différentiels en utilisant Les fonctions de Lyapunov

Dirigé par :

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.BADI Sabrina	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.BOUATTIA Yassine	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.OUNESSE Nawel	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2016

Remerciement

Nous remercions d'abord le bon dieu, pour le courage qu'il nous 'a donné pour surmonter toutes les difficultés durant nos années d'étude.

Nous faillirons à la tradition si nous n'exprimions pas ici notre, gratitude envers tous ceux qui ont collaborés de près ou de loin à l'exécution de ce mémoire:

Nous remercions très vivement notre encadreur ***Mr.Yassin Bouatia***

Nous vous exprimons nos vives reconnaissances et immenses gratitudes pour votre aide précieux et claire lors de l'élaboration de ce travail.

Nous admirons sincèrement votre dévouement et votre sens de la recherche.

Nous remercions notre jury, et tous les professeurs et tous les travailleurs de département de Mathématique.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mes parents

A mes chers frères

Très chers amis, Classe de Mathématique Applique, pour leur soutien et leurs sacrifices.

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour la réalisation de ce travail.

Ahmed Moustapha Senoussi

Sommairpe

Chapitre I

Notions préliminaires

0.1 Introduction

Un système dynamique consiste en un ensemble d'états possibles, avec une loi qui détermine de façon unique l'état présent du système en fonction de ses états passés. Aucun élément aléatoire n'est admis dans notre définition d'un système dynamique déterministe. Par exemple, un modèle possible pour déterminer le prix de l'or en fonction du temps serait de dire que le prix du jour est celui de la veille plus ou moins un dollar, avec les deux possibilités équiprobables. Au lieu d'être appelé système dynamique, un tel modèle est souvent appelé un processus aléatoire ou stochastique. Une réalisation typique d'un tel modèle pourrait être de jouer à pile ou face chaque jour pour déterminer le nouveau prix. Ce type de modèle n'est pas déterministe, et est rejeté de notre définition de système dynamique.

Ce mémoire comporte trois chapitres :

Le premier chapitre est un rappel des notions générales. Nous commençons par définir les systèmes dynamiques, les points d'équilibres et le système linéarisé d'un système non linéaire. au voisinage d'un point d'équilibre. Dans le chapitre deux Nous introduisons la définition de la stabilité avec quelques exemples. Dans le chapitre trois Nous donnons des théorèmes sur la stabilité des points d'équilibres Avec quelques exemples en se basant sur les fonctions de Lyapunov.

Notions préliminaires

Génialité sur les Systèmes dynamiques

Ce chapitre a essentiellement pour objectif de présenter quelques rappels sur les systèmes dynamiques.

Résumé

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions générales. Nous commençons par définir
Les systèmes dynamiques, les points critiques et le système linéarisé d'un système non
Linéaire au voisinage d'un point d'équilibre. Ensuite nous introduisons la notion d'un
Cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite d'un système planaire. Puis nous présentons
Une règle de la symétrie classique. Nous introduisons la stabilité d'une solution d'un
Système différentiel et quelques théorèmes sur la stabilité en se basant sur les tonctions
deLyapunov. Enfin on définit la bifurcation de Hopf et la bifurcation nœud selle.

1.1 Systèmes dynamiques, points critiques

Définition 1.1.1: Un système dynamique U sur $\mathbb{R}^n$ est une application

$$U: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ telle que:

1. $U(.,x)$:$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ continue
2. $U(t,.)$:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continue
3. $U(0,x) = x$
4. $U(s+t,x) = U\big(t, U(s,x)\big)\ tq\ s,t \in \mathbb{R}^+;\ x \in \mathbb{R}^n$

Exemple.

Soit le système linéaire:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n \textbf{(1.1)}$$

où A est une matrice constante. La solution de (1.1) est :

$$x(t) = x_0 e^{At}$$

Le système **(1.1)** engendre un système dynamique, car l'application :

$$U: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

qui à tout $t \in \mathbb{R}^+, x_0 \in \mathbb{R}^n$ associe :

$$U(t,x) = x_0 e^{At}$$

Vérifie les quatre propriétés précédentes.

Définition 1.1.2 : Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \qquad \textbf{(1.3)}$$

On appelle point critique ou point d'équilibre du système **(1.3)**, le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$f(x_0) = 0$$

Définition 1.1.3 : Considérons le système **(1.3)**. Le système:

$$\dot{x} = Ax$$

où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right) = Df(x_0)\,,\ 1 \le i, j \le n$$

et $f(x_0) = 0$ est appelé linéarisation de **(1.3)** en x_0.

Définition 1.1.4: On appelle point critique hyperbolique de **(1.3)**, le point x_0 telle que A n'a aucune valeur propre avec une partie réelle nulle.

1.1 Classification des points d'équilibre:

Cas des systèmes linéaires

Considérons le système linéaire:

$$\dot{x} = Ax \qquad \textbf{(1.4)}$$

où $x = (x_1,...,x_n)$ et A une matrice constante inversible. Soient $\lambda_1,...,\lambda_n$ les valeurs propres de A.

Définition 1.2.1 :

- Si les valeurs propres $\lambda_1,...,\lambda_n$ sont réelles et du même signe, la solution $x = 0$ est appelée nœud.

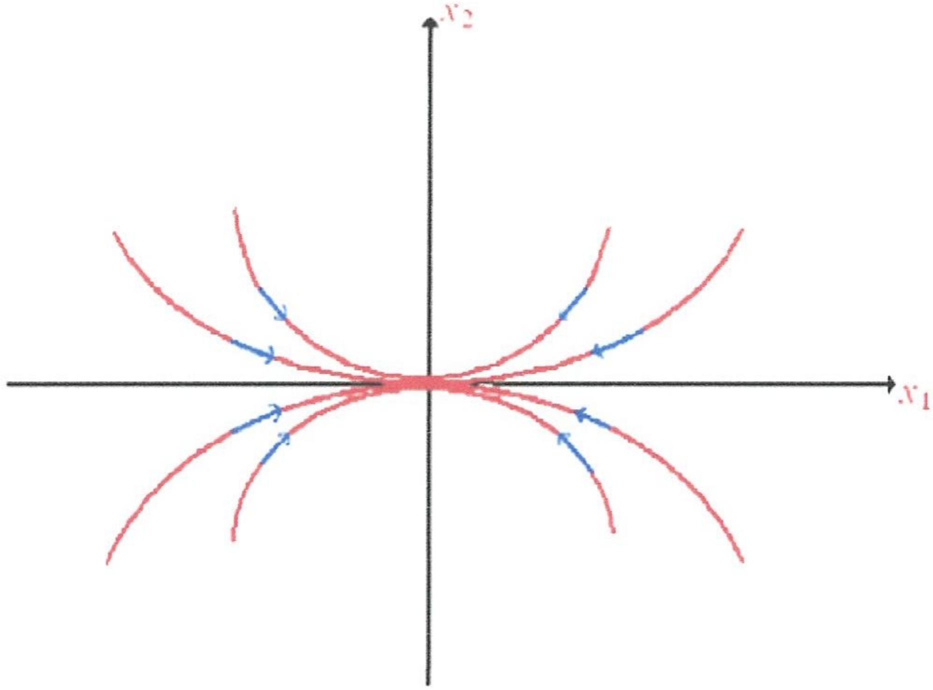


Fig 1.1 Nœud stable (n=2).

- Si les valeurs propres $\lambda_1,...,\lambda_n$ sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution $x=0$ est appelée selle.

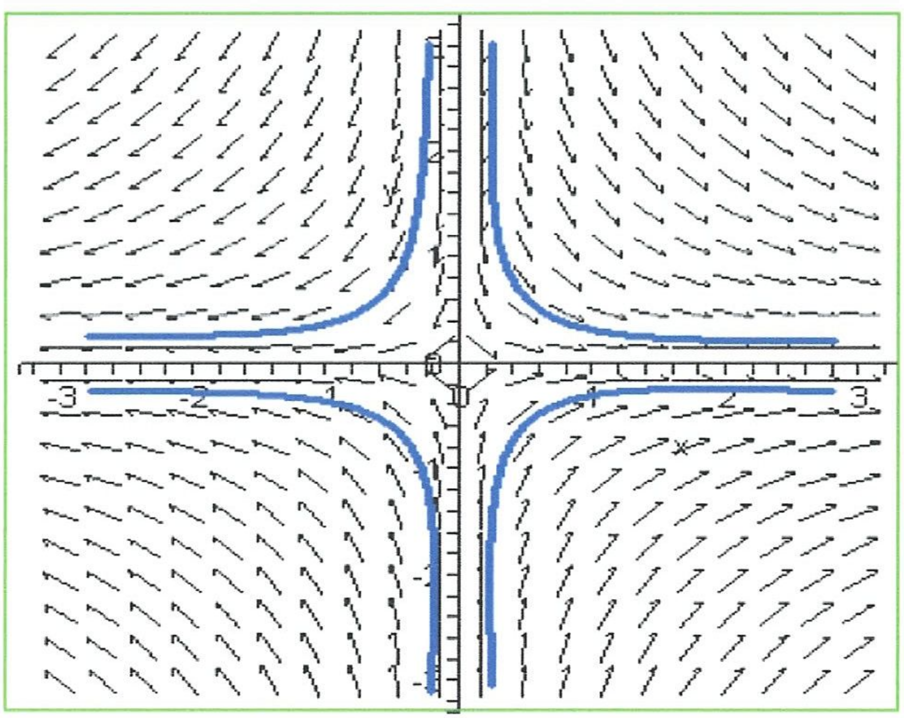


Fig 1.2- point selle (n=2).

- Si les valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont complexes avec $\mathrm{Im}(\lambda_i) \neq 0, i = 1,\ldots,n$ la solution $x = 0$ est appelée foyer.

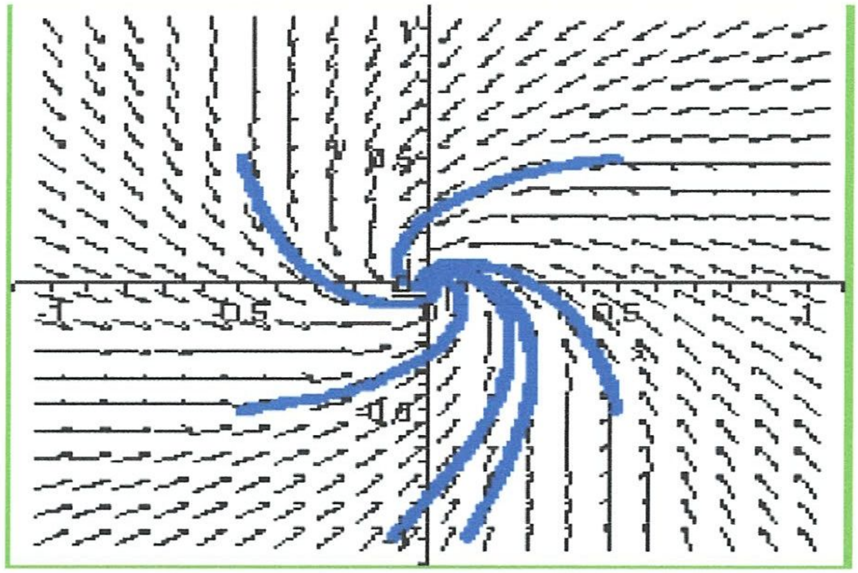


Fig 1.3- Foyer stable (n=2).

- Si les valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont complexes avec $\Re e(\lambda_i) = 0$ et $\Im m(\lambda_i) \neq 0, i = 1,\ldots,n$ la solution $x = 0$ est appelée centre.

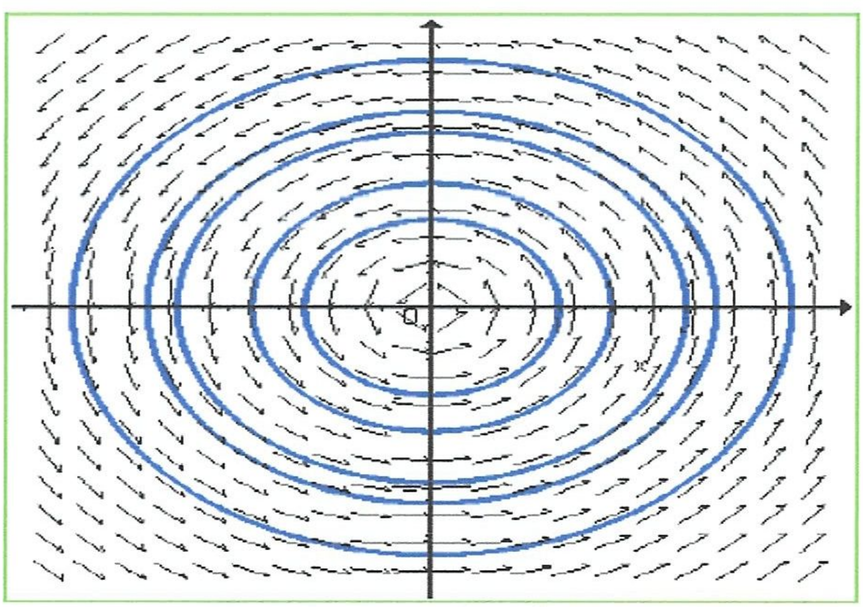


Fig 1.4- Centre (n=2).

Cas des systèmes non linéaires

Considérons maintenant le système non-linéaire :

$$\dot{x} = f(x) \qquad \textbf{(1.5)}$$

où

$$x = (x_1,\dots,x_n),\ f = (f_1,\dots,f_n)$$

Définition 1.2.2 :

Un point critique x_0 de **(1.5)** est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives; Il est appelé source si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles positives; il est appelé selle s'il est hyperbolique et si $A = Df(x_0)$ a au moins une valeur propre avecune partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.

Définition 1.2.3: Deux systèmes planaires :

$$\dot{x} = f(x) \qquad \textbf{(1.6)}$$

et

$$\dot{x} = g(x) \qquad \textbf{(1.7)}$$

définis sur deux ouverts U et V respectivement, sont topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme $h : U \to V$ tel que h transforme les orbites de **(1.6)** en celles de **(1.7)** et préserve le sens du mouvement.

Théorème : Si x_0 est un point d'équilibre hyperbolique de **(1.5)**, alors il existe un voisinage de ce point dans lequel le système $\dot{x} = f(x)$ est topologiquement équivalent à son linéarisé $\dot{x} = Ax$.

1.2 Portrait de phase et cycles limites:

Définition 1.3.1: Soit le système planaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \qquad \textbf{(1.8)}$$

où P, Q sont des polynômes en x et y. Les solutions $(x(t), y(t))$ du système **(1.8)** représentent dans le plan (x, y) de courbes appelées orbites. Les points critiques de ce systèmesont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi queces points critiques représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase, et le plan (x, y) est appelé plan de phase.

Définition 1.3.2 : Une solution périodique du système **(1.8)** est une solution telle que:

$$(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t)) \text{ Pour } T \geq 0$$

A toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phases.

Définition 1.3.3: Un cycle limite du système **(1.8)** est une orbite fermée isolée, c'està dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.

Définition 1.3.4: L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable x sur le cycle limite.

1.2 Symétrie classique:

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y + P(x, y) \\ \dot{y} = -x + Q(x, y) \end{cases} \textbf{(1.9)}$$

tel que le point d'équilibre $(0,0)$ est un centre pour le **S.L** (système linéarisé) de **(1.9).**

Si

$$P(x,-y)=-P(x,y) \text{ et } Q(x,-y)=Q(x,y)$$

ou

$$P(-x,y)=P(x,y) \text{ et } Q(-x,y)=-Q(x,y)$$

alors, l'origine est un centre pour **(1.9)** .

Exemple:

On pose:

$$P(x,y)=0\,,\, Q(x,y)=\varepsilon f(x)y\,;$$

Donc **(1.9)** devient:

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-x+\varepsilon f(x)y\end{cases} \qquad \textbf{(1.10)}$$

le **S.L** de (1.10) est :

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & \varepsilon f(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Si est une fonction impaire alors, le **S.L** devient :

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$(0,0)$ est un centre pour le **S.L** et puisque $P(-x,y)=P(x,y)$ et $Q(-x,y)=-Q(x,y)$

alors $(0,0)$ est un centre pour le **S.N.L (1.10)** donc il n'existe pas des cycles limites.

Si est une fonction impaire alors le point $(0,0)$ est un foyer pour le **S.N.L (1.10)** avec:

$$\varepsilon^2 f^2(x)-4<0\,.$$

Chapitre II
Stabilité des systèmes autonomes et non autonomes

1.1 Introduction

Ce premier chapitre

Rappeler quelques notions fondamentales, qui seront le plus souvent citées dans les différentes

études de cette thèse. On introduira dans ces rappels des définitions concernant:

- La stabilité d'un système continu de dimension finie décrit par une équation différentielle

Vectorielle non-linéaire du premier ordre. Ainsi des définitions sur la fonction de

Lyapunov et la stabilité au sens de Lyapunov.

- Stabilité des systèmes linéaires.

- L'étude qualitative au voisinage d'un point singulier des trajectoires d'un système

différentiel autonome dans le cas linéaire. On rappelle une classification des trajectoires

au voisinage d'un point singulier.

Stabilité des systèmes autonomes et non autonomes

Définition.

Considérons le système de n équations différentielles du 1[er] ordre

$$\dot{x} = \frac{df}{dt} = f(t,x) \text{ , avec } x = (x_1,\dots,x_n),\ f = (f_1,\dots,f_n)$$

On suppose les f_i sont de classe C^n $(n \geq 1)$ en x et t

Le système $\dot{x} = f(t,x)$ est dite Non autonome lorsque la variable indépendant de t apparait explicitement dans l'expression de f Dans le cas contraire il est dit autonome

$$\dot{x} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

La solution de système $\dot{x} = f(x)$ avec le condition initiale $x(t_0, x_0)$ sera notée $x(t, x_0)$ elle décrit dans l'espace de phases $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une courbe appelé trajectoire

<u>Exemple</u>

On considère le deux systèmes différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ x(t_0) = 1, y(t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{........ } \mathbf{(2.1)}, \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + t \\ x(t_0) = 1, y(t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{........ } \mathbf{(2.2)}$$

$$\mathbf{(2.1)} \Leftrightarrow \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \qquad C_1, C_2 \text{ deux constantes}$$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos t - C_2 \sin t \\ y(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{cases}$$

Solution générale du système **(2.1)**

$$\begin{cases} x(t_0) = C_1 \cos t - C_2 \sin t = 1 \\ y(t_0) = C_1 \sin t + C_2 \cos t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}\cos t_0 & -\sin t_0\\ \sin t_0 & \cos t_0\end{vmatrix}=1\Rightarrow\begin{cases}C_1=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & -\sin t_0\\ 0 & \cos t_0\end{vmatrix}}{1}=\cos t_0\\ C_2=\dfrac{\begin{vmatrix}\cos t_0 & 1\\ \sin t_0 & 0\end{vmatrix}}{1}=-\sin t_0\end{cases}$$

donc le problème **(2.1)** admet l'unique solution

$$\begin{cases}x(t_0)=\cos t_0\cos t+\sin t_0\sin t=\cos(t-t_0)\\ y(t_0)=\cos t_0\sin t-\sin t_0\cos t=-\sin(t-t_0)\end{cases}$$

Flots:

Considérons le système différentiel autonome

$$\textbf{(2.3)}\quad \dot{x}=f(x), x\in\mathbb{R}^n, f\in C^n(U), U\subset\mathbb{R}^n$$

Définition: Soit $x(t,x_0)$ une solution de **(2.3)** qui vérifié la condition initiale $x(0)=x_0$. On appelle flot du système (c) l'application

$$\Phi_t\colon I(x_0)\longrightarrow\mathbb{R}^n, x_0\longrightarrow\Phi_t(x_0)=x(t,x_0)$$

Où $I(x_0)$ est l'intervalle maximale d'existence de la solution $\Phi_t(x_0)$ possède les propriétés suivantes :

1. $\Phi_t(x_0)$ est de classe C^r
2. $\Phi_t(x_0)=x_0$
3. $\Phi_{t+S}(x_0)=\Phi_t(\Phi_s(x_0)$

Exemple

Considérons le système

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax\\ x(0)=x_0\end{cases}, A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$ la solution de ce problème

Le flot de ce système est $\Phi_t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, x_0 \longrightarrow \Phi_t(x_0)$

$$= x(t, x_0) = x_0 \exp^{At}$$

Remarque: la famille d'application Φ_t est aussi appelée un semi-groupe.

Définition 1: un ensemble $\omega \in \mathbb{R}^n$ est dite variété invariante du système $\dot{x} = f(x)$

$$\text{si } \Phi_t(\omega) \subset \omega \Leftrightarrow \forall x \in \omega : \Phi_t(x) \in \omega$$

Stabilité:

Soit le système des équations :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+ \qquad \textbf{(1.11)}$$

On suppose que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solutions.

Définition 2 : Une solution $\Phi(t)$ du système **(1.11)** tell que $\Phi(t_0) = \Phi_0$ est dite stable au sens de Lyapunov si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ de **(1.11)** tell que pour toute solution $x(t)$ de **(1.11)** qui vérifié

$$x(t_0) = x_0 \text{ et } \|x(t_0) - \Phi(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \Phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

Si en plus de cette définition on a

$$\lim \|x(t) - \Phi(t)\| = 0 \text{ Lorsque } t \to +\infty$$

Alors la solution est dite asymptotiquement stable.

Exemple: En partout de la définition de la stabilité au sens de Lyapunov étudier la stabilité la solution de l'eqt:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + t + 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Cherchons $\Phi(t)$ vérifier $\Phi(0) = 0$

$$\dot{x} = x + t + 1 \Leftrightarrow \dot{x} + x = t + 1$$

La solution générale $x(t) = x_{GH}(t) + x_p(t)$

$$x_{GH}(t) = C\exp^{-t}, C = cte$$

$$x_p(t) = C(t)\exp^{-t}, C(t) = t\exp^{t}$$

$$x_p(t) = t \text{, alors}$$

$$\Phi(t) = x_{GH} + x_P = C\exp^{-t} + t$$

avec $x(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$\Phi(t) = t$ Étudions la stabilité:

$$\begin{cases} x(t) = C\exp^{-t} + t \\ x(0) = 0 \end{cases}, \Rightarrow C = x_0$$

alors

$$x(t) = x_0 \exp^{-t} + t$$

$$\Phi(t) = t \text{ est stable si } \forall \varepsilon \geq 0, \exists \eta \geq 0 : \ \|x(t_0) - \Phi(t_0)\| < \eta \Rightarrow \|x(t) - \Phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

$$\|x_0 - 0\| < \eta \Rightarrow \left\|\left(x_0 \exp^{-t} + t\right) - t\right\| < \varepsilon, \forall t > t_0$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé

$$\left\|\left(x_0 \exp^{-t} + t\right) - t\right\| < \varepsilon \Rightarrow \left\|x_0 \exp^{-t} - 0\right\| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left\|(x_0 - 0)\exp^{-t}\right\| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \|(x_0 - 0)\|\left\|\exp^{-t}\right\| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \|(x_0 - 0)\|\left\|\frac{1}{\exp^{t}}\right\| < \varepsilon, \left\|\frac{1}{\exp^{t}}\right\| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \|(x - 0)\| < \varepsilon$$

Il suffit de prendre $\eta = \varepsilon \Rightarrow \Phi(t) = t$ stable au sens de Lyapunov

De plus

$$\lim\|x(t)-\Phi(t)\| = \lim\|x_0 \exp^{-t}\| = 0 \text{ lorsque } t \to +\infty$$

Ce qui implique que $\Phi(t) = t$ est asymptotiquement stable.

Linéarisations:

Soit le système non linaire autonome

$$\dot{x} = f(x) \qquad \textbf{(2.4)}$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$f = (f_1, \ldots, f_n)$$

Et x_0 un point critique de **(d)**

C.-à-d. $f(x_0) = 0$

Typées le plus simples des points critiques

Soit donne le système différentielle linéaire a coefficient constantes dans le plan

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \Leftrightarrow \dot{X} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} X, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ou

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ est inversible } (\det(\mathrm{A}) \neq 0)$$

L'origine $(0,0)$ est le seul point pour ce problème

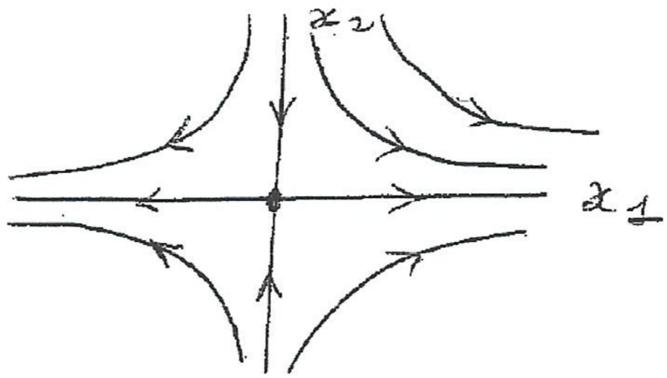
Pour étudier le type (nature) du point critique $(0,0)$ il fout chercher les valeur propre de A

L'cas suivants :

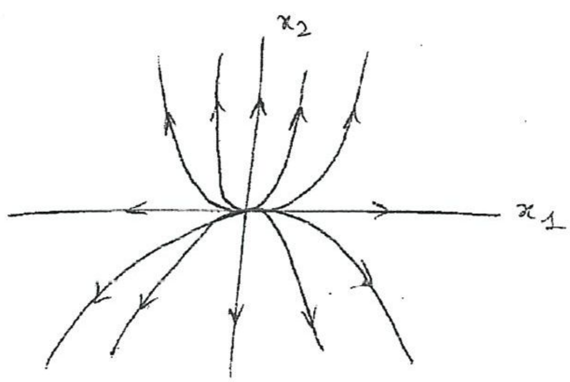
1/ Les valeurs propres de A sont réelles distinctes :

Soit λ_1, λ_2 Les valeurs propres de A sont réelles distinctes

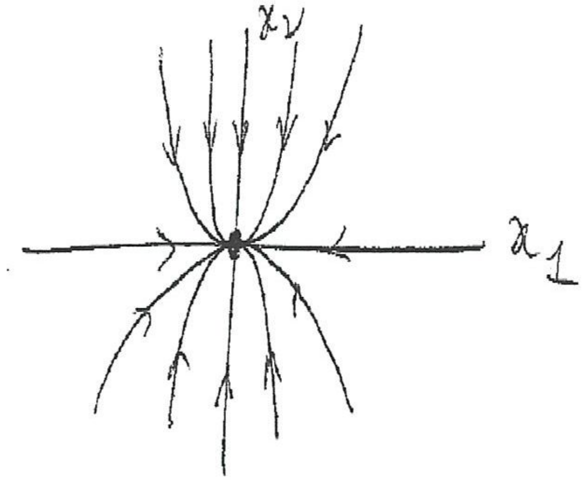
- Si $\lambda_1 \succ 0, \lambda_2 \succ 0 \Rightarrow (0,0)$ s'appelle un nœud impropre (instable)
- Si $\lambda_1 \prec 0, \lambda_2 \prec 0 \Rightarrow (0,0)$ s'appelle un nœud impropre (asym-stable)
- Si λ_1, λ_2 sont de signe diffèrent instable



(0,0) seul instable



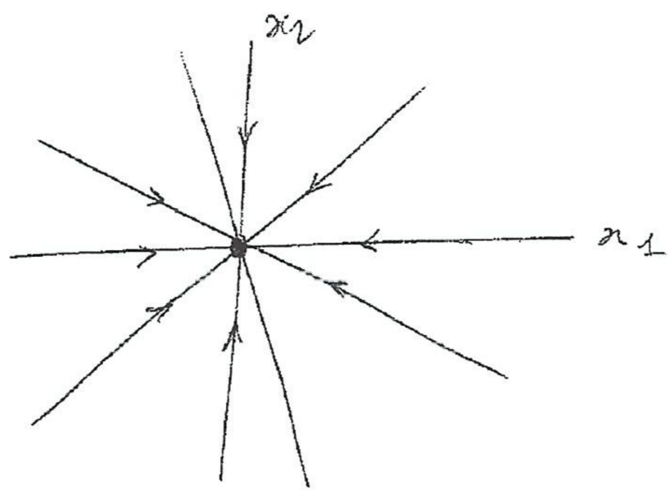
(0,0) Nœud impropre instable



(0,0) nœud impropre asy − stable

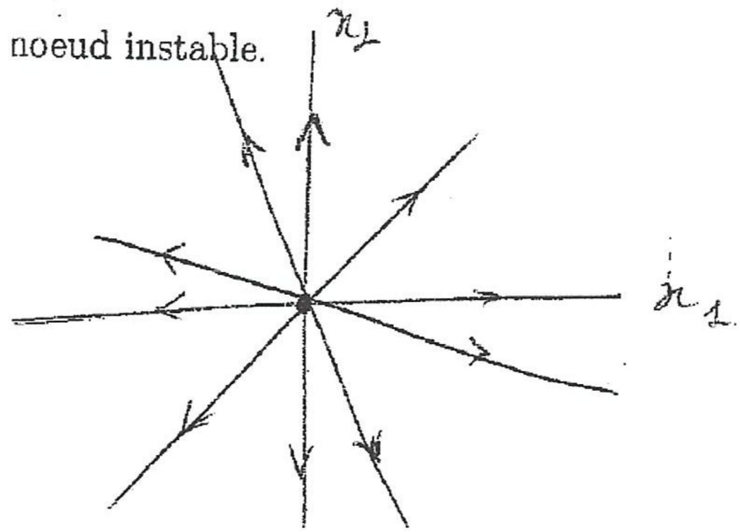
- Si $\lambda_1 = \lambda_2$ dans ce cas:
- Si A diagonalisable $\Rightarrow$ (0,0) est un nœud propre:
- Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ asymptotiquement –stable

(0,0) nœud propre asymptotiquement-stable



Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ instable

Si A n'est pas diagonalisable $\Rightarrow$ (0,0) est un nœud exceptionnel



2/ Le cas des valeurs propres de A complexe:

Soit $\lambda_1 = p+iq$; $\lambda_2 = p-iq$

- Si $p>0$ et $q>0 \Rightarrow (0,0)$ est un foyer instable
- Si $p<0$ et $q\neq 0 \Rightarrow (0,0)$ est un foyer asymptotiquement stable
- Si $p=0$ et $q\neq 0 \Rightarrow (0,0)$ est un centre qui est toujours stable

Théorème

Soit le système

$$\dot{x} = Ax + B(t)x \qquad \textbf{(2.5)}$$

Si les valeurs propres de A avec partie réelles strictement négatives

et si $\int_{t_0}^{t}\|B(s)\|ds$, est bornée pour $t \geq t_0$ alors tout les solutions de **(2.5)** sont

asymptotiquement stable.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -2 < 0$

$\Rightarrow$ les solutions de $\dot{X} = AX$ sont asymptotiquement stable

De plus $\|h(X)\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = x_1^2 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq \|X\|$

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|h(X)\|}{\|X\|} \leq \|X\| \to 0$$

On conclut que $x(t) = 0$ est asymptotiquement stable

Exemple:2

Montrer que la solution de problème:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \text{ avec } x(0) = y(0) = 0$$

Est stable au sens de Lyapunov mais non asymptotiquement stable

Solution : Cherchons la solution général de $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \Phi(t)C = \exp^{At} C \quad , C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1/2} = \pm i \Rightarrow \exp^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \text{donc la solution est :}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos t - c_2 \sin t \\ c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Pour

$$x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \text{ et } y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour

$$x(0) = x_0 \Rightarrow c_1 = x_0 \text{ et } y(0) = y_0 \Rightarrow c_2 = y_0$$

Alors la solution

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}$$

Donc d'après la définition : $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable si pour

$$\forall \varepsilon \geq 0, \exists \eta \geq 0 :$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| < \eta \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| \geq \eta \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| \leq \varepsilon$$

Chapitre III

Méthode des fonctions de Lyapunov pour la Stabilité

Soit $v(x_1, \dots, x_n)$ une fonction différentiable.

Soit le système autonome:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n);\ i = 1, \dots, n \qquad \textbf{(3.1)}$$

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x)}{dx_i}\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x)}{dx_i} f_i(x) \qquad \textbf{(3.2)}$$

où $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ satisfait **(3.1)**

Théorème 1: Si pour le système **(3.1)**, il existe une fonction $v(x_1, \dots, x_n)$ de signe défini positif (ou négatif) telle que $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x)}{dx_i} f_i(x)$ est une fonction semi définie négative (ou positive) ou identiquement nulle alors le point d'équilibre (0,…,0) est stable au sens de Lyapunov.

$v(x_1, \dots, x_n)$ est dite fonction de Lyapunov.

Equivalence linéaire, Equivalence Topologique

Soit $\phi_t, \psi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux flots.

Les flots ϕ_t et ψ_t sont équivalents s'il existe une application bijective

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

qui transforme le flot ϕ_t en le flot ψ_t de telle façon que

$$h \circ \phi_t = \psi_t \circ h.$$

Classification linéaire:

Soient les deux systèmes linéaires à coefficient constante

$$\dot{x} = Ax, \dot{y} = By,\ x, y \in \mathbb{R}^n$$

Supposons que les valeurs propres de A et B sont simples.

Les systèmes

$$\dot{x} = Ax \text{ et } \dot{y} = By;\ x, y \in \mathbb{R}^n$$

sont linéairement équivalents si les valeurs propres de A et B sont les mêmes.

Classification Topologique:

Soient les deux systèmes linéaires à coefficient constante

$$\dot{x} = Ax, \dot{y} = By, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

dont les parties réelles de toutes les valeurs propres sont non nulles (les valeurs propres de et B). Désignons par m_- le nombre de valeurs propres avec parties réelles négatives et par m_+le nombre de valeurs propres avec parties réelles positives.

Théorème: pour que soient topologiquement équivalents deux systèmes linéaires à coefficient dont les parties réelles de toutes les valeurs et non nulle Il faut et il suffit que

$$m_-(A) = m_-(\mathrm{B}) \text{ et } m_+(A) = m_+(\mathrm{B})$$

Système linéarisé

Soit le système non linéaire $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ **(3.3)**

et soit x_0 le point critique de **(3.3)** i.e. $f(x_0) = 0$

Supposons que par un changement de coordonnés le point critique x_0 est ramené à l'origine i.e. $f(0) = 0$.

Les développements de Taylor en $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + Df(0)x + \frac{1}{2}D^2 f(0)(x, x) + \frac{1}{6}D^3 f(0)(x, x, x) + \cdots$$

avec

$$Df(x)x = \Sigma_j (\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}) x_j$$

$$D^2 f(x)(x, x) = \Sigma_{j,i} (\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}) x_j x_i$$

$$D^3 f(x)(x, x, x) = \Sigma_{j,i,k} (\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}) x_j x_i x_k$$

La matrice

$$Df(x) = \frac{df(x)}{dx_i}$$

s'appelle matrice Jacobienne de f et sont déterminant s'appelle le jacobien.

Le système

$$\dot{x} = Df(0)x$$

s'appelle le système linéarisé de (2.1)au point 0 ou bien la linéarisation de f en 0.

Définition 1. On appelle point critique hyperbolique du système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \mathbf{(3.3)}$$

le point critique x_0 tel que aucune des valeurs propres de

$$A = Df(x_0)$$

de partie réelles nulles dans le cas contraire, il est dit point critique non hyperbolique.

Définition 2

Un point critique x_0 de **(3.3)** et dit puit si toutes les valeurs propres de $A = Df(x_0)$des parties réelles négatives il est appelé source si tout les valeurs propres de $A = Df(x_0)$ sont de parties réelles positives il est appelé selle au col (instable) s'il et hyperbolique et si $A = Df(x_0)$ à au moins une valeur propre avec partie réelle négative.

Exemple

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = {x_1}^2 - {x_2}^2 - 1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = 2x_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Déterminer les points critiques et leur nature

Solution

(x_1, x_2) point critique $\Leftrightarrow f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0$

$$f_2(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$f_1(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow {x_1}^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \pm 1.$$

Ce système admet deux points critiques

$$X_1 = (1,0)\ ,\ X_2 = (-1,0)$$

Nature de X_1

$$Df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Df(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres 2 donc X_1 est une source

$$Df(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres 2 et -2 donc X_2 est un point selle

Remarque

1) Un point critique hyperbolique x_0 du système (2.1) est instable s'il est une sourceou une selle.

2) La stabilité de points critiques non hyperbolique est difficile réaliser on utilisera la méthode des fonctions de lyapunov le théorème sur :

$$\dot{x} = Ax + h(t,x)$$

Théorème de Hartmann Grobman

Ce théorème est un résultat important dans le théorème qualitatif local des systèmes dynamique il montré qui au voisinage d'un point critique hyperbolique le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x)$$

A la même structure qualitative du système linéariser

$$\dot{x} = Df(x_0)x$$

Théorème

Soit E un ouvert de $\mathbb{R}^n$contenant x_0 , $f \in C^1(E)$

$\phi_t$le flot associe ay système non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \ldots\ldots \mathbf{(3.4)}$$

Si x_0 est un point critique hyperbolique de **(3.4)** alors il existe un voisinage de x_0 dans la quel le système

$$\dot{x} = f(x)$$

Est topo logiquement équivalent à son système linéarisé

$$\dot{x} = Df(x_0)x$$

fonctions de lypunov pour la stabilité

Nous nous bornerons ici à examiner de système autonome

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, f = (f_1, \dots, f_n) \end{cases}$$

Pour la quel $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ est le point critique

Définition

Une fonction $v(x_1, \dots, x_n)$

$$\left(uniforme\ quadratique\ v: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n; (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j} x_i x_j \right)$$

est dite de signe définie positif (ou négatif) si elle ne prendre que des valeurs d'une signe détermine (P ou$N$) mais que peut s'annule aussi pour

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \neq 0$$

Exemple

$$v(x_1, \dots, x_n) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$$

$$v(x_1, \dots, x_n) = {x_1}^2 + 2x_1x_2 + 2{x_2}^2 + {x_3}^2$$

Elle sont des fonction défini positif

Définition

Une fonction $v(x_1, \dots, x_n)$ est dite de signe constant (positif ou négatif) si elle ne prendre que des valeurs d'un signe détermine mais que s'annule aussi pour

$${x_1}^2 + {x_2}^2 +, \dots, {x_n}^2 \neq 0$$

Exemple

$$v(x_1, \dots, x_n) = {x_1}^2 + 2x_1x_2 + 2{x_2}^2 + {x_3}^2$$

$$=(x_1+x_2)^2 + {x_3}^2$$

Elle est de signe constat positive **(s.v.p.)** elle s'annule pour $(O, O, 0)$

Et aussi pour $(x_1, x_2 = -x_1, 0)$

Soit le système

$$\dot{x} = f(x)$$

On considérons une fonction $v(x_1, \dots, x_n)$ dérivable alors

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{dv}{dx_2}\frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{dv}{dx_n}\frac{dx_n}{dt}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x); \frac{dx_n}{dt} = f_n(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dv}{dx_i}\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dv}{dx_i} f_i\,(x)$$

Théorème I de lyapunov sur la stabilité

Si pour le système (2.1) il existe une fonction $v(x_1, \dots, x_n)$

De signe définie tell que

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dv}{dx_i} f_i\,(x)$$

Est une fonction de signe constant inverse de v ou identique ment nulle

Alors le point critique $(O, \dots, 0)$ est stable au sens de lyapunoov

Exemple

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^4 = f_1(x,y) \\ \dot{y} = yx^4 = f_2(x,y) \end{cases}$$

(0,0) point critique

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} -y^4 & -xy^3 \\ 4yx^3 & x^4 \end{pmatrix}$$

Le système linéaire au voisinage de **(0,0)**

$$\dot{x} = Ax$$

$$\text{Avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On ne peut rien dire

Prenons $v(x, y) = x^4 + y^4$ (d.p)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\dot{x} + \frac{dv}{dy}\dot{y}$$

$$\frac{dv}{dt} = -4x^4y^4 + 4x^4y^4 = 0$$

Théorème I ⇒(0,0) est stable

Théorème II

Si pour le système

$$\dot{x} = f(x)$$

Il existe un fonction de signe définie (pour N) $v(x_1, \dots, x_n)$ tell que $\frac{dv}{dt}$ est une fonction de signe défini inverse de v alors le point critique $(0, \dots, 0)$ est asymptotiquement stable.

Exemple

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 = f_1(x, y) \\ \dot{y} = x - 3y^3 = f_2(x, y) \end{cases}$$

(0,0) le point critique

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 1 \\ -1 & 9y^2 \end{pmatrix}$$

Le système linéarisé ou point **(0,0)**

$$\dot{x} = Ax$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A: $\lambda_{1,2} = \pm i$ ($\Re e(\lambda_{1,2})$=0)

Le système

$$\dot{x} = Ax = (0,0)$$

Seul point critique il est de type centre (stable)

Le **Théorème Hartmann Grobman** on ne peut rien diresur le non linéaire

Prenons

$$v(x,y) = x^2 + y^2 (D,N)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\dot{x} + \frac{dv}{dy}\dot{y} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - 3y^3)$$

$$= 2xy - 2x^4 - 2xy - 6y^4$$

$$= -2(xy + 3y^4)$$

$$\frac{dv}{dt}\ d.n.$$

Théorème II ⇒(0,0) asymptotiquement stable

Bibliographies

[1] BOUATTIA YASSINE Mémoire Magister Cycles limites de l'équation de Liénard dans les régimes fort et faible

[2] Melloki Nejah Memoire Master Acadimique "Notation sur la stabilité des systèmes dynamiques des équations différentielles" Université 08 Mai Geulma (2014)

[3]D.R.Merkin.Introduction to the Theory of stability .springer –verlag New york 2004

[4] S.Badi.Cours Master sur les système Dynamique Université 08 Mai Geulma

[5] P.A.Raviart et J.M .Thomas .introduction à l'analyse numérique . des équations aux dérivées partielles .Masson ,paris 1982

[6] N.Merkin .principles of Differential Equation John wiley & sons New York 2004

[7] S.Kuksin ,V.Lazutkin ,AND J.P OSCHEL principles of Differential Equation.seminar on Dynamical Systeme Birkh auser,Boston 1994

[8] J-L Lions et E. Magenes . Problème aux limites non homogène et application T.1 Dunod Paris 1968

[9] W.WOLFGANG Walter ordinary Differential Equations,Springer New YORK 1998

[10] Jordan.D.W and Smith.P. Nonlinear Ordinary Differential Equations. An introduction

to Dynamical systems. Third Edition 1999. Oxford University. Press.