

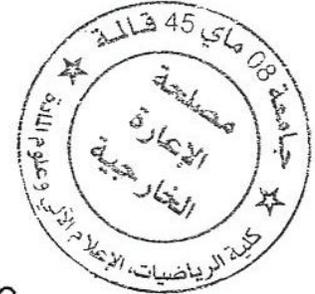
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

17 510. 215

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

215



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : **Mathématique Appliqué**

Par :

Melle. Aouaouda Meriem

Intitulé

**Equation de transport de la vapeur dans
l'air dans un cyclone tropical**

Dirigé par : HISAO FUJITA YASHIMA

Devant le jury

**PRESIDENT
RAPORTEUR
EXAMINATEUR**

**Dr. ELLAGGOUNE Fateh
Pr. HISAO FUJITA YASHIMA
Melle. BELHIRECHE HANANE**

**Univ-Guelma
Univ-Guelma
Univ-Guelma**

Session Juin 2016

Equation de transport de la vapeur dans l'air dans un cyclone tropical

Aouaouda meriem

Mémoire de Master en mathématiques

Université 8 Mai 1945 Guelma

15 juin 2016

Remerciement

C'est avec un grand plaisir que je réserve ces lignes en signe de gratitude et de reconnaissance à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

En tout premier lieu, je tiens à remercier le professeur **Hisao Fujita yashima** d'avoir encadré ce travail, tout au long de ce mémoire, ses conseils m'ont été très précieux.

Je remercie vivement le professeur **Dr. Ellaggoune Fateh** de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Je remercie également **Mlle. Belhiche Hanane** membres de jury .pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail.

Je remercie Monsieur **Aissaoui Mohamed Zine** pour ses orientations, ses conseils.

Il m'aurait été impossible de réaliser ce travail sans le soutien de ma famille, en particulier mon père. J'adresse également mes remerciements envers mes amis et mes collègues et surtout **Mlle sarra, Imene** pour leur soutien.

je ne pourrais terminer ces remerciements sans une pensée à l'ensemble de mes Enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

Enfin, je dédie ce travail à celle qui ma soutenu avec toute sa tendresse et son affection ma mère, que dieu la bénisse.

Table des matières

Résumé	3
Introduction	4
1 Equations fondamentales	8
1.1 Equations fondamentales du mouvement de l'air	8
1.2 Equations du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau et sans viscosité, sans conductivité thermique	10
1.3 Equations de la microphysique	11
1.4 Quantité de condensation	13
2 Etat hydrostatique	15
2.1 Etat hydrostatique de l'air sec	15
2.2 Etat hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau . . .	21
2.3 Calcul numérique de la densité et de la température dans l'état hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau	23
3 Modèle d'un cyclone tropical	27
3.1 Introduction au modèle	27
3.2 Symétrie axiale et coordonnées cylindriques	29

3.3	Système d'équations d'un cyclone tropical	31
3.4	Approximation par la séparation de l'évolution temporelle et de la structure spatiale	33
3.5	Remarques sur les conditions aux limites	36
4	Equations semi-linéarisées	38
4.1	Première formulation des équations semi-linéarisées et les ca- ractéristiques	38
4.2	Transformation des équations semi-linéarisées	40
4.3	Deuxième formulation des équations semi-linéarisées	44
5	Résolution numérique des équations semi-linéarisées	46
5.1	Etude numérique des système l'équation	49
5.2	Schéma numérique	50
5.3	Choix des paramètres et calcul numérique	53
5.4	Résultat du calcul numérique	54
6	Equations non linéaires sur les caractéristiques données	64
6.1	Formulation des équations	64
6.2	Résolution d'équations non linéaires sur les caractéristiques à l'aide de méthodes des approximations successives	66
7	Retour au modèle	71
7.1	Question du paramètre de l'intensité	71
7.2	Retour au modèle	73

Résumé

Dans le présent mémoire, nous proposons l'étude d'un modèle mathématique qui décrit le phénomène d'un cyclone tropical dans sa structure mécanique et thermodynamique. On considère d'abord le système d'équations semi-linéarisées sans viscosité et conductivité thermique sur une trajectoire (du vent) et on calcule numériquement sa solution ; le calcul a été réalisé en utilisant la méthode de différences finies et en choisissant de manière appropriée la trajectoire. Puis, en utilisant ce schéma, on construit l'approximation successive pour la solution du système d'équations non linéaire sur une trajectoire donnée. Les résultats du calcul des solutions approchées montrent un très bon comportement pour leur convergence. On examine également leur relation avec "l'indicateur de l'intensité" d'un cyclone, qui nous donne la possibilité d'utiliser ce modèle pour le modèle d'évolution.

Introduction

Historiquement, le terme de *cyclone tropical* a été introduit en 1848 dans les mémoires du capitaine de Marine anglais Henry Pidditing (voir [6]), sous le nom de *kyklos* en grec. Le Marin est un des pionnier dans le domaine de l'étude des tempêtes tropicales et la qualité de ses travaux fut mondialement reconnue à l'époque. Aujourd'hui, le phénomène représente un enjeu humain et matériel majeur dans de nombreuses zones du globe et fait l'objet d'intenses recherches par les scientifiques. Nous pouvons ajouter à cela les études concernant les effets du réchauffement climatique sur l'activité cyclonique, sujet de débat qui divise les experts du monde entier.

En météorologie, *les tempêtes tropicales* sont des perturbations atmosphériques dépressionnaires, qui se développent dans les zones océaniques tropicales de l'hémisphère nord ou de l'hémisphère sud, en occasionnant des vents et des précipitations. On parle abusivement de tempêtes tropicales pour désigner l'ensemble des phénomènes dépressionnaires présents dans les tropiques mais en réalité, elles désignent les précurseurs des *cyclones tropicaux* qui en sont la forme la plus évoluée. Dans le bassin Atlantique Nord, ces derniers sont aussi appelés *ouragan* (Terme francisé de hurricane en anglais) alors que l'on parle de *typhon* dans le Pacifique Nord.

D'un point de vue physique une *tempête tropicale* est un véritable système

thermodynamique dont la formation nécessite un certain nombre de conditions météorologiques et géographiques, les principales étant la température de l'océan et la latitude. Leur source d'énergie principale est le dégagement de la chaleur latente, causé par la condensation de la vapeur d'eau en altitude. Lorsqu'une tempête gagne assez d'énergie, elle passe au stade de cyclone qui représente, un phénomènes climatiques les plus puissants connu par les scientifiques.

Les cyclones sont caractérisés par une système nuageux de cumulonimbus (nuage d'orage) en rotation autour d'un œil en leur centre. L'importance de la condensation comme source principale d'énergie, différencie les cyclones tropicaux des autres phénomènes météorologiques. Pour conserver la source d'énergie de sa machine thermodynamique, un *cyclone tropical* doit demeurer au dessus de l'eau chaude, qui lui apporte l'humidité atmosphérique nécessaire, l'atmosphère tropicale chaude réchauffe l'eau à la surface de l'océan, ce qui entraîne l'évaporation. Le mouvement de giration du cyclone est donné par la rotation de la Terre : la force de Coriolis, les cyclones tournent ainsi dans le sens des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère Sud, dans le sens contraire dans l'hémisphère Nord.

Les cyclones sont parmi les phénomènes naturels les plus courant et une attention particulière leur est porté afin de protéger les populations de leurs effets dévastateurs. Au niveau mondial, la coordination des mesures de surveillance est organisé par, organisme des Nations Unies appelé *l'Organisation Météorologique Mondiale (OMM)* Malgré tout, on dénombre encore chaque année des milliers de victimes, notamment dans les pays en développement.

Dans la nature, les systèmes et les phénomènes physiques les plus intéres-

sants, sont aussi les plus complexes à étudier. Ils sont souvent régis par un grand nombre de paramètres non-linéaires interagissant entre eux (la météorologie, la turbulence des fluides...).

l'essentiel de notre travail consiste à construire, un modèle mathématique suffisamment détaillé et suffisamment cohérent du point de vue mathématique, comme du point de vue physique, ces modèles sont basés sur la théorie des équations aux dérivées partielles de la mécanique des fluides.

L'objet de cette travail est la modélisation mathématique du phénomène d'un cyclone tropical, il est parmi les plus dévastateurs des phénomènes météorologiques. Il représente un risque majeur pour l'ensemble des zones intertropicales.

En général les modèles mathématiques qui décrivent le phénomène du cyclone tropical sont plus complexes à étudier, ils utilisent très souvent des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires, dont on ne connaît pas des solutions analytiques. Il faut alors résoudre le problème numériquement, en transformant les équations continues de la physique en un problème discret sur un certain domaine du calcul.

Ce mémoire est composé en d'une introduction et sept chapitres :

Dans le premier et le deuxième chapitre, nous rappelons le système d'équations qui décrivent le mouvement de l'air et l'éventuel processus de condensation de la vapeur d'eau, contenue dans l'air et ses conséquences. D'autre part, pour les équations qui décrivent la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère nous avons suivi des modèles développés dans une série de travaux (voir [2, 4],)

Dans le chapitre trois, nous allons illustrer le modèle mathématique d'un cyclone tropical, où les idées fondamentales de ce modèle sont celles développées dans [5]. Dans ce modèle nous avons pris en compte les grandeurs physiques suivantes : la température T , la densité ρ et la vitesse w . Après la construction du modèle, en séparant la variable temporelle t et la structure spatiale (r, z) .

Ensuite, il y'a deux parties

Dans la première partie (le chapitre quatre et cinq), nous nous intéressons à la formulation des équations semi-linéarisées et les caractéristiques, puis nous allons les réécrire dans un ordre adéquate pour la résolution. Cette formulation nous permet d'utiliser la méthode de différences finies pour obtenir la solution numérique du système d'équations.

Dans la deuxième partie (le sixième chapitre), nous proposons l'étude du système d'équations non linéaires sur les caractéristiques donnée à l'aide de la méthode des approximation successive.

Enfin dans le dernier chapitre, on va expliquer les aspect fondamentaux de l'évolution temporelle et de la structure spatiale, en introduisant le paramètre d'évolution temporelle $\alpha(t)$, qui doit correspondre à l'intensité (globale) du cyclone, particulièrement les résultats de la simulation numérique avec les différent valeur de α .

Chapitre 1

Equations fondamentales

1.1 Equations fondamentales du mouvement de l'air

Comme les cyclones tropicaux sont des phénomènes qui se produisent dans l'atmosphère et cette n'est autre que la masse d'air, qui est un gaz, donc un fluide compressible, nous allons utiliser les équations aux dérivées partielles décrivant le mouvement d'un gaz. Nous rappelons donc avant tout les équations fondamentales du mouvement d'un gaz suivant la description classique (voir [9]).

Désignons par $\rho = \rho(t, x)$ la densité du gaz en considération, par $v = v(t, x) = (v_1(t, x), v_2(t, x), v_3(t, x))$ la vitesse, par $p = p(t, x)$ la pression et par $T = T(t, x)$ la température. La loi de conservation de la masse et celle de la quantité de mouvement s'expriment par les équations

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \partial_t v_j + \rho \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} p = \quad (1.2)$$

$$= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\eta \left(\frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_k - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\zeta \nabla \cdot v) - \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi + F_j,$$

$$j = 1, 2, 3,$$

tandis que le bilan d'énergie, exprimé en fonction de la température, sera décrit par l'équation

$$\rho c_v (\partial_t T + v \cdot \nabla T) + p \nabla \cdot v = \quad (1.3)$$

$$= \nabla \cdot \kappa \nabla T + \eta \sum_{j,k=1}^3 \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v \right) \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \zeta (\nabla \cdot v)^2 + E,$$

où η et ζ sont les coefficients de viscosité d'écoulement et volumique du gaz, Φ est le potentiel de la force extérieure, F_j est la j -ième composante d'une éventuelle force, E est la source de chaleur, c_v est la chaleur spécifique de l'air, κ est la conductivité thermique du gaz.

En ce qui concerne la pression p , elle est en générale une fonction de la densité ρ et de la température T . Mais pour les gaz dans un état ordinaire, comme l'air de notre atmosphère, la loi qui détermine la pression p est assez proche de l'équation de la pression pour le gaz idéal, qui est

$$p = R_0 \frac{\rho}{\mu} T, \quad (1.4)$$

où R_0 est la constante universelle des gaz ($R_0 \approx 8,31 \cdot 10^7 \text{ erg/mole} \cdot K$) et μ est la masse molaire du gaz (pour les détails, voir [7]).

La rotation de la Terre cause, dans le système de coordonnées qui tourne avec la Terre, non seulement la force centrifuge mais aussi la force de Coriolis (pour la définition de la force de Coriolis (voir [8]). Si on tient compte de la force de Coriolis, l'équation de quantité de mouvement aura la forme

$$\begin{aligned}
(1.2)\text{bis} \quad & \rho \partial_t v_j + \rho \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} p = \\
= & \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\eta \left(\frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_k - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\zeta \nabla \cdot v) - 2\rho \omega \times v - \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi + F_j, \\
& j = 1, 2, 3,
\end{aligned}$$

où ω est la vitesse angulaire de la rotation de la Terre ; dans (1.2)bis la force de Coriolis est exprimée par le terme $-2\rho\omega \times v$.

Pour les équations (1.1)–(1.4) on peut consulter le livre [9] et le cours de Fluides Newtoniens (voir [3]).

1.2 Equations du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau et sans viscosité, sans conductivité thermique

Pour modéliser les cyclones tropicaux, nous allons utiliser les équations dans lesquelles on néglige l'effet de la viscosité et de la conductivité thermique. En outre nous allons utiliser toujours l'approximation de la pression (1.4). Pour cela nous rappelons ici le système d'équations du mouvement de l'air sans viscosité et sans conductivité thermique, système d'équations obtenu, en posant $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\kappa = 0$ et $p = R_1 \rho T$ dans les équations (1.2)bis et (1.3) ; il s'agit du système d'équations

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad (1.5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) = -R_1 \nabla \rho T - \rho \nabla \Phi - 2\rho \omega \times v + F, \quad (1.6)$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T \right) = -R_1 \rho T \nabla \cdot v + E, \quad (1.7)$$

où

$$R_1 = \frac{R_0}{\mu} \quad (1.8)$$

tandis que $F = (F_1, F_2, F_3)$.

1.3 Equations de la microphysique

Comme on le connaît bien, la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère, en faisant naître des nuages et en provoquant de la pluie et de la neige, joue le rôle très important dans l'étude des phénomènes météorologiques, comme dans les cyclones tropicaux. Il nous faut donc rappeler les équations qui décrivent ces phénomènes; l'ensemble de ces descriptions est souvent dit *microphysique*.

Dans la dynamique de l'air impliquant la transition de phase de l'eau, la pression de la vapeur saturée et la chaleur latente de H_2O jouent le rôle essentiel. Leurs valeurs dans les conditions normales de l'atmosphère sont expérimentalement bien établies comme fonction de température (voir par exemple [10], voir aussi [11]), la pression de la vapeur saturée relative à l'état liquide a approximativement les valeurs

$$\bar{p}_{vs}(T) \approx E_0 \cdot 10^{\frac{7.63(T-273.15)}{T-31.25}}, \quad E_0 = 6,107 \quad (mbar), \quad (1.9)$$

Il nous est commode de définir, à l'aide de l'expression générale de la pression, la densité de la vapeur saturée relative à la surface de l'eau liquide $\bar{\pi}_{vs}(T)$ par

$$\bar{\pi}_{vs}(T) = \frac{\mu_l \bar{p}_{vs}(T)}{RT}, \quad (1.10)$$

où R et μ_h sont respectivement la constante universelle des gaz et la masse molaire de H_2O .

La pression ainsi que la densité de la vapeur saturée relative à la surface de l'eau solidifiée ont des valeurs différentes de celles de la pression et de la densité de la vapeur saturée relative à la surface de l'eau liquide (pour les détails, voir [10], [11]).

D'autre part, ces processus de transition s'accompagnent d'un dégagement ou d'une absorption de l'énergie ; ce phénomène est connu sous le nom de chaleur latente, qui constitue un facteur important dans les phénomènes météorologiques.

Comme il est bien connu, pour que l'évaporation du liquide s'effectue sans variation de sa température, il faut lui apporter de la chaleur ; au contraire, si la chaleur n'est pas fournie de l'extérieur, l'évaporation du liquide doit s'accompagner de son refroidissement. La quantité de chaleur qu'il est nécessaire de fournir pour l'évaporation d'une certaine quantité de liquide, sans variation de sa température, à la pression extérieure de la vapeur égale à la pression de la vapeur saturée, est appelée chaleur latente (d'évaporation). Si la chaleur latente est absorbée par le processus d'évaporation, la même quantité de chaleur doit être donnée par le processus de condensation à son environnement.

Nous désignons par L_{gl} , L_{ls} , L_{gs} , respectivement la chaleur latente relative à la transition gaz-liquide, liquide-solide, gaz-solide. Les valeurs expérimentalement établies de la chaleur latente d'évaporation de H_2O dans les conditions normales de l'atmosphère, sont données approximativement en fonction de T . Les valeurs approximatives de la chaleur latente de la transition de l'état

gazeux à l'état liquide L_{gl} sont données par

$$L_{gl}(T) \approx (3244 - 2,72T)10^3 \quad (J/kg). \quad (1.11)$$

Comme il est logique, entre L_{gl} , L_{ls} , L_{gs} on a la relation

$$L_{gs} = L_{gl} + L_{ls}$$

(pour les détails, voir [2],[7],[10]).

1.4 Quantité de condensation

Pour modéliser le cyclone tropical, il est important de déterminer la quantité de la vapeur d'eau qui se transforme en liquide ou en solide. Or, comme la valeur de L_{gs} ne diffère pas beaucoup (cest-à-dire le rapport $\frac{L_{gs}-L_{gl}}{L_{gl}} = \frac{L_{ls}}{L_{gl}}$ est relativement petit), tandis que le processus de la solidification de l'eau est assez complexe, dans notre modélisation nous allons utiliser l'approximation par laquelle on ne distingue pas le processus de condensation et celui de sublimation inverse (ou condensation + congélation). Pour cela, ici nous présentons l'équation déterminant la quantité de transition de phase de l'eau dans l'atmosphère utilisée dans le travail [5].

Désignons donc par H_{tr} la quantité de la vapeur d'eau qui se transforme en liquide ou en solide. Notons la hauteur z , c'est-à dire $z = x_3$. Alors, dans l'écoulement ascendant de l'air avec vapeur d'eau saturée, H_{tr} sera déterminé par

$$H_{tr} = (\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T)) v_3, \quad (1.12)$$

ici ϱ désigne le densité totale, c'est-à-dire la somme de la densité de l'air sec et celle de la vapeur d'eau, tandis que v_3 désigne (comme d'habitude) la composante verticale de la vitesse de l'air.

Rappelons la justification de la formule (1.12) donnée dans [5].

En effet, si on désigne par $\pi(z)$ la densité de vapeur en z , et si on suppose que la quantité de H_2O qui dépasse $\pi_{vs}(z)$ devient immédiatement liquide ou solide, on aura

$$\pi(z) = \bar{\pi}_{vs}(T(z)).$$

Lorsque l'air monte de Δz , la quantité de H_2O contenue dans l'air sera

$$\pi(z) \frac{\varrho(z + \Delta z)}{\varrho(z)} = \bar{\pi}_{vs}(T(z)) \frac{\varrho(z + \Delta z)}{\varrho(z)},$$

tandis que la densité de la vapeur saturée sera $\bar{\pi}_{vs}(T(z + \Delta z))$, d'où

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} [\pi_{vs}(z) \frac{\varrho(z + \Delta z)}{\varrho(z)} - \bar{\pi}_{vs}(T(z + \Delta z))] = \bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T).$$

Par conséquent, en tenant compte de la relation $\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{dz}{dt} = v_z$, on aura

$$H_{tr} = (\bar{\pi}_{vs}(T)) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) v_z$$

(pour les détails voir [5]).

Chapitre 2

Etat hydrostatique

2.1 Etat hydrostatique de l'air sec

Comme pour tous les phénomènes dans l'atmosphère, même pour modéliser les cyclones tropicaux la distribution de la densité et de la température de l'état hydrostatique de l'air joue un rôle important dans leur modélisation. Or, à cause de la présence de la vapeur d'eau susceptible de subir la transition de phase et donc de fournir de la chaleur dans la forme de la chaleur latente, l'*état hydrostatique* peut être différent du cas de l'air sec au cas de l'air humide (dans lequel la condensation ou la sublimation inverse de la vapeur d'eau se produit constamment).

Dans l'atmosphère réelle la diffusion de la chaleur et l'état thermique de la friction interne sont relativement petits, de sorte que le déplacement vertical de l'air, s'il n'y a pas de transition de phase de l'eau, engendre la variation de la pression et de la température de manière assez proche du processus adiabatique. A cause de ce comportement de l'air, dans la troposphère nous trouvons une distribution de la pression, de la densité et de la température assez proche de la distribution de l'état *hydrostatique*. En effet, si on néglige

la diffusion de la chaleur et l'augmentation de la température due à la friction interne, l'équation (1.3) se réduit à

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T \right) + R_1 \rho T \nabla \cdot v = 0, \quad (2.1)$$

Si le mouvement de l'air vérifie cette équation, le long de la trajectoire de chaque partie de l'air, le rapport

$$\vartheta = \frac{T(t, x)^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho(t, x)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad (2.2)$$

avec $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + \frac{R}{\mu}}{c_v}$ reste invariant, où γ est l'exposant adiabatique, qui a la valeur approximativement 1.4, tandis que la trajectoire est définie par la relation

$$\{x \in \mathbf{R}^3 | x = x(t, x_0), t_0 \leq t \leq t_1\}, \quad x(t, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t', x(t', x_0)) dt'$$

(pour la démonstration de cette relation, voir le lemme 5.1 du chapitre IV du cours de Fluides Newtoniens [3]). Donc sur la trajectoire de chaque partie du gaz on a

$$T(t, x) = C_1 \rho(t, x)^{\gamma-1} \quad (2.3)$$

avec une constante C_1 . Supposons maintenant que la valeur de la constante C_1 figurant dans (2.3) est identique dans une région Ω , alors dans cette région, pour la pression p qui satisfait à l'équation (1.4), on a la relation

$$p = h \rho^\gamma, \quad (2.4)$$

où h est une constante, plus précisément $h = C_1 \frac{R}{\mu}$. Soit Φ le géopotential, si on substitue $p = 0$ et la relation (2.4) dans l'équation (1.2) (ou (1.2)bis), on

obtient l'équation

$$h\nabla\varrho^\gamma = -\varrho\nabla\Phi. \quad (2.5)$$

Comme

$$\nabla\varrho^\gamma = \nabla\varrho^{(\gamma-1)\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\varrho\nabla\varrho^{\gamma-1},$$

de (2.5) on déduit que

$$h\frac{\gamma}{\gamma-1}\nabla\varrho^{\gamma-1} = -\nabla\Phi,$$

ce qui implique que

$$\varrho^{\gamma-1} = \varrho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{\gamma h}(\Phi_0 - \Phi). \quad (2.6)$$

ou

$$\varrho = \left(\varrho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{\gamma h}(\Phi_0 - \Phi) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (2.7)$$

où $\Phi_0 = \Phi_{x_0}$ et $\varrho_0 = \varrho(x_0)$ avec un point $x_0 \in \Omega$. Pour l'application de (2.7) à l'atmosphère réelle, il est souvent commode de prendre Φ_0 comme la valeur de Φ au niveau de la mer et ϱ_0 comme la densité de l'air au niveau de la mer. Naturellement, il faut rappeler que, du point de vue physique, (2.6) et (2.7) sont valables seulement si $\varrho(x_0) > 0$ et $\varrho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{\gamma h}(\Phi_0 - \Phi) > 0$.

La relation (2.7) signifie que dans l'approximation "adiabatique", l'atmosphère "au repos" aura la distribution de la densité ϱ . En outre, compte tenu de la relation $\frac{C_1}{h} = \frac{\mu}{R}$, on déduit de (2.3) et (2.6) que

$$T - C_1 \left(\varrho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{\gamma h}(\Phi_0 - \Phi) \right) = T_h + \frac{\mu(\gamma-1)}{R\gamma}(\Phi_0 - \Phi), \quad (2.8)$$

où $T_0 = C_1\varrho_0^{\gamma-1}$ est la température au niveau de la mer. D'autre part, de (2.4) et (2.7) on déduit que

$$p = h \left(\varrho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{\gamma h}(\Phi_0 - \Phi) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{\gamma-1}{h^{\frac{1}{\gamma}}\gamma}(\Phi_0 - \Phi) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (2.9)$$

où $p_0 = h\rho_0^{\gamma}$ est la pression au niveau de la mer. La distribution de la densité $\rho(x)$, de la température $T(x)$ et de la pression $p(x)$, donnée par (2.7)-(2.9) dans une région Ω , définit un état *hydrostatique*. Il est intéressant de remarquer que dans l'état *hydrostatique*, la température $T(x)$ descend linéairement par rapport au géopotential $\Phi(x)$, ce qui correspond à son comportement dans la troposphère. Les figures ci-dessous représentent la distribution verticale de la température ainsi que la densité de l'air dans l'état hydrostatique de l'air sec.

FIGURE 2.1 – La distribution de la densité dans l'état hydrostatique de l'air sec

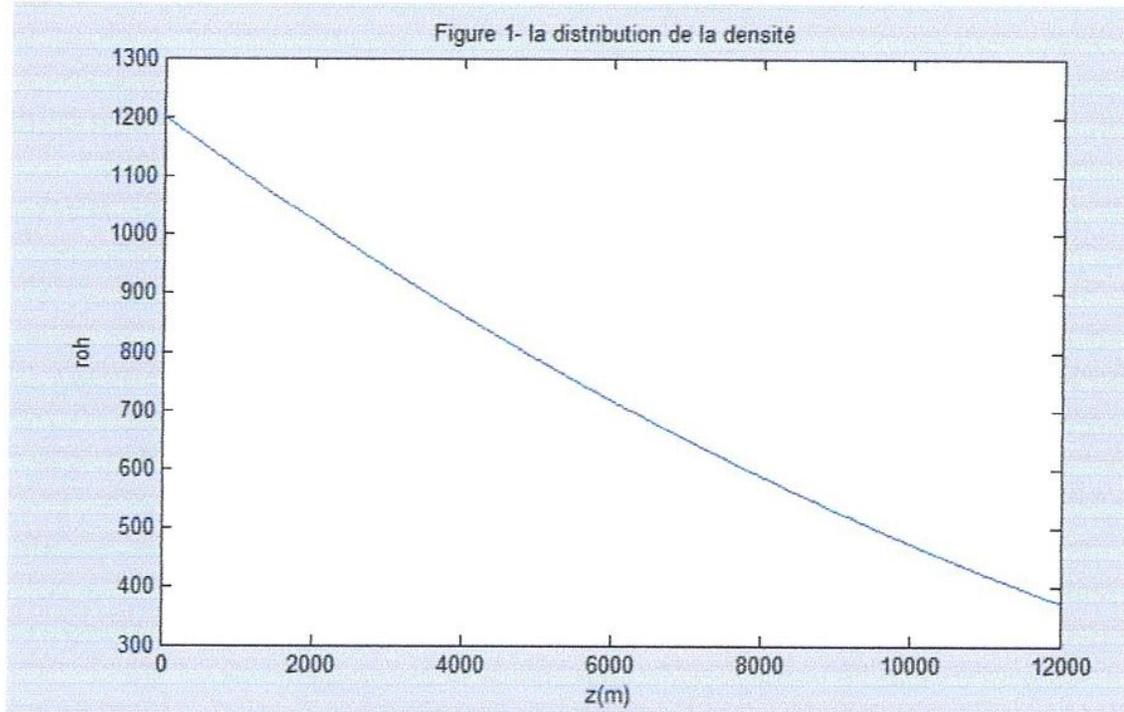
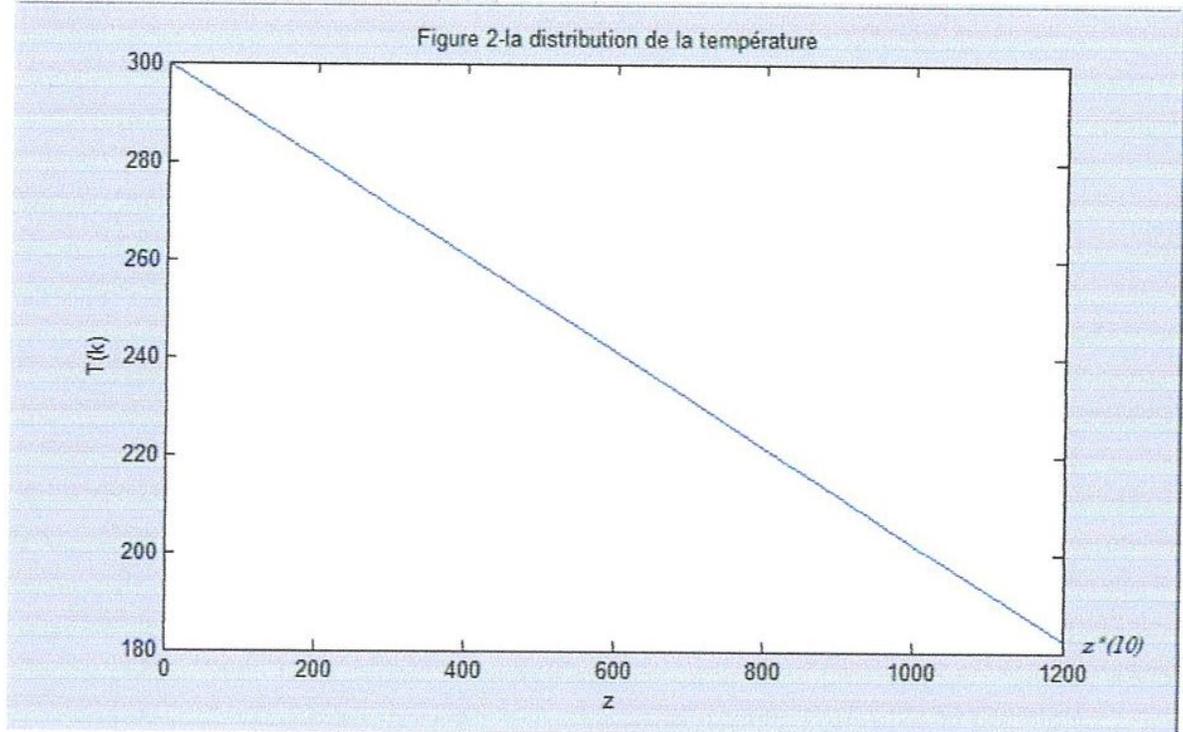


FIGURE 2.2 – La distribution de la température dans l'état hydrostatique de l'air sec



2.2 Etat hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau

Dans le cas où la vapeur d'eau contenue dans l'air est partout saturée et la température est distribuée comme s'il y a constamment la condensation, cas communément dit *de l'air humide*, la distribution de la densité et de la température est différente et doit être déterminée compte tenu du processus de possible condensation.

Pour établir le système d'équations de l'état hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau, introduisons la densité de la vapeur d'eau π et, pour éviter l'équivoque, désignons par ϱ_a la densité de l'air sec. Pour la densité de l'air sec ϱ_a , qui ne subit pas de transition de phase, l'équation de continuité (1.1) est toujours valable, c'est-à-dire on a

$$\partial_t \varrho_a + \nabla \cdot (\varrho_a v) = 0. \quad (2.10)$$

D'autre part, pour la densité de la vapeur d'eau π il y a la variation de sa masse due à la transition de phase; en désignant par H_{tr} la quantité de la vapeur d'eau qui se transforme en liquide ou en solide, on a l'équation de continuité pour π

$$\partial_t \pi + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{tr}. \quad (2.11)$$

Si on désigne par ϱ la somme de la densité de l'air sec et de celle de la vapeur d'eau

$$\varrho = \varrho_a + \pi,$$

en faisant la somme des équations (2.10) et (2.11), on a

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho v) = -H_{tr}. \quad (2.12)$$

Or, en substituant au second membre de cette équation l'expression (1.12), on a

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho v) = -(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T)) v_3. \quad (2.13)$$

D'autre part, considérons l'équation stationnaire de (1.7), dans laquelle nous substituons

$$E = L_{tr} H_{tr},$$

où $L_{tr} \approx L_{gl} \approx L_{gs}$ (comme nous l'avons mentionné en haut). Alors on obtient

$$\varrho c_v v \cdot \nabla T = -R_1 \varrho T \nabla \cdot v + L_{tr} H_{tr}.$$

Dans cette équation nous substituons l'expression (1.12) et

$$\varrho \nabla \cdot v = -v \cdot \nabla \varrho - (\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T)) v_3,$$

qui s'obtient de l'équation stationnaire de (2.13). De la sorte on obtient

$$\varrho c_v v \cdot \nabla T - R_1 T v \cdot \nabla \varrho = (R_1 T + L_{tr}) \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \right) v_3. \quad (2.14)$$

Si dans (2.14) on suppose

$$v = (0, 0, v_3), \quad v_3 > 0,$$

de (2.14) on obtient

$$\varrho c_v \frac{dT}{dz} - R_1 T \frac{d\varrho}{dz} = (R_1 T + L_{tr}) \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \right). \quad (2.15)$$

Si on adjoint à l'équation (2.15) l'équation

$$R_1 \frac{d}{dz} (\varrho l') = -g \varrho, \quad (2.16)$$

on obtient le système d'équations (2.15)–(2.16) qui détermine la distribution de la densité et de la température dans l'état hydrostatique de l'atmosphère avec la condensation de la vapeur d'eau.

2.3 Calcul numérique de la densité et de la température dans l'état hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau

A différence du cas de l'état hydrostatique de l'air sec, le système d'équations (2.15)–(2.16) n'admet pas la solution explicite. Pour cette raison, nous examinons la possibilité de la résolution numérique du système d'équations (2.15)–(2.16).

Pour calculer la solution du système d'équations (2.15)–(2.16), nous utilisons la méthode de différences finies avec l'approximation suivante

$$\left. \frac{d\rho}{dz} \right|_{z=i} \approx \frac{\rho(i) - \rho(i-1)}{\delta_z}$$

et

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=i} \approx \frac{T(i) - T(i-1)}{\delta_z}$$

En discrétisant le système d'équations (2.16)–(2.15), on a

$$R_1 \left(T(i-1) \frac{\rho(i) - \rho(i-1)}{\delta_z} + \rho(i-1) \frac{T(i) - T(i-1)}{\delta_z} \right) = -g\rho(i-1). \quad (2.17)$$

$$\rho(i-1)c_v \frac{T(i) - T(i-1)}{\delta_z} - R_1 T(i-1) \frac{\rho(i) - \rho(i-1)}{\delta_z} = \quad (2.18)$$

$$\left(R_1 T(i-1) + L_{tr}(T(i-1)) \right) \left(\bar{\pi}_{vs}(T(i-1)) \frac{1}{\rho(i-1)} \left(\frac{\rho(i) - \rho(i-1)}{\delta_z} \right) + \left[\frac{d}{dT} \bar{\pi}_{vs}(T(i-1)) \frac{T(i) - T(i-1)}{\delta_z} \right] \right).$$

Pour la commodité du calcul nous réécrivons les équations (2.17)–(2.18) dans la forme

$$T(i-1)\varrho(i) + \varrho(i-1)T(i) = 2T(i-1)\varrho(i-1) - \delta_z \frac{g}{R_1} \varrho(i-1), \quad i = 1, \dots, N \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} & \varrho(i-1)c_v T(i) - R_1 T(i-1)\varrho(i) + \quad (2.20) \\ & + \left[- \left(R_1 T(i-1) + L_{tr}(T(i-1)) \right) \left(\bar{\pi}_{vs}(T(i-1)) \frac{1}{\varrho(i-1)} \varrho(i) - T(i) \frac{d}{dT} \bar{\pi}_{vs}(T) \right) \right] = \\ & = \varrho(i-1)c_v T(i-1) - R_1 T(i-1)\varrho(i-1) + \left(R_1 T(i-1) + L_{tr}(T(i-1)) \right) \times \\ & \quad \times \left(\frac{d}{dT} \bar{\pi}_{vs}(T) T(i-1) - \bar{\pi}_{vs}(T(i-1)) \right), \\ & \quad \quad \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Les figures ci-dessous représentent la distribution verticale de la température ainsi que la densité de l'air dans l'état hydrostatique de l'air avec la condensation. Les calculs numériques ont été effectués pour une hauteur de $12km$ avec un pas $\delta_z = 10m$

FIGURE 2.3 – La distribution de la température dans l'état hydrostatique avec la condensation

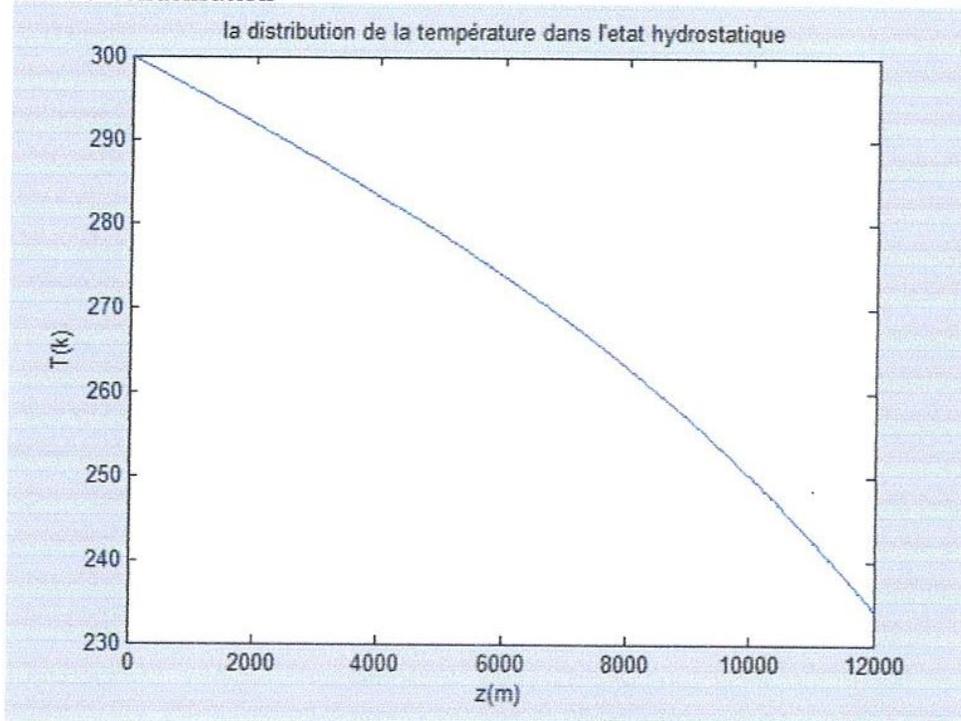
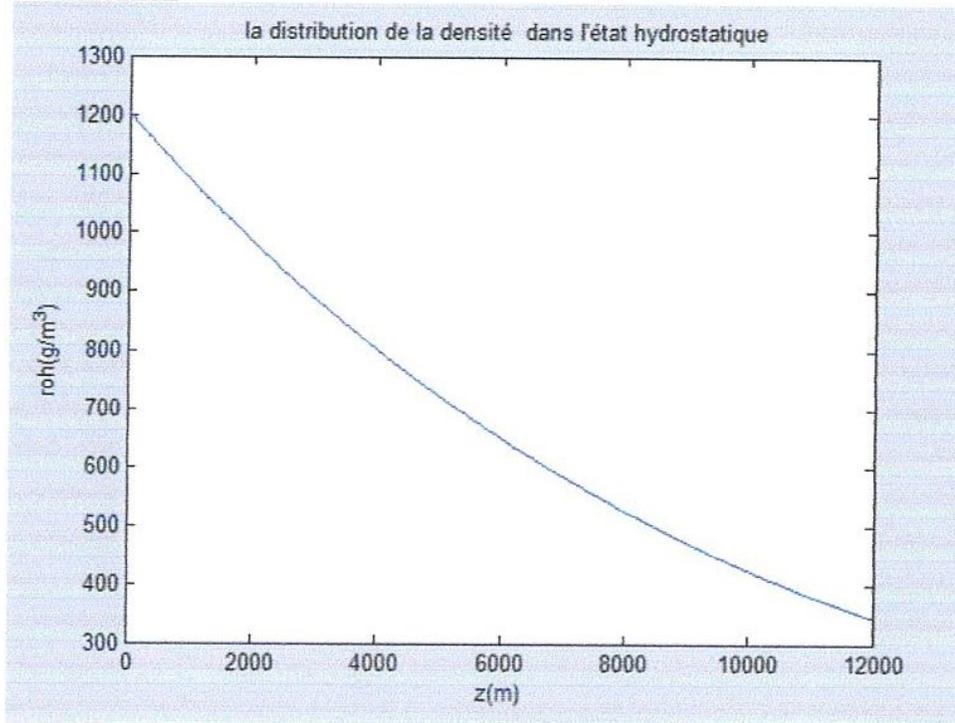


FIGURE 2.4 – La distribution de la densité dans l'état hydrostatique avec la condensation



Chapitre 3

Modèle d'un cyclone tropical

3.1 Introduction au modèle

Dans ce chapitre nous allons illustrer le modèle mathématique d'un cyclone tropical que Prof. Oscar Díaz Rodríguez de l'*Instituto de Meteorología de La Habana*, Cuba, Prof. José Marín Antuña de l'*Universidad de La Habana*, Cuba, et Prof. Hisao Fujita Yashima de l'Université de Guelma proposent ; la candidate a eu elle aussi l'opportunité de participer à des discussions de l'élaboration du modèle par des discussions avec le prof. Hisao Fujita Yashima sur la possibilité de la résolution du système d'équations pour la structure spatiale dans le schéma d'approximation par séparation de l'évolution temporelle et la structure spatiale.

Les idées fondamentales de ce modèle sont celles de [5] et [12]. En effet dans le travail [5] les auteurs ont étudié un modèle de l'écoulement vertical ascendant de l'air provoqué par la chaleur latente de la condensation de la vapeur de l'eau. Dans [5] on calcule la densité, la température et la vitesse de l'air à l'intérieur d'une "cheminée", cylindre vertical de 12 km, en supposant que du bas de la cheminée entre librement l'air avec la densité et la température

ordinaires ($T = 300^\circ \text{ K}$, la pression = $R_1 \rho T = 1013 \text{ mb}$) et avec la vapeur d'eau saturé (la humidité relative = 100 %). Quand il y a un écoulement ascendant, il y a la condensation de la vapeur d'eau et par conséquent il y a un réchauffement de l'air. Pour cela au sommet de la cheminée la pression (que nous désignons par $p = R_1 \rho T$) sera plus grande que celle de l'extérieur de la cheminée cylindro (les auteurs de [5] ont supposé que la pression de l'extérieur est celle de la distribution de l'état hydrostatique de l'air sec). On a interprété cette différence de pression divisée par la hauteur de la cheminée comme la force exercée sur l'air se trouvant dans la cheminée.

Cette "interprétation" peut être un peu arbitraire. Mais, en tout cas le calcul effectué dans [5] donne une bonne caractérisation de l'évolution de l'écoulement dans la cheminée. Or, on pourrait poser la condition qu'au sommet de la cheminée la pression à l'intérieur de la cheminée et celle à l'extérieur soient égales et interpréter la différence de la pression qui sera créé à l'entrée (extrémité inférieure, de la cheminée) entre la pression intérieure et celle de l'extérieure comme la force qui pousse l'air se trouvant dans la cheminée. Cette interprétation serait plus naturelle du point de vue physique.

Les fonctions inconnues comme vitesse, densité et température dans les équations dépendent du temps t et de la position $z = x_3$. La résolution du système d'équations aux dérivées partielles contenant les dérivées par rapport à t ainsi que celles par rapport à z semble très difficile. Ainsi dans [5] les auteurs ont utilisé l'approximation par séparation de l'évolution temporelle et de la structure spatiale, ce qui leur a permis d'effectuer le calcul et d'obtenir une solution numérique qui décrit d'une manière satisfaisante l'évolution de l'écoulement de l'air.

Comme cette approximation par séparation de l'évolution temporelle et de la structure spatiale semble très utile, on propose d'utiliser la même idée pour le modèle du cyclone tropical.

3.2 Symétrie axiale et coordonnées cylindriques

Pour formuler le modèle proposé, on introduit les coordonnées cylindriques

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad z = x_3, \quad x_1 = r \cos \vartheta, \quad x_2 = r \sin \vartheta, \quad (3.1)$$

et on considère le domaine

$$\Omega = \{(r, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid \Lambda_0 < r < \Lambda_1, 0 < z < \bar{z}_1\}, \quad (3.2)$$

où l'axe z est choisi de telle sorte qu'il coïncide avec l'axe du mouvement circulaire de l'air et que donc l'origine $(0, 0, 0)$ des coordonnées correspond au centre du cyclone tropical, projeté sur la surface du niveau de la mer $z = 0$. D'autre part Λ_1 et \bar{z}_1 sont des limites raisonnablement estimées du rayon et de la hauteur de la structure effective d'un cyclone tropical, par exemple on pourrait prendre

$$\Lambda_1 = 200 \text{ km}, \quad \bar{z}_1 = 12 \text{ km},$$

tandis que Λ_0 est à considérer comme le rayon de l'*oeil*. On rappelle que la genèse et la structure de l'*oeil* demeure une des questions les plus difficiles et dans cette première tentative de modélisation de l'évolution de la structure interne d'un cyclone tropical on va examiner seulement les zones extérieures à l'*oeil*, pour fixer l'idée on choisit par exemple

$$\Lambda_0 = 10 \text{ km}.$$

Comme il est bien connu, les dérivées par rapport aux coordonnées cartésiennes et celles par rapport aux coordonnées cylindriques sont liées par les relations

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.3)$$

On introduit les notations v_r , v_ϑ et v_z qui sont respectivement les composantes radiale, tangentielle et verticale de la vitesse v . C'est-à-dire, les composantes v_1 , v_2 , v_3 de la vitesse v dans le système de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) et les composantes v_r , v_ϑ et v_z sont reliées par les relations

$$v_r = v_1 \cos \vartheta + v_2 \sin \vartheta, \quad v_\vartheta = -v_1 \sin \vartheta + v_2 \cos \vartheta, \quad v_z = v_3. \quad (3.4)$$

Dans notre modèle on suppose la symétrie axiale, c'est-à-dire on suppose que toutes les fonctions y comprises les trois composantes de la vitesses (composantes radiale, tangentielle et verticale) ne dépendent pas de ϑ ; on a donc

$$\varrho = \varrho(t, r, z), \quad T = T(t, r, z), \quad v_r = v_r(t, r, z), \quad v_\vartheta = v_\vartheta(t, r, z), \quad v_z = v_z(t, r, z).$$

En ce qui concerne la force de Coriolis, on choisit x_1 dans la direction de Est-Ouest et x_2 dans la direction de Nord-Sud. Alors dans les coordonnées (x_1, x_2, x_3) la vitesse angulaire ω de la rotation de la Terre s'exprime par

$$\begin{pmatrix} 0 \\ |\omega| \cos \varphi_0 \\ |\omega| \sin \varphi_0 \end{pmatrix},$$

où φ_0 est la latitude du centre du cyclone. Si on traduit ces relations dans les coordonnées cylindriques, la force de Coriolis $2\omega \times v$ aura la composante

radiale

$$2|\omega| \cos \varphi_0 v_z \cos \vartheta - 2|\omega| \sin \varphi_0 v_\vartheta,$$

la composante tangentielle

$$-2|\omega| \cos \varphi_0 v_z \sin \vartheta + 2|\omega| \sin \varphi_0 v_r$$

et la composante verticale

$$-2|\omega| \cos \varphi_0 (\cos \vartheta v_r + \sin \vartheta v_\vartheta).$$

Mais pour garantir la symétrie par rapport à l'axe z , on néglige la force de Coriolis due à la composante verticale de la vitesse et la composante verticale de la force de Coriolis. De la sorte, la force de Coriolis que l'on considère sera

$$\begin{pmatrix} -2|\omega| \sin \varphi_0 v_\vartheta \\ 2|\omega| \sin \varphi_0 v_r \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

pour plus de détail [1]

3.3 Système d'équations d'un cyclone tropical

Pour formuler les équations du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau dans le cyclone tropical, dans l'équation (1.6) nous posons

$$\nabla \Phi = (0, 0, g),$$

où g est l'accélération de pesanteur. De plus, il faut prendre en considération également la force

$$-\Sigma \nabla \Phi = (0, 0, -g\Sigma)$$

due à la "friction" des gouttelettes avec l'air.

Or, même si nous avons adopté le modèle sans viscosité et sans onductivité thermique, il nous semble raisonnable de tenir compte au moins l'effet de la friction entre l'air et la surface de la mer. Nous supposons que l'effet de cette friction est représenté par

$$-\varepsilon_1(x_3)(v - (v \cdot e_3)e_3),$$

où $\varepsilon_1(x_3)$ est une fonction qui est strictement positive dans le voisinage de $x_3 = 0$ et s'annule pour x_3 suffisamment grand.

Donc, en résumant nos considérations, dans l'équation (1.6) nous posons

$$F = (0, 0, -g\Sigma) - \varepsilon_1(x_3)(v - (v \cdot e_3)e_3).$$

D'autre part, dans l'équation (1.7) il faut considérer la source de la chaleur

$$E = L_{tr}H_{tr},$$

qui représente le réchauffement de l'air par la chaleur latente de la condensation. Ainsi en précisant la forme des équations (1.6) et (1.7), nous avons

$$\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v\right) = -R_1\nabla\varrho T - (\varrho + \Sigma)ge_3 - 2\varrho\omega \times v, \quad (3.6)$$

$$\varrho c_v\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T\right) = -R_1\varrho T\nabla \cdot v + L_{tr}H_{tr}. \quad (3.7)$$

Maintenant nous transformons les équations (2.12), (3.6), (3.7) dans les coordonnées cylindriques sous l'hypothèse de la symétrie axiale. En utilisant les relations (3.3) et (3.5) et l'hypothèse de l'indépendance de toutes les fonctions de ϑ , par des calculs élémentaires, on obtient

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\varrho v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\varrho v_z)}{\partial z} = -H_{tr}, \quad (3.8)$$

$$\varrho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r} v_\vartheta^2 + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -R_1 \frac{\partial(\varrho T)}{\partial r} + l_0 \varrho v_\vartheta - \varepsilon_1(z) v_r, \quad (3.9)$$

$$\varrho \left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\vartheta v_r + v_z \frac{\partial v_\vartheta}{\partial z} \right) = -l_0 \varrho v_r - \varepsilon_1(z) v_\vartheta, \quad (3.10)$$

$$\varrho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -R_1 \frac{\partial(\varrho T)}{\partial z} - [\Sigma + \varrho] g, \quad (3.11)$$

$$\varrho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -R_1 \varrho T \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_r + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + L_{tr} H_{tr}, \quad (3.12)$$

où

$$l_0 = 2|\omega| \sin \varphi_0.$$

Même si dans le système d'équations (3.8)–(3.12) on ne considère pas la viscosité et la conductivité thermique, on a besoin de certaines conditions aux limites pour ce système d'équations. Toutefois nous allons les préciser après l'introduction de l'approximation du système d'équations par la séparation de l'évolution temporelle et de la structure spatiale (voir (3.24)–(3.31)).

3.4 Approximation par la séparation de l'évolution temporelle et de la structure spatiale

Rappelons que dans [5] pour contourner la difficulté du système d'équations aux dérivées partielles décrivant contemporanément l'évolution temporelle et la structure spatiale, les auteurs ont utilisé l'approximation par la

séparation de l'évolution temporelle et de la structure spatiale, qui a permis de calculer numériquement la solution. Nous suivons cette idée et proposons un schéma de systèmes d'équations séparant l'évolution temporelle et la structure spatiale.

Pour ce faire, supposons qu'à la distance $r = \Lambda_1$, c'est-à-dire sur la partie de la frontière de Ω se trouvant à la distance $r = \Lambda_1$ du centre du cyclone, l'air entre dans Ω de la partie inférieure et sort de la partie supérieure. Plus précisément, en choisissant une valeur intermédiaire convenable $\bar{\zeta}$ entre 0 et \bar{z}_1 ($\bar{\zeta} < z < \bar{z}_1$), on pose

$$\Gamma_+ = \{r = \Lambda_1, \bar{\zeta} < z < \bar{z}_1\}, \quad \Gamma_- = \{r = \Lambda_1, 0 < z < \bar{\zeta}\}, \quad (3.13)$$

et on suppose que sur Γ_+ on a $w_r > 0$ et sur Γ_- on a $w_r < 0$. C'est-à-dire, on suppose que l'air sort de Ω passant par Γ_+ et entre dans Ω passant par Γ_- .

Cela étant, nous proposons l'introduction d'un paramètre

$$\alpha(t),$$

qui représente l'intensité du vent dans le cyclone, qui évolue avec le temps. En effet, dans le travail [5] les auteurs ont utilisé une fonction analogue et l'examen de ce travail nous suggère que dans la première approximation nous pouvons utiliser une idée analogue. Nous proposons donc de définir la fonction $\alpha(t)$ par l'équation

$$M_1 \frac{d}{dt} \alpha(t) = 2\pi \Lambda_1 \int_0^{\bar{\zeta}} [p_{ex}(z) - p_{in}(z)] dz - g \Sigma_1(t), \quad (3.14)$$

où M_1 est la masse totale de l'air se trouvant dans Ω , tandis que $\Sigma_1(t)$ est la masse totale de l'eau liquide ou solide se trouvant dans Ω à l'instant t .

En considérant $\alpha(t)$ comme paramètre de l'évolution temporelle, nous posons

$$v_r(t, r, z) = \alpha(t)w_r(t; r, z), \quad v_\vartheta(t, r, z) = \alpha(t)w_\vartheta(t; r, z), \quad v_z(t, r, z) = \alpha(t)w_z(t; r, z), \quad (3.15)$$

et supposons que

$$\frac{\partial w_r}{\partial t} \approx 0, \quad \frac{\partial w_z}{\partial t} \approx 0, \quad \frac{\partial w_\vartheta}{\partial t} \approx 0, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} \approx 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} \approx 0. \quad (3.16)$$

En outre, si on rappelle l'expression de H_{tr} donnée dans (1.12)

$$H_{tr} = (\bar{\pi}_{vs}(T)) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) v_3,$$

on peut le réécrire dans la forme

$$H_{tr} = \alpha(t)h_{tr}, \quad (3.17)$$

$$h_{tr} = (\bar{\pi}_{vs}(T)) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) w_z. \quad (3.18)$$

De l'hypothèse (3.16) et de la définition (3.18) on peut déduire que h_{tr} ne dépende que faiblement de t , c'est-à-dire, de manière analogue à (3.16) on a

$$\frac{\partial h_{tr}}{\partial t} \approx 0.$$

Compte tenu de ces relations, nous proposons le système d'équations pour la structure spatiale

$$\frac{\alpha(t)}{r} \frac{\partial(r\rho w_r)}{\partial r} + \frac{\alpha(t)}{r} \frac{\partial(r\rho w_z)}{\partial z} = -\alpha(t)w_z h_{tr}, \quad (3.19)$$

$$\varrho \alpha^2(t) \left(w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} - \frac{1}{r} w_\vartheta^2 + w_z \frac{\partial w_r}{\partial z} \right) = -R_1 \frac{\partial}{\partial r} (\varrho T) + l_0 \varrho \alpha(t) w_\vartheta - \varepsilon_1(z) \alpha(t) w_r, \quad (3.20)$$

$$\varrho\alpha^2(t)\left(w_r\frac{\partial w_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r}w_\vartheta w_r + w_z\frac{\partial w_\vartheta}{\partial z}\right) = -l_0\varrho\alpha(t)w_r - \varepsilon_1(z)\alpha(t)w_\vartheta, \quad (3.21)$$

$$\varrho\alpha^2(t)\left(w_r\frac{\partial w_z}{\partial r} + w_z\frac{\partial w_z}{\partial z}\right) = -R_1\frac{\partial}{\partial z}(\varrho T) - g\varrho, \quad (3.22)$$

$$\varrho c_v\alpha(t)\left(w_r\frac{\partial T}{\partial r} + w_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) = -R_1\alpha(t)\varrho T\left(\frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{1}{r}w_r + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) + L_{tr}\alpha(t)h_{tr}, \quad (3.23)$$

Ce système d'équations (3.19)–(3.23) est considéré avec les conditions

$$\varrho = \bar{\varrho}^* \quad \text{sur } \Gamma_+ = \{r = \Lambda_1, \bar{\zeta} < z < \bar{z}_1\}, \quad (3.24)$$

$$T = \bar{T}^* \quad \text{sur } \Gamma_+ = \{r = \Lambda_1, \bar{\zeta} < z < \bar{z}_1\}, \quad (3.25)$$

$$w_r = \bar{w}_r^* \quad \text{sur } \Gamma_+ = \{r = \Lambda_1, \bar{\zeta} < z < \bar{z}_1\}, \quad (3.26)$$

$$w_\vartheta = \bar{w}_\vartheta^* \quad \text{sur } \Gamma_+ = \{r = \Lambda_1, \bar{\zeta} < z < \bar{z}_1\}, \quad (3.27)$$

$$w_z = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+ = \{r = \Lambda_1, \bar{\zeta} < z < \bar{z}_1\}, \quad (3.28)$$

$$w_r \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_- = \{r = \Lambda_1, 0 < z < \bar{\zeta}\}, \quad (3.29)$$

$$w_z = 0 \quad \text{sur } \{z = 0\} \cup \{z = \bar{z}_1\}, \quad (3.30)$$

$$w_r = 0 \quad \text{sur } \{r = \Lambda_0\}. \quad (3.31)$$

3.5 Remarques sur les conditions aux limites

Dans les conditions (3.24)–(3.31) nous devons choisir les données $\bar{\varrho}^*$, \bar{T}^* , \bar{w}_r^* , \bar{w}_ϑ^* . Pour obtenir une meilleure modélisation, nous devons les choisir de manière appropriée.

Avant tout, conformément à notre hypothèse sur l'entrée et la sortie de l'air dans et de Ω , il faut imposer que

$$\bar{w}_r^* \geq 0, \quad \bar{w}_\vartheta^* \leq 0.$$

D'autre part, en rappelant que l'extérieur du cyclone l'air n'est pas complètement sec ne contient pas la vapeur d'eau saturée. Ça signifie qu'il est bon de choisir $\bar{\varrho}^*$ et \bar{T}^* de manière que

$$T_{hs}(z) < \bar{T}^* < T_{hs}^*(z), \quad \varrho_{hs}(z) < \bar{\varrho}^* < \varrho_{hs}^*(z),$$

où $\varrho_{hs}(z)$ et $T_{hs}(z)$ sont les distributions de la densité et de la température dans l'état hydrostatique sans condensation de la vapeur d'eau, tandis que $\varrho_{hs}^*(z)$ et $T_{hs}^*(z)$ sont les distributions de la densité et de la température dans l'état hydrostatique avec condensation de la vapeur d'eau.

Les fonctions $\varrho_{hs}(z)$ et $T_{hs}(z)$ sont données dans (2.7) et (2.8) avec $\Phi = \Phi(z) = gz$, c'est-à-dire

$$T_{hs}(z) = T_0 - \frac{g(\gamma - 1)}{R_1\gamma}z, \quad \frac{g(\gamma - 1)}{R_1\gamma} \approx 9,8 \text{ } ^\circ K/km,$$

$$\varrho_{hs}(z) = \left(\varrho_0^{\gamma-1} - \frac{\gamma-1}{\gamma h}gz \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

D'autre part, $T_{hs}^*(z)$ et $\varrho_{hs}^*(z)$ sont les fonctions qui sont la solution du système d'équations (2.15)–(2.16)

$$R_1 \frac{d}{dz} (\varrho_{hs}^* T_{hs}^*) = -g \varrho_{hs}^*,$$

$$\varrho_{hs}^* c_v \frac{dT_{hs}^*}{dz} - R_1 T_{hs}^* \frac{d\varrho_{hs}^*}{dz} = \left(R_1 T_{hs}^* + L_{tr} \right) \left(\bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*) \frac{d}{dz} \log \varrho_{hs}^* - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*) \right)$$

avec les conditions

$$T_{hs}^*(0) = T_0, \quad \varrho_{hs}^*(0) = \varrho_0.$$

Nous avons calculée numériquement la solution (voir (2.17)–(2.18) et (2.19)–(2.20)),

Chapitre 4

Equations semi-linéarisées

4.1 Première formulation des équations semi-linéarisées et les caractéristiques

Pour résoudre le système d'équations (3.19)–(3.23), il faut avant tout étudier les équations semi-linéarisées. En effet, comme nous le verrons, le système d'équations semi-linéarisées que nous proposons ci-dessous peut être étudié d'une manière analogue à celui qu'on a étudié dans [5].

Pour ce faire, nous choisissons les fonctions

$$(\bar{w}_r, \bar{w}_z),$$

qui déterminent les trajectoires sur le plan (r, z) . Pour notre modélisation, il est important de choisir les fonctions (\bar{w}_r, \bar{w}_z) d'une manière adéquate, c'est-à-dire fonctions suffisamment proches de la solution. Nous les choisissons de manière qu'elles vérifient entre autres la condition

$$\sqrt{\bar{w}_r^2 + \bar{w}_z^2} \neq 0.$$

Nous proposons le système d'équations

$$\frac{\alpha(t)}{r} \frac{\partial(r \varrho w_r)}{\partial r} + \frac{\alpha(t)}{r} \frac{\partial(r \varrho w_z)}{\partial z} = -\alpha(t) \bar{w}_z h_{1r}, \quad (4.1)$$

$$\varrho\alpha^2(t)\left(w_r\frac{\partial w_r}{\partial r} - \frac{1}{r}w_\vartheta^2 + w_z\frac{\partial w_r}{\partial z}\right) = -R_1\frac{\partial}{\partial r}(\varrho T) + l_0\varrho\alpha(t)w_\vartheta - \varepsilon_1(z)\alpha(t)w_r, \quad (4.2)$$

$$\varrho\alpha^2(t)\left(\bar{w}_r\frac{\partial w_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r}w_\vartheta\bar{w}_r + \bar{w}_z\frac{\partial w_\vartheta}{\partial z}\right) = -l_0\varrho\alpha(t)\bar{w}_r - \varepsilon_1(z)\alpha(t)w_\vartheta, \quad (4.3)$$

$$\varrho\alpha^2(t)\left(w_r\frac{\partial w_z}{\partial r} + w_z\frac{\partial w_z}{\partial z}\right) = -R_1\frac{\partial}{\partial z}(\varrho T) - g\varrho, \quad (4.4)$$

$$\varrho c_v\alpha(t)\left(w_r\frac{\partial T}{\partial r} + w_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) = -R_1\alpha(t)\varrho T\left(\frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{1}{r}w_r + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) + L_{tr}\alpha(t)\bar{w}_z\bar{h}_{tr}, \quad (4.5)$$

avec la contrainte

$$\frac{w_r}{\sqrt{w_r^2 + w_z^2}} = \frac{\bar{w}_r}{\sqrt{\bar{w}_r^2 + \bar{w}_z^2}}, \quad \frac{w_z}{\sqrt{w_r^2 + w_z^2}} = \frac{\bar{w}_z}{\sqrt{\bar{w}_r^2 + \bar{w}_z^2}}. \quad (4.6)$$

Dans (4.1)–(4.6), outre \bar{w}_r , \bar{w}_z , la fonction \bar{h}_{tr} est elle aussi donnée. Comme on le voit sans difficulté, en vertu de la contrainte (4.6) il n'est pas nécessaire de trouver les deux fonctions inconnues w_r et w_z ; il nous suffit de trouver la fonction

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_z^2}. \quad (4.7)$$

On remarque que les équations (4.1)–(4.5) pour les inconnues ϱ , w_r , w_ϑ , w_z , T , sont des équations de transport, dont les caractéristiques sont données par

$$(\bar{w}_r, \bar{w}_z).$$

Rappelons que la méthode des caractéristiques est une technique utilisée principalement pour la résolution des équations aux dérivées partielles du premier ordre (en particulier les équations de type transport); cette méthode consiste à transformer une équation aux dérivées partielles en une famille d'équations différentielles ordinaires sur chaque caractéristique.

Désignons par

$$\gamma(s) = (\gamma_r(s), \gamma_z(s))$$

les caractéristiques déterminées par (\bar{w}_r, \bar{w}_z) . On voit donc que les fonctions $\gamma_r(s)$ et $\gamma_z(s)$ doivent satisfaire aux équations

$$\frac{d}{ds} \gamma_r(s) = \frac{\bar{w}_r}{\sqrt{\bar{w}_r^2 + \bar{w}_z^2}} \equiv b_r(s), \quad \frac{d}{ds} \gamma_z(s) = \frac{\bar{w}_z}{\sqrt{\bar{w}_r^2 + \bar{w}_z^2}} \equiv b_z(s). \quad (4.8)$$

Si on désigne par τ le "temps" par rapport auquel le "point" se déplace avec la vitesse (\bar{w}_r, \bar{w}_z) , et si on écrit à titre provisoire $\gamma_r \equiv r$ et $\gamma_z \equiv z$ (les notations $r = r(s)$, $z = z(s)$ seront commodes pour le calcul numérique), alors on a

$$\frac{d\gamma_r}{d\tau} = \frac{dr}{d\tau} = \bar{w}_r, \quad \frac{d\gamma_z}{d\tau} = \frac{dz}{d\tau} = \bar{w}_z. \quad (4.9)$$

On a aussi

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{\bar{w}_r^2 + \bar{w}_z^2}. \quad (4.10)$$

Des relations (4.8)–(4.10) on déduit les relations

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{ds}{d\tau} \frac{d}{ds} = \sqrt{\bar{w}_r^2 + \bar{w}_z^2} \frac{d}{ds} = \frac{dr}{d\tau} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{dz}{d\tau} \frac{\partial}{\partial z} = \bar{w}_r \frac{\partial}{\partial r} + \bar{w}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (4.11)$$

$$\frac{d}{ds} = \frac{dr}{ds} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial}{\partial z} = b_r \frac{\partial}{\partial r} + b_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.12)$$

4.2 Transformation des équations semi-linéarisées

Comme d'après (4.6) et (4.7) on a

$$w_r = b_r w, \quad w_n = b_n w. \quad (4.13)$$

Utilisant ces relations et multipliant par $\frac{r}{\alpha(t)}$ les deux membres de l'équation (4.1), on obtient

$$-r \bar{w}_z \bar{h}_{tr} = \frac{\partial(r \rho w_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \rho w_z)}{\partial z} = \frac{\partial(r \rho b_r w)}{\partial r} + \frac{\partial(r \rho b_z w)}{\partial z} =,$$

$$= b_r \frac{\partial(r\rho w)}{\partial r} + b_v \frac{\partial(r\rho w)}{\partial z} + r\rho w \left(\frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{\partial b_v}{\partial z} \right).$$

Donc, en vertu de (4.12) on a

$$\frac{d}{ds}(r\rho w) + r\rho w \left(\frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{\partial b_v}{\partial z} \right) = -r\bar{w}_z \bar{h}_{tr}. \quad (4.14)$$

Comme la famille des courbes γ est définie par (4.8), en considérant (b_r, b_z) comme un champ de vitesse sur le plan (r, z) et en introduisant les coordonnées lagrangiennes (η, ζ) relatives au flux défini par le champ de vitesse (b_r, b_z) , on a

$$\gamma(\eta, \zeta, 0) = (\eta, \zeta), \quad \gamma(\eta, \zeta, s) = (r(\eta, \zeta, s), z(\eta, \zeta, s)).$$

Comme il est bien connu (voir les cours de *Mécanique des fluides*), le déterminant $J(s) = \det \Xi(s)$ de la matrice

$$\Xi(s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r(\eta, \zeta, s)}{\partial \eta} & \frac{\partial z(\eta, \zeta, s)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial r(\eta, \zeta, s)}{\partial \zeta} & \frac{\partial z(\eta, \zeta, s)}{\partial \zeta} \end{pmatrix}$$

représente le rapport de la variation du volume réalisée par le flux $\vec{b} = (b_r, b_z)$ et vérifie l'équation

$$\frac{d}{ds} J(s) = J(s) \operatorname{div} \vec{b} = J(s) \left(\frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{\partial b_v}{\partial z} \right).$$

On a donc

$$\begin{aligned} & J(s) \left[\frac{d}{ds}(r\rho w) + r\rho w \left(\frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{\partial b_v}{\partial z} \right) \right] = \\ & = J(s) \frac{d}{ds}(r\rho w) + (r\rho w) \frac{d}{ds} J(s) = \frac{d}{ds} [J(s)r(s)\rho(s)w(s)]. \end{aligned}$$

Par conséquent, de (4.14) on déduit que

$$\frac{d}{ds} [J(s)r(s)\rho(s)w(s)] = r(s)J(s)\bar{w}_z(s)\bar{h}_{tr}(s). \quad (4.15)$$

Rappelons que $\vec{b} = (b_r, b_z)$ est une vitesse normalisée, c'est-à-dire

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_r^2 + b_z^2} = 1.$$

Donc $J(s)$ qui représente le rapport de la variation du volume réalisée par le flux $\vec{b} = (b_r, b_z)$ représente le rapport de la variation de la distance entre les courbes γ voisines, ou, variation de l'amplitude de la zone délimitée par deux courbes γ voisines. Donc, si on considère la zone $\Gamma(s)$ délimitée par deux surfaces engendrées par deux courbes voisines γ et γ_ε dans Ω , engendrées par la rotation autour de l'axe z (dans \mathbb{R}^3), $2\pi r(s)J(s)$ représente la section de cette zone, dans laquelle l'air avec la vitesse $(\alpha w_r, \alpha w_z)$ passe. Nous posons

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(s) = 2\pi r(s)J(s). \quad (4.16)$$

Alors de (4.15) on déduit

$$\frac{d}{ds}[\mathcal{S}(s)\varrho(s)w(s)] = -\mathcal{S}(s)\bar{w}_z(s)\bar{h}_{tr}(s). \quad (4.17)$$

L'équation (4.17) peut être considérée comme l'expression de la loi de la conservation de la masse de l'air qui passe dans le "tuyau" de section $\mathcal{S}(s)$ qui subit la diminution de la masse $-\mathcal{S}(s)\bar{w}_z(s)\bar{h}_{tr}(s)$ à cause de la transition de phase de l'eau (qui transforme H_2O gazeuse en liquide ou solide).

Quant à l'équation (4.3), on remarque que d'après (4.11) on a

$$\bar{w}_r \frac{\partial w_\vartheta}{\partial r} + \bar{w}_z \frac{\partial w_\vartheta}{\partial z} = \frac{d}{d\tau} w_\vartheta = \sqrt{\bar{w}_r^2 + \bar{w}_z^2} \frac{dw_\vartheta(s)}{ds}.$$

Donc, en divisant les deux membres de (4.3) par $\alpha(t)$, on a

$$\varrho\alpha(t) \left(\frac{dw_\vartheta(s)}{ds} \sqrt{\bar{w}_r^2 + \bar{w}_z^2} + \frac{1}{r(s)} w_\vartheta(s)\bar{w}_r(s) \right) = -l_0\varrho(s)\bar{w}_r(s) - \varepsilon_1(z(s))w_\vartheta(s). \quad (4.18)$$

Pour transformer l'équation (4.5), on remarque d'abord que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial(r \varrho w_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \varrho w_z)}{\partial z} &= \frac{\varrho w_r}{r} + \varrho \frac{\partial w_r}{\partial r} + w_r \frac{\partial \varrho}{\partial r} + \varrho \frac{\partial w_z}{\partial z} + w_z \frac{\partial \varrho}{\partial z} = \\ &= \varrho \left(\frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_r}{r} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + w_r \frac{\partial \varrho}{\partial r} + w_z \frac{\partial \varrho}{\partial z}. \end{aligned}$$

Or, comme en vertu de (4.12) et de (4.13) on a

$$w_r \frac{\partial \varrho}{\partial r} + w_z \frac{\partial \varrho}{\partial z} = w \frac{d\varrho}{ds},$$

on déduit de (4.1) que

$$\varrho \left(\frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_r}{r} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) = -w \frac{d\varrho}{ds} - \bar{w}_z \bar{h}_{tr}.$$

En substituant cette égalité dans (4.5) et en remarquant la relation

$$w_r \frac{\partial T}{\partial r} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} = w \frac{dT}{ds},$$

on transforme (4.5) en

$$\varrho c_v \left(w(s) \frac{dT(s)}{ds} \right) - R_1 T(s) \left(w(s) \frac{d\varrho(s)}{ds} \right) = (R_1 T(s) + L_{tr}) \bar{w}_z(s) \bar{h}_{tr}(z(s)). \quad (4.19)$$

Pour compléter la transformation des équations, substituons d'abord

$$w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} + w_z \frac{\partial w_r}{\partial z} = w \frac{dw_r}{ds}$$

dans l'équation (4.2) et

$$w_r \frac{\partial w_z}{\partial r} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} = w \frac{dw_z}{ds}$$

dans l'équation (4.4). Ensuite multiplions par b_r les deux membres de (4.2) avec la substitution indiquée ci-dessus et par b_z les deux membres de (4.4) avec la substitution indiquée ci-dessus. Ainsi nous avons

$$\varrho \alpha^2(t) \left(b_r w \frac{dw_r}{ds} - \frac{b_r}{r} w \vartheta^2 \right) = -R_1 b_r \frac{\partial}{\partial r} (\varrho T) + l_0 b_r \varrho \alpha(t) w \vartheta - b_r \varepsilon_1(z) \alpha(t) w_r,$$

$$\varrho\alpha^2(t)b_z w \frac{dw_z}{ds} = -R_1 b_z \frac{\partial}{\partial z}(\varrho T) - b_z g \varrho.$$

Remarquons que, comme $b_r w = w_r$ et $b_z w = w_z$, en faisant la somme des deux équations, on obtient

$$\begin{aligned} & \varrho\alpha^2(t) \frac{1}{2} \left(\frac{d}{ds} w_r^2 + \frac{d}{ds} w_z^2 \right) - \varrho\alpha^2(t) \frac{b_r}{r} w_\vartheta^2 = \\ & = -R_1 \left(b_r \frac{\partial}{\partial r}(\varrho T) + b_z \frac{\partial}{\partial z}(\varrho T) \right) + l_0 b_r \varrho \alpha(t) w_\vartheta - b_r \varepsilon_1(z) \alpha(t) w_r - b_z g \varrho. \end{aligned}$$

Remarquons encore que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{d}{ds} w_r^2 + \frac{d}{ds} w_z^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} w^2 = w \frac{dw}{ds}, \\ & b_r \frac{\partial}{\partial r}(\varrho T) + b_z \frac{\partial}{\partial z}(\varrho T) = \frac{d}{ds}(\varrho T). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} & \alpha(t)^2 \varrho(s) \left(w(s) \frac{dw(s)}{ds} - \frac{b_r(s)}{r(s)} w_\vartheta^2(s) \right) = \quad (4.20) \\ & = -R_1 \frac{d}{ds} (\varrho(s) T(s)) + b_r(s) \alpha(t) \varrho(s) l_0 w_\vartheta(s) - b_r(s) \varepsilon_1(z(s)) \alpha(t) w_r(s) - b_z(s) g \varrho(s). \end{aligned}$$

4.3 Deuxième formulation des équations semi-linéarisées

Pour que l'on puisse résoudre au moins numériquement le système d'équations obtenues ci-dessus, nous allons les réécrire dans un ordre adéquate pour la résolution.

Supposons que les fonctions

$$(\bar{w}_r, \bar{w}_z)$$

sont données sur notre domaine sur le plan (r, z) . Soient les courbes γ les caractéristiques définies par (\bar{w}_r, \bar{w}_z) (voir (4.8)).

Sur chaque caractéristique γ on va résoudre d'abord l'équation

$$(4.18) \quad \varrho \alpha(t) \left(\frac{dw_\vartheta(s)}{ds} \sqrt{\bar{w}_r^2 + \bar{w}_z^2} + \frac{1}{r(s)} w_\vartheta(s) \bar{w}_r(s) \right) = -l_0 \varrho(s) \bar{w}_r(s) - \varepsilon_1(z(s)) w_\vartheta(s).$$

On remarque que l'équation (4.18) ne contient que w_ϑ comme fonction inconnue.

Ensuite, en choisissant les valeurs $w(\bar{s}_1)$ et $\varrho(\bar{s}_1)$ à un point $s = \bar{s}_1$ (par exemple, point final), réécrivons l'équation (4.17) dans la forme

$$w(s) \varrho(s) \mathcal{S}(s) = w(\bar{s}_1) \varrho(\bar{s}_1) \mathcal{S}(\bar{s}_1) - \int_s^{\bar{s}_1} \bar{w}_z \bar{h}_{tr}(s') \mathcal{S}(s') ds'. \quad (4.21)$$

L'équation (4.21) nous permet de considérer la fonction w comme fonction définie par ϱ (ou ϱ comme fonction définie par w).

Cela étant nous pouvons envisager le système de deux équations

$$(4.19) \quad \varrho c_v \left(w(s) \frac{dT(s)}{ds} \right) - R_1 T(s) \left(w(s) \frac{d\varrho(s)}{ds} \right) = (R_1 T(s) + L_{tr}) \bar{w}_z(s) \bar{h}_{tr}(z(s)),$$

$$(4.20) \quad \alpha(t)^2 \varrho(s) \left(w(s) \frac{dw(s)}{ds} - \frac{b_r(s)}{r(s)} w_\vartheta^2(s) \right) =$$

$$= -R_1 \frac{d}{ds} (\varrho(s) T(s)) + b_r(s) \alpha(t) \varrho(s) l_0 w_\vartheta(s) - b_r(s) \varepsilon_1(z(s)) \alpha(t) w_r(s) - b_z(s) g \varrho(s)$$

pour deux fonctions inconnues $T(s)$ et $w(s)$ (ou $T(s)$ et $\varrho(s)$).

Chapitre 5

Résolution numérique des équations semi-linéarisées

Dans cette partie nous présentons les résultats du calculs numérique pour le système d'équations du mouvement dans une *cyclone tropical* sur les trajectoires, on commence d'abord de construire une trajectoires sur le plan (r,z) et puis donné quelque approximation qui nous utilisons dans notre système. Sur le plan technique, nous utilisons la méthode de différences finies (pour les généralités de la méthode de différences finies et ses applications aux équations de ce type, voir par exemple ([13]), ([14])). L'idée fondamentale de la méthode consiste à approximer les dérivées partielles par des différences discrètes qui les approchent avec une précision suffisante. Les outils techniques de base pour proposer des différences discrètes appropriées sont les développements de Taylor, dans lesquels on néglige les restes.

REMARQUE.

On doit calculé l'intégrale suivant

$$\frac{1}{12} \int_0^{12000} \varrho_{hs}(z) dz$$

On définit l'approximation suivant

$$\bar{q}_{hs}(z) \approx \bar{q}_{hs}(0) + \frac{\bar{q}_{hs}(7km) - \bar{q}_{hs}(0)}{7km} z \approx 1204 - 0.0789z$$

$$\frac{1}{12} \int_0^{12000} \bar{q}_{hs}(z) dz \approx \frac{1}{12} \int_0^{12000} (1204 - 0.0789z) dz \approx 730600$$

On prend comme la première valeur de $\zeta_1 = 619m$ et $\zeta_{11} = 9866m$, on définit la trajectoires (sur le plan (r,z)) par la fonction suivant

$$z(r) = \frac{18.5}{\pi} \arctan\left(\frac{r-11}{3}\right) + 0.619,$$

et pour calculer l'épaisseur on considère cette fonction

$$z_\varepsilon(r) = \frac{18.5 - 7\varepsilon}{\pi} \arctan\left(\frac{r-11 - \frac{\varepsilon}{0.619}}{3 + 4.8\varepsilon}\right) + 0.619 + \varepsilon$$

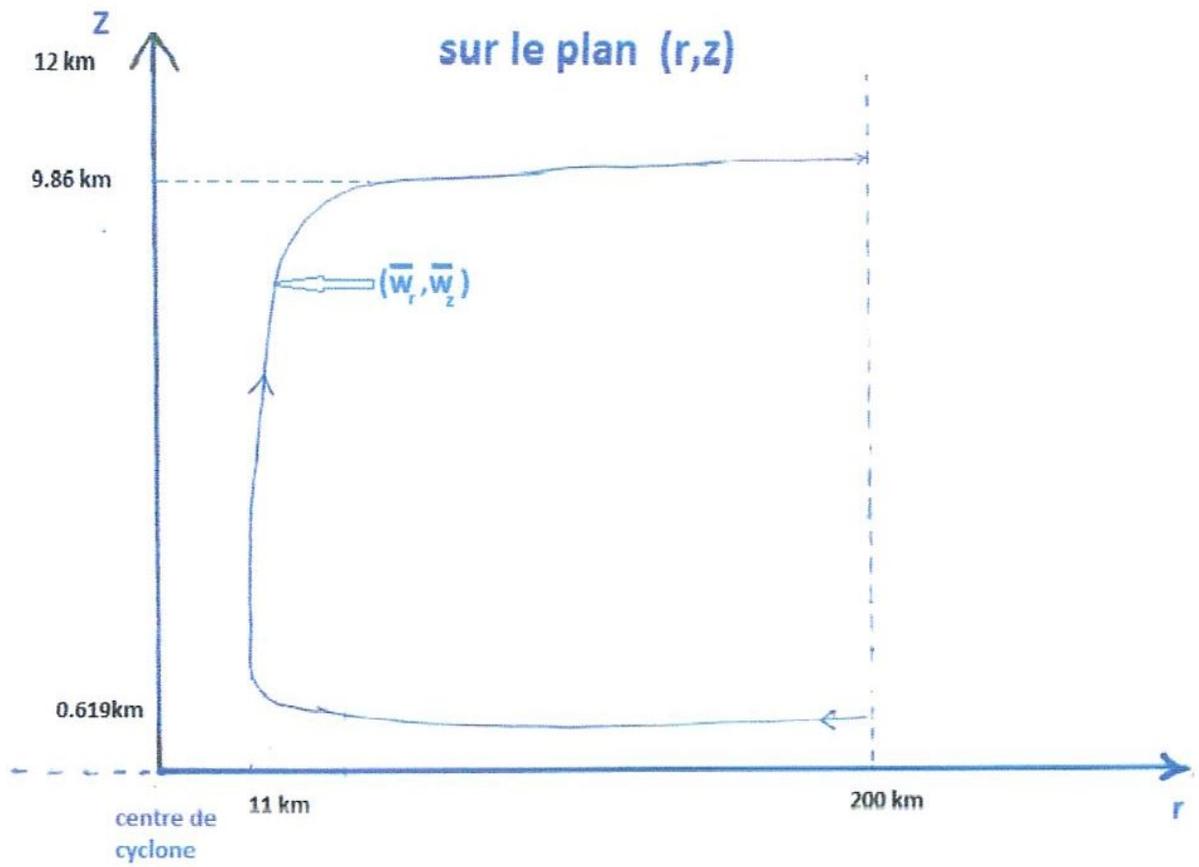
$$\frac{dz_\varepsilon(r)}{d\varepsilon} = -\frac{7}{\pi} \arctan\left(\frac{r-11}{3}\right) - \frac{18.5}{3\pi} \frac{1.61}{1 + \left(\frac{r-11}{3}\right)^2} - \frac{18.5}{0.62\pi} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{r-11}{3}\right)^2\right)} \frac{(r-11)}{3} + 1$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz(r)}{dr}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{6.16}{\pi(1 + \left(\frac{r-11}{3}\right)^2)}\right)^2}}$$

Donc

$$\Gamma(r) = \left(\frac{d}{d\varepsilon} z_\varepsilon(r)\right) \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{6.16}{\pi(1 + \left(\frac{r-11}{3}\right)^2)}\right)^2}}$$



5.1 Etude numérique des système l'équation

Pour calculer la solution du système d'équations nous considérons également la donnée final

$$\varrho(\bar{s}_1 = 200) = \bar{\varrho}.$$

$$T(\bar{s}_1 = 200) = \bar{T}.$$

$$w(\bar{s}_1 = 200) = \bar{w}.$$

l'équation que nous avons vues dans la section précédente ne sont pas facile à résoudre, Nous proposons d'introduire la "section" ou l'épaisseur de la couche qui déterminée par

$$\mathcal{S}(s) = \frac{1}{\Delta\varepsilon} \text{dist}(\gamma(s), \gamma_{\Delta\varepsilon}) 2\pi r(s), \quad (5.1)$$

où $\gamma(s)$ est la trajection en considération (définie par (\bar{w}_r, \bar{w}_z)) est $\gamma_{\Delta\varepsilon}$ est la trajectoire de l'air qui entre dans Ω (à $r = \Lambda_1$) avec la distance $\Delta\varepsilon$ de la trajectoire en considération.

nous réécrivons le système d'équations(4.18) (4.21),(4.19),(4.20), sur le plan(r,z) dans la forme

$$w(r)\varrho(r)\mathcal{S}(r) = w(\bar{r}_1)\varrho(\bar{r}_1)\mathcal{S}(\bar{r}_1) - \int_r^{\bar{r}_1} \bar{w}_z(r)\bar{h}_{tr}(z(r'))\mathcal{S}(r')\frac{ds'}{dr'}dr'. \quad (5.2)$$

$$= w(\bar{r}_1)\varrho(\bar{r}_1)\mathcal{S}(\bar{r}_1) - \int_r^{\bar{r}_1} \frac{\sqrt{\bar{w}_r^2 + \bar{w}_z^2}}{\bar{w}_r(r)}\bar{w}_z(r)\bar{h}_{tr}(z(r'))\mathcal{S}(r')dr'.$$

$$= w(\bar{r}_1)\varrho(\bar{r}_1)\mathcal{S}(\bar{r}_1) - \int_r^{\bar{r}_1} \sqrt{\bar{w}_r^2 + \bar{w}_z^2} \frac{b_z(r)}{b_r(r)}\bar{h}_{tr}(z(r'))\mathcal{S}(r')dr'.$$

$$\varrho\alpha(t)\left(\sqrt{\bar{w}_r^2}\frac{dw_\vartheta(r)}{dr} + \frac{1}{r}w_\vartheta(r)\bar{w}_r(r)\right) = -l_0\varrho(r)\bar{w}_r(r) - \varepsilon_1(z(r))w_\vartheta(r), \quad (5.3)$$

$$\varrho\alpha(t)\left(\sqrt{\bar{w}_r^2 + \bar{w}_z^2}\frac{dw_\vartheta(r)}{dr} + \frac{1}{b_r(r)}\frac{1}{r}w_\vartheta(r)\bar{w}_r(r)\right) = -\frac{1}{b_r(r)}l_0\varrho(r)\bar{w}_r(r), \quad (5.4)$$

$$\alpha(t)^2\varrho(r)\left(w(r)\frac{dw(r)}{dr} - \frac{1}{r}w_\vartheta^2(r)\right) = -R_1\frac{d}{dr}(\varrho(r)T(r)) + \alpha\varrho l_0 w_\vartheta(s) - \frac{b_z(r)}{b_r(r)}g\varrho(r), \quad (5.5)$$

$$\varrho c_v\left(w(r)\frac{dT(r)}{dr}\right) - R_1T(r)\left(w(r)\frac{d\varrho(r)}{dr}\right) = (R_1T(r) + L_{tr})\sqrt{\bar{w}_r^2 + \bar{w}_z^2}\frac{b_z(r)}{b_r(r)}\bar{h}_{tr}(z(r)). \quad (5.6)$$

5.2 Schéma numérique

Pour construire le schéma numérique, on discrétise l'intervalle $11 \leq r \leq \bar{r}_1 = 200(km)$ et $0.619 \leq z(r) \leq 9.860(km)$ en $\{r_i\}_{i=0}^N$ avec le pas δ_r c'est-à-dire

$$11 = r_0 < r_1 < \dots < r_{N-1} < r_N = \bar{r}_1,$$

$$r_i - r_{i-1} = \delta_r \quad \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

Avec la discrétisation du domaine nous proposons un schéma de différences finies avec l'approximation "arriér " où différence divisée regressive

$$\left.\frac{d\varrho}{dr}\right|_{r=i} \approx \frac{\varrho(i) - \varrho(i-1)}{\delta_r} \quad i = 1, \dots, N \quad (5.7)$$

et analoguement pour w_ϑ, T et w où $\delta_r = \frac{L}{N}$ et L est la longueur du domaine.

Maintenant on va donner une approximation polynomiale de ϱ, T , ces dernière permet de déterminer \bar{h}_{tr}

$$\varrho_{hs}^*(z) = -0.3z^3 + 8.4z^2 - 132.1z + 1204.8.$$

$$T_{hs}^*(z) = -0.0132z^3 + 0.0484z^2 - 4.19z + 300.2.$$

et

$$\begin{aligned} \bar{h}_{tr} &= \bar{\pi}_{vs}(T) \frac{1}{\varrho_{hs}^*} \frac{d\varrho_{hs}^*}{dz} - \frac{d\bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*)}{dT} \frac{dT_{hs}^*}{dz}, \\ &= \bar{\pi}_{vs}(T) \left(\frac{-0.9z^2 + 16.8z - 132.1}{-0.3z^3 + 8.4z^2 - 132.1z + 1204.8} \right) - \frac{d\bar{\pi}_{vs}(T)}{dT} \left(-0.0396z^2 + 0.0968z - 4.19 \right). \end{aligned}$$

En effet, lorsque nous avons effectué le calcul pour ($r = 200 \text{ km}$ à 11 km) les valeurs de $w_\vartheta(r_i), \varrho(r_i), T(r_i), w(r_i)$ et sont données, nous pouvons déterminer les valeurs de $w_\vartheta(r_{i-1}), \varrho(r_{i-1}), T(r_{i-1}), w(r_{i-1})$. Mais pour le calcul de w_ϑ au point ($z = 0.619$ à 9.87 km), il faut donnée $w_\vartheta(r_{i-1})$ pour déterminer $w_\vartheta(r_i)$, par les équations descriptives suivantes :

$$w_\vartheta(r_{i-1}) = w_\vartheta(r_i) - \frac{\delta_r}{\sqrt{\bar{w}_r^2(r_i)}} \times \left(\frac{w_\vartheta(r_i) \bar{w}_r(r_i)}{r_i} + \frac{l_0}{\alpha(t)} \bar{w}_r(r_i) + \varepsilon_1(z(r_i)) w_\vartheta(r_i) \right), \quad (5.8)$$

$$w_\vartheta(r_i) = w_\vartheta(r_{i-1}) - \delta_r \left(\frac{1}{r_{i-1}} w_\vartheta(r_{i-1}) + \frac{l_0}{\alpha(t)} \right), \quad (5.9)$$

$$w(r_{i-1}) = \frac{1}{\varrho(r_{i-1}) \mathcal{S}(r_{i-1})} \left(\varrho(\bar{r}_1) w(\bar{r}_1) \mathcal{S}(\bar{r}_1) - \delta_r \sum_{j=1}^{i-1} \bar{h}_{tr}(z_j) \mathcal{S}(r_j) \beta(r_j) \frac{b_z(r_j)}{b_r(r_j)} \right), \quad (5.10)$$

où

$$\beta = \sqrt{\overline{w}_r^2 + \overline{w}_z^2}.$$

$$\begin{aligned} R_1 T(r_i) \varrho(r_{i-1}) + R_1 \varrho(r_i) T(r_{i-1}) &= 2R_1 T(r_i) \varrho(r_i) - \alpha(t)^2 \varrho(r_i) \times \quad (5.11) \\ &\times \left(\delta_r \frac{w_\vartheta^2(r_i)}{r_i} - w(r_i)(w(r_i) - w(r_i)) \right) - \delta_r \varrho(r_i) \left(l_0 \alpha(t) w_\vartheta(r_i) - g \frac{b_z(i)}{b_r(i)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - R_1 T(r_i) w(r_i) \varrho(r_{i-1}) + c_v \varrho(r_i) w(r_i) T(r_{i-1}) &= T(r_i) \varrho(r_i) w(r_i) (c_v - R_1) + \quad (5.12) \\ &- \delta_r (R_1 T(r_i) + L_{tr}) \beta(r_i) \frac{b_z(r_i)}{b_r(r_i)} \overline{h}_{tr}(z(r_i)) \end{aligned}$$

5.3 Choix des paramètres et calcul numérique

Pour effectuer les calculs, nous devons clarifier certains paramètres qui interviennent dans les équations. En effet les paramètres physiques g, R_1, c_v sont

$$g = 9.8 \text{ gm}^2/\text{s}^2, \quad R_1 = \frac{R}{\mu_m}, \quad c_v = \frac{5}{2} \frac{R}{\mu_m},$$

$$R_0 \approx 8,314 \text{ J/mole}, \quad \mu = 28.96 \text{ g/mol},$$

Dans les calculs on utilise pour la densité de la vapeur saturée $\bar{\pi}_{vs}(T)$ la valeur relative à la surface du liquide

$$\bar{\pi}_{vs}(T) \approx \frac{1}{R_1 T} E_0 \cdot 10^{\frac{7.63(T-273.15)}{T-31.25}}, \quad E_0 = 6,107 \text{ (mbar)},$$

et pour la chaleur latente L_{tr} on utilise la valeur relative à la transition de phase de l'eau de l'état gazeux à l'état liquide

$$L_{gl}(T) \approx (3244 - 2,72 T)10^3 \text{ (J/kg)}.$$

Les fonction $\bar{T}_{hs}(z)$ et $\bar{\varrho}_{hs}(z)$ est determiner par

$$\bar{T}_{hs}(z) = \bar{T}_{hs}(0) - \frac{g(\gamma-1)}{R_1 \gamma} z, \quad \frac{g(\gamma-1)}{R_1 \gamma} \approx 9,8 \text{ }^\circ\text{K/km},$$

$$\bar{\varrho}_{hs}(z) = \left(\bar{\varrho}_{hs}(0)^{\gamma-1} - \frac{\gamma-1}{\gamma h} g z \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

$\gamma = \frac{R_1 + c_v}{c_v}$, (γ est l'exposante adiabatique)

$$h = \text{constante} = \frac{(p_0 T(0))^\gamma}{p_0^{\gamma-1}}, \quad p_0 = 1013 \text{ mb},$$

$\bar{\varrho}_{hs}(0)$:densité de l'air au niveau de la mer.

5.4 Résultat du calcul numérique

Nous avons effectué le calcul selon le schéma illustré ci-dessus, en choisissant le domaine

$$r = 200 \text{ km jusqu' à } 11 \text{ km ;}$$

$$z = 9.860 \text{ km jusqu' à } 0.619 \text{ km km}$$

avec le pas de discrétisation ($\delta_r = 0.1 \text{ km}$, $\alpha = 5$), Nous considérons également la donnée initial

$$r = 200 \text{ km} : \varrho(1891) = 395 (g/m^3).$$

$$r = 200 \text{ km} : T(1891) = 244 (k).$$

$$r = 200 \text{ km} : w(1891) = 0.08 (m/s)$$

où $w = \sqrt{w_r^2 + w_z^2}$.

Avec $\alpha(t) = 5$ on a calculé en particulier la composante tangentielle de la vitesse normalisée $w^\vartheta = \frac{v_\vartheta}{5}$, la température T et la densité ϱ, w sur la trajectoire indiquée ci-dessus.

les résultat des calcule est donnée par la suivant :

• *la composante tangentielle (partie inférieure) :*

iteration	distance radial r	w_{ϑ}	$v_{\vartheta} = \alpha(t)w_{\vartheta}$
$i = 1891$	$r = 200km$	0.0500	0.25
$i = 1791$	$r = 190km$	0.1741	0.8705
$i = 1391$	$r = 150km$	0.2355	1.1775
$i = 891$	$r = 100km$	0.4060	2.0300
$i = 391$	$r = 50km$	0.8116	4.0580
$i = 141$	$r = 25km$	1.6209	8.1045
$i = 41$	$r = 15km$	2.6954	13.4770
$i = 1$	$r = 11km$	3.6675	18.3375

• *la composante tangentielle (partie supérieure) :*

iteration	distance radial r	w_{ϑ}	$v_{\vartheta} = \alpha(t)w_{\vartheta}$
$i = 1$	$r = 11km$	3.6675	18.3375
$i = 41$	$r = 15km$	2.5821	12.9105
$i = 141$	$r = 25km$	1.3128	6.5640
$i = 391$	$r = 50km$	0.1110	0.5550
$i = 891$	$r = 100km$	-1.0324	-5.1620
$i = 1391$	$r = 150km$	-1.8967	-9.4835
$i = 1791$	$r = 190km$	-2.5353	-12.6765
$i = 1891$	$r = 200km$	-2.6913	-13.4565

• *La densité*

iteration	distance radial r	$\rho(g/m^3)$
$i = 1891$	$r = 200km$	$\rho = 395$
$i = 1791$	$r = 190km$	$\rho = 395.2$
$i = 1391$	$r = 150km$	$\rho = 396.3$
$i = 891$	$r = 100km$	$\rho = 399.01$
$i = 391$	$r = 50km$	$\rho = 408.9$
$i = 141$	$r = 25km$	$\rho = 445.5$
$i = 41$	$r = 15km$	$\rho = 603.8$
$i = 1$	$r = 11km$	$\rho = 1092.8$

- *La température*

iteration	distance radial r	$T(k)$
$i = 1891$	$r = 200km$	$T = 244$
$i = 1791$	$r = 190km$	$T = 244.034$
$i = 1391$	$r = 150km$	$T = 244.203$
$i = 891$	$r = 100km$	$T = 244.589$
$i = 391$	$r = 50km$	$T = 246.031$
$i = 141$	$r = 25km$	$T = 251.049$
$i = 41$	$r = 15km$	$T = 266.292$
$i = 1$	$r = 11km$	$T = 289.846$

- *La composante de la vitesse*

iteration	distance radial r	$w(m/s)$	$\alpha(t)w$
$i = 1891$	$r = 200km$	$w = 0.08$	0.4000
$i = 1791$	$r = 190km$	$w = 0.0840$	0.4200
$i = 1391$	$r = 150km$	$w = 0.1046$	0.5230
$i = 891$	$r = 100km$	$w = 0.1508$	0.7540
$i = 391$	$r = 50km$	$w = 0.2630$	1.3150
$i = 41$	$r = 15km$	$w = 0.3332$	1.6660
$i = 1$	$r = 11km$	$w = 1.3726$	6.8630

FIGURE 5.2 – Composante tangente de la vitesse (partie inférieure)
[composante de la vitesse est $v_\theta = \alpha w_\theta = 5w_\theta$]

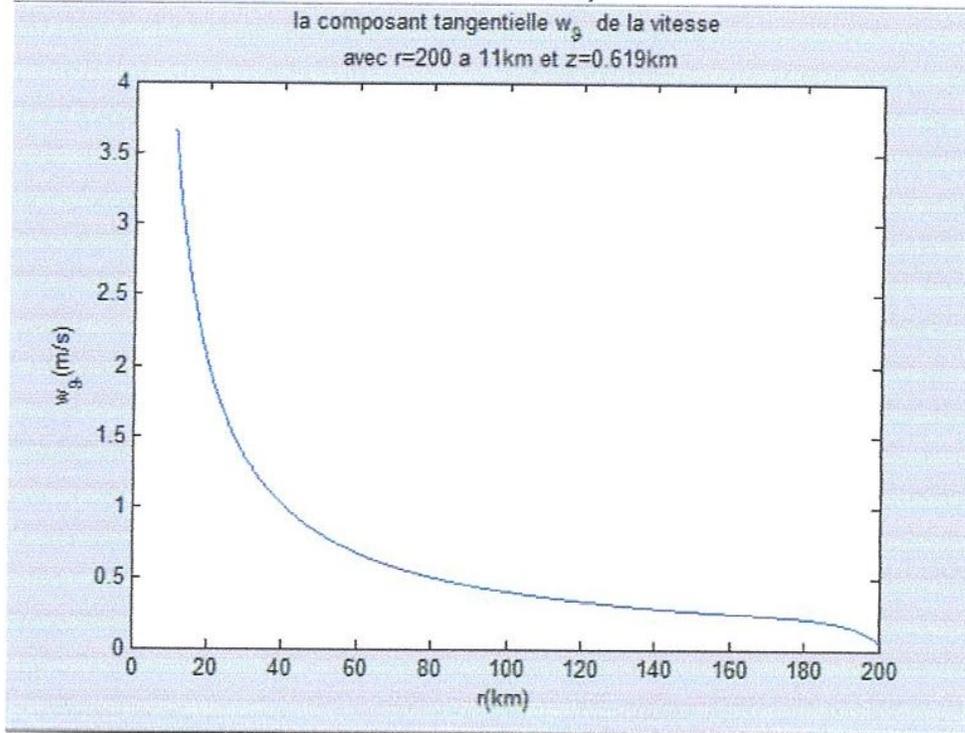


FIGURE 5.3 – Composante tangente de la vitesse (partie supérieure)
[composante de la vitesse est $v_\theta = \alpha w_\theta = 5w_\theta$]

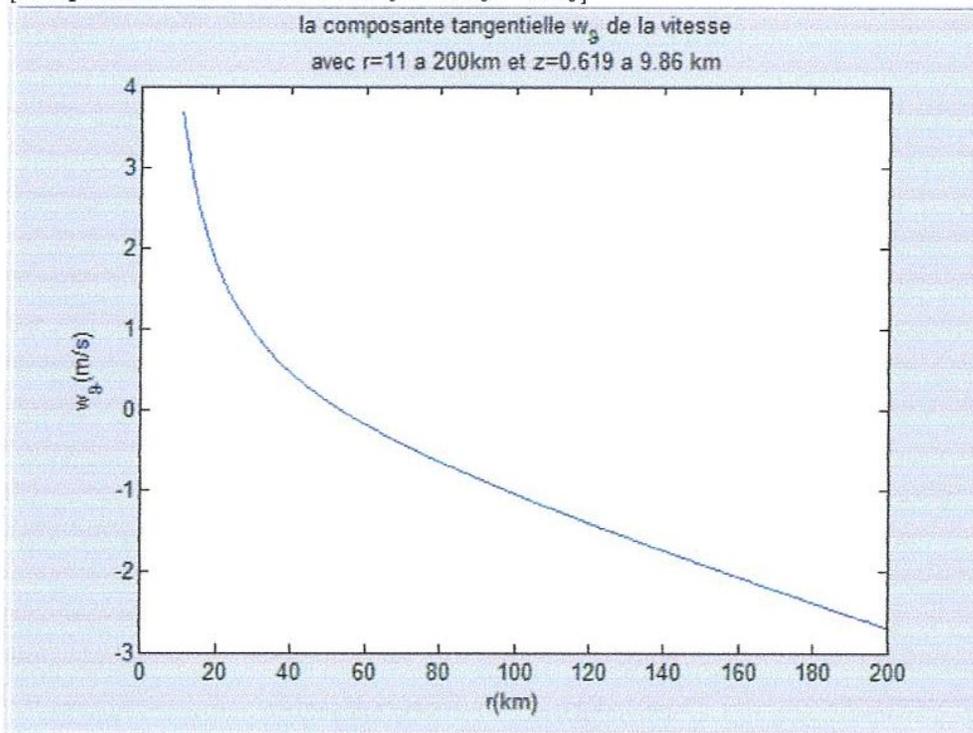


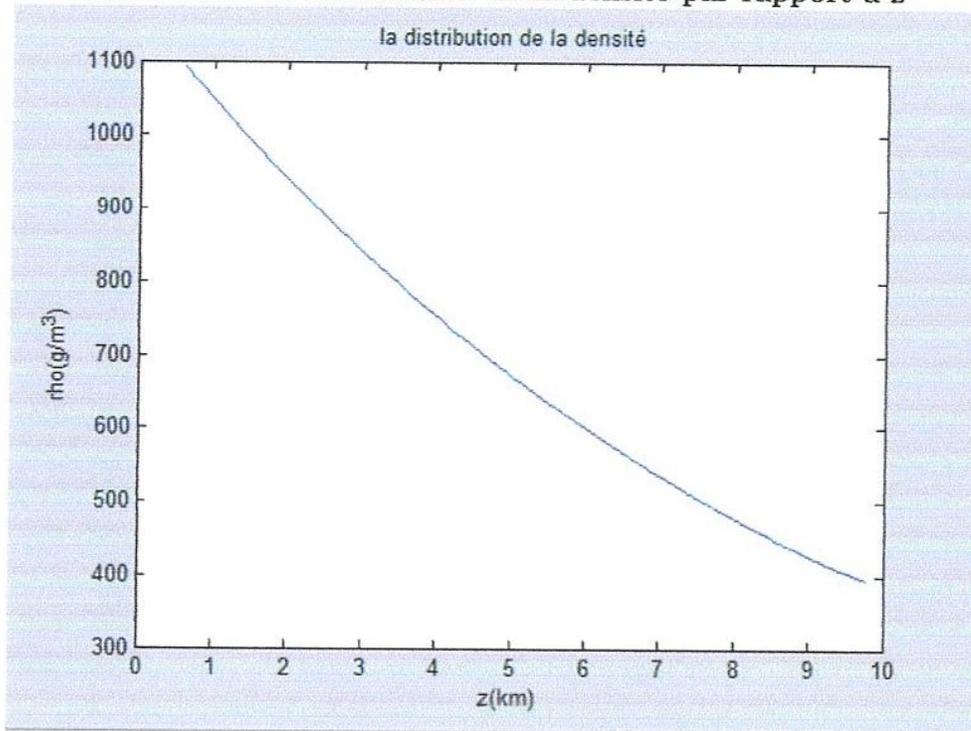
FIGURE 5.4 – la distribution de la densité par rapport à z 

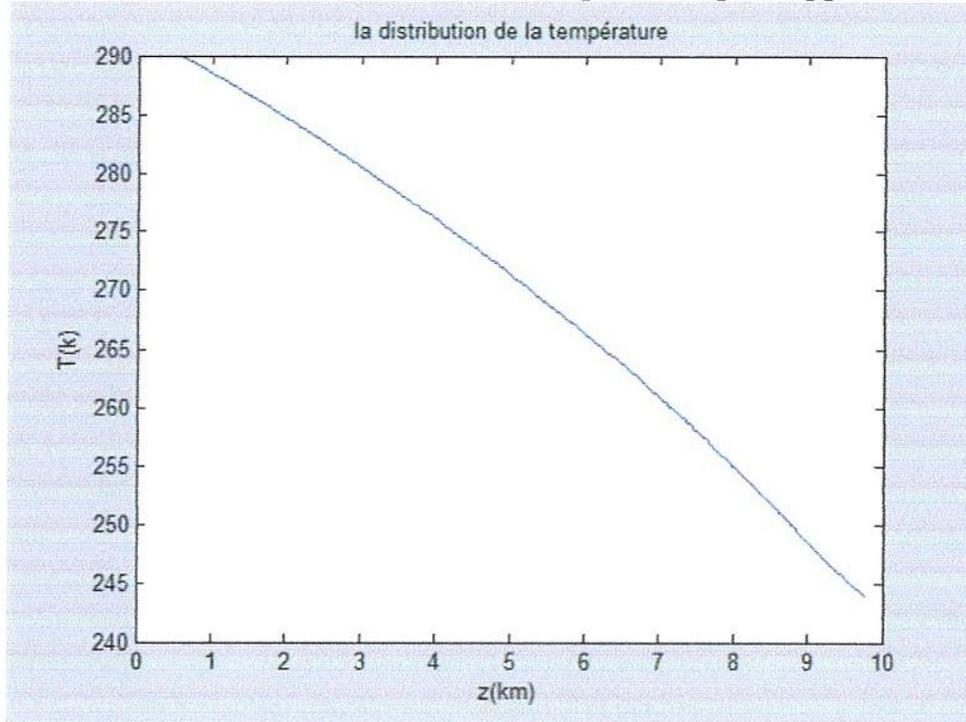
FIGURE 5.5 – la distribution de la température par rapport à z 

FIGURE 5.6 – la distribution de la densité par rapport à r

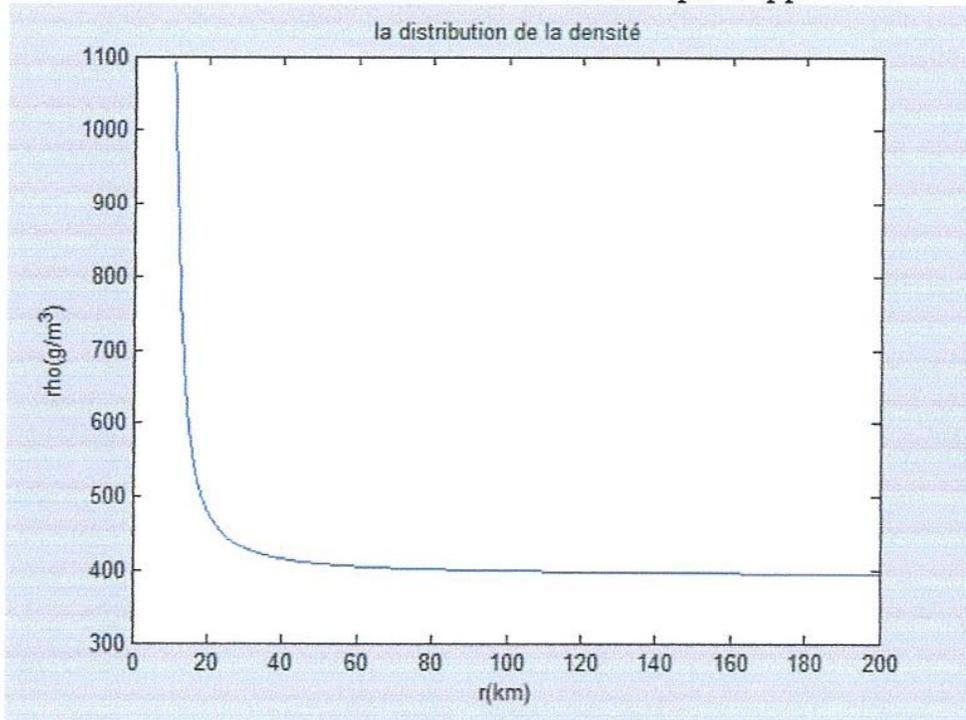


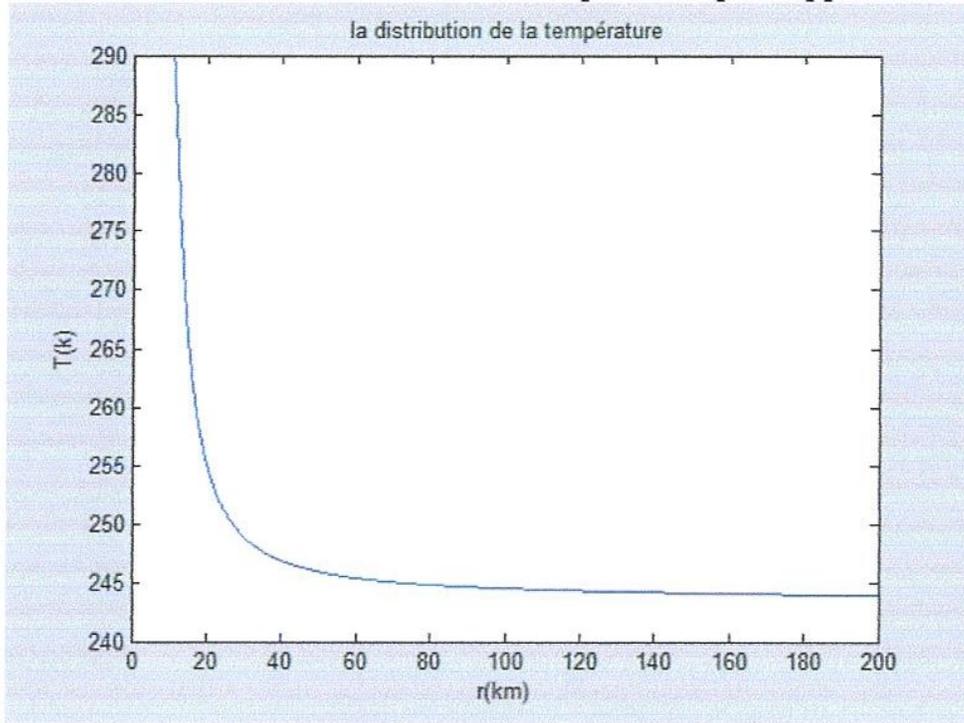
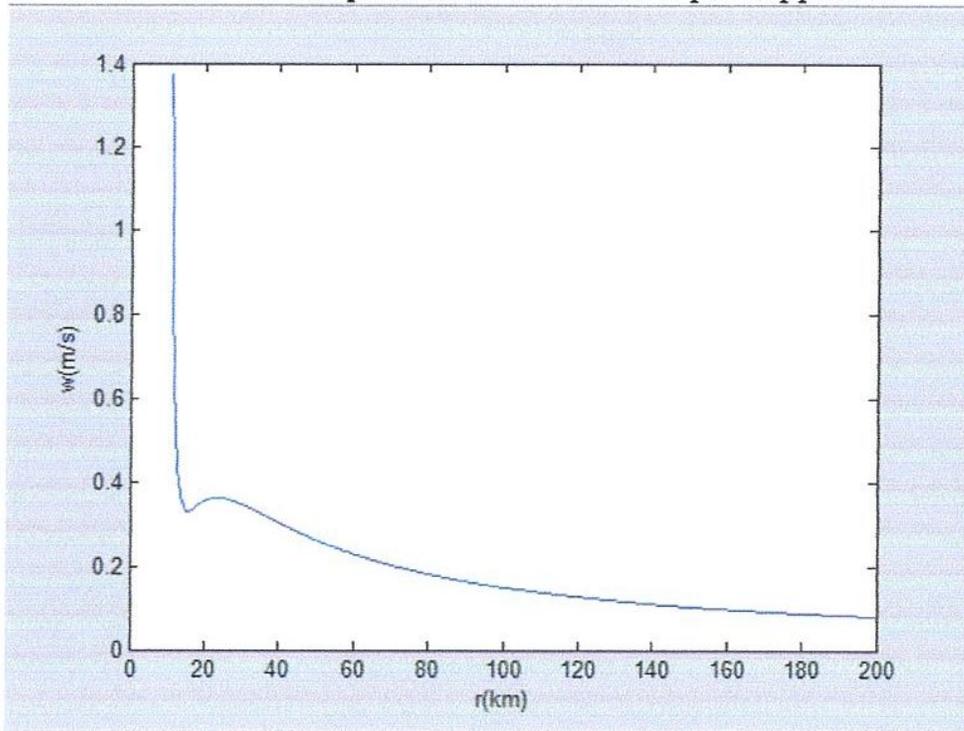
FIGURE 5.7 – la distribution de la température par rapport à r 

FIGURE 5.8 – la composant de la vitesse w par rapport à r 

Chapitre 6

Equations non linéaires sur les caractéristiques données

6.1 Formulation des équations

Maintenant nous proposons l'étude du système d'équations du modèle du cyclone tropical sur chaque trajectoire donnée. Il s'agit du système d'équations similaire à (3.19)–(3.23), mais les trajectoires ne seront pas déterminées par la solution même, au contraire les trajectoires $\gamma(s) = (\gamma_r(s), \gamma_z(s))$ (qui sont les caractéristiques) sont données, c'est-à-dire les deux fonctions b_r et b_z sont données et les trajectoires $\gamma(s) = (\gamma_r(s), \gamma_z(s))$ sont définies par les équations

$$\frac{d}{ds}\gamma_r(s) = b_r(s), \quad \frac{d}{ds}\gamma_z(s) = b_z(s)$$

(voir (4.8)) et les deux composantes de la vitesse w_r et w_z doivent être

$$w_r = b_r w, \quad w_z = b_z w,$$

où w est la vitesse dans la direction de (b_r, b_z) ; la fonction est w , les deux “composantes” de la vitesse w_r et w_z ne doivent être indépendantes.

Plus précisément il s'agit du système d'équations

$$\varrho(s)\alpha(t)\left(\frac{dw_\vartheta(s)}{ds}w(s)+\frac{1}{r(s)}w_\vartheta(s)b_r(s)w(s)\right) = -l_0\varrho(s)b_r(s)w(s)-\varepsilon_1(z(s))w_\vartheta(s). \quad (6.1)$$

$$w(s)\varrho(s)\mathcal{S}(s) = w(\bar{s}_1)\varrho(\bar{s}_1)\mathcal{S}(\bar{s}_1) - \int_s^{\bar{s}_1} b_z(s')w(s')h_{tr}(s')\mathcal{S}(s')ds'. \quad (6.2)$$

$$\varrho(s)c_v\left(w(s)\frac{dT(s)}{ds}\right) - R_1T(s)\left(w(s)\frac{d\varrho(s)}{ds}\right) = (R_1T(s)+L_{tr})b_z(s)w(s)h_{tr}(z(s)), \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} & \alpha(t)^2\varrho(s)\left(w(s)\frac{dw(s)}{ds} - \frac{b_r(s)}{r(s)}w_\vartheta^2(s)\right) = \quad (6.4) \\ & = -R_1\frac{d}{ds}(\varrho(s)T(s)) + b_r(s)\alpha(t)\varrho(s)l_0w_\vartheta(s) + \\ & - \left[b_r(s)\varepsilon_1(z(s))\alpha(t)b_r(s)w(s) + b_z(s)g\varrho(s)\right]. \end{aligned}$$

Pour comprendre mieux ce système d'équations, nous rappelons que, si on substitue

$$w = \sqrt{\bar{w}_r^2 + \bar{w}_z^2}, \quad \bar{w}_r = wb_r, \quad \bar{w}_z = wb_z,$$

$$\bar{h}_{tr} = (\bar{\pi}_{vs}(T))\frac{d}{dz}\log\varrho - \frac{d}{dz}\bar{\pi}_{vs}(T) \equiv h_{tr}$$

dans les équations (4.18), (4.21), (4.19), (4.20), on obtient le système (6.10)-(6.13).

6.2 Résolution d'équations non linéaires sur les caractéristiques à l'aide de méthodes des approximations successives

Pour résoudre le système d'équations (6.10)-(6.13), nous proposons la résolution par l'approximation successive. C'est-à-dire, on va construire la suite de solutions approchées

$$\{(w_{\vartheta}^{(k)}, \varrho^{(k)}, T^{(k)}, w^{(k)})\}_{k=1}^{\infty}, \quad (6.5)$$

par le schéma

a) on choisit $(w_{\vartheta}^{(0)}, \varrho^{(0)}, T^{(0)}, w^{(0)})$

b) on définit $(w_{\vartheta}^{(k+1)}, \varrho^{(k+1)}, T^{(k+1)}, w^{(k+1)})$ par la résolution de

$$(w_{\vartheta}^{(k+1)}, \varrho^{(k+1)}, T^{(k+1)}, w^{(k+1)}) = F(w_{\vartheta}^{(k)}, \varrho^{(k)}, T^{(k)}, w^{(k)}),$$

pour $k = 0, 1, 2, \dots$. Ici $F(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ est l'opérateur défini par la résolution du système d'équations semi-linéarisées, comme nous le précisons ci-dessous.

La solution $(w_{\vartheta}, \varrho, T, w)$ du système d'équations (6.10)-(6.13) devra être obtenue comme la limite de la suite $\{(w_{\vartheta}^{(k)}, \varrho^{(k)}, T^{(k)}, w^{(k)})\}_{k=1}^{\infty}$, c'est-à-dire qu'on attend que

$$(w_{\vartheta}^{(k)}, \varrho^{(k)}, T^{(k)}, w^{(k)}) \rightarrow (w_{\vartheta}, \varrho, T, w)$$

et que $(w_{\vartheta}, \varrho, T, w)$ vérifie les équations (6.10)-(6.13). Naturellement se pose la question : "Dans quel sens et dans quelle topologie la suite $\{(w_{\vartheta}^{(k)}, \varrho^{(k)}, T^{(k)}, w^{(k)})\}_{k=1}^{\infty}$ converge vers $(w_{\vartheta}, \varrho, T, w)$ ". Toutefois pour le moment nous n'avons pas d'informations suffisantes pour donner la réponse à cette question et donc nous

proposons de procéder par la construction de schéma de solutions approchées par le calcul numérique.

•initialisation

Pour un système non-linéaire compliqué, le choix d'un point de départ peut s'avérer délicat, si on n' a aucune idée du positionnement des solutions attendues. On peut avoir éventuellement une convergence vers une solution ... qui n'est pas celle cherchée. pour cela le choix de point d'epart $(w_{\vartheta}^{(0)}, \varrho^{(0)}, T^{(0)}, w^{(0)})$ dans notre cas est important, c'est à dire que ce choix n'est pas arbitraire.

Nous avons choisir les valeur intiale $(w_{\vartheta}^{(0)}, \varrho^{(0)}, T^{(0)}, w^{(0)})$ proche de la solution et puis determiner $(w_{\vartheta}^{(1)}, \varrho^{(1)}, T^{(1)}, w^{(1)})$ par le système d'équations suivante :

$$\begin{aligned} \varrho^{(0)}(s)\alpha(t)\left(\frac{dw_{\vartheta}^{(1)}(s)}{ds}w^{(0)}(s) + \frac{1}{r(s)}w_{\vartheta}^{(1)}(s)w^{(0)}(s)b_r(s)\right) = & (6.6) \\ = -l_0\varrho^{(0)}(s)w^{(0)}b_r(s) - \varepsilon_1(z(s))w_{\vartheta}^{(1)}(s). \end{aligned}$$

$$w^{(1)}(s)\varrho^{(1)}(s)\mathcal{S}(s) = w(\bar{s}_1)\varrho(\bar{s}_1)\mathcal{S}(\bar{s}_1) - \int_s^{\bar{s}_1} w^{(0)}b_z(s)h_{tr}^{(0)}(s')\mathcal{S}(s')ds'. \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \varrho^{(1)}c_v\left(w^{(1)}(s)\frac{dT^{(1)}(s)}{ds}\right) - R_1T^{(1)}(s)\left(w^{(1)}(s)\frac{d\varrho^{(1)}(s)}{ds}\right) = & (6.8) \\ = (R_1T^{(1)}(s) + L_{tr})w^{(0)}b_z(s)h_{tr}^{(0)}(z(s)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(t)^2\varrho^{(1)}(s)\left(w^{(1)}(s)\frac{dw^{(1)}(s)}{ds} - \frac{b_r(s)}{r(s)}(w_{\vartheta}^{(0)}(s))^2\right) - & (6.9) \\ - R_1\frac{d}{ds}(\varrho^{(1)}(\vartheta)T^{(1)}(\vartheta)) + b_r(\vartheta)\alpha(t)\varrho^{(1)}(\vartheta)l_0w_{\vartheta}^{(0)}(\vartheta) + \\ - \left[h_r(s)\varepsilon_1(z(s))\alpha(t)w^{(0)}h_r(s) + h_z(s)g\varrho^{(1)}(s)\right] \end{aligned}$$

•la construction du système de récurrence

On construise une famille $w_\vartheta^{(k+1)}, \varrho^{(k+1)}, T^{(k+1)}, w^{(k+1)}$ qui est la solution du système déffinit par suite

$$\begin{aligned} \varrho^{(k)}(s)\alpha(t)\left(\frac{dw_\vartheta^{(k+1)}(s)}{ds}w^{(k)}(s) + \frac{1}{r(s)}w_\vartheta^{(k+1)}(s)w^{(k)}(s)b_r(s)\right) &= \quad (6.10) \\ &= -l_0\varrho^{(k)}(s)w^{(k)}(s)b_r(s) - \varepsilon_1(z(s))w_\vartheta^{(k+1)}(s). \end{aligned}$$

$$w^{(k+1)}(s)\varrho^{(k+1)}(s)\mathcal{S}(s) = w(\bar{s}_1)\varrho(\bar{s}_1)\mathcal{S}(\bar{s}_1) - \int_s^{\bar{s}_1} w^{(k)}b_z(s)h_{tr}^{(k)}(s')\mathcal{S}(s')ds'. \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \varrho^{(k+1)}c_v\left(w^{(k+1)}(s)\frac{dT^{(k+1)}(s)}{ds}\right) - R_1T^{(k+1)}(s)\left(w^{(k+1)}(s)\frac{d\varrho^{(k+1)}(s)}{ds}\right) &= \quad (6.12) \\ &= (R_1T^{(k+1)}(s) + L_{tr})w^{(k)}b_r(s)h_{tr}^{(k)}(z(s)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(t)^2\varrho^{(k+1)}(s)\left(w^{(k+1)}(s)\frac{dw^{(k+1)}(s)}{ds} - \frac{b_r(s)}{r(s)}(w_\vartheta^{(k)}(s))^2\right) &= \quad (6.13) \\ &= -R_1\frac{d}{ds}(\varrho^{(k+1)}(s)T^{(k+1)}(s)) + b_r(s)\alpha(t)\varrho^{(k+1)}(s)l_0w_\vartheta^{(k)}(s) + \\ &\quad - \left[b_r(s)\varepsilon_1(z(s))\alpha(t)w^{(k)}b_r(s) + b_z(s)g\varrho^{(k+1)}(s)\right] \end{aligned}$$

lorsque en parle sur la convergence de la suite suite $\{(w_\vartheta^{(k)}, \varrho^{(k)}, T^{(k)}, w^{(k)})\}_{k=1}^\infty$, vers $(w_\vartheta, \varrho, T, w)$, c'est à dire que pour une précision donnée, il existe un rang à partir duquel l'approximation de $(w_\vartheta, \varrho, T, w)$, fournie par la suite (6.5)

est satisfaisante au regard la précision demandée. En termes plus simples, comme il n'est pas possible d'un point de vue pratique de faire tendre k vers l'infini, on peut s'assurer d'une bonne approximation numérique de $(w_\vartheta, \varrho, T, w)$, pour k assez grand. On peut parfois calculer cette valeur de k , mais pas toujours bon test pratique pour savoir si l'on est proche ou pas de $(w_\vartheta, \varrho, T, w)$ est de calculer la valeur absolue du terme $|F^{(k+1)} - F^{(k)}| = \sigma_k$. Ce dernier tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini. On arrêtera donc les itérations quand σ_k sera plus petit qu'un ϵ positif donné. pour cela il faut ajouter comme condition de ne pas faire plus d'un nombre maximum d'itérations. Ces critères permettant d'arrêter les itérations avec une précision voulue s'appelles critères d'arrêt.

Mais l'application de ce type de critère n'est pas toujours facile à appliquer.

Pour cela nous avons effectué le calcul de $w_\vartheta^{(k+1)}$, $\varrho^{(k+1)}$, $T^{(k+1)}$, $w^{(k+1)}$ avec le nombre d'itérations $k = 10$ nous avons obtenu au point $r = 11 \text{ km}$, $r = 200 \text{ km}$; $z = 0,619 \text{ km}$; $z = 9.86 \text{ km}$ les valeurs suivantes :

	$z = 0.619 \text{ km}$	$z = 9.86 \text{ km}$
k	$w_\vartheta(m/s)$	$w_\vartheta(m/s)$
k=1	2.5982519	-2.7496273
k=2	2.5977547	-2.7496544
k=3	2.5630520	-2.7515466
k=5	2.5632524	-2.7515357
k=7	2.5632524	-2.7515357
k=10	2.5632524	-2.7515357

	$z = 0.619 \text{ km}$	$z = 0.619 \text{ km}$	$z = 0.619 \text{ km}$
k	$\rho(g/m^3)$	$T(k)$	$w(m/s)$
k=1	$\rho = 1093.447676$	$T = 289.934154$	$w = 1.371791$
k=2	$\rho = 1108.095565$	$T = 292.049542$	$w = 1.353657$
k=3	$\rho = 1107.977949$	$T = 292.032933$	$w = 1.353801$
k=5	$\rho = 1107.978646$	$T = 292.033028$	$w = 1.353800$
k=7	$\rho = 1107.978646$	$T = 292.033028$	$w = 1.353800$
k=10	$\rho = 1107.978646$	$T = 292.033028$	$w = 1.353800$

Chapitre 7

Retour au modèle

7.1 Question du paramètre de l'intensité

Dans le modèle proposé nous avons imposé l'approximation par séparation de l'évolution temporelle et de la structure spatiale, introduisant le paramètre d'évolution temporelle

$$\alpha(t),$$

qui doit correspondre à l'intensité (globale) du cyclone. Nous avons proposé de définir $\alpha(t)$ par l'équation différentielle ordinaire (3.14)

$$M_1 \frac{d}{dt} \alpha(t) = 2\pi \Lambda_1 \int_0^{\bar{\zeta}} [p_{ex}(z) - p_{in}(z)] dz - g \Sigma_1(t).$$

où $\Sigma_1(t)$ est la masse totale de l'eau liquide ou solidifiée se trouvant dans le domaine Ω à l'instant t . L'idée fondamentale pour définir $\Sigma_1(t)$ devrait être celle du travail [5].

Or, même si la définition de $\Sigma_1(t)$ sera cruciale pour déterminer l'évolution du cyclone, il faut reconnaître que, à différence du cas de la cheminée à vapeur étudié dans [5], pour le cyclone tropical qui a une structure bien

plus complexe, il est bon de bien examiner la possibilité et la modalité de la définition de $\Sigma_1(t)$. Il nous semble plus utile d'observer la relation entre la valeur de $\alpha(t)$ imposée dans le calcul et la valeur obtenue de la pression (c'est-à-dire, la valeur de la densité ρ et de la température T dans la zone centrale, valeur obtenue avec la même valeur de ρ et de T au point de la sortie de Ω).

En effet, on a calculé les valeurs de la température, de la densité et de la pression dans la partie centrale (au point $r = 11 \text{ km}$, $z = 0,619 \text{ km}$) à partir des mêmes données à la frontière extérieure (au point $r = 200 \text{ km}$, $z = 9,860 \text{ km}$) et on a obtenu les résultats intéressants. Plus précisément, au point $r = 200 \text{ km}$, $z = 9,860 \text{ km}$ nous avons imposé les valeurs

$$\rho = 395 \text{ (g/m}^3\text{)}, \quad T = 244 \text{ (k)}.$$

Avec de différentes valeurs de α , nous avons obtenu au point $r = 11 \text{ km}$, $z = 0,619 \text{ km}$ les valeurs suivantes :

$\alpha(t)$	$\rho(\text{g/m}^3)$	$T(\text{k})$	$p(\text{mb})$
$\alpha = 2$	$\rho = 1105.974$	$T = 251.744$	$p = 903.452$
$\alpha = 5$	$\rho = 1092.783$	$T = 289.846$	$p = 886.867$
$\alpha = 10$	$\rho = 1043.148$	$T = 282.586$	$p = 825.382$

Dans la phase de la formation d'un cyclone tropical on "observe" la croissance de l'intensité et la diminution de la pression dans la partie centrale du cyclone. Nous pouvons donc considérer ce résultat du calcul comme signe de validité du modèle. Donc Les résultats illustrés ci-dessus de la simulation numérique montrent bien les aspects fondamentaux de l'évolution du mouvement de l'air avec la condensation de la vapeur d'eau.

7.2 Retour au modèle

Comme nous l'avons illustré dans les chapitres précédents, nous avons effectué le calcul pour résoudre les équations semi-linéarisées et puis non linéaires sur une trajectoire donnée. Mais notre système d'équations complet est le système (3.19)-(3.23) et pour ces équations les trajectoires doivent être données par

$$\left(\frac{w_r}{\sqrt{w_r^2 + w_z^2}}, \frac{w_z}{\sqrt{w_r^2 + w_z^2}} \right)$$

où w_r et w_z sont les deux fonctions de la solution $(\varrho, T, w_r, w_z, w_\vartheta)$ du même système d'équations.

Pour résoudre le système d'équations (3.19)-(3.23), il faudrait donc construire une autre schéma d'approximation successive : si $(\varrho^{[l]}, T^{[l]}, w_r^{[l]}, w_z^{[l]}, w_\vartheta^{[l]})$ est la solution du l -ième problème (6.10)-(6.12), elle doit définir les trajectoires sur lesquelles on va résoudre le $l + 1$ -ième problème (6.10)-(6.13).

Ce schéma d'approximation successive nécessite avant tout la définition des trajectoires à partir de la solution $(\varrho^{[l]}, T^{[l]}, w_r^{[l]}, w_z^{[l]}, w_\vartheta^{[l]})$. Cette définition qui doit être compatible avec le schéma de la résolution du problème (3.19)-(3.23) n'est pas facile et exige une analyse préliminaire considérable. En outre, même si nous réussissons à le bien définir, un tel calcul exigera une capacité de calcul de l'ordinateur qui n'est malheureusement pas à notre disposition.

Toutefois, nous croyons que le résultat de calcul que nous avons obtenu montre une bonne possibilité de construire la solution du problème (3.19)-(3.23).

Dans notre calcul nous avons imposé une trajectoire, qui n'est édemment pas celle qui devra être définie par la solution même. Le fait que la vitesse w

obtenue a un comportement un peu irrégulier est probablement dû au choix – commode pour le calcul mais évidemment pas cohérent avec la solution – de notre trajectoire.

En outre, nous devons reconnaître que nous avons utilisé de différentes approximations commodes pour le calcul mais un peu distantes de la loi physique, ce qui devra avoir modifié quelque peu la solution, mais nous croyons que les aspects fondamentaux du problèmes n'ont pas été altérés.

Nous espérons - et nous croyons - que sur la base de cette étude on pourra construire, dans un futur prochain, un modèle avec sa résolution suffisamment précise pour décrire d'une manière satisfaisante un cyclone tropical dans sa structure mécanique et thermodynamique et dans son évolution.

Bibliographie

- [1] Buccellato, S., Fujita Yashima, H. : Système d'équations d'un gaz visqueux modélisant l'atmosphère avec la force de Coriolis et la stabilité de l'état d'équilibre. *Ann. Univ. Ferrara - Sez. VII - Sc. Mat.* vol. 49 (2003), pp. 127–159.
- [2] Fujita Yashima, H., : Modélisation de la physique des fluides, cours de l'université de Guelma, (2015-2016).
- [3] Fujita Yashima, H., : Fluides newtoniens, cours de l'université de Guelma, (2015 2016).
- [4] Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z. : Systeme d'equations d'un modele du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphere. A paraître sur *Annales Math. Africaines*.
- [5] Ghomrani, S., Marín Antuña, J., Fujita Yashima, H. : Un modelo de la subida del aire ocasionada por la condensación del vapor y su cálculo numérico. *Rev. Cuba Fís.*, vol. **32** (2015), pp 3 8.
- [6] Henry, P. : Law of Storms-Theory of the law of storms *Elder and co.65 Cornhill..* , 1848.

- [7] Kikoïne, A. K., Kikoïne, I. K. : *Physique moléculaire* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1979.
- [8] Landau, L. L., Lifchitz, E. M. : *Mécanique (Physique théorique, tome 1)* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1988.
- [9] Landau, L. L., Lifchitz, E. M. : *Mécanique des fluides (Physique théorique, tome 6)* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1989.
- [10] Matveev, L. T. : *Fisica dell'atmosfera* (in russo). Gidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg, 1965, 1984, 2000.
- [11] Prodi, F., Battaglia, A. : *Meteorologia - Parte II, Microfisica*. Grafica Pucci, Roma, 2004. (voir aussi le site :
- [12] Raymond Pérez, S. : Influencia de la condensación en la evolución de los ciclones tropicales : un modelo preliminar. *Tesis de Ingeniería Física*, Univ. La Habana, 2013.
- [13] Samarskii, A.A. : *Théorie des schémas de différences finies* (en russe). Nauka(Moscou), 1977.
- [14] Samarskii, A.A., Vabishchevich : *Méthodes numériques pour la résolution des problèmes de convection-diffusion*, 4 éd. (en russe). Librokom (Moscou), 2009.