République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



GUELMA
UNIVERSITE 08 MAI 45

**Mémoire**

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master Académique en Mathématiques**

Option : **Mathématique Appliqué**

Par :

**Mme. Bourouga Asma**

# Intitulé

# Théorèmes du point fixe et quelques-unes de leurs applications.

**Dirigé par :** **Dr. Zenkoufi Lilia**

**Devant le jury**

| | | |
|---|---|---|
| PRESIDENT | Dr A. FRIOUI | Univ-Guelma |
| RAPPORTEUR | Dr. Zenkoufi Lilia | Univ-Guelma |
| EXAMINATEUR | Dr. N.E Azzouza | Univ-Guelma |

**Session Juin 2016**

# Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu à ALLAH Tout Puissant qui a illuminé mon chemin de la lueur du savoir et de la science et pour la volonté, la santé et la patience qu'il ma prodiguées durant toutes ces années d'études.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance et ma profonde gratitude à Madame ZENKOUFI LILIA, Dr à l'université 8 mai 1945 de Guelma, pour avoir Assuré l'encadrement de ce travail. Son aide, sa grande disponibilité ont joué un Rôle essentiel dans l'aboutissement de ce travail.

Enfin, mes remerciements vont aussi à mes parents pour leur patience, leurs Encouragements continus et leur soutien inconditionnel, et à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à accomplir ce travail je leur dis merci .

# *Dédicace*

Je tiens à remercier en premier lieu Allah qui m'a donné, vie et santé pour le parachèvement de ce modeste ouvrage.

C'est avec profonde gratitude et sincères mots, que je dédier ce fameux travail de fin d'étude

Aux deux êtres les plus chers au monde, qui ont souffert nuit et jour pour nous couvrir de leur chaleur d'amour, mes parents.

L'être qui me guide dans ma vie et que j'imite son honnêteté, son sérieux et sa responsabilité de ces engagements, mon cher père.

A ma source de bonheur, la perle de mes yeux, ma mère.

Que dieu vous garde en bonne santé.

A mon cher mari et ma belle petite fille Amina.

A mes chers frères et sœurs.

A toutes ma famille et ma belle-famille.

A tous mes amis surtouts : Houda, Amina, Robila, Amina, Abir, Meryem.

A mon Encadreur Mme Zenkoufi Lilia

A mes camarades de l'option de Mathématique Appliqué

A toutes la promo 2015- 2016

# Table des matières

# Résumé

Dans ce travail, on va étudier quelques théorèmes de point fixe tels que, le théorème de banach, brower, schauder, schaeffer et de krasnoselskii et quelques-unes de leurs applications.

On va commencer par rappelé quelques notions de base de l'analyse fonctionnelle et des résultats connus qu'on va utiliser dans la suite de notre travail, en suite on va étudier quelques théorème de point fixe, en fin dans le dernier chapitre on va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites engendré par une équation différentielle du second ordre, en utilisant le principe de contraction de banach et l'alternative non linéaire de leray schauder.

# Abstract

In this work, we will study some fixed point theorem as the banach theorem, brower, Schauder, schaeffer and Krasnoselskii and some of their applications.

Let's start with some basics of functional analysis and results that will be used later in our work, in following we will study some fixed point theorem, In the final chapter we will study the existence and uniqueness of the solution of a boundary value problem generated by a differential second order equation, using the Leray-Schauder nonlinear alternative and the Banach contraction principle.

# introduction

La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude de l'existence de solution et de nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partire des théorèmes de banach et schauder, en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe.

En analyse, un théorème de point fixe est un résultat qui affirme, qu'une fonction $f$ possède au moins un point fixe, avec quelques conditions sur $f$. Un point fixe d'une fonction $f$ qui est définie dans un espace métrique $X$ vers lui même, est un élément $x \in X$ qui vérifie $f(x) = x$.

Ces théorèmes présente un outil très utile en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

Dans ce mémoire, on va étudier quelques théorèmes du point fixe de Banach, Brouwer, Schauder et krasnoselskii et quelques-unes de leurs applications.

Ces résultats théoriques nous permettent de résoudre certains problèmes comme par exemple, trouver les zéros d'un polynôme, ou prouver que certaines équations différentielles admettent des solutions.

Le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922, dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique.

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

En 1955, Krasnoselskii a élaboré son théorème du point fixe. Krasnoselski a joint les deux résultats de banach et de schauder afin d'entirer son théorème qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractane et l'autre compacte admet un point fixe. Ce théorème est très efficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires, il apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité.

De cette théorie découlent plusieurs applications qui constituent un domaine très actif de la rechèrche.

Ce travail est réparti en trois chapitres :

**Le premier chapitre** se compose notament des rappels de quelques résultats théoriques, et notions de base de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisées dans les chapitres qui suivent.

**Dans le deuxième chapitre** on va présenter quelques résultats de la théorie du point fixe, où on va étudier les théorèmes de : banach, brower, schauder et enfin le théorème de schaeffer et de krasnoselskii.

**Dans le troisième chapitre,** on va appliquer l'alternative non linéaire de leray-schauder et le principe de contraction de banach pour discuter des résultats d'existence et d'unicité de la solution d'un problème aux limites engendré par une équation différentielle du second ordre.

# Chapitre 1

# Rappels de quelques notions d'analyse fonctionnelles


## Résumé

Dans ce chapitre on va rappeler des définitions de quelques notions de base de l'analyse fonctionnelle et des résultats connus qu'on va utiliser dans la suite de notre travail.

## 1.1 Introduction

Les espaces de base de l'analyse fonctionnelle sont les espaces vectoriels normé complets sur le corps des nombres réels ou des nombres complexes. De tels espaces sont appelés les espaces de banach. Les espaces de hilbert constituent un cas particulier important, ou la norme est issue d'un produit scalaire.

### 1.1.1 Quelques rappels

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé (e.v.n) sur un sous-corps $\mathbb{k}$ (en général $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.), complet pour la distance issue de sa norme.

Soit $V$ un e.v normé :

**Définition 1.1** *(ouvert).*

*Un ensemble $O \subset V$ est ouvert dans $V$ si $\forall x \in O$, $\exists\ \epsilon$ tel que $B(x, \epsilon) \subset O$ avec $B(x, \epsilon) = \{y \in V;\ ||x - y||_V < \epsilon\}$ boule ouverte de centre $x$ et de rayon $\epsilon$.*

**Définition 1.2** *(fermé).*

*Un ensemble $F \subset V$ est fermé dans $V$ si $V \backslash F$ est ouvert dans $V$.*

**Définition 1.3** *(convergence).*

*Soit $u_n$ une suite de $V$, On dit que $u_n$ converge vers $l \in V$ si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N;\ ||u_n - l||_V \leq \epsilon.$$

**Définition 1.4** *(convexe).*

*on dit qu'une partie $A$ de $V$ est convexe si pour tout $x$,$y \in A$, on a pour tout $t \in [0,\ 1]$, $tx + (1 - t)y \in A$.*

*ce qui signifie que le segment joignant $x$ et $y$ est entrièrement contenu dans $A$.*

**Définition 1.5** *Soit $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $V$. On dit que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une* ***suite de Cauchy*** *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists N \geq 0,\ \forall n \geq N,\ \forall p \geq 0,\quad ||u_{n+p} - u_n||_V \leq \varepsilon.$$

**Définition 1.6** *(espace métrique complet)*

*On dit que l'espace métrique $(V; d)$ est complet si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de $V$ converge dans $V$.*

***Définition 1.7*** *Soit $I \subset \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ On dit que l'intervalle $I$ est* **stable** *par la fonction $f$ lorsque $f(I) \subset I$.*

***Définition 1.8*** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. On dit que $x$ est un point fixe de $f$ lorsque $f(x) = x$.*
*En d'autres termes, les points fixes de $f$ sont les solutions, lorsqu'elles existent de l'équation $f(x) = x$.*

**Proposition 1.1**

*1) Toute suite convergente est de Cauchy.*

*2) Toute suite extraire d'une suite de Cauchy est de Cauchy.*

*3) Toute suite de Cauchy est bornée.*

*4) Toute suite de Cauchy qui possède une suite extraire convergente est converge.*

**Proposition 1.2** *Tout espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ normé de dimension finie est complet.*

**Définition 1.9** *Une norme est une application définie sur $V$ (ev) réel, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, notée $\|.\|_V$, et satisfaisant les trois propriétés suivantes :*

$(i)$ $\|v\|_V = 0 \Longleftrightarrow v = 0$,

$(ii)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$, $\|\lambda v\|_V = |\lambda| \; \|v\|_V$.

$(iii)$ *Inégalité triangulaire:* $\forall v, w \in V$, $\|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V$.

**Définition 1.10** *Un ensemble $A \subset V$ est compact si de toute suite d'élements de $A$, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de $A$.*

**Proposition 1.3**

*1) Si $V$ est compact et si $A$ est une partie fermée de $V$, alors $A$ est compacte.*

*2) Si $A$ est une partie compacte de $V$ ; alors $A$ est fermée et bornée.*

**Proposition 1.4** *Si $V$ est de dimension finie, alors $A$ est compact si et seulement si $A$ est fermé et borné.*

**Définition 1.11** *Soit $V$ un espace topologique séparé.*

*Un sous-ensemble $F$ de $V$ est relativement compact si son adhérence $\overline{F}$ est compacte.*

*Le sous-ensemble $F$ est dit précompact si son complété est compact.*

*Evidemment, lorsque $V$ est lui-même complet, les deux notions sont équivalentes.*

**Définition 1.12** *Soit $||.||_{V,1}$, et $||.||_{V,2}$ deux normes sur $V$. On dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe $c_1$ et $c_2$ strictement positives telles que*

$$\forall v \in V, c_1\, ||.||_{V,2} \leq ||.||_{V,1} \leq c_2\, ||.||_{V,2}\,.$$

*Si $||.||_{V,1}$, et $||.||_{V,2}$ sont deux normes équivalentes sur $V$, on a l'équivalence :*

$$u_n converge\ vers\ l\ suivant\, ||.||_{V,1} <=> u_n converge\ vers\ l\ suivant\, ||.||_{V,2}\,.$$

**Proposition 1.5** *Si $V$ est de dimension finie, alors toutes les normes sont équivalentes.*

**Proposition 1.6** *Soit $V$ un e v normé.*

*La norme sur $V$ est* ***une application continue****, autrement dit la fonction $\varphi : v \in V \longmapsto ||.||_V \in \mathbb{R}$ est continue.*

*En effet on a $\|\varphi(v) - \varphi(w)\| \leq \|v - w\|_V$ et $\varphi$ est lipschitzienne donc continue.*

### 1.1.2 Applications continues d'un espace compact

Rappelons que toute fonction numérique continue sur un intervalle fermé borné atteint ses bornes inférieure et supérieure. Cette propriété implique que $f([a, b]) = [m, M]$ lorsque $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

**Définition 1.13** ***(Continuité en un point).***

*Soient $I$ un intervalle, $f$ une fonction définie sur $I$ et $a \in I$.*

*On dit que $f$ est continue en $a$ lorsque $f$ admet une limite en $a$ égale à $f(a)$.*

**Définition 1.14** ***(Continuité sur un intervalle).***

*Soient $I$ un intervalle, $f$ une fonction définie sur $I$.*

*On dit que $f$ est continue sur $I$ lorsque $f$ admet une limite en tout point de $I$.*

**Théorème 1.1** ***(Théorème des valeurs intermédiaires).***

*Soient $I$ un intervalle, $a$ et $b$ inclu dans $I$ avec $a < b$, $f$ une application continue sur l'intervalle $I$, et $\lambda$ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.*

*Alors : il existe (au moins) un réel $c$ dans $[a, b]$ tel que : $f(c) = \lambda$.*

*(Autrement dit : l'équation $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans $[a, b]$ )*

***Théorème 1.2*** **(*théorème des accroisements finis* )** *:*

*Si $f$ est une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c$ de $]a, b[$ tel que :*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

## 1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz.

**Définition 1.15** *Soient $(E, d_E)$ et $(F, d_F)$ des espaces métriques, $f : E \to F$ une application et $k$ un réel positif.*

*On dit que $f$ est* ***lipschitzienne*** *si :*

$$\forall : (x, y) \in E^2,\ d_F(f(x), f(y)) \leq k\ d_E(x, y).$$

**Définition 1.16** *Soit $d$ un entier, $u_0 \in \mathbb{R}^d$ et $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On appelle* **problème de Cauchy** *le problème suivant :*

$$\begin{aligned} &\textit{trouver} \quad u &:& \quad [0, \infty[ \to \mathbb{R}^d, \text{ de classe } C^1, & \quad (P) \\ &\textit{tq} \quad \frac{du}{dt} &=& \quad f(u(t)) \text{ sur } t > 0 \text{ et } u(0) = u_0. \end{aligned}$$

**Théorème 1.3** ***(Cauchy-Lipschitz).***

*On considère le problème (P) avec $f$ lipschitzienne. Alors le problème de Cauchy admet une unique solution $u \in C^1([0,\infty[,\mathbb{R}^d)$.*

## 1.3 Theorème d'Arzéla-Ascoli

On va rappeler le théorème d'Ascoli qui concerne les compacts, qui constitue un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle [1, 6]

**Définition 1.17** *une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions continues sur un interval $I = [a,b]$ est* ***uniformément bornée*** *s'il existe un nombre $M$ tel que*

$$|f_n(x)| \leq M$$

**Définition 1.18** ***(Equicontinuité).***

*Soit $\mathcal{F}$ une famille d'applications $X \longrightarrow Y$ où $X$ est un espace topologique et $Y$ un espace métrique. On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue si, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $x \in X$ il existe un voisinage $V_x$ de $x$ dans $X$ tel que*

$$d(f(x), f(y)) < \epsilon \text{ pour tout } f \in F \text{ et tout } y \in V_x$$

*Si $X$ est aussi métrique, $\mathcal{F}$ est dite uniformément équicontinue si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $x$, $y$ vérifiant*

$$d(x,y) < \alpha$$

*et tout $f \in \mathcal{F}$, on ait*

$$d(f(x), f(y)) < c.$$

### 1.3.1 Enoncé

**Théorème 1.4** *Soient* $(X, d_X)$ *et* $(Y, d_Y)$ *deux espaces métriques et supposons que* $X$ *compact. Alors, une partie* $\mathcal{F}$ *incluse dans* $C(X, Y)$ *est relativement compacte (i.e, d'adhérence compact) pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si on a les deux conditions suivantes :*

*- La famille* $\mathcal{F}$ *est équicontinue en tout point de* $X$.

*- Pour tout* $x \in X$ *l'ensemble des* $f(x)$ *pour* $f \in \mathcal{F}$ *est relativement compact ;*

*i.e,* $\mathcal{F}(x) := \{f(x), \quad f \in \mathcal{F}\}$ *est relativement compact pour tout* $x \in X$.

### 1.3.2 Autres énoncés

**Théorème 1.5** *(Y compact)*

*Soient* $(X, d_X)$ *et* $(Y, d_Y)$ *deux espaces métriques compacts. Alors, une partie* $\mathcal{F}$ *incluse dans* $C(X, Y)$ *est relativement compacte ssi* $\mathcal{F}$ *est équicontinue en tout point de* $X$.

**Théorème 1.6** *(Y evn de dimension finie)*

*Soient* $(X, d_X)$ *un espace métrique compact et* $(Y, \|\|)$ *un evn de dimension finie. Alors, une partie* $\mathcal{F}$ *incluse dans* $C(X, Y)$ *est relativement compacte ssi*

*- La famille* $\mathcal{F}$ *est équicontinue en tout point de* $X$.

*-* $\mathcal{F}(x) := \{f(x), \quad f \in \mathcal{F}\}$ *est borné pour tout* $x \in X$.

**Théorème 1.7** *(X convexe et Y evn de dimension finie)*

*Soient* $(X, d_X)$ *espace métrique compact et convexe et,* $(Y, \|\|)$ *un evn de dimension finie. Alors, une partie* $\mathcal{F}$ *incluse dans* $C(X, Y)$ *est relativement compacte ssi*

*- La famille* $\mathcal{F}$ *est équicontinue en tout point de* $X$.

*- Il exisste* $x \in X$ *tel que* $\mathcal{F}(x) := \{f(x), \quad f \in \mathcal{F}\}$ *est borné.*

# Chapitre 2

# Résultats de la théorie du point fixe

## Résumé

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats de la théorie du point fixe. On va étudier le théorème du point fixe de Banach, de Brouwer et Schauder et enfin, le théorème du point fixe de Krasnoselskii et de schaeffer.

## 2.1 Théorèmes du point fixe

**Définition 2.1** *Une application* **contractante** *est une application lipschitzienne avec* $0 \leq k < 1$.

**Théorème 2.1** *(**Théorème du point fixe**).*

*Soit* $f$ *une fonction continue sur un intervalle* $I = [a, b]$.

*Si* $f(I) \subset I$ *(*$I$ *stable par* $f$*), alors* $f$ *admet (au moins) un point fixe sur* $I$*. (C'est-à-dire : il existe (au moins) un réel* $x$ *de* $I$ *tel que* $f(x) = x$*).*

***Preuve.*** *Considérons la fonction* $g$ *définie sur* $I = [a, b]$ *par*

$$g(x) = f(x) - x$$

*Montrons que* $0 \in g(I)$*. On a*

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - a \in g(I) \\ g(b) &= f(b) - b \in g(I) \end{aligned}$$

*Or, comme* $f(I) \subset I$*, on a*

$$f(a) \geq a \quad \text{et} \quad f(b) \leq b,$$

*c'est -à-dire*

$$g(a) \geq 0 \quad \text{et} \quad g(b) \leq 0.$$

*D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel* $x \in I$ *tel que*

$$g(x) = 0,$$

*c'est-à-dire*

$$f(x) = x.$$

$\blacksquare$

***Exemple 2.1***

*Soit* $f$ *une application définie sur* $[-1,+\infty[$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1+x}$$

***Point fixe*** *de* $f$ ***:***

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow x \geq 0$$

*et*

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

*On montre facilement que* $f$ *est dérivable sur* $]-1,+\infty[$*, croissante sur* $[-1,+\infty[$*, puis que :*

$$f([-1,+\infty[) = [0,+\infty[ \subset [-1,+\infty[$$

*De plus :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}.$$

*D'après l'inégalité des accroissements finis :*

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b-a|.$$

*Donc,* $f$ *est* $\frac{1}{2}$*-lipschitzienne sur* $I$*, donc contractante sur* $I$*.*

*En outre :*

$$f(\mathbb{R}_+) = [1,+\infty[ \subset \mathbb{R}_+.$$

*Donc,* $\mathbb{R}_+$ *est stable par* $f$ *.*

### 2.1.1 Un Théorème du Point Fixe Métrique.

Ce théorème donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

**Théorème 2.2** ***(Banach).***

*Soient $(E; d)$ un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow E$ une application contractante, i.e; Lipschitzienne de rapport $k < 1$.*

*Alors, $f$ admet un unique point fixe $a \in E$.*

*De plus, pout tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$, avec $x_0 \in E$ quelconque et $x_{p+1} := f(x_p)$ converge vers $a$.*

**Preuve.**

**1. Existence :**

Soit $x_0$ un point initial quelconque et $(x_p)$ la suite itérée associée. On a

$$d(x_p, x_{p+1}) = d\left(f(x_{p-1}), f(x_p)\right) \quad p \geq 1.$$

On va prouver que $(x_p)$ est une suite de Cauchy dans $E$. pour $p < q$, on utilise l'inigalité triangulaire

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + ... + d(x_{q-1}, x_q).$$

Puisque $f$ est une contraction, on a

$$\begin{aligned} d(x_p, x_{p+1}) &= d\left(f(x_{p-1}), f(x_p)\right) \\ &\leq kd(x_{p-1}, x_p), \quad p \geq 1. \end{aligned}$$

En répétant cette inégalité, on obtient

$$\begin{aligned}
d(x_p, x_q) &\leq \left(k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1}\right) d(x_0, x_1) \\
&\leq k^p \left(1 + k + ... + k^{q-p-1}\right) d(x_0, x_1) \\
&\leq k^p \left(\frac{1}{1-k}\right) d(x_0, x_1).
\end{aligned}$$

On en déduit alors que $(x_p)$ est une suite de Cauchy. Comme $(E, d)$ est complet, la suite $(x_p)$ converge vers un point limite $a \in E$.

Par ailleurs puisque $f$ est continue, on a :

$$a = \lim_{p\to\infty} x_p = \lim_{p\to\infty} f(x_{p-1}) = f\left(\lim_{p\to\infty} x_{p-1}\right) = f(a).$$

Donc $a$ est un point fixe de $f$ (i.e, $f(a) = a$).

**2. Unicité :**

Supposons qu'il existe $a, b \in E$, $a \neq b$, tels qu'on ait $f(a) = a$ et $f(b) = b$.

Alors, on a

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a, b)$$

ce qui implique que : $d(a, b) = 0$, i.e. $a = b$. (puisque $k < 1$). ∎

Nous allons montrer que les hypothèses du théorème de point fixe de Banach sont essentielles : si nous en négligeons seulement une, alors le point fixe n'existe pas.

**Exemple 2.2** *Les exemples suivant montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire : si nous négligeons seulement une, alors le point fixe n'existe pas.*

(1)

*$X$ n'est pas stable par $f$ :* $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ *sur* $X = [0, 1]$.

*Or $X$ est fermé dans $\mathbb{R}$, et complet car $\mathbb{R}$ est complet.*

*De plus,*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \\ \sup_{x\in X}\left|f'(x)\right| &< 1 \Longrightarrow f \quad \textit{est contractante.} \end{aligned}$$

*Mais $f$ n'a pas de point fixe car*

$$f([0,1]) = \left[1, \sqrt{2}\right],$$

*i.e; $X$ n'est pas stable par $f$.*

**(2)**

*$f$ n'est pas contractante :*

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

*sur $X = [0, \infty[$.*

*Or $f : X \to X$ et $X$ est un fermé de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ est complet donc $X$ est complet.*

*Mais ;*

$$\sup_{x\in X}\left|f'(x)\right| = 1$$

$\Longrightarrow$ *$f$ n'est pas contractante.*

**(3)**

*$X$ n'est pas complet :*

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

*sur $X = \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.*

*Or*

$$\begin{aligned} f\left(\left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right) &= \left]0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{4}\right], \\ \sup_{x\in X}\left|f'(x)\right| &= \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow f \quad \textit{est contractante.} \end{aligned}$$

*Mais $X$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc n'est pas complet.*

### 2.1.2 Un Théorème du Point Fixe Topologique

Ce théorème (**de Brouwer**) donne l'existence d'un point fixe (mais pas nécessairement l'unicité) pour une fonction continue sur une boule fermé dans un espace de dimension finie

**Théorème 2.3** *Soit $K$ une partie non vide, compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to K$ une fonction continue. Il existe $x \in K$ tel que $f(x) = x$.*

**Remarque :** Les parties convexes et compactes de $\mathbb{R}$ sont les segments.
Le théorème de Brouwer prend donc dans le cas $n = 1$ la forme particulière suivante :

**Théorème 2.4** *Si $f : [a; b] \to [a; b]$ est continue, alors il existe $x \in [a; b]$ tel que $f(x) = x$.*

**Preuve.** Si $f$ est continue de $[a, b]$ dans lui-même ($[a, b]$), la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x \geq 0$ est continue, prend en $a$ la valeur $f(a) - a \geq 0$ et en $b$ la valeur $f(b) - b \leq 0$.

Alors : par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction $g$ s'annule en un point $x_0$, qui est un point fixe de $f$. ■

**Remarque 2.1**

1. *L'hypothèse " $I$ fermé " n'est là que pour assurer que $x_0 \in I$ . Si on sait déjà, par ailleurs, que $x_0 \in I$ (en pratique, on a parfois déjà calculé $\ell$ en résolvant l'équation $f(x_0) = x_0$), cette hypothése devient inutile.*

2. *Le théorème du point fixe ne s'applique pas si l'on remplace l'hypothèse "$f$ contractante sur$I$ " par l'hypothèse "$f$ 1-lipschitzienne sur $I$ ".*

*Voici un **contre-exemple** :*

*Soit, $I = [1, +\infty[$ et*

$$f : I \to I$$

*telle que,*

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

*Soient $x$ et $y$ dans $I$ avec $x < y$.*

*Comme la fonction $f$ est croissante sur $[1, +\infty[$ , on a :*

$$|f(y) - f(x)| \leq f(y) - f(x)$$

*donc,*

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x + \frac{x - y}{xy}$$

*alors,*

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x \leq |y - x|.$$

*Ce qui prouve que $f$ est 1-lipschitzienne sur I.*

*Cependant $f$ n'a pas de point fixe sur I. (L'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution)*

### 2.1.3 Le Théorème de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

**Théorème 2.5** ***(Schauder).***

*Soient $E$ un espace de Banach et $K \subset E$ convexe et compact. Alors toute application continue $f : K \to K$ possède un point fixe.*

**Preuve.** Soit $f : K \to K$ une application continue. Comme $K$ est compact, $f$ est uniformément continue ; donc, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in K$, on ait

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon, \text{ dès que } \|x - y\| \leq \delta$$

De plus, il existe un ensemble fini des points $\{x_1, ..., x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon $\delta$ centrées aux $x_j$ recouvrent $K$ ;

$i.e,$

$$K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq P} B(x_j, \delta).$$

Si on désigne $L := Vect(f(x_j))_{1 \leq j \leq P}$ , alors $L$ est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq P$, on définit la fonction continue $\psi_j : E \to \mathbb{R}$ par

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinonn} \end{cases}$$

et on voit que $\psi_j$ est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors.

On a donc, pour tout $x \in K$, $\sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$, et donc on peut définir sur $K$ les fonctions continues positives $\varphi_j$ par

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^{p} \psi_k(x)}$$

pour lesquelles on a $\sum_{i=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$, pour tout $x \in K$.

On pose alors, pour $x \in K$,

$$g(x) := \sum_{i=1}^{p} \varphi_j(x) f(x_j).$$

$g$ est continue (car elle est la somme des fonctions continues), et prend ses valeurs dans $K^*$ (car $g(x)$ est un barycentre des $f(x_j)$).

Donc, si on prend la restriction $g_{/K^*} : K^* \to K^*$, g possède un point fixe $y \in K^*$. De plus,

$$\begin{aligned} f(y) - y &= f(y) - g(y) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_j(y) f(y) - \sum_{i=1}^{p} \varphi_j(y) f(x_j) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \varphi_j(y)(f(y) - f(x_j)) \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$, alors

$$\|y - x_j\| < \delta,$$

et donc

$$\|f(y) - f(x_j)\| < \epsilon.$$

Donc, on a pour tout $j$,

$$\left\|\varphi_j(y)(f(y) - f(x_j))\right\| \leq \epsilon\varphi_j(y),$$

et donc

$$\|f(y) - y\| \leq \sum_{i=1}^{p} \left\|\varphi_j(y)(f(y) - f(x_j))\right\| \leq \sum_{i=1}^{p} \epsilon\varphi_j(y) = \epsilon$$

Donc, pour tout entier $m$, on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que

$$\|(f(y_m) - y_m)\| < 2^{-m}$$

Et puisque $K$ est compact, de la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous-suite $(y_{m_k})$ qui converge vers un point $y^* \in K$.

Alors $f$ étant continue, la suite $(f(y_{m_k}))$ converge vers $f(y^*)$ et on conclut que

$$f(y^*) = y^*,$$

*i.e*, $y^*$ est un point fixe de $f$ sur $K$. ■

### 2.1.4 Théorèmes de Krasnoselskii et de Schaeffer

Citons maintenant le théorème de **Schaeffer** et le théorème hybride de **Krasnoselskii,** ce théorème est une combinaison comme on va le voir, du théorème de **Schauder** et celui de **Banach**. Il a été l'objet de plusieurs études ces dernières années et on le rencontre sous plusieurs formes.

**Définition 2.2** *Soit $X$ un espace normé, l'application $A : X \to Y$ est dite compacte si elle satisfait les conditions suivantes :*

*i : $A$ est continue.*

*ii : $A$ transforme tout ensemble borné de $X$ en un ensemble relativement compact (i.e.ensemble de fermeture compacte).*

**Théorème 2.6** ***(Schaeffer)*** *Soit $X$ un espace de Banach et soit $A : X \longrightarrow X$ une application compacte, alors*

*i. L'équation $x = \lambda Ax$ admet une solution pour $\lambda = 1$,*

*ii. Ou bien, l'ensemble $\varepsilon = \{x \in X,\ x = \lambda Ax,\ \lambda \in (0,1)\}$ est non borné.*

**Théorème 2.7** ***(Krasnoselskii)*** *Soit $M$ un convexe fermé et non vide d'un espace de Banach $(X, \|.\|)$. Supposons que $A$ et $B$ sont deux applications de $M$ dans $X$ telles que*

*i. $Ax + By \in M$, $\forall x, y \in M$.*

*ii. $A$ est continue et $AM$ est contenu dans un ensemble compact.*

*iii. $B$ est une contraction de constante $\alpha < 1$.*

*Alors, il existe $x \in M$, avec $Ax + Bx = x$.*

**Notons**, que si $A = 0$, le théorème se résume au théorème de **Banach**. Si $B = 0$, alors le théorème n'est autre que le théorème de **Schauder**.

**Preuve.** D'après la condition $(iii)$. on a

$$\begin{aligned}\|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| &= \|(x-y)-(Bx-By)\| \\ &\leq \|x-y\|+\|Bx-By\| \\ &\leq \|x-y\|+\alpha\|x-y\| \\ &\leq (1+\alpha)\|x-y\|\end{aligned}$$

D'aute part,

$$\begin{aligned}\|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| &= \|(x-y)-(Bx-By)\| \\ &\geq \|(x-y)\|-\|Bx-By\| \\ &\geq \|x-y\|-\alpha\|x-y\| \\ &\geq (1-\alpha)\|x-y\|\end{aligned}$$

En résumé,

$$(1-\alpha)\|x-y\| \leq \|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| \leq (1+\alpha)\|x-y\|$$

Cette inégalité montre que $(I-B): M \longrightarrow (I-B)M$ est continue et bijective. Donc, $(I-B)^{-1}$ existe et est continue.

Posons $U := (I-B)^{-1}A$. Il est clair que $U$ est une application compacte, puisque $U$ est une composition d'une application continue avec une application compacte. En vertu du théorème de **Schauder**, $U$ admet un point fixe, i.e.

$$\exists\, x \in M \quad \text{tel que } (I-B)^{-1}Ax = x.$$

Ceci équivaut à dirc $Ax+Bx-x$ ■

**Remarque 2.2** *Dans le théorème de Krasnoselskii si $\alpha = 1$ dans (iii) alors on n'a pas de point fixe. En effet voisi un* ***contre-exemple***

**Exemple 2.3** *Soit $C_0(R)$ l'espace de Banach de toutes les suites réelles*

$$\xi = \{\xi_i\}_1^{\infty},$$

*avec*

$$\lim_{i\to\infty} \xi_i = 0 \quad et$$

$$\|\xi\| = \max\{|\xi_i| \ : i = 1, 2, ...\}$$

*Pour chaque $\xi \in \overline{S}(0,1)$ la fermeture de a boule unité, on définit*

$$A\xi := \eta$$

*où*

$$\begin{cases} \eta_1 = 2^{-1}(1 + \|\xi\|) \ \ et, \\ \eta_i = (1 - 2^{-i-1})\xi_{i-1} \ \ pouri = 2, 3, ... \end{cases}$$

*Puisque*

$$\begin{cases} |\eta_i| \leq 1 \ \ et, \\ |\eta_i| \leq |\xi_i| \leq 1 \end{cases}$$

*alors on a*

$$A : \overline{S}(0,1) \to \overline{S}(0,1).$$

*Aussi, si $\xi$ et $\xi'$ sont deux élément distincts dans $\overline{S}(0,1)$ alors*

$$\begin{aligned} \|A\xi - A\xi'\| &= \max\left\{2^{-1}(\|\xi\| - \|\xi'\|), \max\left\{\left(1 - 2^{-i-1}\right)\left|\xi_{i-1} - \xi'_{i-1}\right| \ : i = 2, 3, ...\right\}\right\} \\ &< \|\xi - \xi'\|. \end{aligned}$$

*Supposons qu'il existe un* $\xi \in \overline{S}(0,1)$ *tel que*

$$A\xi = \xi \Rightarrow \xi_1 = 2^{-1}(1 + \|\xi\|) > 0.$$

*De plus, pour* $i \geq 2$,

$$\begin{aligned} |\xi_i| &= \left|\left(1 - 2^{-i-1}\right)\xi_{i-1}\right| \\ &= \left|\left(1 - 2^{-i-1}\right)\left(1 - 2^{-i}\right)\xi_{i-2}\right| \\ &= \ldots = \left|\prod_{k=0}^{i-2}\left(1 - 2^{-i-1+k}\right)\xi_1\right| \\ &\geq \left[1 - \sum_{k=0}^{i-2} 2^{-i-1+k}\right]|\xi_1| \\ &\geq 2^{-1}|\xi_1| \end{aligned}$$

*Ainsi*

$$|\xi_i| \geq 2^{-1}|\xi_1| > 0 \text{ pour tout } i \geq 2,$$

*ceci est imposible puisque* $\xi_i \to 0$ *quand* $i \to \infty$.

*Il s'en suit que* $A$ *n'a pas de point fixe.*

# Chapitre 3

# Application

## Résumé

Dans ce chapitre, on va étudier un problème aux limite engendré par une équation différentielle du second ordre, on discutera les resultats d'existences et d'unicité des solutions par utilisation du principe de contraction de banach et l'alternative non linéaire de leray schauder.

## 3.1 Application du principe de contraction de banach et de l'alternative non linéaire de leray-schauder.

On s'interesse à l'étudie d'un problème aux limite engendré par une équation différentielle du second ordre.

on va démonter et présenter ; la forme de la solution du problème, l'opérateur intégral associé et quelques définitions de base qu'on est besoin. Dans la deuxième séction, en utilisant l'alternative non linéaire de Leray Schauder et le principe de contraction de banach, nous prouvons les résultats d'éxistence et d'unicité de la solution du problème, on a démontré aussi que l'opérateur intégral associé est complètement continu par utilisation du théorème d'Arzéla-Ascoli.

**Problème aux limite du second ordre**

Soit $E = C[0,1]$ muni de la norme $\|y(t)\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |y(t)|$, pour tout $y \in E$ on s'intéresse à l'étude du problème suivant :

$$u'' + f(t,u) = 0, \quad 0 < t < 1 \tag{1}$$

$$u'(0) = 0, \ u(1) = \alpha u'(\eta)$$

où $\eta \in ]0,1[$ ; $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f$ est une fonction continue : $f \in C(]0,1[ \times \mathbb{R}, [0,\infty[)$.

**Lemme 3.1** *Soit $y \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors le problème aux limites à trois points*

$$\begin{cases} u'' + y(t) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u'(0) = 0, \ u(1) = \alpha u'(\eta) \end{cases} \tag{2}$$

*a une solution unique*

$$u(t) = \int_0^1 (1-s)\, y(s)\, ds - \int_0^t (t-s)\, y(s)\, ds \\ -\alpha \int_0^\eta y(s)\, ds. \tag{3}$$

**Preuve.** D'après (2) on a $u''(t) = -y(t)$.

Pour $t \in [0,1]$, en intégrant de 0 à $t$, on obtient

$$-u'(t) = \int_0^t y(s)\, ds + C_1.$$

pour $t \in [0,1]$, on intègre deuxième foie de 0 à $t$ on trouve

$$-u(t) = \int_0^t \left( \int_s^t y(s)\, dx \right) ds + C_1 t + C_2,$$

i.e,

$$u(t) = -\int_0^t (t-s)\, y(s)\, ds - C_1 t - C_2,$$

de

$$u'(0) = 0$$

$$C_1 = 0.$$

et

$$u(1) = -\int_0^1 (1-s)\, y(s)\, ds - C_2 = \alpha u'(\eta)$$

$$u'(\eta) = -\int_0^\eta y(s)\, ds,$$

alors, on a

$$C_2 = -\int_0^1 (1-s)\, y(s)\, ds - \alpha \int_0^\eta y(s)\, ds,$$

remplaçant $C_1$ et $C_2$ dans

$$u(t) = -\int_0^t (t-s)\, y(s)\, ds - C_1 t - C_2,$$

on obtient

$$u(t) = -\int_0^t (t-s)\, y(s)\, ds + \int_0^1 (1-s)\, y(s)\, ds - \alpha \int_0^\eta y(s)\, ds$$

■

**Définition 3.1** *Définissons l'opérateur intégral $T : E \to E$, par*

$$\begin{aligned} Tu(t) = \int_0^1 (1-s)\, f(s, u(s))\, ds - \int_0^t (t-s)\, f(s, u(s))\, ds \\ -\alpha \int_0^\eta f(s, u(s))\, ds \end{aligned} \tag{4}$$

*D'après le lemme 3.1, le problème aux limites (1) a une solution (La fonction $u(t) \in E$) si et seulement si l'opérateur $T$ a un point fixe dans $E$ ($Tu(t) = u(t)$). Par le théorème d'Ascoli Arzela on prouve que $T$ est un opérateur complètement continu.*

### 3.1.1 Existence et unicité de la solutions

Dans cette séction en utilisant le principe de contraction de Banach et l'alternative non linéaire de Leray Schauder, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution du problème(1).

**Théorème 3.1** *Supposons qu'il existe une fonction positive $k \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$, tels que*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k(t)|x-y|, \forall\, x, y \in \mathbb{R}, t \in [0,1]$$

*et*

$$(2+\alpha)\int_0^1 (1-s)k(s)ds < 1$$

*alors, le problème aux limite (1) a une solution unique dans $E$*

***Preuve.*** *On a*

$$|Tu(t)| = \int_0^1 (1-s)|f(s,u(s))|\,ds + \int_0^t (t-s)|f(s,u(s))|\,ds + |\alpha| \int_0^\eta |f(s,u(s))|\,ds.$$

$$|Tu(t)| \leq \int_0^1 (1-s)|f(s,u(s))|\,ds + \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^t (t-s)|f(s,u(s))|\,ds + |\alpha| \int_0^\eta |f(s,u(s))|\,ds.$$

$$|Tu(t)| \leq 2\int_0^1 (1-s)|f(s,u(s))|\,ds + |\alpha| \int_0^\eta |f(s,u(s))|\,ds.$$

*on va prouver que $T$ est un contraction.*

*Soit $u$, $v \in E$, alors*

$$\begin{aligned} |Tu(t) - Tv(t)| \leq\ & \left| \int_0^1 (1-s)f(s,u(s))ds - \int_0^t (t-s)f(s,u(s))ds - \alpha \int_0^\eta f(s,u(s))ds \right. \\ & \left. - \int_0^1 (1-s)f(s,v(s))ds + \int_0^t (t-s)f(s,v(s))ds + \alpha \int_0^\eta f(s,v(s))ds \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leq\ & \int_0^1 (1-s)|f(s,u(s))|\,ds + \int_0^t (t-s)|f(s,u(s))|\,ds + |\alpha| \int_0^\eta |f(s,u(s))|\,ds \\ & + \int_0^1 (1-s)|f(s,v(s))|\,ds + \int_0^t (t-s)|f(s,v(s))|\,ds + |\alpha| \int_0^\eta |f(s,v(s))|\,ds. \end{aligned}$$

$$F = 2\int_0^1 (1-s)\,k(s)\,ds + |\alpha| \int_0^{\eta} k(s)\,ds < 1 \tag{6}$$

*Alors le problème aux limites* (1) *a au moins une solution non triviale* $u^* \in C[0,1]$.

**Preuve.** En posant

$$F = 2\int_0^1 (1-s)\,k(s)\,ds + |\alpha| \int_0^{\eta} k(s)\,ds$$

et

$$G = 2\int_0^1 (1-s)\,h(s)\,ds + |\alpha| \int_0^{\eta} h(s)\,ds$$

Montrons d'abord que $T$ est un opérateur complètement continue.

T complètement continue sur $\Omega$.

**1) T continu.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite converge vert $u$ dans $E$.

Alors,

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq (2+\alpha)\int_0^1 (1-s)\,|f(s,u(s)) - f(s,v(s))|\,ds$$

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq (2+\alpha)\int_0^1 (1-s)k(t)\,|u(s) - v(s)|\,ds,$$

donc,

$$\|Tu - Tv\| \leq (2+\alpha)\int_0^1 (1-s)k(t)ds\,\|u-v\|$$

ceci implique que $\|Tu - Tv\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

**2)** Soit $B_r = \{u \in C[0,1] : \|u\| \leq r\}$ un sous ensemble borné. Démontrons que $T(\Omega \cap B_r)$ est relativement compact.

$(i)$ $T(\Omega \cap B_r)$ est uniformément borné.

Pour tout $u \in \Omega \cap B_r$ et en utilisant $(6)$, on obtient :

$$\|Tu\| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |Tu(t)|$$

$$\leq \int_0^1 (1-s)\,|f(s,u(s))|\,ds + \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^t (t-s)\,|f(s,u(s))|\,ds + |\alpha| \int_0^\eta |f(s,u(s))|\,ds.$$

$$\leq 2\int_0^1 (1-s)\,|f(s,u(s))|\,ds + |\alpha| \int_0^\eta |f(s,u(s))|\,ds.$$

d'aprés $(5)$ on a :

$$\leq 2\int_0^1 (1-s)\,[k(t)\,|u(t)| + h(t)]\,ds + |\alpha| \int_0^\eta [k(t)\,|u(t)| + h(t)]\,ds.$$

$$\leq \left[2\int_0^1 (1-s)k(t)\,|u(t)|\,ds + |\alpha| \int_0^\eta k(t)\,|u(t)|\,ds\right] + \left[2\int_0^1 (1-s)h(t)ds + |\alpha| \int_0^\eta h(t)ds\right].$$

$$\leq F\,\|u\| + G$$

$$\|Tu\| \leq Fr + G$$

Alors, $T(\Omega \cap B_r)$ est uniformément borné.

$(ii)$ $T(\Omega \cap B_r)$ est équicontinu.

Pour tout $t_1,\, t_2 \in [0,1]$ ; $u \in \Omega$, et en utilisant $(6)$, on obtient :

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \leq F\,|u(t_1), u(t_2)|$$

Donc

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \underset{t_1 \to t_2}{\longrightarrow} 0$$

par conséquent $T(\Omega \cap B_r)$ équicontinu.

Et d'aprés le théorème d'Arzela-Ascoli, on déduit que $T$ est un opérateur complètement continu.

D'après l'hypothèse (6) on a $F < 1$. comme $f(t,0) \neq 0$ et $G > 0$, alors il éxiste un interval $[\sigma, \tau] \subset [0,1]$ tels que $\min\limits_{\sigma \leq t \leq \tau} |f(t,0)| > 0$ et $h(t) \geq |f(t,0)|$, $\forall t \in [0,1]$.

Soit $m = G(1-F)^{-1}$, $\Omega = \{u \in C[0,1] : \|u\| < m\}$.

On suppose que $u \in \partial\Omega$, $\lambda > 1$ tel que $Tu = \lambda u$, alors

$$\lambda m = \lambda \|u\| = \|Tu\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |(Tu)(t)|$$

$$\lambda m \leq \int_0^1 (1-s)|f(t,s)|\,ds + \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^t (t-s)|f(t,s)|\,ds + |\alpha| \int_0^\eta |f(t,s)|\,ds.$$

$$\begin{aligned} &\leq 2\int_0^1 (1-s)k(s)|u(s)|\,ds + |\alpha| \int_0^\eta k(s)|u(s)|\,ds \\ &\quad + 2\int_0^1 (1-s)h(s)\,ds + |\alpha| \int_0^\eta h(s)\,ds. \end{aligned}$$

$$\leq F\|u\| + G = Fm + G.$$

Donc, on a

$$\lambda \leq F + \frac{G}{m} = F + \frac{G}{G(1-F)^{-1}} = F + (1-F) = 1,$$

ceci contredit $\lambda > 1$.

En appliquant *le Lemme* 3.2, on conclut que l'opérateur $T$ a un point fixe $u^* \in \overline{\Omega}$, par conséquent le problème (1) a une solution $u^* \in C[0,1]$. ∎

### 3.1.2 Exemple

Afin d'illustrer nos résultats, nous donnons l'exemple ci-dessous

**Exemple 3.1** *On considère le problème aux limites à troit points*

$$\begin{gathered} u'' + t^2 u \sin u - \cos e^t + 3\sin^2 t = 0, \quad 0 < t < 1, \\ u'(0) = 0, \quad u(1) = 4u'\left(\tfrac{1}{2}\right). \end{gathered} \tag{$P$}$$

*on prend* $\alpha = 4$, $\eta = \frac{1}{2}$ *et*

$$f(t,x) = t^2 x \sin x - \cos e^t + 3\sin^2 t,$$

$$k(t) = t^2, \quad h(t) = \cos e^t + 3\sin^2 t.$$

***1)Existence***

*d'après le Théorème* 3.1 *on a :* $k$, $h \in L^1[0,1]$ *tels que*

$$|f(t,x)| \le k(t)|x| + h(t), \qquad (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R},$$

*et*

$$2\int_0^1 (1-s)\,k(s)\,ds + |\alpha| \int_0^\eta k(s)\,ds = \frac{1}{3} < 1.$$

*Alors, le problème aux limites* $(P)$ *admet au moins une solution non-triviale* $u^*$ *dans* $E$.

***2)Unicité***

*On a*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le k(t)|x-y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}, t \in [0,1]$$

*et*

$$(2+\alpha)\int_0^1 (1-s)k(s)ds < 1$$

*alors, le problème aux limite* $(P)$ *a une solution unique dans* $E$.

**Conclusion 3.1** *Actuellement il y a une grande variété de théorèmes du points fixes, ces théorèmes donnent certaines conditions sous les quelles une application $f : E \to E$, admet un point fixe dans $E$.*

*Ces théorèmes présente un outil très utile en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.*

# Bibliographie


[1] **H. Brézis,** Analyse fonctionnelles, Théorie et applications. Masson, paris 1983

[2] **K. Deimling**, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, 1985.

[3] **R. G. Moorti and J. B. Garner,** Existence-uniqueness theorems for three point boundary value problmes for nth-order nonlinear differential equations, J. Differential Equations 29 (1978), 205-213.

[4] **R. Ma**, Positive solution of a nonlinear three point boundary value problem, E.J.D.E, (1998), 34, 1-8.

[5] **Y-P. Sun** ; Nontrivial solution for a three-point boundary-value problem, E.J.D.E, Vol. 2004(2004), No. 111, 1-10. J. Math.Anal. Appl. 168(1992), 540–551.

[6] **L.Schwartz**, Analyse-topologie générale et analyse fonctionnelle, Hermann,Paris 1970.