République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques Appliquées**

Par :

Mlle. DAHRANA Imene

Intitulé

Modèle mathématique des Orages

Dirigé par : **Mme. Merad meriem**

Devant le jury

PRESIDENT	**Mr. A. MEHRI**	**MCA**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Mme. M. MERAD**	**MCB**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Mr. A. MENACEUR**	**MCB**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2016

REMERCIEMENT

Au nom d'Allah, le tout miséricordieux,

Le très miséricordieux

La reconnaissance est la mémoire du cœur

LE GRAND MERCI POUR ALLAH

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui mon apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

*Je remercie du fond du cœur **mes parents** pour leur contribution, leur soutien et leur patience durant toutes mes études et qui m'ont toujours aidé et encouragé aux moments opportuns.*

*Je tiens à remercier sincèrementmon encadreur madame **MERAD Meriem** qui a accepté de diriger ce travail, et qui m'a guidée de ses précieux conseils et suggestions, et pour les formations qu'elle m'a donné tout au long de ce travail.*

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur le prof. HisaoFujitaYashimaqui est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches, amis et collègues de qui m'ont toujours soutenue et encouragée.

MERCI À TOUS ET À TOUTES.

DEDICACE

A mes parents

Ames frères

A toute ma famille

A tous mes amis

et

A toi ...

Modèle mathématique des Orages

DAHRANA Imene
Mémoire de Master en mathématiques
Université 8 Mai 1945 Guelma

15 juin 2016

Table des matières

Résumé

Le but de ce travail est de modéliser mathématiquement le phénomène Orage : on écrit le système d'équation qui décrit le mouvement de l'air dans l'Orage, puis on rend ce système d'équations en coordonnées cylindriques suivant les directions radiale et verticale ; ensuite on démontre l'existence et l'unicité de la densité et de la température dans l'état hydrostatique avec condensation de la vapeur d'eau. Enfin, on étudie le bilan général de l'énergie totale dans un Orage.

Introduction

Actuellement le monde s'intéresse beaucoup aux problèmes du climat et désire en connaitre le mécanisme et les conséquences. Pour répondre à des nombreuses questions qui se présent, la modélisation mathématique des phénomènes atmosphériques et météorologiques est aujourd'hui plus nécessaire à cause de leur complixité.

L'objectif principal de notre travail est la modélisation par des équations aux dérivées partielles de phénomène Orage. Ce dernier est une perturbation atmosphérique associé à un type de nuage particulier le cumulonimbus, formé par une forte extension verticale de nuage, il engendre des pluies fortes, des décharges éléctrique de la foudre accompagne de tonnerre. Dans des cas extrêmes l'orage peut produire des chutes de grêle, et des vents très violents.

Avant d'expliquer le mécanisme de la formation des Orages, il est bon de rappeler que la vapeur d'eau qui se refroidit et se condense libère sa chaleur. Plus la condensation est marqué plus la quantité de la chaleur libérée est élevée. La condensation donne la chaleur à l'air et la vapeur d'eau retourne à l'état liquide. C'est ce qu'on appelle la chaleur latente de la condensation.

Les Orages se forment lorsque il y a une masse d'air instable c'est-à-dire lorsque il y a une réserve importante de chaleur et d'humidité à bas niveau

et d'air froid et sec en altitude.L'air chaud qui monte se refroidit, la vapeur d'eau qu'il contient se condense et donne naissance à un nuage, et elle libère une chaleur, le rechoufement d'air qui en résulte accélère l'scension de l'air en altitude, car il est plus chaud que l'air ambiant. les colonnes d'air ascendantes créent rapidement des Orages.
Notre mémoire est composée par une introduction et cinq chapitres.

Dans le premier chapitre, on va rappeler le système d'équations qui modélise le mouvement général de l'air contenent la vapeur d'eau et prend en considération toutes les transitions de phase de l'eau (voir [3], [4]), ce système est formé par des équations qui représentent la loi de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de bilan de l'énergie. On va rappler aussi l'état hydrostatique de l'air sec (voir [7]).

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à la construction d'un modèle qui décrit l'état hydrostatique de l'air accompagné par la condensation de la vapeur d'eau, et on va démontrer l'existence et l'unicité de la densité et de le température dans l'état hydrostatique avec condensation.

Dans le troisième chapitre, nous proposons un système d'équations du mouvement de l'air dans un Orage, et en supposant que la distribution des grandeurs physiques dans l'Orage est symétrique par rapport à l'axe vertical qui se trouve au centre de l'Orage.
Comme l'Orage prend une forme d'un cylindre, on va transformer ce système d'équations en coordonnées cylindriques, à savoir que toutes les grandeurs physiques ne dépendent que de r et x_3 et sont indépendentes de ϑ.

Dans le quatrième chapitre, on va étudier le bilan général de l'énergie dans un Orage, et en trouvant que l'énergie totale doit être considérer comme une somme de l'énergie thermique, l'énergie cinétique, et de l'énergie potentielle. Après un calcul on a trouvé un résultat qui interprète le phénomène Orage, dans laquel la chaleur latente due à la condensation de la vapeur d'eau donne une énergie thermique ; cette dernière se transforme en énergie cinétique et qui se consomme par la chute des gouttlettes. En plus, on a considéré l'effet de la viscosité, et de la friction entre les gouttelettes et l'air, qui jouent un rôle dans la diminution de l'énergie cinétique.

Le dernier chapitre, contient la démonstration du lemme 2.2 qui été énoncé dans le deuxième chapitre pour la démontration de l'existence et l'unicité de la solution dans l'état hydrostatique avec condensation. Cette démonstration requit des calculs assez longs, pour cette raison nous la renvoyons dans ce chapitre.

Chapitre 1

Rappel du modèle général du mouvement de l'atmosphère et l'état hydrostatique de l'air sec

Comme l'atmosphère est un gaz, son mouvement doit être décrit par les équations aux dérivées partielles de la dynamique des gaz. Or, en réalité, la composante H_2O a des comportements particuliers : la vapeur d'eau peut se transformer en liquide ou en solide et sa transition de phase contribue au changement de la concentration de H_2O en état gazeux et au bilan de la température.

Dans ce chapitre nous rappelons le système d'équations qui modélise le mouvement de l'atmosphère avec la transition de phase de l'eau développé dans [3], [4] et [?] (voir aussi [2], [8], [9]).

1.1 Système d'équations

Avant de décrire les équations, nous introduisons les grandeurs physiques :

$\varrho = \varrho(x,t)$: la densité de l'air sec ;

$\pi = \pi(x,t)$: la densité de la vapeur d'eau ;

$v = v(x,t) = (v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t))$: la vitesse de l'air ;

$T = T(x,t)$: la température ;

$p = p(x,t)$: la pression.

Les trois lois fondamentales du mouvement de l'air sont celles de la conservation de la masse, de la conservation de la quantité de mouvement, de la conservation de l'énergie, auxquelles il faut ajouter la loi constitutive de la pression. Ces lois de conservations sont exprimées dans la forme d'équations aux dérivées partielles, tandis que la loi constitutive de la pression est donnée par une équation de la forme $p = p(\varrho, T)$.

Commençons par l'équation qui détermine la pression, on rappelle que dans les conditions usuelles de l'atmosphère, le comportement de l'air est similaire à celui du gaz idéal, ce qui nous permet d'écrire **l'équation de la pression** dans la forme

$$p(x,t) = R_1 \varrho(x,t) T(x,t), \qquad R_1 = \frac{R}{\mu}, \tag{1.1}$$

où R est la constante universelle des gaz ($R \approx 8,31.10^7 erg/mol.K$), et μ est la masse molaire moyenne de l'air ($\mu \approx 28,96g/mole$).

Tandis que la loi de la conservation de **la quantité de mouvement** de l'air sera exprimé par l'équation

$$(\varrho + \pi)\partial_t v_j + (\varrho + \pi) \sum_{j,k=1}^{3} v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{1.2}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} (\eta (\frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_k - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v)) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\zeta \nabla \cdot v) - g[\Sigma + \varrho + \pi] \vec{e}_3,$$

$$j = 1, 2, 3,$$

où η et ζ sont les coefficients de viscosité, $\vec{e}_3 = (0,0,1)^T$, Σ est la densité de l'eau liquide ou solide suspendre dans l'atmosphère, et g est l'accélération de la pesantaur.

Pour la loi de **la conservation de l'énergie**, il nous sera commode de l'écrire dans la forme relative à la chaleur exprimé par la température, on a

$$(\varrho + \pi)c_v(\partial_t T + v \cdot \nabla T) + p\nabla \cdot v = \tag{1.3}$$

$$= \kappa\Delta T + \eta \sum_{j,k=1}^{3} (\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla \cdot v)\frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \zeta(\nabla \cdot v)^2 + L_{tr}H_{tr}$$

$$j, k = 1, 2, 3,$$

où c_v et κ sont respectivement la chaleur spécifique et le coefficient de la thermoconductibilité de l'air, H_{tr} représente la quantité totale (dans l'unité de volume et de temps) de H_2O qui se transforme du gaz au liquide ou solide et L_{tr} représente la chaleur latente.

Enfin, la loi de la conservation de la masse pour l'air sec (dont la densité est notée ϱ) est exprimée par **l'équation de continuité** classique (absence de transition de phase de l'eau)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho v) = 0. \tag{1.4}$$

Pour la vapeur d'eau (dont la densité est notée π), compte tenu de la quantité de H_2O qui resulte de la transition de phase, le principe de la conservation de la masse est exprimé par l'équation

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi(t,x)v(t,x)) = -H_{tr}. \tag{1.5}$$

Ici π est la densité de la vapeur d'eau et H_{tr} représente la quantité totale (dans l'unité de volume et de temps) de H_2O qui se transforme du gaz au liquide ou solide.

1.2 Etat hydrostatique de l'air sec

Dans l'atmosphère réelle la diffusion de la chaleur et l'effet thermique de la friction interne sont relativement petits, de sorte que le déplacement vertical de l'air, s'il n'y a pas de transition de phase de l'eau, engendre la variation de la pression et de la température de manière assez proche du processus adiabatique. A cause de ce comportement de l'air, nous trouvons une distribution de la pression, de la densité et de la température assez proche de la distribution de l'état hydrostatique.

En effet, si on néglige la diffusion de la chaleur et l'augmentation de la température due à la friction interne, l'équation (1.3) se réduit à

$$\varrho c_v(\partial_t T + v \cdot \nabla T) + \frac{R}{\mu}\varrho T \nabla \cdot v = 0. \tag{1.6}$$

Si le mouvement de l'air vérifie cette équation, le long de sa trajectoire, le rapport

$$\vartheta(t,x) = \frac{T(t,x)^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho(t,x)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \tag{1.7}$$

avec $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_v+\frac{R}{\mu}}{c_v}$ reste invariant, où γ est l'exposant adiabatique, qui a la valeur approximativement 1.4, tandis que la trajectoire est définie par la relation

$$\{x \in \mathbb{R}^3 | x = x(t,x_0), t_0 \leq t \leq t_1\}, \qquad x(t,x_0) = x_0 + \int_0^t v(t', x(t',x_0))dt'$$

(pour plus de détail voir [7]).

Ainsi, sur la trajectoire de chaque partie du gaz on a

$$T(t,x) = C_1 \varrho(t,x)^{\gamma-1} \tag{1.8}$$

où C_1 est une constante .

Supposons maintenant que la valeur de la constante C_1 figurant dans l'équation (1.8) est identique dans une région Ω, alors dans cette région la pression p, est donnée par

$$p = h\varrho^{\gamma} \tag{1.9}$$

où $h = C_1 \frac{R}{\mu}$ est une constante .

Soit Φ le géopotentiel, si on substitue $v \equiv 0$ et la relation (1.9) dans l'équation (1.2), on obtient

$$h\nabla\varrho^{\gamma} = -\varrho\nabla\Phi. \tag{1.10}$$

Comme

$$\nabla\varrho^{\gamma} = \nabla\varrho^{(\gamma-1)\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\varrho\nabla\varrho^{\gamma-1},$$

de (1.10) on déduit que

$$h\frac{\gamma}{\gamma-1}\nabla\varrho^{\gamma-1} = -\nabla\Phi,$$

ce qui implique que

$$\varrho^{\gamma-1} = \varrho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi), \tag{1.11}$$

ou

$$\varrho = \left(\varrho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{1.12}$$

où $\Phi_0 = \Phi(x_0)$ et $\varrho_0 = \varrho(x_0)$ pour $x_0 \in \Omega$. Pour l'application de (1.12) à l'atmosphère réelle il est souvent commode de prendre Φ_0 et ϱ_0 comme les valeurs de Φ et ϱ au niveau de la surface de la mer respectivement.

Nous rappelons que, du point de vue physique, (1.11) et (1.12) sont valables seulement si

$$\varrho(x_0) > 0\,, \qquad et \qquad \varrho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi) > 0.$$

La relation (1.12) signifie que dans l'approximation "adiabatique", l'atmosphère "au repos" aura la distribution de la densité ϱ. En outre, compte tenu de la relation $\frac{C_1}{h} = \frac{\mu}{R}$, on déduit de (1.8) et (1.11)

$$T = C_1\big(\varrho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi)\big) = T_0 + \frac{(\gamma-1)}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi), \tag{1.13}$$

où $T_0 = C_1\varrho_0^{\gamma-1}$ est la température au niveau de la surface de la mer.

D'autre part, de (1.9) et (1.12) on déduit que

$$p = h\big(\varrho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi)\big)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \big(p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{\gamma-1}{h^{\frac{1}{\gamma}}\gamma}(\Phi_0 - \Phi)\big)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \tag{1.14}$$

où $p_0 = h\varrho_0^{\gamma}$ est la pression au niveau de la mer.

La distribution de la densité $\varrho(x)$, de la température $T(x)$ et de la pression $p(x)$, donnée par (1.12), (1.13) et(1.14), définit un état hydrostatique. La température $T(x)$ descend linéairement par rapport au géopotentiel $\Phi(x)$, ce qui correspond à son comportement dans la troposphère

Chapitre 2

Etat hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la construction d'un modèle qui décrit l'état hydrostatique de l'air accompagné par la condensation de la vapeur d'eau. On sait bien que le comportement mécanique de la vapeur d'eau ne diffère pas beaucoup de celui de l'air sec, pour cela dans la suite on écrit ϱ^* au lieu de $\varrho + \pi$, et T^* au lieu de T. Quand il y a la condensation ou la sublimation inverse de la vapeur d'eau ou la solidification de l'eau liquide dans l'air, ce dernier reçoit la chaleur latente de la transition de phase de H_2O, de sorte que, si on néglige la diffusion de la chaleur et le terme due à la friction interne, la variation de la température est donnée par

$$\varrho^* c_v(\partial_t T^* + v \cdot \nabla T^*) + R_1 \varrho^* T^* \nabla \cdot v = L_{gl} H_{gl} + L_{gs} H_{gs} + L_{ls} H_{ls},$$

où $R_1 = \frac{R}{\mu}$.

Mais, on sait (voir par exemple [13] ou [10]) que même quand la température est inférieure à 0 degré Celcius la vapeur d'eau peut se transformer en liquide de sorte qu'il est très difficile de distinguer le cas où la vapeur d'eau se transforme en liquide et le cas où elle se transforme en solide. D'autre part, La différence entre la valeur de L_{gl} et L_{gs} est relativement petite. Dans la modélisation mathématique des phénomène météorologique on utilise souvent l'approximation

$$L_{gl} \approx L_{gs}, \qquad L_{ls} \approx 0$$

(comme dans l'article [6]). Dans ce cas on peut désigner par L_{tr} la chaleur latente due à la condensation ou la sublimation inverse et par H_{tr} la quantité totale de la condensation et de la sublimation inverse. De la sorte, on a

$$\varrho^* c_v(\partial_t T^* + v \cdot \nabla T^*) + R_1 \varrho^* T^* \nabla \cdot v = L_{tr} H_{tr} \tag{2.1}$$

et H_{tr} est donnée approximativement par

$$H_{tr} = \big(\overline{\pi}_{vs}(T^*)\frac{d}{dz}log\varrho^* - \frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(T^*)\big)v_3 \tag{2.2}$$

(voir [6]).

En substituant (2.2),et (1.5) dans (2.1), en tenant compte du mouvement stationnaire (de sorte que $v = (0, 0, v_3)$ et $\frac{d}{dt} = v_3\frac{d}{dz}$), on obtient

$$\varrho^* c_v \frac{dT^*}{dz} v_3 - R_1 T^* \frac{d\varrho^*}{dz} v_3 = \tag{2.3}$$

$$= (R_1 T^* + L_{tr})(\overline{\pi}_{vs}(T^*)\frac{d}{dz}log(\varrho^*) - \frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(T^*))v_3$$

En divisant les deux membres de (2.3) par v_3, on aura

$$\varrho^* c_v \frac{dT}{dz} - R_1 T^* \frac{d\varrho^*}{dz} = \tag{2.4}$$

$$= (R_1 T^* + L_{tr})(\overline{\pi}_{vs}(T^*)\frac{d}{dz}log(\varrho^*) - \frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(T^*)).$$

Retournons à l'équation (1.2), si $v = (0, 0, v_3)$ et $\partial_t v_3 = 0$, et si en négligeant les termes de viscosité et on écrit $\frac{d}{dz}$ au lieu de $\frac{\partial}{\partial z}$, on aura

$$\varrho^* v_3 \frac{dv_3}{dz} = -R_1 \frac{d}{dz}(\varrho^* T^*) - [\Sigma + \varrho^*]g \tag{2.5}$$

où Σ est la densité totale de l'eau liquide et solide.

Pour $v_3 \longrightarrow 0$, on a

$$v_3 \frac{dv_3}{dz} \longrightarrow 0.$$

Alors de (2.2), il résulte que

$$H_{tr} \longrightarrow 0, \qquad \text{ainsi que} \qquad \Sigma \longrightarrow 0$$

Donc nous avons

$$R_1 \frac{d}{dz}(\varrho^* T^*) = -g\varrho^* \tag{2.6}$$

Le système d'équations (2.4)–(2.6) décrit l'état hydrostatique de l'air accompagné par la condensation de la vapeur, on note par T_0^*, ϱ_0^* les conditions initiales associées aux système d'équations (2.4)–(2.6) , ainsi on écrit

$$T^*(0) = T_0^* > 0, \qquad \varrho^*(0) = \varrho_0^* > 0. \tag{2.7}$$

2.1 Existence et unicité de la solution dans l'état hydrostatique avec condensation

Dans cette partie, on cherche de démontrer l'existence et l'unicité de la solution (ϱ^*, T^*) du système (2.4)–(2.6) avec les conditions initiales (2.7), de telle sorte que (ϱ^*, T^*) représentent respectivement la densité et la température dans l'état hydrostatique avec condensation de la vapeur.

En divisant l'équation (2.4) par ϱ^*T^*, on obtient

$$\frac{d}{dz}log\frac{T^{*c_v}}{\varrho^{*R_1}} = \frac{R_1T^* + L_{gl}}{\varrho^*T^*}\big(\overline{\pi}_{vs}(T^*)\frac{d}{dz}log\varrho^* - \frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(T^*)\big) \tag{2.8}$$

On pose

$$W(z) = W(T^*, \varrho^*) = \frac{R_1T^* + L_{gl}}{\varrho^*T^*}\big(\overline{\pi}_{vs}(T^*)\frac{d}{dz}log\varrho^* - \frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(T^*)\big) \tag{2.9}$$

d'où l'équation (2.4) s'écrit

$$\frac{d}{dz}log\frac{T^{*c_v}}{\varrho^{*R_1}} = W(z) \tag{2.10}$$

PROPOSITION 2.1. *S'il existe deux constantes K_w, $\overline{z}_w$ telles que la fonction $W(z)$ définie dans (2.9) vérifié*

$$\|W(\varrho^*, T^*)\|_{L^\infty(0,\overline{z}_w)} \leq K_w. \tag{2.11}$$

et

$$\sup_{\|W(\cdot)\|_{L^\infty(0,\overline{z}_w)}} |D_1', D_2', D_3', D_4', D_5', D_6'| < \infty \tag{2.12}$$

(avec les fonctions $D_1', D_2', D_3', D_4', D_5', D_6'$ seront définies dans le dernier chapitre). Alors le système d'équations (2.4)-(2.6) avec les conditions initiales (2.7) admet une unique solution (ρ^*, T^*) dans la classe $L^\infty(0, \overline{z}_w)$.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer la proposition 2.1, nous démontrons les lemmes suivants.

LEMME 2.1. *En supposant que $\overline{T}^*$, $\overline{\varrho}^*$ étant données dans l'expression de $W(z)$, et on écrit $\overline{W}(z)$ au lieu de $W(z)$, alors il existe ϱ^*, T^* vérifiant le système d'équations (2.6)-(2.10), avec $W(z)$ donnée, en plus on a*

$$\varrho^*(z) = \tag{2.13}$$

$$= \Big(\frac{\varrho_0^*}{T_0^{*\frac{c_v}{R_1}}}\Big) e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'} \Big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W(z'')dz''} dz'\Big)^{\frac{c_v}{R_1}}$$

$$T^*(z) = e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'} \Big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W(z'')dz''} dz'\Big) \qquad (2.14)$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.1. Etant données $\overline{T}^*$, $\overline{\varrho}^*$ dans (2.9), donc $W(z)$ est donnée, et on écrit $\overline{W}(z)$ au lieu de $W(z)$.

Maintenant en integrant les deux membres de l'équation (2.10) de 0 à z, on obtient

$$\frac{T^{*c_v}(z)}{\varrho^{*R_1}(z)} = \Big(\frac{T_0^{*c_v}}{\varrho_0^{*R_1}}\Big) e^{\int_0^z W(z')dz'}$$

ce qui implique que

$$\varrho^{*R_1}(z) = \frac{\varrho_0^{*R1}}{T_0^{*c_v}} e^{-\int_0^z W(z')dz'} T^{*c_v}(z)$$

et donc

$$\varrho^*(z) = \frac{\varrho_0^*}{T_0^{*\frac{c_v}{R_1}}} T^{*\frac{c_v}{R_1}}(z) e^{-\frac{1}{R_1}\int_0^z W(z')dz'}. \qquad (2.15)$$

En substituant cette expression dans l'équation (2.6), on obtient

$$R_1\Big(\frac{\varrho_0^*}{T_0^{*\frac{c_v}{R_1}}}\Big)\frac{d}{dz}\Big(T^{*(1+\frac{c_v}{R_1})}(z) e^{-\frac{1}{R_1}\int_0^z W(z')dz'}\Big) =$$
$$= g\Big(\frac{\varrho_0^*}{T_0^{*\frac{c_v}{R_1}}}\Big) T^{*\frac{c_v}{R_1}}(z) e^{-\frac{1}{R_1}\int_0^z W(z')dz'}.$$

donc

$$R_1\frac{d}{dz}\Big(T^{*(1+\frac{c_v}{R_1})}(z) e^{-\frac{1}{R_1}\int_0^z W(z')dz'}\Big) = -gT^{*\frac{c_v}{R_1}}(z) e^{-\frac{1}{R_1}\int_0^z W(z')dz'}.$$

On remarque que

$$T^{*(1+\frac{c_v}{R_1})}(z)e^{-\frac{1}{R_1}\int_0^z W(z')dz'} = \left(T^*(z)e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}\right)^{\frac{R_1+c_v}{R_1}}$$

$$= \left(T^*(z)e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}\right)^{1+\frac{c_v}{R_1}}$$

on a donc

$$R_1\frac{d}{dz}\left[\left(T^*(z)e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}\right)^{1+\frac{c_v}{R_1}}\right] = -gT^{*\frac{c_v}{R_1}}e^{-\frac{1}{R_1}\int_0^z W(z')dz'}$$

En multipliant les deux membres par $\left(T^*(z)e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}\right)^{-\frac{c_v}{R_1}}$, on obtient

$$R_1\left(T^*(z)e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}\right)^{-\frac{c_v}{R_1}}\frac{d}{dz}\left[\left(T^*(z)e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}\right)^{1+\frac{c_v}{R_1}}\right] =$$

$$= -ge^{-\frac{1}{c_v+R_1}\int_0^z W(z')dz'}.$$

Si, on pose

$$Y(z) = T^*(z)e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'} \tag{2.16}$$

alors, on a

$$R_1Y(z)^{-\frac{c_v}{R_1}}\frac{d}{dz}\left(Y(z)^{1+\frac{c_v}{R_1}}\right) = -ge^{-\frac{1}{R_1+C_v}\int_0^z W(z')dz'}$$

donc

$$(R_1+c_v)\frac{d}{dz}Y(z) = -ge^{-\frac{1}{R_1+C_v}\int_0^z W(z')dz'}. \tag{2.17}$$

On va résoudre l'équation (2.17), avec la condition initiale

$$Y(0) = T^*(0) = T_0^*$$

Etant données $(\overline{\varrho}^*, \overline{T}^*)$ c'est-à-dire $W(\overline{\varrho}^*, \overline{T}^*)$ donnée. On a

$$W(z) = \frac{R_1+L_{gl}}{\overline{\varrho}^*\overline{T}^*}\left(\overline{\pi}_{vs}(\overline{T}^*)\frac{d}{dz}log\overline{\varrho}^* - \frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(\overline{T}^*)\right)$$

En integrant l'équation (2.17) de 0 à z, on obtient

$$Y(z) = Y(0) - \frac{g}{R_1 + c_v} \int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v} \int_0^{z'} W(z'')dz''} dz'$$

avec

$$Y(0) = T_0^*$$

donc

$$Y(z) = T_0^* - \frac{g}{R_1 + c_v} \int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v} \int_0^{z'} W(z'')dz''} dz'. \tag{2.18}$$

En vertu de (2.16) et (2.18) que

$$T^*(z) = e^{\frac{1}{R_1+c_v} \int_0^z W(z')dz'} \Big(T_0^* - \frac{g}{R_1 + c_v} \int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v} \int_0^{z'} W(z'')dz''} dz'\Big) \tag{2.19}$$

On substitue (2.19) dans l'expression (2.15), on trouve

$$\varrho^*(z) = \Big(\frac{\varrho_0^*}{T_0^{*\frac{c_v}{R_1}}}\Big) e^{-\frac{1}{R_1+c_v} \int_0^z W(z')dz'} \Big(T_0^* - \frac{g}{R_1 + c_v} \int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v} \int_0^{z'} W(z'')dz''} dz'\Big)^{\frac{c_v}{R_1}}$$

Le lemme est démontré. □

LEMME 2.2. *On a*

$$|W(\varrho^{*(1)}, T^{*(1)}) - W(\varrho^{*(2)}, T^{*(2)})| \leq$$

$$\leq |D_1' + D_2' + D_3' + D_4' + D_5' + D_6'| z \sup_{z' \in [0, \bar{z}_w]} |W^{(1)}(z') - W^{(2)}(z')|$$

avec

$$W^{(1)}(z') = W(\overline{\varrho}^{*(1)}(z'), T^{*(1)}(z')); \qquad W^{(2)}(z') = W(\overline{\varrho}^{*(2)}(z'), T^{*(2)}(z'))$$

et

$$D_1' = R_1[T_0^* sup(\frac{1}{R_1 + c_v} e^{\frac{1}{R_1+c_v} \int_0^z W(z')dz'}) + z \frac{g}{R_1 + c_v} \int_0^z e^{\frac{1}{R_1+c_v} \int_0^z W^{(2)}(z')dz'} dz' \times$$

$$\times sup(-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})]\frac{1}{\varrho^{*(1)}T^{*(1)}}\times$$
$$\times(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)}-\frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)}))$$

$$D_2'=\frac{R_1T^{*(2)}+L_{gl}}{T^{*(1)}}\big(\frac{\varrho_0^{*R_1}}{T_0^{*c_v}}\big)^{-\frac{1}{R_1}}\big(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)}-\frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})\big)\times$$
$$\times max\big((T^{*(1)})^{-\frac{c_v}{R_1}},(T^{*(2)})^{-\frac{c_v}{R_1}}\big)sup\big(\frac{1}{R_1}e^{\frac{1}{R_1}\int_0^z W(z')dz'}\big)$$

$$D_3'=\frac{R_1T^{*(2)}+L_{gl}}{\varrho^{*(2)}}\frac{1}{T^{*(1)}T^{*(2)}}[T_0^*sup(\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})+$$
$$+z\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}dz'sup(-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})]\times$$
$$\times(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)}-\frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)}))$$

$$D_4'=\frac{R_1T^{*(2)}+L_{gl}}{\varrho^{*(2)}T^{*(2)}}sup(\frac{d}{dT^*}\overline{\pi}_{vs}(T^*))\big[T_0^*sup(\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})+$$
$$+z\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}dz'sup(-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})]\times$$
$$\times\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)}$$

$$D_5'=\frac{R_1T^{*(2)}+L_{gl}}{\varrho^{*(2)}T^{*(2)}}\overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)})\frac{1}{R_1+c_v}(W^{(1)}(z)-W^{(2)}(z))+\frac{R_1T^{*(2)}+L_{gl}}{\varrho^{*(2)}T^{*(2)}}\times$$
$$\times\overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)})\frac{gc_v}{R_1(R_1+c_v)}\big[\big(T_0^*-\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz'\big)^{-1}+$$

$$+\frac{z\frac{g}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}}{\left(T_0^*-\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz'\right)\left(T_0^*-\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}dz'\right)}]\times$$

$$\times sup-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}$$

$$D_6'=-\frac{R_1T^{*(2)}+L_{gl}}{\varrho^{*(2)}T^{*(2)}}max\left(\frac{d\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})}{dT^{*(1)}},\frac{d\overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)})}{dT^{*(2)}}\right)\left[\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}\times\right.$$
$$\times(T_0^*-\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz')+\frac{1}{R_1+c_v}W^{(2)}(z)sup(\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})\times$$
$$\times\left[z\frac{g}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}+(T_0^*-\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(1)}(z'')dz''}dz')\right]\Big]$$

Comme la démonstration du lemme 2.2 requit des calculs assez longs, nous la renvoyons dans le dernier chapitre.

CONTINUATION DE LA DÉMONSTRATION DU PROPOSITION 2.1 :
D'après le lemme 2.2 on a :

$$|W(\varrho^{*(1)},T^{*(1)})-W(\varrho^{*(2)},T^{*(2)})|\leq$$

$$\leq|D_1'+D_2'+D_3'+D_4'+D_5'+D_6'|z\sup_{z'\in[0,\bar{z}_w]}|W^{(1)}(z')-W^{(2)}(z')|$$

et d'après les deux hypothèses (2.11),(2.12) de notre proposition, il existe une constante $\bar{K}_w$ telle que :

$$\|W(\varrho^{*(1)},T^{*(1)})-W(\varrho^{*(2)},T^{*(2)})\|_{L^\infty(0,\bar{z}_w)}\leq\bar{K}_w\|W^{(1)}(z)-W^{(2)}(z)\|_{L^\infty(0,\bar{z}_w)}$$

où $\bar{K}_w<1$ si $0\leq z\leq\bar{z}_w$.
d'après le théorème de point fixe de Banach il existe unique point fixe dans l'intervalle $[0,\overline{z}_w]$ de sorte que $W(\varrho^*,T^*)=W(\overline{\varrho}^*,\overline{T}^*)$.

Par conséquent on a construit la solution (ϱ^*, T^*) du système d'équations (2.6)–(2.4) avec les conditons initiales (2.7) sur un intervalle suffisamment petit $[0, \overline{z}_w]$.

Une fois obtenue la solution dans l'intervalle $[0, \overline{z}_w]$, en vertu de (2.11) qu'on peut répéter la même procédure pour reconstruire la solution sur un intervalle suffisamment petit $[\overline{z}_w, \overline{z}_w + \epsilon]$. Alors on peut encore prolonger la solution (ϱ^*, T^*) pour tout l'intervalle $[0, \overline{z}]$, ce qui achève la démonstration de la proposition 2.1. $\square$

Chapitre 3

Equations du mouvement de l'air dans un orage

Dans ce chapitre nous proposons un système d'équations du mouvement de l'air dans un orage, en supposant que la distribution des grandeurs physiques dans l'orage est symétrique par rapport à l'axe vertical se trouvant au centre de l'orage. L'orage sera alors de la forme d'un cylindre. Pour formuler le système d'équations du mouvement de l'air dans l'orage, il nous est commode d'utiliser les coordonnées cylindriques.

Rappelons donc les coordonnées cylindriques $(r, \vartheta, z) \in [0, \infty[\times[0, 2\pi[\times\mathbf{R}$ reliées aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) par les relations

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta, \qquad z = z, \tag{3.1}$$

où, en exprimant (r, ϑ) par (x, y),

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \vartheta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

De ces relations il résulte que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

On rappellle que le determinant jacobien J du changement de variables des coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans les coordonnées cylindriques (r, ϑ, z) donné dans (3.1) est

$$J = r.$$

Pour le vecteur vitesse $v = (v_1, v_2, v_3)$ il nous est commode d'introduire sa nouvelle représentation vectorielle avec la composante radiale w_r, la composante tangentielle w_ϑ et la composante verticale w_z. Plus précisément, entre les composantes v_1, v_2, v_3 et les nouvelles composantes de la vitesse : compsante radiale w_r, composante tangentielle w_ϑ et composante verticale w_z on a en général les relations

$$w_r = v_1 \cos\vartheta + v_2 \sin\vartheta, \qquad w_\vartheta = -v_1 \sin\vartheta + v_2 \cos\vartheta, \qquad w_z = v_3,$$

ce qui revient à

$$v_1 = \cos\vartheta\, w_r - \sin\vartheta\, w_\vartheta, \qquad v_2 = \sin\vartheta\, w_r + \cos\vartheta\, w_\vartheta, \qquad v_3 = w_z.$$

Mais nous supposons que

$$w_\vartheta = 0. \tag{3.3}$$

Donc on a

$$w_r = v_1 \cos\vartheta + v_2 \sin\vartheta, \qquad w_\vartheta = 0, \qquad w_z = v_3, \tag{3.4}$$

ce qui revient à

$$v_1 = \cos\vartheta\, w_r, \qquad v_2 = \sin\vartheta\, w_r, \qquad v_3 = w_z. \tag{3.5}$$

L'hypothèse de la symétrie par rapport à l'axe vertical au centre se traduit par la condition que toutes les fonctions intervenant dans notre système d'équations, à savoir w_r, ϱ, T, π ne dépendent pas de ϑ, c'est-à-dire

$$w_r = w_r(t,r,z), \quad \varrho = \varrho(t,r,z), \quad T = T(t,r,z), \ etc..., \tag{3.6}$$

et par conséquent

$$\frac{\partial w_r}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} = \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = \ etc \ = 0. \tag{3.7}$$

En utilisant les relations (3.1)–(3.7), les équations (1.2), (1.3) et (1.5) dans les coordonnées cylindrique devient (pour plus de détail voir [1])

$$\partial_t \varrho + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varrho w_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_3) = -H_{tr} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} r\varrho\partial_t w_r + r\varrho w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} + r\varrho v_3 \frac{\partial w_r}{\partial z} + rR_1\frac{\partial}{\partial r}(\varrho T) = \\ \eta\big(r\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2} + \frac{\partial w_r}{\partial r} - \frac{1}{r}w_r + r\frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2}\big) + \\ +(\frac{\eta}{3}+\zeta)\big(r\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2} + \frac{\partial w_r}{\partial r} - \frac{1}{r}w_r + r\frac{\partial^2 v_3}{\partial r\partial z}\big) \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} r\varrho\partial_t v_3 + r\varrho w_r \frac{\partial v_3}{\partial r} + r\varrho v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} + rR_1\frac{\partial}{\partial z}(\varrho T) = \\ \eta\big(r\frac{\partial^2 v_3}{\partial r^2} + \frac{\partial v_3}{\partial r} + r\frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2}\big) + \\ +(\frac{\eta}{3}+\zeta)\big(r\frac{\partial^2 w_r}{\partial r\partial z} + \frac{\partial w_r}{\partial z} + r\frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2}\big) - g[\Sigma + \varrho] \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} r\varrho c_v\partial_t T + r\varrho c_v(w_r\frac{\partial T}{\partial r} + rv_3\frac{\partial T}{\partial z}) = -R_1\varrho T(r\frac{\partial w_r}{\partial r} + w_r + r\frac{\partial v_3}{\partial z} + \\ +\eta\big(r(\frac{\partial v_3}{\partial r})^2 + r(\frac{\partial w_r}{\partial z})^2 + 2r(\frac{\partial w_r}{\partial z}\frac{\partial v_3}{\partial r})\big) + (\frac{4}{3}\eta+\zeta)\big(r(\frac{\partial v_3}{\partial z})^2 + r(\frac{\partial w_r}{\partial r})^2\big) + \\ +(\frac{6r^2-2}{3r}\eta + \frac{\zeta}{r})w_r^2 + (2\zeta - \frac{4}{3}\eta)w_r\frac{\partial w_r}{\partial r} + \\ +(2\zeta - \frac{4}{3}\zeta)r\frac{\partial v_3}{\partial z}\frac{\partial w_r}{\partial r} + (2\zeta - \frac{4}{3}\eta)w_r\frac{\partial v_3}{\partial z} + L_{tr}H_{tr}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Chapitre 4

Bilan de l'énergie totale dans un Orage

Dans ce chapitre, on va étudier le bilan général de l'énergie dans un Orage, dans lequel la chaleur latente due à la condensation de la vapeur d'eau donne une énergie thermique ; cette dernière se transforme en énergie cinétique et se consomme par la chute des gouttlettes. En plus, on considéré l'effet de la viscosité, et de la friction entre les gouttelettes et l'air, qui jouent un rôle dans la diminution de l'énergie cinétique.

En multipliant l'équation de quantité de mouvement en coordonnées cylindriques par v pour avoir l'énergie cinétique $\frac{\varrho v^2}{2}$ (c'est-à-dire ; en multipliant les deux équations (3.9), (3.10) respectivement par w_r, v_3), et nous l'integrons sur le domaine D (où $D = [0, \bar{r}[\times[0, \bar{z}[$), puis nous faisons la somme de ces dèrnières équations et l'équation du bilan de l'énergie en coordonnées cylindriques (l'équation (3.11)), après l'integration sur D.

Premièrement, et pour simplifier le calcul, en faisant la somme de les deux termes de viscosités des équations (1.2), (1.3) en coordonnées cartisiennes

Pour l'équation (1.2) les termes de viscosités sont

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\eta(\frac{\partial}{\partial x_k}v_j+\frac{\partial}{\partial x_j}v_k-\frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot v))+\frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta\nabla\cdot v),$$
$$j=1,2,3.$$

En multipliant par v_j et on intègre sur le domaine

$$\Omega=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3|0\leq x_3\leq\bar{x_3},\ x_1^2+x_2^2\leq r^2\}$$

on obtient

$$\eta\int_{\Omega}\sum_{j,k=1}^{3}v_j\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial}{\partial x_k}v_j+\frac{\partial}{\partial x_j}v_k-\frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot v)\,dx_1dx_2dx_3+ \tag{4.1}$$
$$+\zeta\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}v_j\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla\cdot v)\,dx_1dx_2dx_3,$$

ici nous considérons η, ζ comme canstantes.

L'intégration par parties de (4.1), nous donne

$$\eta\int_{\partial\Omega}\sum_{j,k=1}^{3}v_j\cdot\vec{n}(\frac{\partial}{\partial x_k}v_j+\frac{\partial}{\partial x_j}v_k-\frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot v)dS+ \tag{4.2}$$
$$-\eta\int_{\Omega}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}(\frac{\partial}{\partial x_k}v_j+\frac{\partial}{\partial x_j}v_k-\frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot v)\,dx_1dx_2dx_3+$$
$$+\zeta\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{3}v_j\cdot\vec{n}(\nabla\cdot v)dS-\zeta\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}(\nabla\cdot v)\,dx_1dx_2dx_3,$$

ce qui revient à

$$\eta\int_{\partial\Omega'}\sum_{j,k=1}^{3}v_j\cdot\vec{n}(\frac{\partial}{\partial x_k}v_j+\frac{\partial}{\partial x_j}v_k-\frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot v)dS+ \tag{4.3}$$

$$-\eta\int_{\Omega}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}v_j+\frac{\partial}{\partial x_j}v_k-\frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot v\Big)\,dx_1dx_2dx_3+$$

$$+\zeta\int_{\partial\Omega'}\sum_{j=1}^{3}v_j\cdot\vec{n}(\nabla\cdot v)dS-\zeta\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}(\nabla\cdot v)\,dx_1dx_2dx_3.$$

où

$$\partial\Omega'=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3|0<x_3<\bar{x_3},x_1^2+x_2^2=r^2\}$$

car $v.\vec{n}=0$ sur

$$\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3|x_3=0,x_1^2+x_2^2\leq r^2\}$$

et

$$\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3|x_3=\bar{x_3},x_1^2+x_2^2\leq r^2\}$$

D'autre part, les termes de viscosités de l'équation (1.3) sont

$$\eta\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot v\Big)+\zeta(\nabla\cdot v)^2,$$

en integrant sur Ω, on obtient

$$\eta\int_{\Omega}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}v_j+\frac{\partial}{\partial x_j}v_k-\frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot v\Big)\,dx_1dx_2dx_3+\zeta\int_{\Omega}(\nabla\cdot v)^2\,dx_1dx_2dx_3. \tag{4.4}$$

La somme de (4.3), et (4.4) nous donne

$$\eta\int_{\partial\Omega'}\sum_{j,k=1}^{3}v_j\cdot\vec{n}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}v_j+\frac{\partial}{\partial x_j}v_k-\frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot v\Big)dS+\zeta\int_{\partial\Omega'}\sum_{j=1}^{3}v_j\cdot\vec{n}(\nabla\cdot v)dS. \tag{4.5}$$

Maintenant, nous devons reécrire l'équation (3.9) (sans les termes de viscosités), on a

$$r\varrho\partial_t w_r+r\varrho w_r\frac{\partial w_r}{\partial r}+r\varrho v_3\frac{\partial w_r}{\partial z}=-rR_1\frac{\partial}{\partial r}(\varrho T)$$

En multipliant cette dèrnière équation par w_r, et en intégrant sur le domaine D, on trouve

$$\int_D r\varrho w_r \partial_t w_r \, drdz + \int_D r\varrho w_r^2 \frac{\partial w_r}{\partial r} \, drdz + \int_D r\varrho w_r v_3 \frac{\partial w_r}{\partial z} \, drdz = \tag{4.6}$$

$$= -R_1 \int_D r w_r \frac{\partial}{\partial r}(\varrho T) \, drdz.$$

Pour le premier terme, on a

$$\int_D r\varrho w_r \partial_t w_r \, drdz = \int_D \frac{r}{2} \varrho \partial_t w_r^2 \, drdz$$

$$= \frac{d}{dt} \int_D \frac{r}{2} \varrho w_r^2 \, drdz - \int_D \frac{r}{2} w_r^2 \partial_t \varrho \, drdz,$$

de l'équation de continuité (3.8), on a

$$\partial_t \varrho = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\varrho w_r) - \frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_3) - H_{tr}$$

ce qui nous donne

$$\int_D r\varrho w_r \partial_t w_r \, drdz = \frac{d}{dt} \int_D \frac{r}{2} \varrho w_r^2 \, drdz + \int_D \frac{w_r^2}{2} \frac{\partial}{\partial r}(r\varrho w_r) \, drdz + \int_D \frac{r}{2} w_r^2 \frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_3) \, drdz +$$

$$+ \int_D \frac{r}{2} w_r^2 H_{tr} \, drdz.$$

En substituant ce terme dans l'équation (4.6), et par l'intégration par partie des autres tremes, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_D \frac{r}{2} \varrho w_r^2 \, drdz + \int_D \frac{w_r^2}{2} \frac{\partial}{\partial r}(r\varrho w_r) \, drdz + \int_D \frac{r}{2} w_r^2 \frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_3) \, drdz + \int_D \frac{r}{2} w_r^2 H_{tr} \, drdz +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\bar{z}}[r\varrho w_r^3]_0^{\bar{r}}\,dz-\int_D\frac{w_r^2}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r\varrho w_r)\,drdz+\frac{1}{2}\int_0^{\bar{r}}[r\varrho w_r^2 v_3]_0^{\bar{z}}\,dr-\int_D\frac{r}{2}w_r^2\frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_3)\,drdz=$$
$$=-R_1\int_0^{\bar{z}}[rw_r\varrho T]_0^{\bar{r}}\,dz+R_1\int_D\varrho T\big(w_r+r\frac{\partial w_r}{\partial r}\big)\,drdz,$$

et comme $v_3\cdot\vec{n}=0$, alors

$$\frac{d}{dt}\int_D\frac{r}{2}\varrho w_r^2\,drdz+\int_D\frac{r}{2}w_r^2H_{tr}\,drdz+\frac{1}{2}\int_0^{\bar{z}}\bar{r}\varrho w_r^3(\bar{r},z)\,dz+R_1\int_0^{\bar{z}}\varrho T\bar{r}w_r(\bar{r},z)\,dz=$$
$$=R_1\int_D\varrho T\big(w_r+r\frac{\partial w_r}{\partial r}\big)\,drdz. \tag{4.7}$$

Maintenant, nous devons reécrire aussi l'équation (3.10) (sans les terme de viscosités), on a

$$r\varrho\partial_t v_3+r\varrho w_r\frac{\partial v_3}{\partial r}+r\varrho v_3\frac{\partial v_3}{\partial z}+rR_1\frac{\partial}{\partial z}(\varrho T)=$$
$$-g[\Sigma+\varrho],$$

en multipliant cette dèrnière équation par v_3, et en intégrant sur le domaine D, on trouve

$$\int_D r\varrho v_3\partial_t v_3\,drdz+\int_D r\varrho w_r v_3\frac{\partial v_3}{\partial r}\,drdz+\int_D r\varrho v_3^2\frac{\partial v_3}{\partial z}\,drdz+\int_D rR_1v_3\frac{\partial}{\partial z}(\varrho T)\,drdz=$$
$$-\int_D v_3g[\Sigma+\varrho]\,drdz. \tag{4.8}$$

Pour le premier terme, on a

$$\int_D r\varrho v_3\partial_t v_3\,drdz=\int_D\frac{r}{2}\varrho\partial_t v_3^2\,drdz$$
$$=\frac{d}{dt}\int_D\frac{r}{2}\varrho v_3^2\,drdz-\int_D\frac{r}{2}v_3^2\partial_t\varrho\,drdz,$$

ce qui nous donne (d'après l'équation (3.8))

$$\int_D r\varrho v_3 \partial_t v_3 \, drdz = \frac{d}{dt}\int_D \frac{r}{2}\varrho v_3^2 \, drdz + \int_D \frac{v_3^2}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r\varrho w_r)\, drdz +$$
$$+ \int_D \frac{r}{2} v_3^2 \frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_3)\, drdz + \int_D \frac{r}{2} v_3^2 H_{tr}\, drdz.$$

En substituant ce terme dans l'équation (4.8), et par integration par partie des autres tremes, on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_D \frac{r}{2}\varrho v_3^2 \, drdz + \int_D \frac{v_3^2}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r\varrho w_r)\, drdz + \int_D \frac{r}{2} v_3^2 \frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_3)\, drdz + \int_D \frac{r}{2} v_3^2 H_{tr}\, drdz +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{\bar{z}} [r\varrho w_r v_3^2]_0^{\bar{r}}\, dz - \int_D \frac{v_3^2}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r\varrho w_r)\, drdz + \frac{1}{2}\int_0^{\bar{r}} [r\varrho v_3^3]_0^{\bar{z}}\, dr - \int_D \frac{r}{2} v_3^2 \frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_3)\, drdz +$$
$$+R_1 \int_0^{\bar{r}} [rv_3 \varrho T]_0^{\bar{z}}\, dr - R_1 \int_D r\varrho T \frac{\partial v_3}{\partial z}\, drdz = -\int_D v_3 g[\Sigma + \varrho]\, drdz,$$

ce qui implique que

$$\frac{d}{dt}\int_D \frac{r}{2}\varrho v_3^2 \, drdz + \int_D \frac{r}{2} v_3^2 H_{tr}\, drdz + \frac{1}{2}\int_0^{\bar{z}} \bar{r}\varrho w_{\bar{r}} v_3^2(\bar{r}, z)\, dz + \tag{4.9}$$
$$-R_1 \int_D \varrho T r \frac{\partial v_3}{\partial z}\, drdz = -\int_D v_3 g[\Sigma + \varrho]\, drdz,$$

lorsqu'on fait la somme entre (4.7) et (4.9), l'équation de quantité de mouvement devient :

$$\frac{d}{dt}\int_D \frac{r}{2}\varrho(w_r^2 + v_3^2)\, drdz + \int_D \frac{r}{2}(w_r^2 + v_3^2) H_{tr}\, drdz + \tag{4.10}$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{\bar{z}} \bar{r}\varrho w_r^3(\bar{r}, z)\, dz + R_1 \int_0^{\bar{z}} \varrho T \bar{r} w_r(\bar{r}, z)\, dz + \frac{1}{2}\int_0^{\bar{z}} \bar{r}\varrho w_r(\bar{r}, z) v_3^2(\bar{r}, z) dz +$$

$$-R_1\int_D \varrho T\big(r\frac{\partial v_3}{\partial z}+w_r+r\frac{\partial w_r}{\partial r}\big)\,drdz=-\int_D v_3 g[\Sigma+\varrho]\,drdz.$$

Il reste de reécrire l'équation de bilan d'énergie (3.11) (sans les termes de viscosités), et en l'integre sur D, on obtient

$$c_v\int_D r\varrho\partial_t T\,drdz+c_v\int_D r\varrho w_r\frac{\partial T}{\partial r}\,drdz+c_v\int_D r\varrho v_3\frac{\partial T}{\partial z}\,drdz= \tag{4.11}$$

$$=-R_1\int_D \varrho T(r\frac{\partial w_r}{\partial r}+w_r+r\frac{\partial v_3}{\partial z})\,drdz+\int_D L_{tr}H_{tr}\,drdz.$$

Pour le premier terme, on a

$$c_v\int_D r\varrho\partial_t T\,drdz=\frac{d}{dt}c_v\int_D r\varrho\,drdz-c_v\int_D rT\partial_t\varrho\,drdz,$$

ce qui nous donne (d'après l'équation (3.8))

$$\int_D r\varrho c_v\partial_t T\,drdz=$$

$$=\frac{d}{dt}c_v\int_D r\varrho T\,drdz+c_v\int_D T\frac{\partial}{\partial r}(r\varrho w_r)\,drdz+c_v\int_D rT\frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_3)\,drdz+c_v\int_D rTH_{tr}\,drdz.$$

En substituant ce terme dans l'équation (4.11), et par integration par partie des autres tremes, on obtient

$$\frac{d}{dt}c_v\int_D r\varrho T\,drdz+c_v\int_D T\frac{\partial}{\partial r}(r\varrho w_r)\,drdz+c_v\int_D rT\frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_3)\,drdz+c_v\int_D rTH_{tr}\,drdz+$$

$$+\int_0^{\bar{z}} c_v[r\varrho w_r T]_0^{\bar{r}}\,dz-c_v\int_D T\frac{\partial}{\partial r}(r\varrho w_r)\,drdz+\int_0^{\bar{r}} c_v[r\varrho v_3 T]_0^{\bar{z}}\,dr-c_v\int_D rT\frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_3)\,drdz=$$

$$=-R_1\int_D \varrho T\big(r\frac{\partial v_3}{\partial z}+w_r+r\frac{\partial w_r}{\partial r}\big)\,drdz+\int_D L_{tr}H_{tr}\,drdz,$$

ce qui implique que

$$\frac{d}{dt}c_v \int_D r\varrho T\, drdz + c_v \int_D rTH_{tr}\, drdz + c_v \int_0^{\bar{z}} \bar{r}\varrho w_{\bar{r}} T\, dz \tag{4.12}$$

$$= -R_1 \int_D \varrho T\big(r\frac{\partial v_3}{\partial z} + w_r + r\frac{\partial w_r}{\partial r}\big)\, drdz + \int_D L_{tr}H_{tr}\, drdz,$$

En faisant la somme entre les équations (4.5), (4.10) et (4.12), on resulte, à la fin, que :

$$\frac{d}{dt}\int_D \frac{r}{2}\varrho(w_r^2 + v_3^2)\, drdz + \frac{d}{dt}\int_D r\varrho c_v T\, drdz + \tag{4.13}$$

$$+\int_D \frac{r}{2}(w_r^2 + v_3^2)H_{tr}\, drdz + c_v \int_D rTH_{tr}\, drdz + c_v \int_0^{\bar{z}} \bar{r}\varrho w_{\bar{r}} T\, dz +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\bar{z}} \bar{r}\varrho w_r^3(\bar{r}, z)\, dz + R_1 \int_0^{\bar{z}} \varrho T\bar{r} w_r(\bar{r}, z)\, dz + \frac{1}{2}\int_0^{\bar{z}} \bar{r}\varrho w_r(\bar{r}, z)v_3^2(\bar{r}, z)\, dz =$$

$$= \eta \int_{\partial\Omega'} \sum_{j,k=1}^{2} v_j \cdot \vec{n}\big(\frac{\partial}{\partial x_k}v_j + \frac{\partial}{\partial x_j}v_k - \frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla \cdot v\big)dS + \zeta \int_{\partial\Omega'} v_j \cdot \vec{n}(\nabla \cdot v)dS +$$

$$-\int_D v_3 g\Sigma\, drdz - \int_D v_3 g\varrho\, drdz + \int_D L_{tr}H_{tr}\, drdz.$$

Donc, ce résultat interprète le phénomène Orage, car on a trouvé le bilan général de l'énergie

Energie thermiquc + Encrgic cinétique + Energie potentielle =

= Energie totale.

où

$\frac{d}{dt}\int_D \frac{r}{2}\varrho(w_r^2+v_3^2)\,drdz$: la variation de l'énergie cinétique ;

$\frac{d}{dt}c_v\int_D r\varrho T\,drdz$: la variation de l'énergie thermique ;

$\int_D \frac{r}{2}(w_r^2+v_3^2)H_{tr}\,drdz$: la variation suplimentaire de l'énergie cinétique due à la transition se phase de l'eau ;

$c_v\int_D rTH_{tr}\,drdz$: la variation suplimentaire de l'énergie thermique due à la transition de phase de l'eau ;

$\frac{1}{2}\int_0^{\bar{z}}\bar{r}\varrho w_r^3(\bar{r},z)\,dz+\frac{1}{2}\int_0^{\bar{z}}\bar{r}\varrho w_r(\bar{r},z)v_3^2(\bar{r},z)\,dz$: entrée et sortie de l'énergie cinétique ;

$c_v\int_0^{\bar{z}}\bar{r}\varrho w_{\bar{r}}T\,dz+R_1\int_0^{\bar{z}}\varrho T\bar{r}w_r(\bar{r},z)\,dz$: entrée et sortie de l'énergie thermique ;

$\eta\int_{\partial\Omega'}\sum_{j,k=1}^2 v_j\cdot\vec{n}\big(\frac{\partial}{\partial x_k}v_j+\frac{\partial}{\partial x_j}v_k-\frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot v\big)dS+\zeta\int_{\partial\Omega'}v_j\cdot\vec{n}(\nabla\cdot v)dS$: entrée et sortie de l'énergie due à la viscosité ;

$\int_D v_3 g\Sigma\,drdz$: l'énergie perdue à cause de la friction de l'air avec les gouttlettes d'eau ;

$\int_D v_3 g\varrho\,drdz$: la variation de l'énergie potentielle ;

$\int_D L_{tr}H_{tr}\,drdz$: l'augmentation de l'énergie thermique de la chaleur latente due à la condensation de la vapeur d'eau.

Chapitre 5

Démonstration du lemme 2.2

On va démontrer que

$$|W(\varrho^{*(1)}, T^{*(1)}) - W(\varrho^{*(2)}, T^{*(2)})| \leq$$

$$\leq |D_1' + D_2' + D_3' + D_4' + D_5' + D_6'| z \sup_{z' \in [0, \bar{z}_w]} |W^{(1)}(z') - W^{(2)}(z')|$$

On a

$$W(\varrho^{*(1)}, T^{*(1)}) - W(\varrho^{*(2)}, T^{*(2)}) =$$

$$= \frac{R_1 T^{*(1)} + L_{gl}}{\varrho^{*(1)} T^{*(1)}} (\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)}) \frac{d}{dz} log \varrho^{*(1)} - \frac{d}{dz} \overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})) +$$

$$- \frac{R_1 T^{*(2)} + L_{gl}}{\varrho^{*(2)} T^{*(2)}} (\overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)}) \frac{d}{dz} log \varrho^{*(2)} - \frac{d}{dz} \overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)}))$$

$$= \big(\frac{R_1 T^{*(1)} + L_{gl}}{\varrho^{*(1)} T^{*(1)}} - \frac{R_1 T^{*(2)} + L_{gl}}{\varrho^{*(2)} T^{*(2)}} \big) \big(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)}) \frac{d}{dz} log \varrho^{*(1)} - \frac{d}{dz} \overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)}) \big) +$$

$$+ \frac{R_1 T^{*(2)} + L_{gl}}{\varrho^{*(2)} T^{*(2)}} \big[\big(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)}) \frac{d}{dz} log \varrho^{*(1)} - \frac{d}{dz} \overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)}) \big) - \big(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)}) \frac{d}{dz} log \varrho^{*(2)} +$$

$$- \frac{d}{dz} \overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)}) \big) \big]$$

$$= D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_6$$

où

$$D_1 = \frac{R_1(T^{*(1)} - T^{*(2)})}{\varrho^{*(1)}T^{*(1)}}\big(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)} - \frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})\big)$$

$$D_2 = \frac{(R_1T^{*(2)} + L_{gl})}{T^{*(1)}}\big(\frac{1}{\varrho^{*(1)}} - \frac{1}{\varrho^{*(2)}}\big)\big(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)} - \frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})\big)$$

$$D_3 = \big(\frac{R_1T^{*(2)} + L_{gl}}{\varrho^{*(2)}}\big)\big(\frac{1}{T^{*(1)}} - \frac{1}{T^{*(2)}}\big)\big(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)} - \frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})\big)$$

$$D_4 = \big(\frac{R_1T^{*(2)} + L_{gl}}{\varrho^{*(2)}T^{*(2)}}\big)\big(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)}) - \overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)})\big)\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)}$$

$$D_5 = \big(\frac{R_1T^{*(2)} + L_{gl}}{\varrho^{*(2)}T^{*(2)}}\big)\overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)})\big(\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)} - \frac{d}{dz}log\varrho^{*(2)}\big)$$

$$D_6 = -\frac{R_1T^{*(2)} + L_{gl}}{\varrho^{*(2)}T^{*(2)}}\big(\frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)}) - \frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)})\big).$$

Or

$$\begin{aligned}
T^{*(1)} - T^{*(2)} &= e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(1)}(z'')dz''}dz'\big) + \\
&\quad - e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(2)}(z'')dz''}dz'\big) \\
&= \big(e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'} - e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}\big)\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(1)}(z'')dz''}dz'\big) + \\
&\quad + e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}\Big[\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(1)}(z'')dz''}dz'\big) + \\
&\quad - \big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(2)}(z'')dz''}dz'\big)\Big] \\
&= \big(e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'} - e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}\big)\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(1)}(z'')dz''}dz'\big) + \\
&\quad - \frac{g}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}\int_0^z \big(e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'} - e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(2)}(z'')dz''}\big)dz',
\end{aligned}$$

comme on a

$$|e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'} - e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}| \leq |sup\big(\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}\big)\times$$

$$\times \int_0^z (W^{(1)}(z') - W^{(2)}(z'))dz'|$$

et

$$\int_0^z |e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(1)}(z'')dz''} - e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(2)}(z'')dz''}|dz' \leq$$

$$\leq |sup(-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}) \int_0^z \int_0^z (W^{(1)}(z) - W^{(2)}(z'))dz'dz'|$$

$$\leq |sup(-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})z \int_0^z (W^{(1)}(z) - W^{(2)}(z'))dz'|$$

alors

$$|T^{*(1)} - T^{*(2)}| \leq |sup(\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}) \int_0^z (W^{(1)}(z) - W^{(2)}(z'))dz' \times$$

$$\times (T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz')| + |\frac{g}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'} \times$$

$$\times sup(-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})z \int_0^z (W^{(1)}(z) - W^{(2)}(z'))dz'|$$

$$\leq |T_0^* sup(\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}) + z\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}dz' \times$$

$$\times sup(-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})|| \int_0^z (W^{(1)}(z) - W^{(2)}(z'))dz'|$$

Donc

$$|D_1| \leq |R_1[T_0^* sup(\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}) + z\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}dz' \times$$

$$\times sup(-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})]\frac{1}{\varrho^{*(1)}T^{*(1)}}$$

$$\times (\pi_{vs}(T^{*(1)})\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)} - \frac{d}{dz}\pi_{vs}(T^{*(1)}))| \int_0^z |W^{(1)}(z) - W^{(2)}(z')|dz'$$

On a aussi

$$|\frac{1}{\varrho^{*(1)}}-\frac{1}{\varrho^{*(2)}}| = |(\frac{T_0^{*\frac{c_v}{R_1}}}{\varrho_0^*})e^{\frac{1}{R_1}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}(T^{*(1)})^{-\frac{c_v}{R_1}}+$$

$$-((\frac{T_0^{*\frac{c_v}{R_1}}}{\varrho_0^*})e^{\frac{1}{R_1}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}(T^{*(2)})^{-\frac{c_v}{R_1}}|$$

$$\leq |((\frac{T_0^{*\frac{c_v}{R_1}}}{\varrho_0^*})max((T^{*(1)})^{-\frac{c_v}{R_1}},(T^{*(2)})^{-\frac{c_v}{R_1}})||e^{\frac{1}{R_1}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}-e^{\frac{1}{R_1}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}|$$

$$\leq |((\frac{T_0^{*\frac{c_v}{R_1}}}{\varrho_0^*})max((T^{*(1)})^{-\frac{c_v}{R_1}},(T^{*(2)})^{-\frac{c_v}{R_1}})sup(\frac{1}{R_1}e^{\frac{1}{R_1}\int_0^z W(z')dz'})|\times$$

$$\times\int_0^z |W^{(1)}(z')-W^{(2)}(z')|dz'$$

d'où

$$|D_2| \leq |(R_1T^{*(2)}+L_{gl})(\frac{T_0^{*\frac{c_v}{R_1}}}{\varrho_0^*})\frac{1}{T^{*(1)}}(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)}-\frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)}))\times$$

$$\times max((T^{*(1)})^{-\frac{c_v}{R_1}},(T^{*(2)})^{-\frac{c_v}{R_1}})sup(\frac{1}{R_1}e^{\frac{1}{R_1}\int_0^z W(z')dz'})|\int_0^z |W^{(1)}(z')-W^{(2)}(z')|dz',$$

et on a

$$D_3 = (\frac{R_1T^{*(2)}+L_{gl}}{\varrho^{*(2)}})(\frac{1}{T^{*(1)}}-\frac{1}{T^{*(2)}})(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)}-\frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)}))$$

comme

$$|\frac{1}{T^{*(1)}}-\frac{1}{T^{*(2)}}| \leq \frac{1}{|T^{*(1)}T^{*(2)}|}|T^{*(1)}-T^{*(2)}|$$

$$\leq \frac{1}{|T^{*(1)}T^{*(2)}|}|T_0^{*}sup(\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})+z\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}dz'\times$$

$$\times sup(-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})||\int_0^z (W^{(1)}(z)-W^{(2)}(z'))dz'|$$

alors

$$|D_3| \leq |\frac{R_1T^{*(2)}+L_{gl}}{\varrho^{*(2)}}||\frac{1}{T^{*(1)}T^{*(2)}}[T_0^*sup(\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})+$$

$$+z\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}dz'sup(-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})]\times$$
$$\times(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)}-\frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)}))|\int_0^z|W^{(1)}(z)-W^{(2)}(z')|dz'$$

Ensuite, on a

$$D_4=\big(\frac{R_1T^{*(2)}+L_{gl}}{\varrho^{*(2)}T^{*(2)}}\big)\big(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})-\overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)})\big)\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)}$$

comme

$$|\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})-\overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)})|\leq sup|\frac{d}{dT^*}\overline{\pi}_{vs}(T^*)||T^{*(1)}-T^{*(2)}|$$
$$\leq sup|\frac{d}{dT^*}\overline{\pi}_{vs}(T^*)||T_0^*sup(\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})+$$
$$+z\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}dz'sup(-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})|\times$$
$$\times\int_0^z|W^{(1)}(z)-W^{(2)}(z')|dz'$$

alors

$$|D_4|\leq|\frac{R_1T^{*(2)}+L_{gl}}{\varrho^{*(2)}T^{*(2)}}sup(\frac{d}{dT^*}\overline{\pi}_{vs}(T^*))\big[T_0^*sup(\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})+$$
$$+z\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}dz'sup(-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})\big]\times$$
$$\times\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)}|\int_0^z|W^{(1)}(z)-W^{(2)}(z')|dz'$$

Maintenant, on a

$$D_5=\big(\frac{R_1T^{*(2)}+L_{gl}}{\varrho^{*(2)}T^{*(2)}}\big)\overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)})\big(\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)}-\frac{d}{dz}log\varrho^{*(2)}\big)$$

or

$$\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)}(z)=\frac{1}{\varrho^{*(1)}(z)}\frac{d}{dz}\varrho^{*(1)}(z) \tag{5.1}$$

comme

$$\varrho^{*(1)}(z) = \Big(\frac{\varrho_0^*}{T_0^{*\frac{c_v}{R_1}}}\Big)e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}\Big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(1)}(z'')dz''}dz'\Big)^{\frac{c_v}{R_1}}$$

alors

$$\frac{d}{dz}\varrho^{*(1)}(z) = \Big(\frac{\varrho_0^*}{T_0^{*\frac{c_v}{R_1}}}\Big)\Big(-\frac{1}{R_1+c_v}W^{(1)}(z)\Big)e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}$$

$$\times\Big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz'\Big)^{\frac{c_v}{R_1}} + \Big(\frac{\varrho_0^*}{T_0^{*\frac{c_v}{R_1}}}\Big)e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}\times$$

$$\times\frac{c_v}{R_1}\Big(-\frac{g}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}\Big)\Big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz'\Big)^{\frac{c_v}{R_1}-1}$$

$$= \Big(\frac{\varrho_0^*}{T_0^{*\frac{c_v}{R_1}}}\Big)e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}\Big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz'\Big)^{\frac{c_v}{R_1}}\times$$

$$\times\Big[\frac{-1}{R_1+c_v}W^{(1)}(z') - \frac{gc_v}{R_1(R_1+c_v)}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}\Big]\times$$

$$\times\Big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz'\Big)^{-1}\Big]$$

$$= \varrho^{*(1)}(z)\times$$

$$\times\Big[\frac{-1}{R_1+c_v}W^{(1)}(z') - \frac{gc_v}{R_1(R_1+c_v)}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}\Big]\times$$

$$\times\Big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz'\Big)^{-1}\Big]$$

ce qui nous donne d'après la relation (5.1) ;

$$\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)}(z) = -\frac{1}{R_1+c_v}W^{(1)}(z') - \frac{gc_v}{R_1(R_1+c_v)}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}\times$$

$$\times\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(1)}(z'')dz''}dz'\big)^{-1}$$

donc

$$\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)}(z) - \frac{d}{dz}log\varrho^{*(2)}(z) =$$

$$= [\frac{-1}{R_1+c_v}W^{(1)}(z) - \frac{gc_v}{R_1(R_1+c_v)}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}\times$$

$$\times\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(1)}(z'')dz''}dz'\big)^{-1}]$$

$$-[\frac{-1}{R_1+c_v}W^{(2)}(z) - \frac{gc_v}{R_1(R_1+c_v)}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}]\times$$

$$\times(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(2)}(z'')dz''}dz'\big)^{-1}]$$

$$= \frac{-1}{R_1+c_v}(W^{(1)}(z) - W^{(2)}(z)) - \frac{gc_v}{R_1(R_1+c_v)}\big[e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}\times$$

$$\times\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(1)}(z'')dz''}dz'\big)^{-1} - e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}\times$$

$$\times\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(2)}(z'')dz''}dz'\big)^{-1}]$$

$$= -\frac{1}{R_1+c_v}(W^{(1)}(z) - W^{(2)}(z)) - \frac{gc_v}{R_1(R_1+c_v)}\times$$

$$\times\big(e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'} - e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}\big)\times$$

$$\times\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz'\big)^{-1} - \frac{gc_v}{R_1(R_1+c_v)}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}\times$$

$$\times\big[\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz'\big)^{-1} +$$

$$-\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}dz'\big)^{-1}]$$

Comme, on a

$$|e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'} - e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}| \leq sup|-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}|\times$$

$$\times\int_0^z |W^{(1)}(z') - W^{(2)}(z')|dz'$$

et

$$|\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z'')dz''}dz'\big)^{-1} +$$

$$-\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z'')dz''}dz'\big)^{-1}| =$$

$$= |\frac{1}{T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z'')dz''}dz'} - \frac{1}{T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z'')dz''}dz'}|$$

$$= |\frac{\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z'')dz''}dz'\big) - \big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z'')dz''}dz'\big)}{\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z'')dz''}dz'\big)\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z'')dz''}dz'\big)}|$$

$$\leq |\frac{g}{R_1+c_v}\times$$

$$\times\frac{sup(-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})z\int_0^z (W^{(1)}(z') - W^{(2)}(z'))dz'}{\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z'')dz''}dz'\big)\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z'')dz''}dz'\big)}|$$

alors

$$|\frac{d}{dz}log\rho^{*(1)} - \frac{d}{dz}log\rho^{*(2)}| \leq |\frac{1}{R_1+c_v}(W^{(1)}(z) - W^{(2)}(z))| +$$

$$+|\frac{gc_v}{R_1(R_1+c_v)}\Big[\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz'\big)^{-1} +$$

$$+\frac{z\frac{g}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}}{\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz'\big)\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}dz'\big)}\big)\Big]|\times$$

$$\times sup| - \frac{1}{R_1 + c_v} e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}| \int_0^z |W^{(1)}(z') - W^{(2)}(z')|dz'$$

ce qui nous donne

$$|D_5| \leq |\frac{R_1 T^{*(2)} + L_{gl}}{\varrho^{*(2)} T^{*(2)}} \overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)}) \frac{1}{R_1 + c_v}(W^{(1)}(z) - W^{(2)}(z))| + |\frac{R_1 T^{*(2)} + L_{gl}}{\varrho^{*(2)} T^{*(2)}} \times$$

$$\times \overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)}) \frac{g c_v}{R_1(R_1 + c_v)}\Big[\big(T_0^* - \frac{g}{R_1 + c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'} dz'\big)^{-1} +$$

$$+ \frac{z \frac{g}{R_1+c_v} e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}}{\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'} dz'\big)\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'} dz'\big)}\big)\Big]| \times$$

$$\times sup| - \frac{1}{R_1 + c_v} e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}| \int_0^z |W^{(1)}(z') - W^{(2)}(z')|dz'$$

et on a

$$D_6 = -\frac{R_1 T^{*(2)} + L_{gl}}{\varrho^{*(2)} T^{*(2)}} \frac{d}{dz}\big(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)}) - \overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)})\big)$$

or

$$\frac{d}{dz}\big(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)}) - \overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)})\big) = \frac{dT^{*(1)}(z)}{dz}\frac{d\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})}{dT^{*(1)}} - \frac{dT^{*(2)}(z)}{dz}\frac{d\overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)})}{dT^{*(2)}}$$

$$\leq max\big(\frac{d\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})}{dT^{*(1)}}, \frac{d\overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)})}{dT^{*(2)}}\big)\big(\frac{dT^{*(1)}(z)}{dz} - \frac{dT^{*(2)}(z)}{dz}\big)$$

comme on a

$$\frac{d}{dz}T^{*(1)}(z) = \big(\frac{1}{R_1 + c_v} W^{(1)}(z)\big) e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'} \times$$

$$\times \big(T_0^* - \frac{g}{R_1 + c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(1)}(z'')dz''} dz'\big) +$$

$$+ e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}\big(-\frac{g}{R_1 + c_v} e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}\big)$$

$$= \big(\frac{1}{R_1+c_v} W^{(1)}(z)\big) e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'} \times$$
$$\times \big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(1)}(z'')dz''} dz'\big) - \frac{g}{R_1+c_v}$$

alors

$$\frac{d}{dz}\big(T^{(1)}(z) - T^{(2)}(z)\big) =$$
$$= \big[\frac{1}{R_1+c_v} W^{(1)}(z) e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'} \big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(1)}(z'')dz''} dz'\big) +$$
$$- \frac{g}{R_1+c_v}\big] - \big[\frac{1}{R_1+c_v} W^{(2)}(z) e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'} \times$$
$$\times \big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(2)}(z'')dz''} dz'\big) - \frac{g}{R_1+c_v}\big]$$

$$= \frac{1}{R_1+c_v} W^{(1)}(z) e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'} \big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(1)}(z'')dz''} dz'\big) +$$
$$- \frac{1}{R_1+c_v} W^{(2)}(z) e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'} \big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(2)}(z'')dz''} dz'\big)$$

$$= B_1 + B_2 + B_3$$

où

$$B_1 = \frac{1}{R_1+c_v}\big(W^{(1)}(z) - W^{(2)}(z)\big) e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'} \times$$
$$\times \big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'} dz'\big)$$

$$B_2 = \frac{1}{R_1+c_v}W^{(2)}(z)\big(e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'} - e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}\big)\times$$
$$\times\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz'\big)$$
$$B_3 = \frac{1}{R_1+c_v}W^{(2)}(z)e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}\big[\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz'\big)+$$
$$-\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}dz'\big)\big]$$

on a

$$|B_1| \leq |\frac{1}{R_1+c_v}(W^{(1)}(z) - W^{(2)}(z))e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}\times$$
$$\times\big(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz'\big)|$$

pour léstimation de B_2, on a

$$|e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'} - e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}| \leq sup|\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}|\times$$
$$\times\int_0^z |W^{(1)}(z') - W^{(2)}(z')|dz'$$

c'est á dire

$$|B_2| \leq |\frac{1}{R_1+c_v}W^{(2)}(z)sup(\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})\times$$
$$\times(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz')|\int_0^z |W^{(1)}(z') - W^{(2)}(z')|dz'$$

il reste d'estimer le terme B_3 on a

$$B_3 = \frac{1}{R_1+c_v}W^{(2)}(z)e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}\times$$
$$\times\big[-\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z (e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'} - e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'})dz'\big]$$

comme

$$\int_0^z |e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'} - e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}|dz' \leq sup|-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}|\times$$

$$\times z\int_0^z |W^{(1)}(z') - W^{(2)}(z')|dz'$$

alors

$$B_3 \leq |\frac{1}{R_1+c_v}W^{(2)}(z)z\frac{g}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}\times$$

$$\times sup(-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})\int_0^z |W^{(1)}(z') - W^{(2)}(z')|dz'$$

ce qui nous donne

$$|\frac{d}{dz}(T^{*(1)}(z) - T^{*(2)}(z))| \leq |B_1| + |B_2| + |B_3|$$

$$\leq |\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz')|\times$$

$$\times|W^{(1)}(z) - W^{(2)}(z)| + |\frac{1}{R_1+c_v}W^{(2)}(z)sup(\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})\times$$

$$\times\big[z\frac{g}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'} + (T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz')\big]|\times$$

$$\times\int_0^z |W^{(1)}(z') - W^{(2)}(z')|dz'$$

c'est-á-dire

$$|\frac{d}{dz}(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)}(z)) - \overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)}(z)))| \leq max(\frac{d\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})}{dT^{*(1)}}, \frac{d\overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)})}{dT^{*(2)}})\times$$

$$\times\big[|\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz')|\times$$

$$\times|W^{(1)}(z) - W^{(2)}(z)| + |\frac{1}{R_1+c_v}W^{(2)}(z)sup(\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})\times$$

$$\times\big[z\frac{g}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'} + (T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz')\big]|\times$$

$$\times\int_0^z |W^{(1)}(z') - W^{(2)}(z')|dz'\big]$$

donc

$$|D_6| \leq | - \frac{R_1T^{*(2)} + L_{gl}}{\varrho^{*(2)}T^{*(2)}}|max(\frac{d\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})}{dT^{*(1)}}, \frac{d\overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)})}{dT^{*(2)}})\times$$

$$\times\big[|\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}(T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz')|\times$$

$$\times|W^{(1)}(z) - W^{(2)}(z)| + |\frac{1}{R_1+c_v}W^{(2)}(z)sup(\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})\times$$

$$\times\big[z\frac{g}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'} + (T_0^* - \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz')\big]|\times$$

$$\times\int_0^z |W^{(1)}(z') - W^{(2)}(z')|dz'\big]$$

A la fin, on resulte que :

$$|W(\varrho^{*(1)}, T^{*(1)}) - W(\varrho^{*(2)}, T^{*(2)})| \leq |D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_6|$$

$$\leq |D_1' + D_2' + D_3' + D_4' + D_5' + D_6'|z \sup_{z'\in[0,\bar{z}_w]} |W^{(1)}(z') - W^{(2)}(z')|$$

où

$$D_1' = R_1[T_0^* sup(\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}) + z\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}dz'\times$$

$$\times sup(-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})]\frac{1}{\varrho^{*(1)}T^{*(1)}}\times$$

$$\times(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)} - \frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)}))$$

$$D_2' = \frac{R_1T^{*(2)} + L_{gl}}{T^{*(1)}}(\frac{\varrho_0^{*R_1}}{T_0^{*c_v}})^{-\frac{1}{R_1}}\big(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)} - \frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})\big)\times$$

$$\times max\big((T^{*(1)})^{-\frac{c_v}{R_1}}, (T^{*(2)})^{-\frac{c_v}{R_1}}\big)sup(\frac{1}{R_1}e^{\frac{1}{R_1}\int_0^z W(z')dz'})$$

$$D_3' = \frac{R_1T^{*(2)} + L_{gl}}{\varrho^{*(2)}}\frac{1}{T^{*(1)}T^{*(2)}}[T_0^* sup(\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}) +$$

$$+z\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}dz'sup(-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})]\times$$
$$\times(\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)}-\frac{d}{dz}\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)}))$$

$$D_4'=\frac{R_1T^{*(2)}+L_{gl}}{\varrho^{*(2)}T^{*(2)}}sup(\frac{d}{dT^*}\overline{\pi}_{vs}(T^*))\big[T_0^*sup(\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})+$$
$$+z\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}dz'sup(-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})]\times$$
$$\times\frac{d}{dz}log\varrho^{*(1)}$$

$$D_5'=\frac{R_1T^{*(2)}+L_{gl}}{\varrho^{*(2)}T^{*(2)}}\overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)})\frac{1}{R_1+c_v}(W^{(1)}(z)-W^{(2)}(z))+\frac{R_1T^{*(2)}+L_{gl}}{\varrho^{*(2)}T^{*(2)}}\times$$
$$\times\overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)})\frac{gc_v}{R_1(R_1+c_v)}\big[\big(T_0^*-\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz'\big)^{-1}+$$
$$+\frac{z\frac{g}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}}{\big(T_0^* \quad \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz'\big)\big(T_0^* \quad \frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}dz'\big)}\big)\big]\times$$
$$\times sup-\frac{1}{R_1+c_v}e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'}$$

$$D_6'=-\frac{R_1T^{*(2)}+L_{gl}}{\varrho^{*(2)}T^{*(2)}}max\big(\frac{d\overline{\pi}_{vs}(T^{*(1)})}{dT^{*(1)}},\frac{d\overline{\pi}_{vs}(T^{*(2)})}{dT^{*(2)}}\big)\big[\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}\times$$
$$\times(T_0^*-\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(1)}(z')dz'}dz')+$$
$$+\frac{1}{R_1+c_v}W^{(2)}(z)sup(\frac{1}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W(z')dz'})\times$$
$$\times\big[z\frac{g}{R_1+c_v}e^{\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^z W^{(2)}(z')dz'}+(T_0^*-\frac{g}{R_1+c_v}\int_0^z e^{-\frac{1}{R_1+c_v}\int_0^{z'} W^{(1)}(z'')dz''}dz')\big]\big]$$

Bibliographie

[1] Aifa, Sana, Equations de circulation générale de l'atmosphère. Mémoire de master juin 2015.

[2] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. *Sci. Techn. Univ. Constantine* - A, vol. 31 (2011), pp. 9-17.

[3] Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z. : Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère. *Ann. Math. Afr.*, vol. 2 (2011), pp. 66–92.

[4] Fujita Yashima, H. : Modelación matemática del movimiento de la atmósfera con la transición de fase del agua. *Rev. Invest. Operac.*, vol. 34 (2013), pp. 93-104.

[5] Ghomrani, S., Equation du modèle mécanique-thermodynamique d'un cyclone tropical. *mémoire de master.* Université 8 Mai 1945, Guelma. 2012

[6] Ghomrani, S., Marín Antuña, J., Fujita Yashima, H. : Un modelo de la subida del aire ocasionada por la condensación del vapor y su cálculo numérico. *Rev. Cuba Fís.*, vol. **32** (2015), pp 3-8.

[7] H.Fujita Yashima : Modélisation de la physique des fluides, cours de l'université de Guelma, 2010.

[8] Kikoïne, A. K., Kikoïne, I. K. : *Physique moléculaire* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1979.

[9] Landau, L. L., Lifchitz, E. M. : *Mécanique des fluides (physique théorique, tome 6)* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1989.

[10] Matveev, L. T. : *Physique de l'atmosphère.* Gidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg, 1965, 1984, 2000.

[11] Merad, M. : Modèle général du mouvement de l'atmosphére avec la transition de phase de l'eau : gaz-liquide-solide. *mémoire de master.* Université 8 Mai 1945, Guelma. 2010.

[12] Mischler, S. : Contributions à l'étude mathématique de quelques modèles issus de la physique hors équilibre. *Thèse d'habilitation*, Univ. Versailles Saint-Quentin, 2001.

[13] Prodi, F., Battaglia, A. : *Meteorologia - Parte II, Microfisica.* Grafica Pucci, Roma, 2004. (voir aussi le site : http ://www.meteo.uni-bonn.de/mitarbeiter/battaglia/teaching.html).

[14] Sheng, P.-X., Mao, J.-T., Li, J.-G., Zhang, A.-C., Sang, J.-G., Pan, N.-X. : *Physique de l'atmosphère* (en chinois). Publ. Univ. Pékin, Pékin, 2003.