

540, 208 207

Université 8 Mai 1945 Guelma  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
**Master Académique en Mathématiques**  
Option : **Mathématiques Appliquées**

Par :

Melle. ARBAOUI Amira

## Intitulé

**Equation intégrale de Fredholm du second type  
fortement singulière**

Dirigé par : Dr. GUEBBAI Hamza

Devant le jury

<b>PRESIDENT</b>	<b>Dr. CHAOUI Abderrezak</b>	<b>MCA</b>	<b>Univ-Guelma</b>
<b>RAPPORTEUR</b>	<b>Dr. GUEBBAI Hamza</b>	<b>MCA</b>	<b>Univ-Guelma</b>
<b>EXAMINATEUR</b>	<b>Dr. DEBBAR Rabah</b>	<b>MCB</b>	<b>Univ-Guelma</b>

Session Juin 2016

Équation intégrale de Fredholm du second  
type fortement singulière

**Arbaoui Amira**

Mémoire de master en mathématiques

**Université de Guelma**

14 juin 2016

# Remerciment

*Mes remerciements vont en premier lieu à ALLAH Tout Puissant qui a illuminé mon chemin de la lueur du savoir et de la science et pour la volonté, la santé et la patience qu'il ma prodiguées durant toutes ces années d'études.*

*En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire .*

*Je tiens exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur, **Mr. GUEBBAI HAMZA**, je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé .*

*Je remercier du fond du cœur <3 **Mais parents** <3 qui m'ont toujours aidé et encouragé au moments opportuns.*

*Mes meilleurs remerciements vont aussi à Monsieur Segni Sami et Monsieur Dida Rida le chef et l'uljoint chef de département de mathématique pour leurs aides.*

*Enfin, mes remerciements vont aussi à mes à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à accomplir ce travail je leur dis merci.*

*Merci à tous et à toutes.*

# Dédicace

## *Je Dédie ce modeste travail à :*

Je tiens à remercier en premier lieu Allah qui m'a donné, vie et santé pour le parachèvement de ce modeste ouvrage

*A mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont donné un magnifique modèle labeur et de persévérance. A ceux qui n'ont jamais cassé de m'apporter, l'affection, l'amour, le courage et la connaissance et tout mon amour.*

### *A ma chère mère*

*En témoignage de ma profonde gratitude et de mon incontestable reconnaissance, pour tout les sacrifices qu'elle me contente, toute la confiance qu'elle m'accorde et tout l'amour dont elle m'entoure. La plus belle mère du monde.*

### *A mon beau père*

*Qui est le meilleur père de monde, grâce a son encouragement, sa confiance et son soutient moral et matériel et pour son amour infini en exprimant mes Gratitudes, mon profond amour et ma passion*

Je remercie mes frère Mehdi, Marouane et ma sœur Yousra pour leur encouragement.

Je remercie très spécialement NouR, Ahlam, Ghada, Souma, Imen qui été toujours été là pour moi sans oublier les bons sevenirs avant le reste de groupe.

A mes camarades de l'option de Mathématique Appliqué

A toutes la promo 2015- 2016

# Ami Ra

## Table des matières

<b>1</b>	<b>L'étude analytique d'équation de l'opérateur de Cauchy</b>	<b>5</b>
1.1	Prolongement d'un opérateur borné . . . . .	5
1.2	Transformation de Fourier . . . . .	7
1.3	Opérateur de Cauchy . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Méthode de Galerkin pour un opérateur compact</b>	<b>11</b>
2.1	Présentation de la méthode . . . . .	11
2.2	Noyau dégénéré . . . . .	12
2.3	Convergence . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Méthode de Galerkin pour un opérateur de Cauchy</b>	<b>17</b>
3.1	Série de Fourier . . . . .	17
3.2	Convergence de la solution . . . . .	19
3.3	Structure numérique . . . . .	21
3.3.1	Série de Fourier . . . . .	21
3.3.2	Fonctions chapeaux . . . . .	26

---

<b>4 Résultats Numérique</b>	<b>32</b>
4.1 Série de Fourier . . . . .	32
4.2 Fonctions chapeaux . . . . .	33
<b>Bibliographie</b>	<b>37</b>

## Introduction

On appelle équation intégrale une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le signe d'intégrations  $\int$ . Les méthodes de résolution numérique des équations intégrales jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques. Avec l'avantage des machines de calcul numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour l'investigation dans les différents problèmes fondamentaux de notre assimilation des phénomènes scientifiques qui sont difficiles, à savoir impossible à résoudre dans le passé. Ainsi, notons qu'il existe actuellement un grand nombre de méthodes numériques utilisées dans les différentes branches de la recherche scientifique. La théorie mathématique, essentiellement l'analyse des équations intégrales qui permet d'analyser le problème, de prouver l'unicité de la solution, des méthodes d'approximation efficaces. L'analyse numérique, qui étudie la réalisabilité de ces méthodes, principalement l'analyse de la vitesse de convergence et l'estimation de l'erreur. La programmation sur machine, qui retranscrit ces méthodes sous forme d'algorithmes rapides

est efficaces.

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres : Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques théorèmes comme le théorème de la transformation de Fourier, et on présente l'opérateur de Cauchy  $C$  dans  $\|\cdot\|_{L^2}$ . On va étudier l'opérateur de Cauchy, qui permet d'analyser le problème, de prouver l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Fredholm correspondante. Comme, on démontre des résultats qui seront de grande utilité dans les chapitres suivants.

Le deuxième chapitre, est consacré à l'approximation numérique de l'équation intégrale de Fredholm du second type. Cette équation est d'une grande importance en mathématiques, elle a été étudiée dans [2]. La méthode qu'on va utiliser est basée sur la méthode de Galerkin : On remplace l'opérateur  $K$  par sa double projection  $\pi_n K \pi_n$  et on résout le système obtenu.

Dans le troisième chapitre, on va procéder à l'approximation numérique de la même équation intégrale, mais avec l'opérateur non compact de Cauchy  $C$  : On remplace l'opérateur  $C$  par une projection  $\pi_n C \pi_n$  et on résout le système obtenu.

Le quatrième chapitre, représente des résultats numériques de l'équation intégrales, qu'on a étudié.

## L'étude analytique d'équation de l'opérateur de Cauchy

Dans notre travail, nous intéressons l'opérateur  $C$  définie par :

$$\begin{aligned} Cu(s) &= \oint_0^1 \frac{u(t)}{s-t} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left( \int_0^{s-\varepsilon} \frac{u(t)}{s-t} dt + \int_{s+\varepsilon}^1 \frac{u(t)}{s-t} dt \right). \end{aligned}$$

Nous cherchons à montrer qu'il est borné de  $L^2(0,1)$  dans  $L^2(0,1)$  : Pour cela on doit développer quelques résultats intermédiaires.

Dans ce qui suit, on note l'espace de Banach des applications linéaires bornées définies d'un espace de Banach  $(H, \|\cdot\|_H)$  ou (Hilbert) vers lui même par  $BL(H)$ . Sa norme notée  $\|\cdot\|$  est données pour  $T : H \rightarrow H$ , par :

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_H=1} \|Tx\|_H.$$

### 1.1 Prolongement d'un opérateur borné

Nous commençons notre étude de l'opérateur de Cauchy défini auparavant, par un résultat de prolongement très important :

**Lemme 1.** Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $E$  un sous-espace dense de  $H$ . Supposons que  $A : E \rightarrow H$  est une application linéaire bornée. Alors  $A$  s'étend à une application linéaire bornée de  $H$  dans lui-même et cette extension est unique.

*Démonstration.* On suppose qu'il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $u \in E$ ,  $\|Au\| \leq M \|u\|$ . Soit  $u \in H$  :

Comme  $E$  est dense dans  $H$ , il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  pour lequel  $\|u_n - u\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Du fait que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy, et  $\|Au_m - Au_n\| \leq M \|u_m - u_n\|$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ), Alors  $\{Au_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est aussi une suite de Cauchy.  $H$  est complet, donc  $\{Au_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite dans  $H$ , appelée  $Su$ . Pour montrer que ce processus définit un opérateur  $S : H \rightarrow H$ , nous avons seulement besoin de montrer que  $Su$  est indépendant du choix de la suite particulière  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Soit  $\phi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$  (où  $\phi_n \in E$  pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ ). Alors  $\phi_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  d'où  $\|A\phi_n - Au_n\| \leq M \|\phi_n - u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  montre que  $(A\phi_n)$  tend à la même limite que  $(Au_n)$ .

La fonction  $S$  est une application linéaire bornée. Pour voir cela, on choisie  $u, \phi \in H$  et  $\lambda$  un scalaire. Ensuite, si  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$  et  $\phi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi$ , (avec  $u_n, \phi_n \in E$  ( $n \in \mathbb{N}$ )),  $u_n + \lambda\phi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u + \lambda\phi$ , de sorte que

$$S(u + \lambda\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(u_n + \lambda\phi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Au_n + \lambda A\phi_n) = Su + \lambda S\phi.$$

$\forall u \in H; \exists \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  tel que :  $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u$ , on a :

$$Su = \lim_{n \rightarrow \infty} Au_n$$

Mais :

$$\begin{aligned} \|Au_n\| \leq M \|u_n\| &\Rightarrow \|Su\|_H \leq M \|u\|_H \\ &\Rightarrow \|S\|_{BL(H)} \leq M \end{aligned}$$

Enfin supposons que  $T$  est une extension de  $A$ . Donc,  $S$  et  $T$  sont des applications linéaires bornées sur  $H$  et  $Su = Tu$ , ( $u \in E$ ). En effet, pour  $u \in H$ , on choisie  $u_n \in E$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) avec  $\|u_n - u\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Alors  $Su_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Su$ ,  $Tu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$  et  $Su_n = Tu_n$  d'où  $Su = Tu$ , ce qui donne  $S = T$ .  $\square$

## 1.2 Transformation de Fourier

La transformation de Fourier  $F$  est une opération qui transforme une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$  en une autre fonction.

**Définition 1.** Supposons que  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est intégrables dans le sens où  $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 < \infty$ . Nous définissons la transformation de fourier  $u, \hat{u}$  par :

$$Fu(s) = \hat{u}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \exp(ist) dt, \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Soit  $E$ , l'ensemble des fonctions qui sont continues, qui ont une dérivée continue et sont égaux à zéros en dehors d'un intervalle de longueur finie. Alors pour  $u \in E$  nous pouvons définir :

$$(F^*u)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \exp(-ist) dt, \quad (s \in \mathbb{R}).$$

On a :

$$\begin{aligned} (Fu, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \exp(ist) dt \right) \bar{\phi}(s) ds, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \overline{\left( \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(s) \exp(-ist) ds \right)} dt, \\ &= (u, F^*\phi). \end{aligned}$$

On en déduit l'identité correspondante pour  $u, \phi \in L^2(-\infty, +\infty)$ . En effet, pour  $u, \phi \in L^2(-\infty, +\infty)$  ils existent  $u_n, \psi_n \in E$  avec  $\|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  et  $\|\phi_n - \phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Puis (puisque  $F$  et  $F^*$  sont bornés)

$$(Fu, \phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Fu_n, \phi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, F^*\phi_n) = (u, F^*\phi).$$

Ceci justifie la notation  $F^*$ , car elle prouve que  $F^*$  est l'adjoint de  $F$ .

Et des modifications insignifiants au raisonnement ci-dessus montrent que cet opérateur peut être étendu à un opérateur  $F^* \in BL(L^2(-\infty, +\infty))$  pour lequel  $\|F^*u\| = \|u\|$  ( $u \in L^2(-\infty, +\infty)$ ).

**corollaire 1. Identité de Plancherel** Soit  $S(\mathbb{R})$  un espace de shwartz, pour tout  $u \in L^2(\mathbb{R})$  on associe une fonction  $F(u) \in L^2(\mathbb{R})$ . Alors

$$\|F(u)\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$$

*Démonstration.* Comme  $S(\mathbb{R})$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ , il existe une seule application linéaire continue  $F : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$

Soit  $u \in L^2(\mathbb{R})$ , soit  $u_n \in S(\mathbb{R})$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$$

par définition

$$F(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n)$$

On également grâce à la continuité de la norme :

$$\|F(u)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|F(u_n)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \right\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

□

### 1.3 Opérateur de Cauchy

On s'intéresse à l'opérateur :

$$C_0 : u \mapsto C_0 u = \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)}{s-t} dt$$

**Lemme 2.** *soit  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois différentiables et est nulle en dehors d'un intervalle de longueur finie alors, pour tout  $s \in \mathbb{R}$*

$$C_0 u(s) = \pi(F^* M F u)(s),$$

où,  $M$  est l'opérateur défini par  $(Mu)(s) = -i \operatorname{sign}(s)u(s)$  ( $s \in \mathbb{R}$ )

*Démonstration.* Voir [1]. □

**Proposition 1.** *On a :  $C_0 : L^2(-\infty, +\infty) \rightarrow L^2(-\infty, +\infty)$ ,  $\|C_0\| \leq \pi$  et  $C_0^* = -C_0$ .*

*Démonstration.* A partir du lemme précédent on conclut que :

$$\begin{aligned} \|C_0\| &= \pi \|F^* M F\| \\ &\leq \pi \|F^*\| \|M\| \|F\| \\ &\leq \pi \end{aligned}$$

Sachant que  $C^2(-\infty, +\infty)$  dense dans  $L^2(-\infty, +\infty)$  et en utilisant lemme 1 on conclut le résultat.

On a,  $M^* = -M$  donc

$$\begin{aligned} C_0^* &= \pi(F^* M F)^*, \\ &= -\pi F^* M F, \\ &= -C_0. \end{aligned}$$

□

Notre intérêt ne sera pas  $C_0$  mais l'opérateur analogue sur  $L^2(0, 1)$ . Ceci peut être dériver à partir de  $C_0$  en utilisant :  $J : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(-\infty, +\infty)$ , l'opérateur définie par :

$$(Ju)(s) = \begin{cases} u(s) & \text{si } (s \in [0, 1]) \\ 0 & \text{si } (s \notin [0, 1]) \end{cases}$$

Maintenant, on définit l'opérateur  $C$  par  $C = J^*C_0J$  de sorte qu'il est linéaire et borné de  $L^2(0, 1)$  dans lui même. Il est clair que :  $\|C\| \leq \pi$  et  $C^* = -C$ .

**Théorème 2.** On a ;  $Sp(C) \subseteq \{i\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$  et si  $Re(\lambda) \neq 0$  alors  $\lambda I - C$  est inversible et  $\|(\lambda I - C)^{-1}\| \leq \frac{1}{|Re(\lambda)|}$ .

*Démonstration.* On met  $H = iC$ . C'est claire que  $H^* = H$  et  $Sp(H) \subseteq \mathbb{R}$ , ce qui donne  $Sp(C) \subseteq \{i\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$ .

Et on a

$$\begin{aligned} Re\langle(\lambda I - C)u, u\rangle &= \frac{1}{2} \left[ \langle(\lambda I - C)u, u\rangle + \overline{\langle(\lambda I - C)u, u\rangle} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \lambda \|u\|^2 - \langle Cu, u\rangle + \bar{\lambda} \|u\|^2 - \langle u, Cu\rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\lambda + \bar{\lambda}) \|u\|^2 \right] \\ &= Re(\lambda) \|u\|^2 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |Re\langle(\lambda I - C)u, u\rangle| &= |Re(\lambda)| \|u\|^2 \\ \|(\lambda I - C)u\| \|u\| \geq |\langle(\lambda I - C)u, u\rangle| &\geq |Re\langle(\lambda I - C)u, u\rangle| \\ \|(\lambda I - C)u\| &\geq |Re(\lambda)| \|u\| \\ \Rightarrow \|(\lambda I - C)^{-1}\| &\leq \frac{1}{|Re(\lambda)|} \end{aligned}$$

□

## Méthode de Galerkin pour un opérateur compact

Dans la pratique des équations intégrales, quand l'opérateur  $C$  est borné et vérifie  $\|C\| \leq \pi$ , l'opérateur  $I - C$  est inversible, et l'équation admet une unique solution donnée par  $u = (I - C)^{-1}f$ . Dans la suite de ce mémoire, il s'agit d'approcher numériquement cette solution.

### 2.1 Présentation de la méthode

La méthode de Galerkin est une méthode très générale et très robuste. L'idée de la méthode est la suivante. Partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. On résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ. Il convient de noter que, outre son intérêt théorique, la méthode de Galerkin fournit égale-

ment un procédé constructif d'approximation.

Nous allons travailler dans le cadre suivant : On se donne  $B$  un espace de Banach,  $K \in BL(B)$ ,  $1 \notin Sp(K)$  tel que  $\|(I - K)^{-1}\| \leq d \in \mathbb{R}_+^*$ .

Notre intérêt porte à l'approximation de  $u$  solution de

$$(E) : u = Ku + f.$$

Soit  $\pi_n$  une projection tel que  $\pi_n : B \rightarrow V_n$ , c'est-à-dire  $\pi_n^2 = \pi_n$  et  $\dim(V_n) = n$ ,  $V_n = [e_1, e_2, \dots, e_n]$  et,  $\forall x \in B$ ;  $\|(I - \pi_n)x\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

La methode de **Galerkin** consiste à approché  $K$  par :  $K_n = \pi_n K \pi_n$ , pour obtenu

$$(E_n) : u_n = K_n u_n + f.$$

## 2.2 Noyau dégénéré

Dans cette partie nous allons utiliser le fait que  $K_n$  est un opérateur intégrale à noyau dégénéré c-à-d :

$$K_n u = \sum_{j=1}^n \langle u, \psi_j \rangle \varphi_j$$

Le fait important est qu'une fois l'opérateur dégénéré calculé, résoudre le problème d'approximation résulte de la résolution de système linéaire, comme l'explique le calcul suivant :

On suppose que  $\pi_n$  est donné par la formule suivante :

$$\pi_n u = \sum_{j=1}^n \langle u, e_j^* \rangle e_j$$

On a  $K_n = \pi_n K \pi_n$ ,

$$\begin{aligned}
 u_n &= \pi_n K \pi_n u(n) + f \\
 &= \pi_n K \sum_{j=1}^n \langle u, e_j^* \rangle e_j \\
 &= \pi_n \sum_{j=1}^n \langle u, e_j^* \rangle K e_j \\
 &= \sum_{j=1}^n \langle u, e_j^* \rangle \pi_n K e_j \\
 &= \sum_{j=1}^n \langle u, e_j^* \rangle \left( \sum_{p=1}^n \langle K e_j, e_p^* \rangle e_p \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n u_j \left( \sum_{p=1}^n \langle K e_j, e_p^* \rangle e_p \right).
 \end{aligned}$$

Donc,  $\forall n \geq 2$

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{j=1}^n u_j \left( \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \langle K e_j, e_p^* \rangle e_p \right) + f, \\
 \langle u, e_i^* \rangle &= \sum_{j=1}^n u_j \left( \sum_{p=1}^n \langle K e_j, e_p^* \rangle \langle e_p, e_i^* \rangle \right) + \langle f, e_i^* \rangle \text{ pour } 1 \leq i \leq n.
 \end{aligned}$$

On a

$$\langle e_p, e_i^* \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq i \\ 1 & \text{si } p = i \end{cases}$$

Enfin l'équation devient

$$u_i = \sum_{j=1}^n \langle K e_j, e_i^* \rangle u_j + \langle f, e_i^* \rangle.$$

On obtient le système linéaire suivant  $u = Au + b$  telle que :

$$A_{ij} = \sum_{j=1}^n \langle K e_j, e_i^* \rangle.$$

et  $bi = \langle f, e_i^* \rangle$  et  $u_i = \langle u, e_i^* \rangle$ . Donc  $(E_n)$  est facile à résoudre.

## 2.3 Convergence

**Lemme 3.** *Si  $K$  est compact alors  $\|K - K_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .*

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
 \|K - K_n\| &= \sup_{\|x\|_{L^2(0,1)} \leq 1} \|Kx - K_n x\|_{L^2(0,1)} \\
 &= \sup_{\|x\|_{L^2(0,1)} \leq 1} \|Kx - \pi_n K \pi_n x\|_{L^2(0,1)} \\
 &= \sup_{\|x\|_{L^2(0,1)} \leq 1} \|(I - \pi_n^2)Kx\|_{L^2(0,1)} \\
 &= \sup_{\|x\|_{L^2(0,1)} \leq 1} \|(I - \pi_n)Kx\|_{L^2(0,1)} \\
 &= \sup_{X \in K(B(0,1))} \|(I - \pi_n)X\|_{L^2(0,1)} \\
 \dots &\leq \|(I - \pi_n)X_0\|_{L^2(0,1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.
 \end{aligned}$$

Donc  $K$  est compact. □

**Théorème 3.** *Pour  $n$  assez grand,  $(E_n)$  admet une unique solution en plus*

$$\|(I - K_n)^{-1}\| \leq 2d.$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned}
 I - K_n &= I - K + K - K_n \\
 &= (I - K) [I + (I - K)^{-1}(K - K_n)].
 \end{aligned}$$

Mais

$$\|(I - K)^{-1}(K - K_n)\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Donc pour  $n$  assez grand

$$\|(I - K)^{-1}(K - K_n)\| < 1,$$

Ce qui donne

$(I - K_n)^{-1} = [I + (I - K)^{-1}(K - K_n)]^{-1}$  existe et est uniformément bornée par la série géométrique et

$$\left\| [I + (I - K)^{-1}(K - K_n)]^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \|(I - K)^{-1}(K - K_n)\|},$$

Pour  $n$  assez grand

$$\|(I - K_n)^{-1}\| \leq \frac{\|(I - K)^{-1}\|}{1 - \|(I - K)^{-1}(K - K_n)\|},$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - K_n)^{-1}\| = \|(I - K)^{-1}\|,$$

Pour  $n$  assez grand

$$\begin{aligned} \|(I - K_n)^{-1}\| &\leq 2 \|(I - K)^{-1}\|, \\ &\leq 2d. \end{aligned}$$

Alors  $(E_n)$  admet une unique solution pour  $n$  assez grand. □

**Théorème 4.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_{L^2(0,1)} = 0.$$

*Démonstration.* on a

$$\begin{cases} u = Ku + f \dots (E) \\ u_n = K_n u_n + f \dots (E_n) \end{cases}$$

(E) – (E<sub>n</sub>) ce qui donne

$$\begin{aligned}u - u_n &= Ku - K_n u_n \\&= Ku - K_n u + K_n u - K_n u_n \\&= Ku - K_n u + K_n(u - u_n) \\(I - K_n)(u - u_n) &= Ku - K_n u \\ \|u - u_n\|_{L^2(0,1)} &\leq \|(I - K_n)^{-1}\| \|(K - K_n)\| \|u\|_{L^2(0,1)}\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\|u - u_n\|_{L^2(0,1)} \leq \|(I - K_n)^{-1}\| \|(K - K_n)\| \|u\|_{L^2(0,1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_{L^2(0,1)} = 0$$

□

## Méthode de Galerkin pour un opérateur de Cauchy

Contrairement au chapitre précédent, on applique la méthode de Galerkin  $C$  qui n'est pas compact. Donc pour assurer l'unicité de la solution du système  $(E_n)$ , on doit rajouter l'hypothèse suivante :

$$\bullet \pi_n^* = \pi_n$$

### 3.1 Série de Fourier

On utilise la projection suivante :

$$\pi_n u(t) = u_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(2k\pi t) + b_k \sin(2k\pi t))$$

telle que les constantes  $a_k, b_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  s'appellent les coefficients de Fourier de  $u(t)$ , et on a :

$$\begin{cases} a_k = \int_0^1 u(t) \cos(2k\pi t) dt, & k \geq 0 \\ b_k = \int_0^1 u(t) \sin(2k\pi t) dt, & k \geq 1 \end{cases}$$

C'est la série de Fourier tronquée à l'ordre  $n$ .

**Proposition 5.**  $\forall u \in L^2(0, 1) ; \|(I - \pi_n)u\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

Pour tout  $n \geq 2$ , on a :

$$\pi_n^* = \pi_n$$

*Démonstration.* Le premier résultat est obtenue directement de l'égalité de Parseval.

Pour tout  $u, v \in L^2(0, 1)$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle \pi_n u, v \rangle &= \int_0^1 \pi_n u(s) v(s) ds, \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(2k\pi s) + b_k \sin(2k\pi s)) \right] v(s) ds, \\ &= \frac{1}{2} a_0 \tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \tilde{a}_k + b_k \tilde{b}_k) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 u(s) \tilde{a}_0 ds + \sum_{k=1}^n \int_0^1 (u(s) \cos(2k\pi s) \tilde{a}_k + u(s) \sin(2k\pi s) \tilde{b}_k) ds, \\ &= \int_0^1 u(s) \left[ \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\tilde{a}_k \cos(2k\pi s) + \tilde{b}_k \sin(2k\pi s)) \right] ds, \\ &= \langle u, \pi_n v \rangle. \end{aligned}$$

Ce qui donne  $\pi_n^* = \pi_n$ . □

L'application de la méthode de Galerkin consiste à approcher  $C$  par :

$$C_n = \pi_n C \pi_n.$$

**Théorème 6.** Pour tout  $n \geq 2$ ,  $C_n^* = -C_n$  et le système  $(E_n)$  admet une unique solution.

*Démonstration.* On a :  $C_n = \pi_n C \pi_n$

$$\begin{aligned} C_n^* &= (\pi_n C \pi_n)^* \\ &= \pi_n^* C^* \pi_n^*. \end{aligned}$$

D'après la proposition précédente, on a  $\pi_n = \pi_n^*$ , et d'après le chapitre 1,  $C^* = -C$ , donc :

$$\begin{aligned} C_n^* &= -\pi_n C \pi_n \\ &= -C_n. \end{aligned}$$

De la même façon que  $C$ , on conclut que l'opérateur  $I - C_n$  inversible et borné. Donc  $(E_n)$  admet une unique solution.  $\square$

## 3.2 Convergence de la solution

Soit  $u_n$  la solution unique de

$$u_n = C_n u_n + f,$$

**Théorème 7.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_{L^2(0,1)} = 0.$$

*Démonstration.* on a

$$\begin{cases} u = Cu + f \dots\dots (E) \\ u_n = C_n u_n + f \dots\dots (E_n) \end{cases}$$

(E) – (E<sub>n</sub>) ce qui donne

$$\begin{aligned}
 u - u_n &= Cu - C_n u_n \\
 &= Cu - C_n u + C_n u - C_n u_n \\
 &= Cu - C_n u + C_n (u - u_n) \\
 (I - C_n)(u - u_n) &= Cu - C_n u \text{ lorsque } C_n^* = -C_n \\
 \|u - u_n\|_{L^2(0,1)} &\leq \|(I - C_n)^{-1}\| \|(Cu - C_n u)\|_{L^2(0,1)}
 \end{aligned}$$

et on a :  $C_n = \pi_n C \pi_n$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 \|Cu - C_n u\|_{L^2(0,1)} &= \|Cu - \pi_n C \pi_n u\|_{L^2(0,1)}, \\
 &= \|Cu - \pi_n C u + \pi_n C u - \pi_n C \pi_n u\|_{L^2(0,1)}, \\
 &= \|(I - \pi_n)Cu + \pi_n C(I - \pi_n)u\|_{L^2(0,1)}, \\
 &\leq \|(I - \pi_n)Cu\|_{L^2(0,1)} + \|\pi_n C(I - \pi_n)u\|_{L^2(0,1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,
 \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\|u - u_n\|_{L^2(0,1)} \leq \|(I - C_n)^{-1}\| \|(Cu - C_n u)\|_{L^2(0,1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_{L^2(0,1)} = 0.$$

□

### 3.3 Structure numérique

#### 3.3.1 Série de Fourier

On a d'après le chapitre 3 :  $\forall n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned}
 u_n &= \pi_n C u_n + f, \\
 &= \pi_n C \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(2k\pi t) + b_k \sin(2k\pi t)] \right) + f, \\
 &= \pi_n \left( \frac{a_0}{2} C(1) + \sum_{k=1}^n [a_k C(\cos(2k\pi t)) + b_k C(\sin(2k\pi t))] \right) + f. \quad (*)
 \end{aligned}$$

On va calculer  $C(1)$ ,  $C(\cos(2k\pi t))$  et  $C(\sin(2k\pi t))$ , pour  $1 \leq k \leq n$ .

Nous commençons le calcul de  $C(1)$

$$\begin{aligned}
 C(1) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^{s-\varepsilon} \frac{1}{s-t} dt + \int_{s+\varepsilon}^1 \frac{1}{s-t} dt \right) \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-\log(|s-t|)]_0^{s-\varepsilon} + [-\log(|s-t|)]_{s+\varepsilon}^1 \\
 &= \log \left( \frac{s}{1-s} \right).
 \end{aligned}$$

Puis nous calculons  $C(\cos(2k\pi s))$ ;  $1 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned}
C(\cos(2k\pi s)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^{s-\varepsilon} \frac{\cos(2k\pi t)}{s-t} dt + \int_{s+\varepsilon}^1 \frac{\cos(2k\pi t)}{s-t} dt \right), \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \sin(2k\pi s)[Si(2k\pi(t-s))]_0^{s-\varepsilon} - \cos(2k\pi s)[Ci(2k\pi(t-s))]_0^{s-\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. + \sin(2k\pi s)[Si(2k\pi(t-s))]_{s+\varepsilon}^1 - \cos(2k\pi s)[Ci(2k\pi(t-s))]_{s+\varepsilon}^1 \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \sin(2k\pi s)[Si(2k\pi(-\varepsilon)) - Si(2k\pi(-s))] - \cos(2k\pi s)[Ci(2k\pi(-\varepsilon)) \right. \\
&\quad \left. - Ci(2k\pi(-s))] + \sin(2k\pi s)[Si(2k\pi(1-s)) - Si(2k\pi(\varepsilon))] \right. \\
&\quad \left. - \cos(2k\pi s)[Ci(2k\pi(1-s)) - Ci(2k\pi(\varepsilon))] \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \sin(2k\pi s)[Si(2k\pi(-\varepsilon)) - Si(2k\pi(\varepsilon))] + \sin(2k\pi s)[Si(2k\pi(1-s)) \right. \\
&\quad \left. - Si(2k\pi(-s))] - \cos(2k\pi s)[Ci(2k\pi(-\varepsilon)) - Ci(2k\pi(\varepsilon))] \right. \\
&\quad \left. - \cos(2k\pi s)[Ci(2k\pi(1-s)) - Ci(2k\pi(-s))] \right).
\end{aligned}$$

Où  $C_i$  représente la fonction **cosinus intégrale**.

On utilise les propriétés suivantes :

$$Ci(-x) - Ci(x) = \int_0^{-x} \frac{\cos(t) - 1}{t} dt + \ln(-x) + \gamma - \int_0^x \frac{\cos(t) - 1}{t} dt - \ln(x) - \gamma.$$

On applique le changement de variable suivant  $u = t \Rightarrow t = -u \Rightarrow dt = -du$

$$\begin{aligned}
C_i(x) - C_i(x) &= \int_0^x \frac{\cos(u) - 1}{u} du - \int_0^x \frac{\cos(t) - 1}{t} dt + \ln(-1), \\
&= \ln(-1) = \ln(\exp i\pi), \\
&= i\pi.
\end{aligned}$$

Et d'après les propriétés de **sinus intégral** on a  $Si(0) = 0$  et  $Si(-x) = -Si(x)$ , donc nous obtenons :

$$\begin{aligned} C(\cos(2k\pi s)) &= \sin(2k\pi s) [Si(2k\pi(1-s)) + Si(2k\pi(s))] \\ &\quad - \cos(2k\pi s) [Ci(2k\pi(1-s)) + Ci(2k\pi(s))]. \end{aligned}$$

On fait la même chose pour calculer  $C(\sin(2k\pi s))$  on utilise la propriété de **cosinus intégral**  $Ci(-x) = Ci(x) + i\pi$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} C(\sin(2k\pi s)) &= \cos(2k\pi s) [Si(2k\pi(1-s)) + Si(2k\pi(s))] \\ &\quad - \sin(2k\pi s) [Ci(2k\pi(1-s)) + Ci(2k\pi(s))]. \end{aligned}$$

On note :  $\varphi_k = C(\cos(2k\pi s))$ ,  $\psi_k = C(\sin(2k\pi s))$  et  $\varphi_0 = C(1)$ ,

D'après (\*)

$$u_n = \left( \frac{a_0}{2} \varphi_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \varphi_k + b_k \psi_k] \right) + f. \quad (**)$$

Pour chaque  $0 \leq i \leq n$ , on multiplie (\*\*) par  $\cos(2i\pi s)$  et on intègre sur  $[0, 1]$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_n(t) \cos(2i\pi s) ds &= \frac{a_0}{2} \int_0^1 \varphi_0(t) \cos(2i\pi s) ds + \sum_{k=1}^n [a_k \int_0^1 \varphi_k(t) \cos(2i\pi s) ds \\ &\quad + b_k \int_0^1 \psi_k(t) \cos(2i\pi s) ds] + \int_0^1 f(t) \cos(2i\pi s) ds, \end{aligned}$$

telle que,

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_n(t) \cos(2i\pi s) ds &= \frac{a_0}{2} \int_0^1 \cos(2i\pi s) ds + \sum_{k=1}^n [a_k \int_0^1 \cos(2k\pi t) \cos(2i\pi s) ds \\ &\quad + b_k \int_0^1 \sin(2k\pi t) \cos(2i\pi s) ds], \\ &= a_i \int_0^1 \cos^2(2i\pi s) ds. \end{aligned}$$

donc

$$a_i \int_0^1 \cos^2(2i\pi s) ds = \frac{a_0}{2} \int_0^1 \varphi_0(t) \cos(2i\pi s) ds + \sum_{k=1}^n [a_k \int_0^1 \varphi_k(t) \cos(2i\pi s) ds$$

$$+b_k \int_0^1 \psi_k(t) \cos(2i\pi s) ds] + \int_0^1 f(t) \cos(2i\pi s) ds \dots \dots (1)$$

Maintenant, pour chaque  $0 \leq i \leq n$ , on multiplie (\*\*) par  $\sin(2i\pi s)$  et on intègre sur  $[0, 1]$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_n(t) \sin(2i\pi s) ds &= \frac{a_0}{2} \int_0^1 \varphi_0(t) \sin(2i\pi s) ds + \sum_{k=1}^n [a_k \int_0^1 \varphi_k(t) \sin(2i\pi s) ds \\ &+ b_k \int_0^1 \psi_k(t) \sin(2i\pi s) ds] + \int_0^1 f(t) \sin(2i\pi s) ds, \end{aligned}$$

telle que,

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_n(t) \sin(2i\pi s) ds &= \frac{a_0}{2} \int_0^1 \sin(2i\pi s) ds + \sum_{k=1}^n [a_k \int_0^1 \cos(2k\pi t) \sin(2i\pi s) ds \\ &+ b_k \sin(2k\pi t) \sin(2i\pi s) ds] \\ &= b_i \int_0^1 \sin^2(2i\pi s) ds. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} b_i \int_0^1 \sin^2(2i\pi s) ds &= \frac{a_0}{2} \int_0^1 \varphi_0(t) \sin(2i\pi s) ds + \sum_{k=1}^n [a_k \int_0^1 \varphi_k(t) \sin(2i\pi s) ds \\ &+ b_k \int_0^1 \psi_k(t) \sin(2i\pi s) ds] + \int_0^1 f(t) \sin(2i\pi s) ds \dots \dots (2) \end{aligned}$$

On note :

$$A_{i0} = \int_0^1 \varphi_0(t) \cos(2i\pi s) ds \simeq h \sum_{p=1}^{M-1} \varphi_0(t_{p+\frac{1}{2}}) \cos(2i\pi s_{p+\frac{1}{2}}),$$

$$A_{ik} = \int_0^1 \varphi_k(t) \cos(2i\pi s) ds \simeq h \sum_{p=1}^{M-1} \varphi_k(t_{p+\frac{1}{2}}) \cos(2i\pi s_{p+\frac{1}{2}}),$$

$$B_{ik} = \int_0^1 \psi_k(t) \cos(2i\pi s) ds \simeq h \sum_{p=1}^{M-1} \psi_k(t_{p+\frac{1}{2}}) \cos(2i\pi s_{p+\frac{1}{2}}),$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{i0} &= \int_0^1 \varphi_0(t) \sin(2i\pi s) ds \simeq h \sum_{p=1}^{M-1} \varphi_0(t_{p+\frac{1}{2}}) \sin(2i\pi s_{p+\frac{1}{2}}), \\ \tilde{A}_{ik} &= \int_0^1 \varphi_k(t) \sin(2i\pi s) ds \simeq h \sum_{p=1}^{M-1} \varphi_k(t_{p+\frac{1}{2}}) \sin(2i\pi s_{p+\frac{1}{2}}), \\ \tilde{B}_{ik} &= \int_0^1 \psi_k(t) \sin(2i\pi s) ds \simeq h \sum_{p=1}^{M-1} \psi_k(t_{p+\frac{1}{2}}) \cos(2i\pi s_{p+\frac{1}{2}}).\end{aligned}$$

On obtient le système suivant

$$x = Ax + d,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} AA_1 & BB_1 \\ AA_2 & BB_2 \end{pmatrix},$$

telle que,

$$\begin{cases} AA_1(i, k) = \int_0^1 \varphi_k(t) \cos(2i\pi s) ds, \\ AA_2(i, k) = \int_0^1 \varphi_k(t) \sin(2i\pi s) ds, \\ BB_1(i, k) = \int_0^1 \psi_k(t) \cos(2i\pi s) ds, \\ BB_2(i, k) = \int_0^1 \psi_k(t) \sin(2i\pi s) ds, \end{cases}$$

et

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

telle que,

$$\begin{cases} x_1(i) = a_i, \\ x_2(i) = b_i. \end{cases}$$

Et,

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

telle que,

$$\begin{cases} d_1 = \int_0^1 f(t) \cos(2i\pi s) ds, \\ d_2 = \int_0^1 f(t) \sin(2i\pi s) ds. \end{cases}$$

### 3.3.2 Fonctions chapeaux

Dans cette partie, on utilise la projection en fonctions chapeaux :  $\forall n \geq 2$

$$\pi_n u(s) = \sum_{j=1}^n u(t_j) e_j(t),$$

où  $h = \frac{1}{n-1}$ ,  $t_j = (j-1)h$ , et

$$e_j(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} & \text{si } t_{j-1} \leq t \leq t_j, \\ \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j} & \text{si } t_j \leq t \leq t_{j+1}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$e_1(t) = \begin{cases} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$e_n(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} & \text{si } t_{n-1} \leq t \leq t_n, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Pour  $n \geq 2$ , on a :

$$\begin{aligned}
u_n = C_n u_n + f &\Rightarrow u_n = \Pi_n C \Pi_n u_n + f, \\
&\Rightarrow u_n(s) = \Pi_n C \left( \sum_{j=1}^n u_j e_j(s) \right) + f(s), \\
&\Rightarrow u_n(s) = \sum_{j=1}^n u_j (\Pi_n C e_j(s)) + f(s), \\
&\Rightarrow u_n(s) = \sum_{j=1}^n u_j \left( \sum_{i=1}^n C e_j(t_i) e_i(s) \right) + f(s), \\
&\Rightarrow u_n(s) = \sum_{j=1}^n u_j \left( \sum_{i=1}^n C e_j(t_i) e_i(s) \right) + f(s).
\end{aligned}$$

On note,  $A_{ij} = C e_j(t_i)$  et  $b_i = f(t_i)$ .

On va calculer les coefficients de la matrice A à partir de l'intégrale suivante :

$$C e_j(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^{s-\epsilon} \frac{e_j(t)}{s-t} dt + \int_{s+\epsilon}^1 \frac{e_j(t)}{s-t} dt \right).$$

Pour  $2 \leq j \leq n-1$  ;

$$e_j(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}} & \text{si } t_{j-1} \leq t \leq t_j, \\ \frac{t_{j+1}-t}{t_{j+1}-t_j} & \text{si } t_j \leq t \leq t_{j+1}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

•  $t_1 \leq s \leq t_{j-1}$

$$\begin{aligned}
C e_j(s) &= \frac{1}{h} \left( \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \frac{t-t_{j-1}}{s-t} dt \right), \\
&= \frac{1}{h} \left( \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \frac{t-s+s-t_{j-1}}{s-t} dt \right), \\
&= \frac{1}{h} \left( \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} -1 dt + (s-t_{j-1}) \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \frac{1}{s-t} dt \right), \\
&= \frac{-1}{h} \left( (s-t_{j-1}) \log \left( \frac{t_{j+1}-s}{s-t_{j-1}} \right) + (t_{j+1}-t_{j-1}) \right).
\end{aligned}$$

$$\bullet t_{j-1} \leq s \leq t_j$$

$$\begin{aligned} Ce_j(s) &= \frac{1}{h} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{t_{j-1}}^{s-\epsilon} \frac{t-t_{j-1}}{s-t} dt + \int_{s+\epsilon}^{t_j} \frac{t-t_{j-1}}{s-t} dt \right), \\ &= \frac{-1}{h} \left( (s-t_j) \log \left( \frac{t_j-s}{s-t_{j-1}} \right) + (t_j-t_{j-1}) \right). \end{aligned}$$

$$\bullet t_j \leq s \leq t_{j+1}$$

$$\begin{aligned} Ce_j(s) &= \frac{1}{h} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{t_j}^{s-\epsilon} \frac{t_{j+1}-t_j}{s-t} dt + \int_{s+\epsilon}^{t_{j+1}} \frac{t_{j+1}-t_j}{s-t} dt \right), \\ &= \frac{1}{h} \left( (t_{j+1}-s) \log \left( \frac{s-t_j}{t_{j+1}-s} \right) + (t_{j+1}-t_j) \right). \end{aligned}$$

$$\bullet t_{j+1} \leq s \leq t_n$$

$$\begin{aligned} Ce_j(s) &= \frac{1}{h} \left( \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \frac{t_{j+1}-t}{s-t} dt \right), \\ &= \frac{1}{h} \left( (t_{j+1}-s) \log \left( \frac{s-t_{j-1}}{t_{j+1}-s} \right) + (t_{j+1}-t_{j-1}) \right). \end{aligned}$$

$$\bullet s = t_j$$

$$\begin{aligned} Ce_j(s) &= \frac{1}{h} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{t_{j-1}}^{s-\epsilon} \frac{t-t_{j-1}}{s-t} dt + \int_{s+\epsilon}^{t_{j+1}} \frac{t_{j+1}-t}{s-t} dt \right), \\ &= \frac{1}{h} \left( (s-t_{j-1}) \log(t_{j-1}-s) - (t_{j+1}-s) \log(s-t_{j-1}) + (t_{j+1}-t_{j-1}) \right). \end{aligned}$$

on a donc

$$Ce_j(s) = \begin{cases} \frac{-1}{h} \left( (s-t_{j-1}) \log \left( \frac{t_{j+1}-s}{s-t_{j-1}} \right) + (t_{j+1}-t_{j-1}) \right) & \text{si } t_1 \leq s \leq t_{j-1}, \\ \frac{-1}{h} \left( (s-t_j) \log \left( \frac{t_j-s}{s-t_{j-1}} \right) + (t_j-t_{j-1}) \right) & \text{si } t_{j-1} < s \leq t_j, \\ \frac{1}{h} \left( (t_{j+1}-s) \log \left( \frac{s-t_j}{s-t_{j+1}} \right) + (t_{j+1}-t_j) \right) & \text{si } t_j \leq s \leq t_{j+1}, \\ \frac{1}{h} \left( (t_{j+1}-s) \log \left( \frac{s-t_{j-1}}{t_{j+1}-s} \right) + (t_{j+1}-t_{j-1}) \right) & \text{si } t_{j+1} \leq s \leq t_n, \\ \frac{1}{h} \left( (s-t_{j-1}) \log(s-t_{j-1}) - (t_{j+1}-s) \log(s-t_{j+1}) + (t_{j+1}-t_{j-1}) \right) & \text{si } s = t_j. \end{cases}$$

Pour  $j=1$

$$e_1(t) = \begin{cases} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

•  $t_1 \leq s \leq t_2$

$$\begin{aligned} Ce_1(s) &= \frac{1}{h} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{t_1}^{s-\epsilon} \frac{t_2 - t}{s - t} dt + \int_{s+\epsilon}^{t_2} \frac{t_2 - t}{s - t} dt \right), \\ &= \frac{1}{h} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{t_1}^{s-\epsilon} \frac{t_2 - s + s - t}{s - t} dt + \int_{s+\epsilon}^{t_2} \frac{t_2 - s + s - t}{s - t} dt \right), \\ &= \frac{1}{h} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{t_1}^{s-\epsilon} 1 dt + (t_2 - s) \int_{t_1}^{s-\epsilon} \frac{1}{s - t} dt + \int_{s+\epsilon}^{t_2} 1 dt + \int_{s+\epsilon}^{t_2} \frac{1}{s - t} dt \right), \\ &= \frac{1}{h} \left( (s - t_1) \log \left( \frac{t_2 - s}{s - t_1} \right) + (t_2 - t_1) \right). \end{aligned}$$

•  $s = t_1$

On pose  $t_0 = t_1 - h$

$$\begin{aligned} Ce_1(s) &= \frac{1}{h} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{t_1-h}^{s-\epsilon} \frac{t - t_1 + h}{s - t} dt + \int_{s+\epsilon}^{t_2} \frac{t_2 - t}{s - t} dt \right), \\ &= \frac{1}{h} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{t_1-h}^{s-\epsilon} -1 dt + (s - t_1 + h) \int_{t_1-h}^{s-\epsilon} \frac{1}{s - t} dt + \int_{s+\epsilon}^{t_2} 1 dt + (t_2 - s) \int_{s+\epsilon}^{t_2} \frac{1}{s - t} dt \right), \\ &= \frac{1}{h} \left( [-t]_{t_1-h}^{s-\epsilon} + (s - t_1 + h) [-\log(|s - t|)]_{t_1-h}^{s-\epsilon} + [t]_{s+\epsilon}^{t_2} + (t_2 - s) [-\log(|s - t|)]_{s+\epsilon}^{t_2} \right), \\ &= \frac{1}{h} \left( (s - t_1 + h) \log(s - t_1 + h) - (t_2 - s) \log(t_2 - s) + (t_1 + h + t_2) \right). \end{aligned}$$

•  $s = t_{n-1}$

$$\begin{aligned} Ce_1(s) &= \frac{1}{h} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{t_1}^{s-\epsilon} \frac{t - t_1}{s - t} dt + \int_{s+\epsilon}^{t_3} \frac{t_3 - t}{s - t} dt \right), \\ &= \frac{1}{h} \left( (s - t_1) \log(s - t_1) - (t_3 - s) \log(t_3 - s) + (t_1 + t_3) \right). \end{aligned}$$

On a donc

$$Ce_1(s) \begin{cases} \frac{1}{h} \left( (s - t_2) \log \left( \frac{s - t_1}{t_2 - s} \right) + (t_2 - t_1) \right) & \text{si } t_1 \leq s \leq t_2, \\ \frac{1}{h} \left( (s - t_1 + h) \log(s - t_1 + h) - (t_2 - s) \log(t_2 - s) + (t_1 + h + t_2) \right) & \text{si } s = t_n, \\ \frac{1}{h} \left( (s - t_1) \log(s - t_1) - (t_3 - s) \log(t_3 - s) + (t_1 + t_3) \right) & \text{si } s = t_{n-1}. \end{cases}$$

Pour  $j=n$

$$e_n(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} & \text{si } t_{n-1} \leq t \leq t_n, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

•  $t_{n-1} \leq s \leq t_n$

$$\begin{aligned} Ce_n(s) &= \frac{1}{h} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{t_{n-1}}^{s-\epsilon} \frac{t - t_{n-1}}{s - t} dt + \int_{s+\epsilon}^{t_n} \frac{t - t_{n-1}}{s - t} dt \right), \\ &= \frac{-1}{h} \left( (s - t_{n-1}) \log \left( \frac{t_n - s}{s - t_{n-1}} \right) + (t_n - t_{n-1}) \right). \end{aligned}$$

•  $s = t_n$

On pose  $t_{n+1} = t_n + h$

$$\begin{aligned} Ce_n(s) &= \frac{1}{h} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{t_{n-1}}^{s-\epsilon} \frac{t - t_{n-1}}{s - t} dt + \int_{s+\epsilon}^{t_n+h} \frac{t_n + h - t}{s - t} dt \right), \\ &= \frac{1}{h} \left( (s - t_{n-1}) \log(s - t_{n-1}) - (t_n + h - s) \log(t_n + h - s) + (t_{n-1} + t_n + h) \right). \end{aligned}$$

•  $s = t_{n-1}$

$$\begin{aligned} Ce_n(s) &= \frac{1}{h} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{t_{n-2}}^{s-\epsilon} \frac{t - t_{n-2}}{s - t} dt + \int_{s+\epsilon}^{t_n} \frac{t_n - t}{s - t} dt \right), \\ &= \frac{1}{h} \left( (s - t_{n-2}) \log(s - t_{n-2}) - (t_n - s) \log(t_n - s) + (t_{n-2} + t_n) \right). \end{aligned}$$

$$Ce_n(s) \begin{cases} \frac{-1}{h} \left( (s - t_{n-1}) \log \left( \frac{s - t_n}{s - t_{n-1}} \right) + (t_n - t_{n-1}) \right) & \text{si } t_1 \leq s \leq t_2, \\ \frac{1}{h} \left( (s - t_1 + h) \log(s - t_1 + h) - (t_2 - s) \log(t_2 - s) + (t_1 + h + t_2) \right) & \text{si } s = t_1, \\ \frac{1}{h} \left( (s - t_1) \log(s - t_1) - (t_3 - s) \log(t_3 - s) + (t_1 + t_3) \right) & \text{si } s = t_2. \end{cases}$$

Enfin, nous obtenons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} Ce_1(t_1) & Ce_2(t_1) & \cdot & \cdot & \cdot & Ce_n(t_1) \\ Ce_1(t_2) & Ce_2(t_2) & \cdot & \cdot & \cdot & Ce_n(t_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Ce_1(t_{n-1}) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Ce_n(t_{n-1}) \\ Ce_1(t_n) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Ce_n(t_n) \end{pmatrix}.$$

## 4.1 Série de Fourier

On prend, pour  $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} u(t) &= Cu(t) + f(t) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^{s-\varepsilon} \frac{u(t)}{s-t} dt + \int_{s+\varepsilon}^1 \frac{u(t)}{s-t} dt \right) + f(t), \end{aligned}$$

tel que,

$$f(t) = t - t \ln \left( \frac{t}{1-t} \right) + 1.$$

Ce qui donne

$$u(t) = t.$$

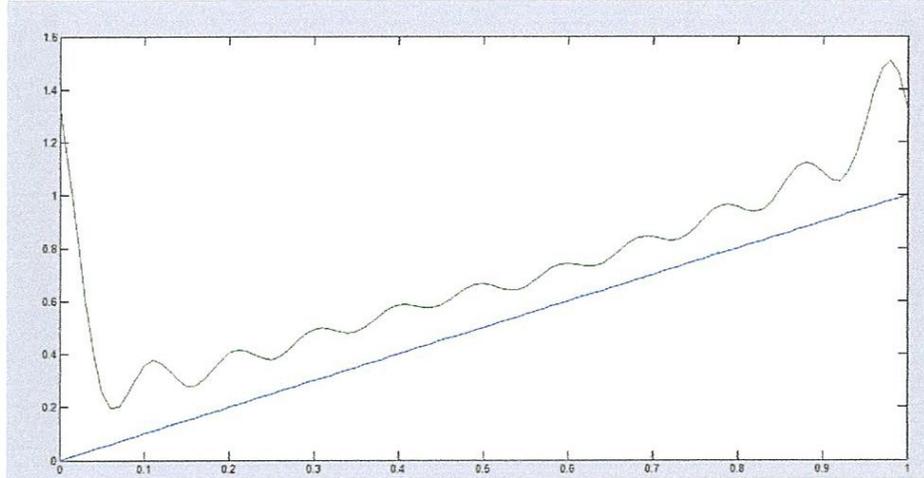
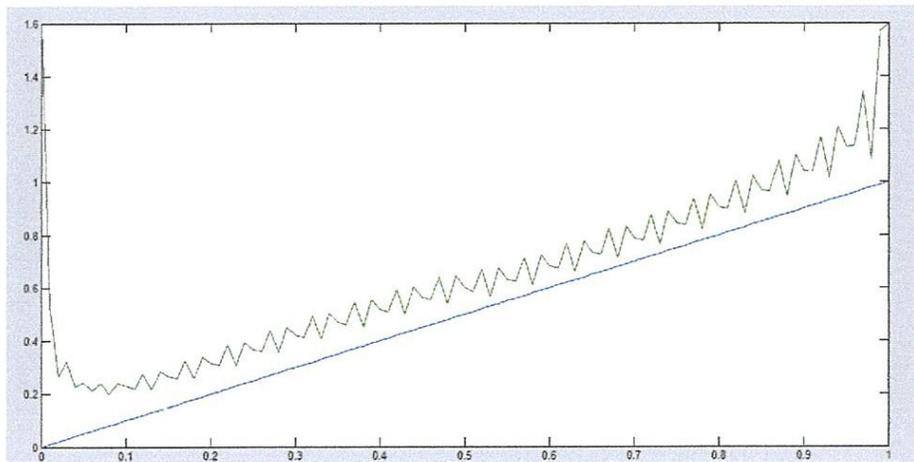
$\|u - u_n\|_{L^2}$  est calculé numériquement en utilisant la quadrature points mi-lieux avec 1000 neuds. Les résultats sont donnés dans le tableau et les figures suivantes :

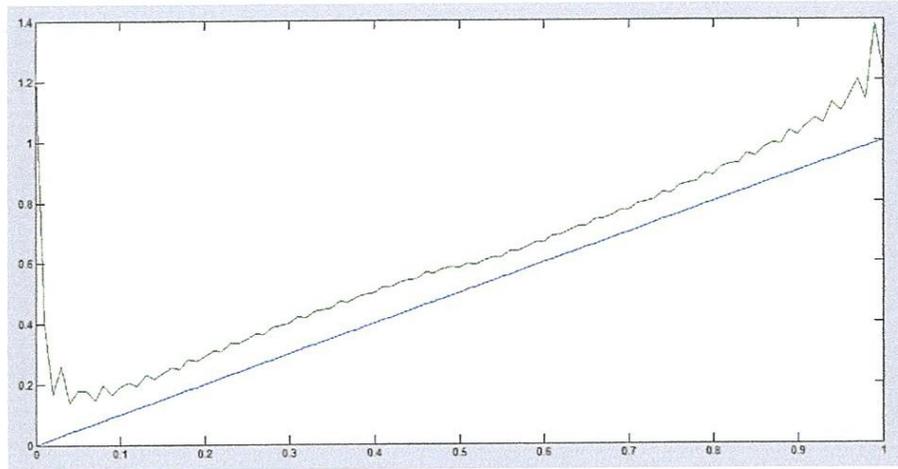
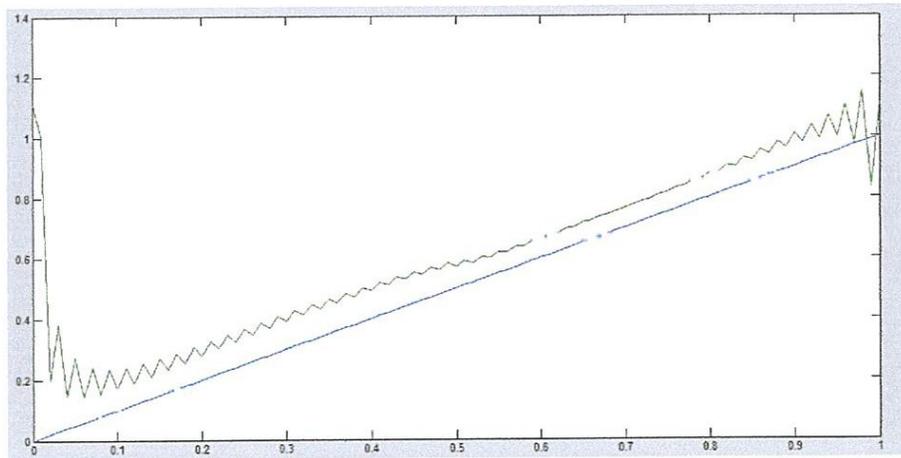
$n$	$M$	$\ u - u_n\ _{L^2}$
10	30	2.6E-1
40	80	1.99E-1
60	100	1.73E-1
100	150	1.46E-1
120	150	1.4E-1
150	200	1.29E-1

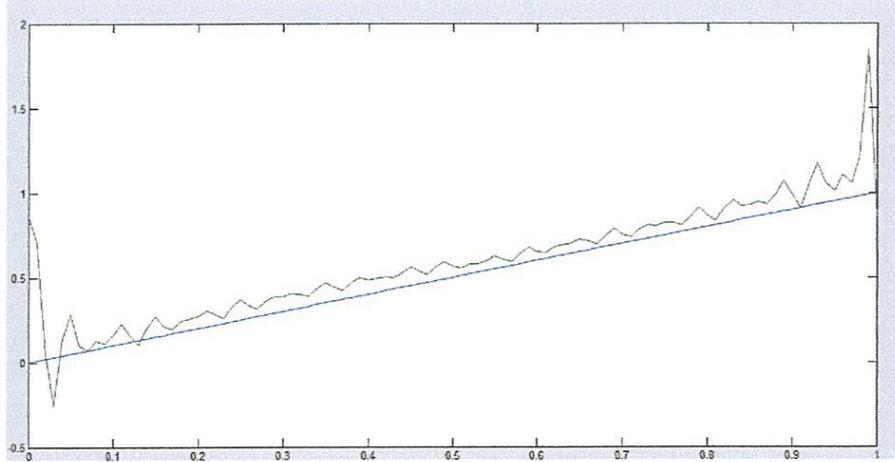
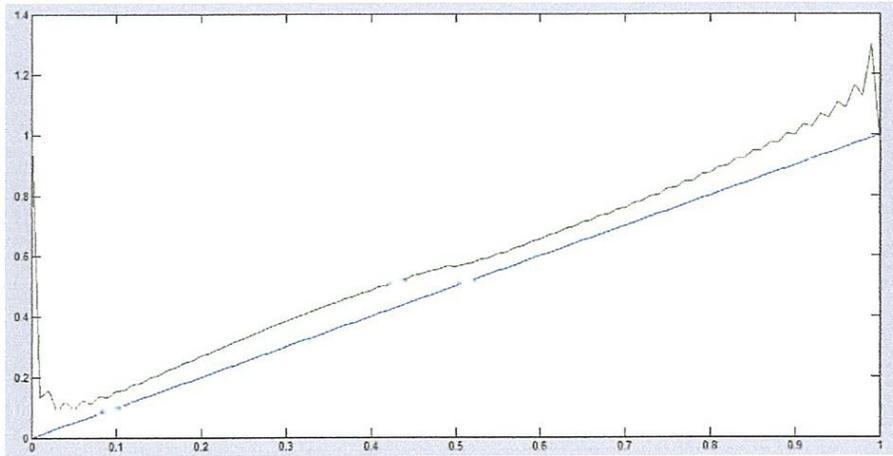
TABLE 4.1 – Résultats numériques

## 4.2 Fonctions chapeaux

La méthode des fonctions chapeaux est avérée impossible à contruire. Vue que la matrice avait des coefficients infini. Donc, il n'y a pas de résultats numériques à présenter.

FIGURE 4.1 -  $n=10, M=30$ FIGURE 4.2 -  $n=40, M=80$

FIGURE 4.3 -  $n=60, M=100$ FIGURE 4.4 -  $n=100, M=150$

FIGURE 4.5 -  $n=120, M=150$ FIGURE 4.6 -  $n=150, M=200$

## Conclusion

Dans ce mémoire on a étudié analytiquement l'opérateur de Cauchy  $C$  dans  $L^2(0, 1)$  : Grâce à l'écriture  $C_0 = \pi(F^*MF)$ , nous avons trouvé que  $C$  est borné et que  $I - C$  est inversible.

La méthode numérique que nous avons utilisée est la méthode de Galerkin. Dans le chapitre 2, on a appliquée sur un opérateur compact, on a démontré que le système admet une unique solution et qu'elle est convergente.

Dans le chapitre 3 : On a appliqué la méthode de Galerkin sur l'opérateur non compact  $C$ . Pour assurer l'unicité et l'existence de la solution du système on a dû rajouter  $\pi_n^* = \pi_n$ , et on a démontré la convergence de la solution.

Enfin, nous avons construit un exemple numérique montrant la convergence et l'efficacité de notre méthode.

## Bibliographie

- [1] D. PORTER, D.S.G. STIRLING, *Integral Equations*. Cambridge University Press 1990.
- [2] ATKINSON, *Theoretical Numerical Analysis :functional analysis framework*. Texts in Applied Mathematics. Mathematics Subject Classification(2000).
- [3] [http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me\\_du\\_s%C3%A9rie\\_de\\_Fourier](http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_du_s%C3%A9rie_de_Fourier)
- [4] Wolfram Mathematica : ONLINE INTEGRATOR