République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques Appliquées**

Par :

Mlle. CHOUABNA ADILA

Intitulé

Existence des solutions non triviales du problème aux limites en trois points (PVB)

Dirigé par : Dr. FRIOUI ASSIA

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. BERRAHAIL AMEL	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. FRIOUI ASSIA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. N. BOUSSETILA	Univ-Guelma

Session Juin 2016

Remercement

je remercie en premier lieu ALLAH qui nous
a donnée la vie et la santé pour le parachèvement de ce modèste
travail.

je remercie de tout cœur notre encadreur Docteur :

« Frioui Assai »

Qui a été généreux avec moi

Les membres de juré

je remercie mon familles qui nous ont toujours
donné la possibilité de faire ce que je veux durant
mon études et qui ont toujours cru en
moi

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué
à ce travail par leurs remarques, leurs suggèstions et leurs
soutiens.

CHOUABNA ADILA.

DEDICACT

A l'aide de dieu, j'espère avoir accomplir ce modeste travail que je dédie à :

Ceux qui sont les plus chères au monde

Ma Mère « Houria » et mon Père « Ali »

Mes trios sœurs : « Robila », « Romaissa », et surtout ma grande sœur « Fatiha »

Mon fiancé « billel kahalerras » et sa famille

Mes oncles et mes antes :Khali Salah et sa femme Fouzai, surtout Khali Houssi et sa femme Farida, khalti Fatma, Nacira et son marié kamel

Mes chères antes samia, warda , siham et houria

Mes nièces :warda, Sabah, Hanan, Lamai, Hana, Houdu, Boucheru, Hiba , Rilaj el rawan

Ma collègue et ma chère « ZEYNEB »

Mes amis : Sara, Imane, Abir, lamai, Fatiha

Tous qui me connaissent , surtout a tout qui m'aime.

CHOUABNA ADILA.

Table des matières

Résumé

L'objectif de ce mémoire s'inscrit dans l'étude de l'existence des solutions d'un problème aux limites associé à une équation différentielle ordinaire non linéaire d'ordre deux à conditions aux limites en trois points suivant :

$$(PVB)\begin{cases} u'' + f(t,u) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u'(0) = 0 \ , \ u(1) = \alpha\, u'(\eta) \end{cases}$$

ou $\eta \in (0,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Sous certaines conditions sur la non-linéarité de la fonction de f et en se basant sur l'alternative non-linéaire de Leray- Schauder, des conditions suffisantes pour l'éxistence des solutions non triviales sont obtenues. Comme aplications les résultats sont illustrés par des exemples.

0.1 Introduction

Les équations différentielles constituent aujourd'hui l'un des thèmes importants de la compréhension scientifiques et sont d'une grande utilité dans la modélisation de nombreux problèmes de la physique mathématiques. D'ailleurs Newton disait que traiter mathématiquement un problème physique revient à trouver l'équation différentielle qui le décrit. Mais il semble que la plus part de ces équations sont globalements non linéaires d'où la pertinence d'en faire une étude sur ce type d'équations. C'est dans ce contexte, que ce mémoire s'inscrit et l'objectif est donc l'étude de l'existence des solutions d'un problème aux limites associé à une équations différentielle non linéaire d'ordre deux à conditions aux limites en trois points suivant :

$$(1.1) \qquad \begin{cases} u'' + f(t, u) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u'(0) = 0 \ , \ u(1) = \alpha \ u'(\eta) \end{cases}$$

où $\eta \in (0,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

En revanche la théorie du point fixe se révèle être un outil trés important dans l'étude de ce type d'équations, plus particulièrement et en se basant sur l'alternative non linéaire de Leray- Schauder, nous nous proposons d'étudier l'éxistence des solutions non triviales du problème aux limites (1.1).

Ce mémoire est organisé comme suit :

Chapitre 1 : Nous présentons dans ce chapitre quelques notations et définitions fondamentales concernant les opérateurs compacts et leurs propriétés ainsi que le théorème d'Ascoli-Arzela.

Chapitre 2 : Ce chapitre est dédié à quelques théorèmes de point fixe tels que le théorème de Brouwer, de Schauder et notamment l'alternative non linéaire de Leray-Schauder utiliser dans l'étude de ce problème aux limites.

Chapitre 3 : Ce dernier est consacré entièrement à l'étude du problème aux limites (1.1) qui porte sur l'éxistence des solutions non triviales.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

1.1 Notations et définitions

- (PVB) : Problème à valeurs aux limites en trois points.
- $L^2(\Omega)$: L'espace de classe des fonctions à carrées intégrables.
- $C(X,Y)$: L'ensemble des fonctions continues de X dans Y.
- $L(X,Y)$: L'ensemble des opérateurs linéaires de X dans Y.
- $K(X,Y)$: L'ensemble de tout les opérateurs compacts de X dans Y.
- $\overline{A}$: L'adhérence de A.
- $mes(\Omega)$: La mesure de l'ensemble Ω.

Définition 1.1 [2] *Une équation différentielle ordinaire **(EDO)** est une expression de la forme :*

$$F\left(t, x, x^{'}, x^{''}, ...x^{n}\right) = 0 \tag{1.2}$$

où

$$F : U \subset [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

- *x^n represente la dérivée d'ordre n de x par rapport à t.*

· *L'ordre d'une* ***EDO*** *est défini comme le plus grand ordre de dérivation présent dans l'équation* (1.2) *c'est à dire* n.

· *La variable* t *représente en général le temps dans les équations qui modilisent un processus d'évolution en temps.*

Conditions aux limites

Une équation différentielle seule n'a que peu de sens sans la donnée des conditions aux limites. Deux grands types de conditions aux limites peuvent être donnés pour les **EDO** qui conduisent soit aux problèmes à valeurs initiales ou problème de Cauchy, soit aux problèmes à valeurs aux limites.

1.2 Espaces Fonctionnels

1.2.1 Définitions (Rappels)

Commençons par rappeler la définition d'un espace vectoriel normé.

Définition 1.2 *(Espace vectoriel normé)*

Soit E *un espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *on appelle norme sur l'espace* E *toute application notée* $\|.\|$ *définie sur* E *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$, *vérifiant pour tout* x, y *dans* E *et* α *dans* $\mathbb{k}$

i) $\|x\| = 0$ *si seulement si* $x = 0$.

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Exemple 1.1 *Soit* $C([a, b], \mathbb{R})$, *l'espace vectoriel des fonctions continues sur* $[a, b]$ *à valeurs réelles.*

Pour tout $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, *on pose*

$$\|f\|_1 = \int_a^b f(x)\, dx \quad et \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a;b]} |f(x)|.$$

Les applications $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_\infty$ *sont des normes sur* $C([a,b],\mathbb{R})$.

Définition 1.3 *(Espace métrique complet)*

On dit que E *est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de* E *converge dans* E.

Définition 1.4 *(Espace de Banach)*

Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

Exemple 1.2 $(C([a,b],R), \|.\|_\infty)$ *est un espace de Banach.*

Définition 1.5 *(Espace* $C([a,b]$ *)*

Des fonctions continues sur $[a,b]$, *de norme* $\|x\| = \max\limits_{t\in[a;b]} |x(t)|$.

Définition 1.6 *(Espace* $C^k([a,b]$ *)*

Des fonctions k *fois continument dérivables sur* $[a,b]$, *de norme*

$$\|x\| = \sum_{i=0}^{k} \max \left|x^i(t)\right|, \quad \textit{telle que } x^0(t) = x(t).$$

1.2.2 Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.7 ***(Espaces*** $L^1(\Omega)$***)***

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, *on désigne par* $L^1(\Omega)$ *l'espace des fonctions intégrable sur* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *on pose*

$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)|dx$$

Définition 1.8 *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$, *on pose*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \textit{ mesurable et } |f(x)|^p \in L^1(\Omega) \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, on a $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, vérifiant

$$\exists \; c > 0 \;\; \textit{telle que} \;\; |f(x)| < c, \;\; \textit{p.p. sur } \Omega.$$

La norme est notée par

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf \{ \; c > 0, \;\; |f(x)| \leq c, \;\; \textit{p.p. sur } \Omega. \}$$

1.3 Quelques propriétés

Définition 1.9 *(Espace de Hilbert)*

Un espace de Hilbert est espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

Théorème 1.1 [1] *$L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Remarque 1.1 *En particulier lorsque $p = 2$, $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$\langle f.g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) \, g(x) \, dx$$

est un espace de Hilbert.

Notation :

Soit $1 \leq p \leq \infty$. On note q l'exposant conjugué de p c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 1.2 ***(Inégalité de Hölder)***

Soit p telle que $1 \leq p \leq \infty$, et soient deux fonctions telles que

$$f \in L^p(\Omega) \quad et \quad g \in L^q(\Omega).$$

Alors

$$f.g \in L^1(\Omega) \quad et \quad \|f.g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Théorème 1.3 *(Fubini)*

Si $f : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors les intégrales

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\, dx \right) dt \quad et \quad \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\, dt \right) dx$$

existent et sont égales.

1.4 Notions sur les opérateurs

1.4.1 Les opérateurs linéaires bornés

Définition 1.10 *Soient X et Y deux espaces normés, un opérateur A défini sur X dans Y et dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :*

pour tout u, v dans X et α, β dans $\mathbb{R}$

i) $Au \in Y$.

ii) $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$.

Définition 1.11 *Un opérateur linéaire A défini sur X dans Y et dit borné s'il existe une constante positive C, telle que :*

$$\|Au\|_Y \leq C \|u\|_X, \forall u \in X.$$

Proposition 1.1 *Soient X et Y deux espaces normés et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire, les proprietés suivantes sont équivalentes*

i) L'opérateur T est continu sur X.

ii) L'opérateur T est continu au point 0_x.

iii) L'opérateur T est borné.

1.4.2 Opérateurs compacts

Définition 1.12 [5] *Soit T un opérateur d'un espace normé X dans un espace normé Y, on dit que T est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans X à un ensemble relativement compact dans Y .*

Définition 1.13 *(Opérateur complètement continu)*

L'opérateur T est dit complètement continu, s'il est continu et compact.

Définition 1.14 *Une famille de fonctions $F \subset C(X, \mathbb{R})$ est dite uniformément bornée s'il existe $M > 0$ telle que :*

$$|u(x)| \leq M, \quad \forall x \in X, \quad \forall u \in F.$$

Définition 1.15 *Soit (X, d) un espace métrique donné, une famille de fonctions $F \subset C(X, \mathbb{R})$ est dite équicontinue si et seulement si :*

$$\forall \epsilon \in X, \ \exists \delta > 0 : \forall (x, y) \in X^2, d(x, y) < \delta, \forall u \in F, on\ a : |u(x) - u(y)| < \epsilon.$$

Théorème 1.4 [1] *(Ascoli-Arzela)*

Soit X un espace métrique complet, alors une famille de fonctions $F \subset C(X, \mathbb{R})$ est relativement compact si et seulement si :

1) F est uniformément bornée.

2) F est équicontinue sur X.

Remarque 1.2 *Tout opérateur linéaire compact est continu*

La condition de compacité est généralement utilisée sous la forme :

Pour toute suite bornée $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$*, il existe une sous suite* $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ *telle que* Ax_{n_k} *converge.*

Chapitre 2

Existence de solutions pour un problème (PVB) et théorèmes de point fixe

2.1 Quelques propriétés

Dans ce chapitre nous allons donner quelques résultats concernant les théorèmes de point fixe de Brouwer , de Schauder et L'alternative non linéaire de Leray-Schauder où cette dernière est utilisée pour prouver l'existence des solutions du problème (1.1).

En théorie de point fixe topologique on a étudié le théorème de point fixe de Brouwer qui affirme qu'une application continue qui conserve la stabilité d'une boule admet un point fixe qui n'est pas nécessairement unique.

En réalité, ce théorème est trés fort car l'hypothèse sur l'application est faible. Mais le théorème de point fixe de Schauder qui est une généralisation du théorème de Brouwer, et qui affirme qu'une application continue et compact sur une partie fermée, convexe et bornée non vide admet un point fixe qui n'est pas aussi unique.

Définition 2.1 *Soit T une application d'un ensemble X dans lui même. On appelle point fixe tout point $x \in X$ tel que :*

$$T(x) = x.$$

2.2 Théorème du point fixe de Brouwer

Théorème 2.1 *Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle même admet un point fixe.*

Théorème 2.2 *Soit M une partie convexe, compacte et non vide d'un espace normé de dimension finie $(X, \|.\|)$ et soit $A : M \longrightarrow M$ une application continue, alors A admet un point fixe.*

2.3 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de brouwer pour monter l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de banach.

Théorème 2.3 [3] *(Premier théorème de Schauder)*

Soit M une partie non vide, compacte et convexe d'un espace de Banach X. Alors toute application continue $A : M \longrightarrow M$ admet un point fixe dans M.

Théorème 2.4 [3] *(Deuxième théorème de Schauder)*

Soit M une partie non vide et convexe d'un espace normé X et soit $A : M \longrightarrow K$ une application continue, ou K est un sous ensemble compact de M. Alors A possède un point fixe dans K.

2.4 L'alternative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème 2.5 [4] *(L'alternative non linéaire)*

Soit X un espace normé et $B(0,\rho)$ la boule fermée dans X de centre 0 et de rayon ρ. Si l'opérateur $T : B \longrightarrow X$ est compact, alors :

i) Où bien T admet un point fixe.

ii) Où bien il existe $x \in \partial B$, et $\lambda > 1$ telle que $T(x) = \lambda x$.

Théorème 2.6 [4] *(L'alternative de Leray-Schauder)*

Soit $T : X \longrightarrow X$ un opérateur complètement continu.

Soit $\epsilon(T) = \{x \in X \setminus T(x) = \lambda x, \text{ pour tout } \lambda > 1\}$.

Alors l'ensemble $\epsilon(T)$ est non borné, ou T admet un point fixe.

2.5 Application de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder

Problème à valeurs aux limites en trois points (PVB)

Soit $y(t)$ une fonction continue sur $[0,1]$.

Nous voulons résoudre le problème suivant :

$$(P_1)\begin{cases} u'' + y(t) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u'(0) = 0 \ , \ u(1) = \alpha \ u'(\eta) \end{cases}.$$

Nous allons présenter maintenant le principe de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, pour prouver l'existence des solutions du problème à valeurs aux limites en trois points (1.1).

Lemme 2.1 [3] *Soit X un espace de Banach et Ω un sous ensemble ouvert, borné de X tel que $0 \subset \Omega$. Soit $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur complètement continu. Alors, soit qu'il existe $x \in \partial\Omega$, $\lambda > 1$ tels que $T(x) = \lambda x$, ou il existe un point fixe $x^* \in \overline{\Omega}$ de T.*

Notons en outre que l'idée générale de cette partie consiste à transformer le problème aux limites (1.1) en un problème de point fixe. Pour commencer et pour mieux encadrer la suite étudions le problème auxilliaire donné par le lemme préliminaire suivant :

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $||y||_\infty = \max_{t\in[0,1]} |y(t)|$, $\forall\, y \in E$.

Lemme 2.2 *Soit $y \in C[0,1]$, alors le problème à valeurs aux limites en trois points (P_1)*

$$(P_1)\begin{cases} u'' + y(t) = 0, & 0 < t < 1 \\ u'(0) = 0\ ,\ u(1) = \alpha\ u'(\eta) & \end{cases}$$

admet une solution unique

$$u(t) = \int_0^1 (1-s)\, y(s)\, ds - \int_0^t (t-s)\, y(s)\, ds - \alpha \int_0^\eta y(s)\, ds.$$

Preuve. *On intègre deux fois l'équation suivante :*

$$u'' + y(t) = 0 \tag{2}$$

On obtient

$$-u'(t) = \int_0^t y(s)\, ds + C_1.$$

$$-u(t) = \int_0^t \left(\int_0^\tau y(s)\, ds \right) d\tau + \int_0^t C_1 ds + C_2,$$

$$u(t) = -\int_0^t \left(\int_s^\tau d\tau \right) y(s)\, ds - C_1 t - C_2,$$

$$u(t) = -\int_0^t (t-s)\, y(s)\, ds - C_1 t - C_2,$$

Cherchons C_1 et C_2 :

$$u'(0) = 0 \Longrightarrow C_1 = 0$$

et

$$u(1) = -\int_0^1 (1-s)\, y(s)\, ds - C_2 = \alpha u'(\eta)$$

$$u'(\eta) = -\int_0^\eta y(s)\, ds,$$

d'où

$$C_2 = -\int_0^1 (1-s)\, y(s)\, ds + \alpha \int_0^\eta y(s)\, ds,$$

Soit en remplaçant C_1 et C_2 dans

$$u(t) = -\int_0^1 (t-s)\, y(s)\, ds - C_1 t - C_2,$$

on obtient

$$u(t) = \int_0^1 (1-s)\, y(s)\, ds - \int_0^1 (t-s)\, y(s)\, ds - \alpha \int_0^\eta y(s)\, ds,$$

■

Définissons l'opérateur intégral $T : E \to E$, par

$$Tu(t) = \int_0^1 (1-s)\, f(s, u(s))\, ds - \int_0^t (t-s)\, f(s, u(s))\, ds - \alpha \int_0^\eta f(s, u(s))\, ds, \quad t \in [0,1]$$

En accord avec le lemme 2.2, le problème (1.1) a une solution si et seulement si l'opérateur T admet un point fixe dans E. Pour ce faire, nous prouvons tout d'abord par le théorème d'Ascoli-Arzela que T est un opérateur complètement continu.

Rappelons que pour qu'une famille de fonctions soit précompacte danc $C\,[0,1]$ il faut et il suffit qu'elle soit uniformément bornée et équicontinue.

1) Montrons que la famille $\{Tu(t)\}$ est uniformément bornée :

$$\exists\ M > 0,\ \ |Tu\,(t)|\ \ \leq M,\ \forall t \in [0,1]\,,\ \forall u \in E$$

Soit $B = \{u \in C\,[0,1]\,,\quad \|u\,(t)\| \leq 1\}$ alors pour $u \in B$, on a :

$$\begin{aligned}
|Tu\,(t)| &= \int_0^1 (1-s)\,|f\,(s,u\,(s))|\,ds + \int_0^t (t-s)\,|f\,(s,u\,(s))|\,ds + \\
&\quad |\alpha| \int_0^\eta |f\,(s,u\,(s))|\,ds \\
&\leq \int_0^1 (1-s)\,|f\,(s,u\,(s))|\,ds + \max_{0\leq t\leq 1} \int_0^t (t-s)\,|f\,(s,u\,(s))|\,ds + \\
&\quad |\alpha| \int_0^\eta |f\,(s,u\,(s))|\,ds \\
&\leq 2\int_0^1 (1-s)\,|f\,(s,u\,(s))|\,ds + |\alpha| \int_0^\eta |f\,(s,u\,(s))|\,ds \\
&\leq M.
\end{aligned}$$

Donc la famille $\{Tu\,(t)\}$ est uniformément bornée.

2) On montre que la famille $\{Tu\,(t)\}$ est équicontinue :

La fonction f est continue sur le compact $[0,1]$ alors elle est uniformément continue c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0,\ \forall s \in [0,1]\,,\ \forall u_1, u_2 \in [0,1]\,; \epsilon$$

$$|u_1 - u_2| < \delta \Longrightarrow |f\,(s,u_1) - f\,(s,u_2)| < \epsilon$$

$$\begin{aligned}
|Tu_1\,(t) - Tu_2\,(t)| &\leq |f\,(s,u_1) - f\,(s,u_2)| \left(2\int_0^1 (1-s)\,ds + |\alpha| \int_0^\eta ds\right) \\
&\leq |f\,(s,u_1) - f\,(s,u_2)| \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

Donc la famille $\{Tu\,(t)\,,\ u \in B\}$ est équicontinue est par conséquent l'opérateur T

est complètement continu.

Chapitre 3

Solutions non triviales du probleme aux limites (PVB)

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence des solutions non triviales pour le problème à valeurs aux limites en trois points (1.1). Enonçons à present le theoréme fondamental sur les solutions non triviales du probleme.

3.1 Théorèmes fondamentaux

Définition 3.1 *On dit que la solution $u(t)$ du problème est solution non triviale si*

$$u(t) \neq 0$$

Théorème 3.1 *Supposons que $f(t,0) \neq 0$, et qu' il éxiste deux fonctions positives k et $h \in L^1[0,1]$ telles que :*

$$|f(t,u)| \leq k(t)|u| + h(t), \quad \forall\ (t,u) \in [0,1] \times \mathbb{R}$$

et

$$A=2\int_0^1(1-s)\,k(s)\,ds+|\alpha|\int_0^\eta k(s)\,ds<1$$

Alors le problème aux limites (PVB) admet au moins une solution non triviale $u^*\in C[0,1]$.

Preuve. Soit

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^1(1-s)\,k(s)\,ds+|\alpha|\int_0^\eta k(s)\,ds \\ B &= 2\int_0^1(1-s)\,h(s)\,ds+|\alpha|\int_0^\eta h(s)\,ds \end{aligned}$$

Alors $A<1$. Comme $f(t,0)\neq 0$, il existe un intervalle $[\sigma,\tau]\subset[0,1]$ telle que $\min\limits_{\sigma\leq t\leq\tau}|f(t,0)|>0$, d'autre part, $h(t)\geq|f(t,0)|$, $\forall t\in[0,1]$.

On sait que $B>0$.

Soit

$$m=B(1-A)^{-1},\ \Omega=\{u\in C[0,1]:\|u\|<m\}.$$

Supposons $u\in\partial\Omega$, $\lambda>1$ tel que $T(u)=\lambda u$, alors

$$\lambda m=\lambda\|u\|=\|Tu\|=\max_{0\leq t\leq 1}|(Tu)(t)|$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^1(1-s)\,|f(s,u(s))|\,ds+\max_{0\leq t\leq 1}\int_0^t(t-s)\,|f(s,u(s))|\,ds \\ &\quad +|\alpha|\int_0^\eta|f(s,u(s))| \\ &\leq 2\int_0^1(1-s)\,|f(s,u(s))|\,ds+|\alpha|\int_0^\eta|f(s,u(s))|\,ds \\ &\leq \left[2\int_0^1(1-s)\,k(s)\,|u(s)|\,ds+|\alpha|\int_0^\eta k(s)\,|u(s)|\,ds\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[2\int_0^1 (1-s)\,h(s)\,ds+|\alpha|\int_0^\eta h(s)\,ds\right]\\
\leq\ & A\|u\|+B=Am+B.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$\lambda\leq A+\frac{B}{m}=A+\frac{B}{B(1-A)^{-1}}=A+(1-A)=1,$$

contredition avec le fait que $\lambda>1$. Par le lemme 2.1, l'opérateur T admet un point fixe $u^*\in\overline{\Omega}$. Dés lors le problème (1.1) admet au moins une solution $u^*\in C[0,1]$. ■

L'exemple suivant montre une application intéressante du théorème 3.1 du problème considéré.

Exemple 3.1 *Considérons le problème à valeurs aux limites en trois points suivant :*

$$
\begin{cases}
u''+(t-t^2)\,|u|\sin u-t^2u+t^3-2\sin t=0, & 0<t<1,\\
u'(0)=0, \qquad u(1)=4u'\left(\frac{1}{2}\right)
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

Soit $\alpha=4,\eta=\frac{1}{2}$, *et*

$$
\begin{aligned}
f(t,x) &= \left(t-t^2\right)|x|\sin x-t^2x+t^3-2\sin t,\\
k(t) &= t, \quad h(t)=t^3+2\sin t.
\end{aligned}
$$

Il est facile de prouver que $k,h\in L^1[0,1]$ *quelles sont deux fonctions positives et que*

$$f(t,x)\leq k(t)\,|x|+h(t), \qquad (t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}$$

et

$$A=2\int_0^1(1-s)\,k(s)\,ds+|\alpha|\int_0^\eta k(s)\,ds=\frac{5}{6}<1.$$

Par conséquent, en vu du théorème 3.1, le problème aux limites (3.1) *a au moins un solution non triviale* x^* *dans* $C[0,1]$.

Théorème 3.2 *Supposons $f(t,0) \neq 0$, et qu' il existe deus fonctions positives k et $h \in L^1[0,1]$ telles que*

$$|f(t,x)| \leq k(t)|x| + h(t), \quad \forall (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}.$$

Si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(1) Il existe un constante $p > 1$ telle que :

$$\int_0^1 k^p(s)\,ds < \left[\frac{(1+q)^{1/q}}{2+|\alpha|\left[\eta(1+q)\right]^{1/q}}\right]^p; \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

(2) Il existe une constante $\mu > -1$ telle que

$$k(s) \leq \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{2+|\alpha|(2+\mu)\eta^{1+\mu}}s^\mu, \quad \forall s \in [0,1],$$

$$mes\left\{s \in [0,1] : k(s) < \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{2+|\alpha|(2+\mu)\eta^{1+\mu}}s^\mu\right\} > 0$$

(3) Il existe une constante $\mu > -1$ telle que

$$k(s) \leq \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{2(1+\mu)+|\alpha|(2+\mu)}(1-s)^\mu, \quad \forall s \in [0,1],$$

$$mes\left\{s \in [0,1] : k(s) < \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{2(1+\mu)+|\alpha|(2+\mu)}(1-s)^\mu\right\} > 0.$$

(4) k satisfait

$$k(s) \leq \frac{1}{1+|\alpha|\eta}, \quad \forall s \in [0,1],$$

$$mes\left\{s \in [0,1] : k(s) < \frac{1}{1+|\alpha|\eta}\right\} > 0.$$

(5) f satisfait

$$\Lambda := \lim_{x\to\infty} \sup \max_{t\in[0,1]} \left| \frac{f(t,x)}{x} \right| < \frac{1}{1+|\alpha|\eta}.$$

alors le (1.1) *admet au moins une solution non triviale* $u^* \in C[0,1]$.

Preuve. Soit A donné dans le théorème 3.1. en tenant compte de ce théorème, nous devons seulement prouver que $A < 1$.

1) En utilisant l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^1 (1-s)\,k(s)\,ds + |\alpha| \int_0^\eta k(s)\,ds \\ &\leq 2\left[\int_0^1 (1-s)^q\,ds\right]^{1/q} \left[\int_0^1 k^p(s)\,ds\right]^{1/p} + |\alpha| \left[\int_0^1 k^p(s)\,ds\right]^{1/p} \left[\int_0^\eta 1^q ds\right]^{1/q} \\ &\leq \left[\int_0^1 k^p(s)\,ds\right]^{1/p} \left\{ 2\left[\int_0^1 (1-s)^q\,ds\right]^{1/q} + |\alpha| \left[\int_0^\eta 1^q ds\right]^{1/q} \right\} \\ &\leq \left[\int_0^1 k^p(s)\,ds\right]^{1/p} \left[2\left(\frac{1}{1+q}\right)^{1/q} + |\alpha|\,\eta^{1/q} \right] \\ &< \frac{(1+q)^{1/q}}{2+|\alpha|\,[\eta(1+q)]^{1/q}} . \frac{2+|\alpha|\,[\eta(1+q)]^{1/q}}{(1+q)^{1/q}} = 1. \end{aligned}$$

2) Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} A &< \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{2+|\alpha|(2+\mu)\eta^{1+\mu}} \left[2\int_0^1 (1-s)\,s^\mu ds + |\alpha| \int_0^\eta s^\mu ds \right] \\ &\leq \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{2+|\alpha|(2+\mu)\eta^{1+\mu}} \left[\frac{2}{(1+\mu)(2+\mu)} + |\alpha| . \frac{\eta^{1+\mu}}{1+\mu} \right] \\ &= \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{2+|\alpha|(2+\mu)\eta^{1+\mu}} . \frac{2+|\alpha|(2+\mu)\eta^{1+\mu}}{(1+\mu)(2+\mu)} = 1. \end{aligned}$$

3) Dans ce cas, nous avons

$$
\begin{aligned}
A &= 2\int_0^1 (1-s)\,k(s)\,ds + |\alpha| \int_0^\eta k(s)\,ds \\
&< \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{2(1+\mu)+|\alpha|(2+\mu)} \left[2\int_0^1 (1-s)^{1+\mu}\,ds + |\alpha| \int_0^\eta (1-s)\,s^\mu ds\right] \\
&= \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{2(1+\mu)+|\alpha|(2+\mu)} \left[\frac{2}{2+\mu} + |\alpha| \, . \frac{1-(1-\eta)^{1+\mu}}{1+\mu}\right] \\
&\leq \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{2(1+\mu)+|\alpha|(2+\mu)} \left[\frac{2}{2+\mu} + |\alpha| \, . \frac{1}{1+\mu}\right] \\
&= \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{2(1+\mu)+|\alpha|(2+\mu)} . \frac{2(1+\mu)+|\alpha|(2+\mu)}{(1+\mu)(2+\mu)} = 1.
\end{aligned}
$$

4) Dans ce cas, nous avons

$$
\begin{aligned}
A &= 2\int_0^1 (1-s)\,k(s)\,ds + |\alpha| \int_0^\eta k(s)\,ds \\
&< \frac{1}{1+|\alpha|\,\eta} \left[2\int_0^1 (1-s)\,ds + |\alpha| \int_0^\eta ds\right] \\
&= \frac{1}{1+|\alpha|\,\eta} (1+|\alpha|\,\eta) = 1
\end{aligned}
$$

5) Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+|\alpha|\eta} - \Lambda\right)$, alors il existe $c > 0$ telle que

$$
|f(t,x)| \leq \left(\frac{1}{1+|\alpha|\,\eta} - \varepsilon\right)|x|, \quad \forall\ (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R} \setminus (-c,c).
$$

Soit

$$
M = \max\{|f(t,x)| : \forall (t,x) \in [0,1] \times [-c,c]\}.
$$

Alors

$$
|f(t,x)| \leq \left(\frac{1}{1+|\alpha|\,\eta} - \varepsilon\right)|x| + M, \qquad \forall (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}.
$$

Soit $k(s) = \frac{1}{1+|\alpha|\eta} - \varepsilon$, $h(s) = M$, alors (5). ■

Exemple 3.2 *Considérons les problèmes à valeurs aux limites en trois points suivants :*

1)

$$\begin{cases} u'' + \frac{2\sqrt{t}u^3}{3+u^4} e^{-\left|\sin\left(u^2-t\right)\right|} + 3e^t - 2\sin t = 0, \quad 0 < t < 1, \\ u'(0) = 0, \qquad u(1) = \sqrt{3}u'\left(\frac{1}{4}\right) \end{cases} \tag{3.2}$$

Soit $\alpha = \sqrt{3}, \eta = \frac{1}{4}$, *alors*

$$f(t,x) = \frac{2\sqrt{t}x^3}{3+x^4} e^{-\left|\sin\left(x^2-t\right)\right|} + 3e^t - 2\sin t,$$

et

$$k(t) = \sqrt{\frac{t}{3}}, \quad h(t) = 3e^t + 2\sin t.$$

Il est facile de prouver que $k,\ h \in L^1[0,1]$ *sont deux fonctions positives et que*

$$f(t,x) \leq k(t)|x| + h(t), \qquad \forall (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}.$$

Soit $p = q = 2$

Alors

$$\int_0^1 k^p(s)\, ds = \int_0^1 \frac{1}{3} s\ ds = \frac{1}{6}$$

$$\left[\frac{(1+q)^{\frac{1}{q}}}{2+|\alpha|\left[\eta(1+q)\right]^{\frac{1}{q}}}\right]^p = \frac{12}{49}.$$

Donc,

$$\int_0^1 k^p(s)\, ds < \left[\frac{(1+q)^{\frac{1}{q}}}{2+|\alpha|\left[\eta(1+q)\right]^{\frac{1}{q}}}\right]^p.$$

Ainsi, d'après le théorème 3.2, avec la condition (1), *le problème aux limites (3.2) a au moins une solution non triviale* u^* *dans* $C[0,1]$.

2) Soit

$$\left\{ \begin{array}{c} u'' + \frac{u^2 e^{-t}}{3(1+u^2)(1+2e^u)\sqrt{t}} + \frac{1}{7\sqrt{t}}u + e^t - \sqrt{t}\cos t = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u'(0) = 0, \quad u(1) = \frac{1}{3}u'\left(\frac{1}{4}\right) \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Soit $\alpha = \frac{1}{3}, \eta = \frac{1}{4}$, *et*

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \frac{x^2 e^{-t}}{3(1+x^2)(1+2e^x)\sqrt{t}} + \frac{1}{7\sqrt{t}}x + e^t - \sqrt{t}\cos t, \\ k(t) &= \frac{1}{6\sqrt{t}} + \frac{1}{7\sqrt{t}}, \qquad h(t) = e^t + \sqrt{t}\cos t. \end{aligned}$$

Il est facile de prouver que $k, h \in L^1[0,1]$ *sont deux fonctions positives et que*

$$f(t,x) \leq k(t)|x| + h(t), \qquad \forall (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}.$$

Soit $\mu = -\frac{1}{2}$.

Alors,

$$\frac{(1+\mu)(2+\mu)}{2 + |\alpha|(2+\mu)\eta^{1+\mu}} = \frac{1}{3}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} k(s) &= \frac{1}{6\sqrt{s}} + \frac{1}{7\sqrt{s}} < \frac{1}{6\sqrt{s}} + \frac{1}{6\sqrt{s}} = \frac{1}{3}s^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{2 + |\alpha|(2+\mu)\eta^{1+\mu}}s^{\mu}, \qquad \forall s \in [0,1], \end{aligned}$$

$$mes\left\{ s \in [0,1] : k(s) < \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{2 + |\alpha|(2+\mu)\eta^{1+\mu}}s^{\mu} \right\} = 1 > 0.$$

Donc par le théorème 3.2, avec la condition (2), *le problème aux limites (3.3) a au moins une solution non triviale* u^* *dans* $C[0,1]$.

3) Soit

$$\begin{cases} u'' + \frac{u^2 e^{-u^2}}{3(1+u^2)\sqrt[4]{1-t}} - 3e^{-t} + \sqrt{\sin t} = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u'(0) = 0, \quad u(1) = -3u'\left(\frac{1}{4}\right) \end{cases} \tag{3.4}$$

Soit $\eta = \frac{1}{4}, \alpha = -3$, *et*

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \frac{x^2 e^{-x^2}}{3(1+x^2)\sqrt[4]{1-t}} - 3e^{-t} + \sqrt{\sin t}, \\ k(t) &= \frac{1}{6\sqrt[4]{1-t}}, \quad h(t) = 3e^{-t} + \sqrt{\sin t}. \end{aligned}$$

Il est facile de prouver que $k, h \in L^1[0,1]$ *sont deu fonctions positives et que*

$$f(t,x) \leq k(t)|x| + h(t), \quad \forall (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R},$$

Soit $\mu = -\frac{1}{4}$.*Alors*

$$\frac{(1+\mu)(2+\mu)}{2(1+\mu) + |\alpha|(2+\mu)} = \frac{7}{36}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} k(s) &= \frac{1}{6\sqrt[4]{1-s}} \\ &< \frac{7}{36\sqrt[4]{1-s}} \\ &= \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{2(1+\mu)+|\alpha|(2+\mu)}(1-s)^{-\frac{1}{4}}, \quad \forall s \in [0,1] \end{aligned}$$

$$mes\left\{s \in [0,1] : k(s) < \frac{(1+u)(2+u)}{2(1+u)+|\alpha|(2+u)}(1-s)^{-\frac{1}{4}}\right\} = 1 > 0.$$

Donc par le théorème 3.2, avec la condition (3), *le problème aux limites (3.4) admet au moins une solution non triviale* u^* *dans* $C[0,1]$.

4) Soit

$$\begin{cases} u'' + \frac{t^2u^2e^{-u^2}}{t^2+u^2} - \cos e^t + 3\sin^2 t = 0, & 0 < t < 1 \\ u'(0) = 0, \quad u(1) = 3u'\left(\frac{1}{3}\right) \end{cases} \tag{3.5}$$

Soit $\eta = \frac{1}{3}$, $\alpha = 3$, *et*

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \frac{t^2x^2e^{-x^2}}{t^2+x^2} - \cos e^t + 3\sin^2 t, \\ k(t) &= \frac{t}{2}, \quad h(t) = \cos e^t + 3\sin^2 t. \end{aligned}$$

Il est facile de prouver que $k,\ h \in L^1[0,1]$ *sont deux fonctions positives et que*

$$f(t,x) \leq k(t)\,|x| + h(t), \quad \forall (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R},$$

et

$$k(s) = \frac{s}{2} \leq \frac{1}{1+|\alpha|\,\eta} = \frac{1}{2}, \quad \forall s \in [0,1]$$

$$mes\left\{ s \in [0,1] : k(s) < \frac{1}{1+|\alpha|\,\eta} \right\} = 1 > 0.$$

Donc, par le théorème 3.2, avec la condition (4), *le problème aux limites (3.5) admet au moins une solution non triviale* $u^* \in C[0,1]$.

Corollaire 3.1 *Supposons que* $f(t,0) \neq 0$. *S'il existe deux fonctions positives* k *et* $h \in L^1[0,1]$ *telle que :*

$$|f(t,x)| \leq k(t)\,|x| + h(t), \quad \forall (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}.$$

Et si l'une des conditions suivantes est satisfaite.

1) Il existe une constante $p > 1$ *telle que*

$$\int_0^1 k^p(s)\,ds < \left[\frac{(1+q)^{\frac{1}{q}}}{2+|\alpha|\,(1+q)^{\frac{1}{q}}}\right]^p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

2) Il existe une constante $\mu > -1$ tel que

$$k(s) \leq \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{2+|\alpha|(2+\mu)} s^{\mu}, \quad \forall s \in [0,1],$$

$$mes\left\{s \in [0,1] : k(s) \leq \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{2+|\alpha|(2+\mu)} s^{\mu}\right\} > 0$$

3) k satisfait

$$k(s) \leq \frac{1}{1+|\alpha|}, \quad \forall s \in [0,1],$$

$$mes\left\{s \in [0,1] : k(s) < \frac{1}{1+|\alpha|}\right\} > 0$$

4) f satisfait

$$\Lambda := \lim_{|x|\to\infty} \sup \max_{t\in[0,1]} \left|\frac{f(t,x)}{x}\right| < \frac{1}{1+|\alpha|}.$$

Alors le (1.1) admet au moins une solution non triviale $u^* \in C[0,1]$.

Preuve. Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^1 (1-s)\,k(s)\,ds + |\alpha| \int_0^{\eta} k(s)\,ds \\ &\leq 2\int_0^1 (1-s)\,k(s)\,ds + |\alpha| \int_0^1 k(s)\,ds. \end{aligned}$$

Le reste de la preuve est simillaire à celle du théorème 3.2. ∎

Corollaire 3.2 *supposons que $f(t,0) \neq 0$. S'il existe deux fonctions positives k et $h \in L^1[0,1]$ telle que*

$$|f(t,x)| \leq k(t)\,|x| + h(t), \quad \forall (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}.$$

Si l'une des conditions suivantes est satisfaite.

1) Il existe une constante $p > 1$ telle que :

$$\int_0^1 k^p(s)\,ds < \left[\frac{1}{2+|\alpha|}\cdot\left(\frac{1+q}{2^{1+q}-1}\right)^{\frac{1}{q}}\right]^p, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

2) Il existe une constante $\mu > -1$ telle que

$$k(s) \leq \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{(2+|\alpha|)(\mu+3)}s^\mu, \quad \forall s \in [0,1],$$

$$mes\left\{s \in [0,1] : k(s) \leq \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{(2+|\alpha|)(\mu+3)}s^\mu\right\} > 0.$$

3) Il existe une constante $\mu > -2$ telle que

$$k(s) \leq \frac{(2+\mu)}{(2+|\alpha|)(2^{2+\mu}-1)}(2-s)^\mu, \quad s \in [0,1],$$

$$meas\left\{s \in [0,1] : k(s) < \frac{(2+\mu)}{(2+|\alpha|)(2^{2+\mu}-1)}(2-s)^\mu\right\} > 0.$$

Alors le problème (1.1) *admet au moins une solution non triviale $u^* \in C[0,1]$.*

Preuve. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^1 (1-s)\,k(s)\,ds + |\alpha| \int_0^\eta k(s)\,ds \\ &\leq 2\int_0^1 (1-s)\,k(s)\,ds + |\alpha| \int_0^1 k(s)\,ds \\ &\leq (2+|\alpha|)\int_0^1 (2-s)\,k(s)\,ds \end{aligned}$$

1) En vertu de l'inégalité de Hölder on a :

$$A \leq (2+|\alpha|)\int_0^1 (2-s)\,k(s)\,ds$$

$$\leq (2+|\alpha|)\left[\int_0^1 k^p(s)\,ds\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1 (2-s)^q\,ds\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$< (2+|\alpha|)\cdot\frac{1}{2+|\alpha|}\left(\frac{1+q}{2^{1+q}-1}\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\frac{2^{1+q}-1}{1+q}\right)^{\frac{1}{q}}=1$$

2) Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned}
A &\leq (2+|\alpha|)\int_0^1 (2-s)\,k(s)\,ds \\
&\leq (2+|\alpha|)\cdot\frac{(1+\mu)(2+\mu)}{(2+|\alpha|)(\mu+3)}\int_0^1 (2-s)\,s^{\mu}ds \\
&= \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{\mu+3}\cdot\frac{\mu+3}{(1+\mu)(2+\mu)}=1
\end{aligned}$$

3) Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
A &\leq (2+|\alpha|)\int_0^1 (2-s)\,k(s)\,ds \\
&< (2+|\alpha|)\cdot\frac{(2+\mu)}{(2+|\alpha|)(2^{2+\mu}-1)}\int_0^1 (2-s)^{1+\mu}\,ds \\
&= \frac{2+\mu}{2^{2+\mu}-1}\cdot\frac{2^{2+\mu}-1}{2+\mu}=1
\end{aligned}$$

■

Bibliographie

[1] H.Brézis, Analyse Fonctionnelle,Théorie et Applications, Masson Paris1983.

[2] S.D.CHatterji, Cours d'analyse. Equations différentielles ordinaires et aux dérivée partielles, 1998.

[3] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, 1985.

[4] A. Granas, J. Dugundji. Fixed point theory, Springer, Monographs in mathematics, 1985.

[5] A. Kolmogrov, S. Fomine. Elements de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Mir. 1977.

[6] D. R. Smart, Fixed Point Theorems, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.

[7] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications I, Fixed-Point Theorems, Springer-Verlag, Berlin, (1986).

[8] Y. Ping Sun, Non trivial Solution For a Three Point Boundary Value Problem. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2004 (2004), No. 111, pp. 1-10.