République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques Appliquées**

Par :

M^{lle}. Aboudi Imene

Intitulé

Sur quelques inégalités intégrales a deux variables indépendants aux échelles de temps et leurs applications

Dirigé par :

Dr. Boukerrioua Khaled

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Lakhal fahim	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Boukerrioua khaled	Univ- Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Aissaoui Fatima	Univ-Guelma

Session Juin 2016

Remerciements

C'est avec un grand plaisir que je réserve ces lignes en signe de gratitude et de reconnaissance à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Ma reconnaissance, et mes sincères remerciements vont à mon encadreur le docteur ***Boukerrioua khaled*** *pour m'avoir dirigé tout au long de la réalisation de ce travail. Ses orientations, ses encouragements, sa compréhension, sa disponibilité constante m'ont été d'une précieuse aide.*

Je tiens également à remercier le jury d'avoir pris une partie de leur temps et de leur acceptation examen mon travail.

Il m'aurait été impossible de réaliser ce travail sans lesoutien de ma famille, en particulier mon père et mon frère qui m'a donné l'aide et m'a soutenu chaque fois que je besoin de lui

J'adresse également mes remerciements envers mes amis et Mes collègues pour leur soutien.

Enfin, je dédie ce travail à celle qui m'a soutenu avec toute sa tendresse et son affection ma mère, que dieu la bénisse.

Table des matières

0.1 Introduction

Les inégalités jouent un rôle important dans diverses branches de mathématiques modernes telles que la théorie des espaces de Hilbert, des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique, ainsi que la théorie qualitative des équations différentielles et des équations aux différences,... etc. Elles sont un outil puissant et indispensable.

Le fondement mathématique de cette théorie a été établi en partie au cours de $18^{ème}$ et $19^{ème}$ siècles par d'éminents mathématiciens tels que : Gauss, Cauchy, Chebyshev dans les années qui suivirent, le sujet attira encore plus de chercheurs : Poincaré, Lyapunov, Gronwall, Hölder, Hadamard, Pólya, Bellman et Ostrowski. La littérature, dans ce contexte, est très vaste. Parmi les ouvrages descriptifs de l'évolution historique des inégalités, nous pouvons consulter : Pachpatte [16].

Cette théorie ne cesse d'évoluer dans plusieurs directions et dans différents axes. Des nouvelles inégalités ont été établies, des généralisations, des raffinements, des extensions ainsi que des variantes, unidimensionnelles, multidimensionnelles, fractionnaires et discrètes. La plus célèbre parmi ces inégalités est sans doute celle de Gronwall. La théorie des inégalités intégrales joue un rôle important dans l'étude des équations différentielles et intégro-différentielles, les applications dans ce domaine ont été développées d'une façon très remarquables au cours de ces dernières années dans l'étude de l'existence, l'unicité, la dépendance continue de la solution par rapport aux données initiales, l'existence globale, la stabilité de la solution et l'erreur d'estimation dans les problèmes d'approximation. La littérature dans ce sens est très riche et connaît une croissance explosive en théorie et aux applications, pour plus de détails on peut consulter le livre de Pachpatte [2, 3, 6, 7, 8, 9, 16, 17].

Il s'avère que l'utilisation des inégalités intégrales donne des bornes explicites pour les fonctions inconnues. Pour ces raisons l'introduction des inégalités intégrales dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles est indispensable.

Le but de ce travail est de développer un résultat obtenu dans [15] autour de l'étude qualitative des solutions des équations dynamique partielles aux échelles de temps.

Une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un sous ensemble fermé non vide de $\mathbb{R}$. Par exemple, les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et l'ensemble triadique de Cantor sont des échelles de temps. On sous-entend que la topologie de $\mathbb{T}$ est induite par celle de $\mathbb{R}$. La théorie des équations dynamiques aux échelles de temps a été introduite en 1988 par Stefan Hilger [12, 13] dans sa thèse de doctorat où il a notamment définie la Δ-dérivée de la façon suivante.

Définition 0.1 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$, f est dite $\Delta-$différentiable en t s'il existe un vecteur $f^\Delta(t) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage U de t tel que*

$$\left\| f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s) \right\| \le \epsilon \mid \sigma(t) - s \mid,$$

pour tout $s \in U$. On appelle $f^\Delta(t)$ la $\Delta-$dérivée de f en t. Si f est $\Delta-$différentiable en t pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, alors $f^\Delta : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^n$ est dite la $\Delta-$dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

Ici, $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$, $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ et

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T}/\,]\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}] & \text{si} \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & \text{si} \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases}$$

C'est à partir de cette définition qu'ont été introduites les équations aux échelles de temps qui ont la même forme qu'une équation différentielle à l'exception que par exemple, dans une équation du premier ordre, la dérivée d'une fonction x (x') est remplacée par la Δ-dérivée (x^Δ) de cette fonction. Nous verrons plus loin dans le texte que si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la Δ-dérivée équivaut à la dérivée au sens classique et les équations aux échelles de temps deviennent des équations différentielles. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, les équations aux échelles de temps deviennent des équations aux différences finies, pour plus de détails, on peut consulter les deux livres [4, 5]. D'ailleurs, l'intérêt pour ce dernier type d'équations a connu un essor considérable au cours des dernières années pour expliquer plusieurs phénomènes discrets notamment en économie, psychologie et génie. La théorie des équations aux échelles de temps vient dans un premier temps unifier ce qui peut être fait dans les domaines des équations différentielles et les équations aux différences finies. En travaillant sous l'angle d'une échelle de temps générale, il est possible de faire progresser simultanément ces deux champs des mathématiques. Dans un deuxième temps, la théorie développée autour des échelles de temps permet l'étude de phénomènes se modélisant d'une façon qui fait appel simultanément au discret et au continu. Ainsi, une équation définie sur une échelle de temps de la forme $\cup_{n=0}^{n=\infty}[2n, 2n+1]$ est très utile pour décrire des phénomènes saisonniers. Par exemple, ce pourrait être pour l'étude d'une population d'insectes qui après un certain temps disparaît, pour réapparaître ultérieurement après avoir été pendant un certain temps sous forme de larve.

Ce travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, on commence par rappeler brièvement quelques notions générales concernant les échelles de temps avec exemples. Ensuite nous présentons quelques résultats préliminaires qui nous seront utiles dans le prochain chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous développons les résultats du travail [15] basés sur l'établissement des inégalités intégrales aux échelles de temps de type Gronwall- Bihari qui sont très utiles dans l'estimation des solutions des équations dynamiques.

Enfin, on termine le chapitre par l'exposition d'une application de ces inégalités intégrales aux équations dynamiques.

Chapitre 1

Notation et préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions, exemples et théorèmes très utiles pour le deuxième chapitre. Nous signalons que les résultats suivants sont tirés du livre [4, 5] .

Définition 1.1 *Une échelle de temps* $\mathbb{T}$ *est un sous ensemble fermé non vide de* $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1 *Les ensembles* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, [0,1] \cup [2,3], [0,1] \cup \mathbb{N}$ *et l'ensemble de cantor sont des échelles de temps.*

Exemple 1.2 *Les ensembles* $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \mathbb{C}, (0,1)$ *ne sont pas des échelles de temps.*

Remarque 1.1 *La topologie de* $\mathbb{T}$ *est induite par celle de* $\mathbb{R}$.

1.1 Operateur de saut

Définition 1.2 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps, pour* $t \in \mathbb{T}$, *on définit l'opérateur de saut avant* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$

$$\sigma(t) = \inf \{ s \in \mathbb{T} : s > t \} . \tag{1.1}$$

Définition 1.3 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, pour $t \in \mathbb{T}$, on définit l'opérateur de saut arrière $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$*

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}. \tag{1.2}$$

Remarque 1.2 *Par convention, on supposera que $\sigma(t) = t$ si t est le maximum de $\mathbb{T}$, et que $\rho(t) = t$ si t est le minimum de $\mathbb{T}$.*

1.2 Classification des points

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, t un point de $\mathbb{T}$.

Définition 1.4 *On dit que t est un point dense à droite de $\mathbb{T}$, $t < \sup \mathbb{T}$ (resp. un point t dense à gauche de $\mathbb{T}$) si $\sigma(t) = t$ (resp. $\rho(t) = t$).*

Définition 1.5 *On dit que t est un point dense s'il est simultanément dense à droite et à gauche.*

Définition 1.6 *On dit que t est un point dispersé à droite de $\mathbb{T}$ (resp. un point dispersé à gauche de $\mathbb{T}$) si $\sigma(t) > t$ (resp. $\rho(t) < t$).*

Définition 1.7 *On dit que t est un point isolé s'il est simultanément dispersé à droite et à gauche.*

Définition 1.8 *Nous définissons les fonctions de granulation $\mu, \nu : \mathbb{T} \to [0, \infty[$ par :*

$$\mu(t) = \sigma(t) - t \text{ et } \nu(t) = t - \rho(t). \tag{1.3}$$

Maintenant, nous présentons quelques exemples concernant le calcul de l'opérateur de saut avant et arrière :

Exemple 1.3 *Soit* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

on a

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t, \\ \rho(t) &= t, \end{aligned}$$

donc tous les points de $\mathbb{R}$ *sont denses. Les fonctions de granulation* μ, ν *valles :* $\mu(t) = 0$ *et* $\nu(t) = 0$.

Exemple 1.4 *Soit* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, *pour tout* $t \in \mathbb{Z}$, *on a*

$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf\{t+1, t+2, \ldots\ldots\} = t+1, \rho(t) = t-1,$

ainsi tous les points de $\mathbb{Z}$ *sont isolés. Les fonctions de granulation* μ, ν *valles :* $\mu(t) = 1$ *et* $\nu(t) = 1$.

Exemple 1.5 *Soit* $\mathbb{T} = [0,1] \cup [2,3]$ *on a :*

$$\sigma(t) = \begin{cases} t \text{ si } t \in [0,1[\cup [2,3] \\ 2 \text{ si } t = 1 \end{cases},$$

et

$$\rho(t) = \begin{cases} t \text{ si } t \in [0,1] \cup]2,3] \\ 1 \text{ si } t = 2 \end{cases}.$$

Ainsi

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \subset [0,1[\cup [2,3] \\ 1 \text{ si } t = 1 \end{cases},$$

et

$$\nu(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t \in [0,1] \cup]2,3] \\ 1 \ si \ t = 2 \end{cases}.$$

On définit maintenant l'ensemble $\mathbb{T}^{\mathrm{k}}$.

Définition 1.9 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps*

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T}\backslash\,]\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}] & si \ \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & si \ \sup \mathbb{T} = \infty \end{cases}.$$

Remarque 1.3 *Si le maximum de $\mathbb{T}$ est dispersé à gauche, alors on pose $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}\backslash \sup \mathbb{T}$. Sinon, par convention $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.*

Définition 1.10 *Pour deux points $a, b \in \mathbb{T}$, l'intervalle d'échelle de temps est définie par :*

$$[a,b]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} \ : a \leq t \leq b\}.$$

1.3 $\Delta-$Dérivée

Définition 1.11 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$, une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$, f est dit $\Delta-$différentiable en t s'il existe un vecteur $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$,il existe un voisinage U de t tel que*

$$\left\| f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right\| \leq \varepsilon \left| \sigma(t) - s \right|,$$

pour tout $s \in U$. On appelle $f^{\Delta}(t)$ la $\Delta-$dérivée de f en t. Si f est $\Delta-$différentiable en t pour tout $t \in \mathbb{T}$, alors $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^n$ est dite la $\Delta-$dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

Théorème 1.1 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $t \in \mathbb{T}$.*

(i)Si f est $\Delta-$différentiable en t, alors f est continue en t.

(ii)Si f est continue en t et si t est dispersé à droite, alors f est $\Delta-$différentiable en t, de plus on a :

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}. \tag{1.4}$$

(iii) Si t est dense à droite, alors f est $\Delta-$ différentiable en t si et seulement si

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

existe et est finie.

Dans ce cas on a :

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

(iv) Si f est différentiable en t, alors :

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t). \tag{1.5}$$

Maintenant, on donne quelques exemples concernant le calcul de la $\Delta-$dérivée.

Exemple 1.6 *Considérons la fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t^2$ où $\mathbb{T} = \left\{\frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}_0\right\}$.*

Comme $t \in \mathbb{T}$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : t = \frac{n_0}{2}$.

Ainsi

$$\sigma(t) = \frac{n_0 + 1}{2},$$

et comme

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t},$$

alors

$$
\begin{aligned}
f^{\Delta}(t) &= \frac{\left(\dfrac{n_0+1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{n_0}{2}\right)^2}{\dfrac{n_0+1}{2} + \dfrac{n_0}{2}} \\
&= \frac{n_0+1}{2} + \frac{n_0}{2} \\
&= \frac{2n_0}{2} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

D'où

$$f^{\Delta}(t) = 2t + \frac{1}{2}.$$

Exemple 1.7 *Considérons la fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t^2$ où $\mathbb{T} = \{\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}_0\}$.*

Pour tout $t \in \mathbb{T}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : t = \sqrt{n_0}$, et donc

$$\sigma(t) = \sqrt{n_0+1},$$

comme

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t},$$

alors

$$
\begin{aligned}
f^{\Delta}(t) &= \frac{\left(\sqrt{n_0+1}\right)^2 - \left(\sqrt{n_0}\right)^2}{\sqrt{n_0+1} - \sqrt{n_0}}. \\
&= \sqrt{n_0+1} + \sqrt{n_0}.
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$f^{\Delta}(t) = \sqrt{t^2+1} + t.$$

Remarque 1.4 *Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors d'après (iii) du théorème précédent la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\Delta-$ différentiable en $t \in \mathbb{R}$ ssi :*

$$f'(t) = \lim_{t \to s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

existe et de plus $f^{\Delta}(t) = f'(t)$.

Remarque 1.5 *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *d'après (ii) la fonction* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *est* $\Delta-$*différentiable en* $t \in \mathbb{Z}$ *et on a*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t).$$

Théorème 1.2 *Si* $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *sont* $\Delta-$*différentiables en* $t \in \mathbb{T}^k$, *alors :*

(i) $f + g$ *est* $\Delta-$*différentiable en* t *de plus*

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

(ii) (αf) *est* $\Delta-$*différentiable en* t *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et on a*

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

(iii) fg *est* $\Delta-$*différentiables en* t *et on a*

$$\begin{aligned} (fg)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t)\, g(t) + f(\sigma(t))\, g^{\Delta}(t) \\ &= f(t)\, g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)\, g(\sigma(t)). \end{aligned}$$

(iv) *Si* $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$, *alors* $\dfrac{f}{g}$ *est* $\Delta-$*différentiable en* t *on a*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)\, g(t) - f(t)\, g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

Définition 1.13 *Une fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *est dit rd continue si elle est continue en tout point dense à droite de* $\mathbb{T}$ *et si sa limite à gauche existe et finie en tout point dense à gauche de* $\mathbb{T}$.

Remarque 1.6 *L'ensemble de toutes les fonctions rd-continues est noté par* C_{rd} *ou* $C_{rd}(\mathbb{T})$.

Remarque 1.7 *L'ensemble de toutes les fonctions* $\Delta-$*différentiables et rd-continues est noté par* C_{rd}^1 *ou* $C_{rd}^1(\mathbb{T})$.

Théorème 1.3 *Toute fonction rd-continue* $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ *admet une primitive* $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *et on note*

$$\int_s^r f(t)\,\Delta t = F(r) - F(s) \text{ pour tout } r, s \in \mathbb{T},$$

de plus

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\,\Delta\tau = \mu(t)\,f(t),\, t \in \mathbb{T}^k.$$

Preuve. On pose $F^{\Delta}(t) = f(t)$ alors

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\,\Delta\tau = F(\sigma(t)) - F(t),$$

on a :

$$F^{\Delta}(t) = \frac{F(\sigma(t)) - F(t)}{\mu(t)},$$

d'où

$$F(\sigma(t)) - F(t) = F^{\Delta}(t)\,\mu(t) \Rightarrow \int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\,\Delta\tau = f(t)\,\mu(t).$$

■

Théorème 1.4 *Soient* $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $f, g \in C_{rd}(\mathbb{T}^k)$ *alors* :

$$
\begin{aligned}
\int_a^b [f(t)+g(t)]\,\Delta t &= \int_a^b f(t)\,\Delta t + \int_a^b g(t)\,\Delta t, \qquad (1.6)\\
\int_a^b (\lambda f(t))\,\Delta t &= \lambda \int_a^b f(t)\,\Delta t,\\
\int_a^b f(t)\,\Delta t &= -\int_b^a f(t)\,\Delta t,\\
\int_a^b f(t)\,\Delta t &= \int_a^c f(t)\,\Delta t + \int_c^b f(t)\,\Delta t.\\
\int_a^a f(t)\,\Delta t &= 0.
\end{aligned}
$$

Si

$$|f(t)| \leq g(t)$$

sur $[a,b]_{\mathbb{T}^k}$, *alors*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\,\Delta t.$$

Proposition 1.1 *Pour* $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ *on a*

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Proposition 1.2 *Pour* $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ *on a*

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) \;\; si\ a<b \\ 0 \;\; si\ a=b \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t) \;\; si\ a>b \end{cases}.$$

Preuve. Comme $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$, $a<b$ on a $\sigma(t)=t+1$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,\Delta t &= \int_a^{a+1} f(t)\,\Delta t + \int_{a+1}^{a+2} f(t)\,\Delta t + \ldots + \int_{b-1}^{b} f(t)\,\Delta t \\
&= \int_a^{\sigma(a)} f(t)\,\Delta t + \int_{a+1}^{\sigma(a+1)} f(t)\,\Delta t + \ldots + \int_{b-1}^{\sigma(b-1)} f(t)\,\Delta t \\
&= \mu(a) f(a) + \mu(a+1) f(a+1) + \cdots + \mu(b-1) f(b-1),
\end{aligned}$$

comme $\mu(t) = 1$, on obtient

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \sum_{t \in [a,b[} f(t).$$

De la même manière on montre le cas $a > b$.

Le cas $a = b$ est induit directement des propriétés (1.6) du théorème précédent on a :

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^a f(t)\,\Delta t = 0.$$

■

Proposition 1.3 *Si $[a,b]$ contient des points isolés alors :*

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b[} \mu(t) f(t) \ \ si\ a < b \\ 0 \ \ si\ a = b \\ \sum_{t\in[a,b[} \mu(t) f(t) \ \ si\ a > b. \end{cases}$$

Preuve. On suppose que $[a,b]$ contient uniquement des points isolés, c'est-à-dire $[a,b] = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$. Autrement dit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

D'après le théorème précédent on a :

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,\Delta t &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_i+1} f(t)\,\Delta t = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{\sigma(t_i)} f(t)\,\Delta t \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\mu(t_i)\, f(t_i) = \sum_{t\in[a,b[}\mu(t)\, f(t).
\end{aligned}
$$

Pour le cas $a = b$ on a :

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = 0,$$

par contre dans le cas $b < a$ on obtient

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = -\int_b^a f(t)\,\Delta t.$$

■

1.3.1 $\Delta-$Intégration par partie

Proposition 1.4

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f^{\sigma}(t)\, g^{\Delta}(t)\,\Delta t &= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^{\Delta}(t)\, g(t)\,\Delta t, \\
\int_a^b f(t)\, g^{\Delta}(t)\,\Delta t &= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^{\Delta}(t)\, g^{\sigma}(t)\,\Delta t.
\end{aligned}
$$

Preuve. D'après les propriétés de la dérivée on a

$$(fg)^{\Delta}(t) = f(\sigma(t))\, g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)\, g(t),$$

d'où

$$f(\sigma(t))\, g^{\Delta}(t) = (fg)^{\Delta}(t) - f^{\Delta}(t)\, g(t), \tag{1.7}$$

intégrons les deux membres de l'égalité (1.7) entre a et b, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\sigma(t))\, g^{\Delta}(t)\, \Delta t &= \int_a^b (fg)^{\Delta}(t)\, \Delta t - \int_a^b f^{\Delta}(t)\, g(t)\, \Delta t \\ &= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^{\Delta}(t)\, g(t)\, \Delta t.\end{aligned}$$

■

Définition 1.13 *Soit $p : \mathbb{T}^k \longrightarrow \mathbb{R}$, p est dit régressive si elle vérifie :*

$$1 + \mu(t)\, p(t) \neq 0.$$

Remarque 1.8 *Pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, l'ensemble des fonctions régressives et rd-continues est noté par $\Re$.*

Définition 1.14 *L'ensemble de toutes les fonctions régressives positives est définie par :*

$$\Re^{+} = \left\{p \in \Re : 1 + \mu(t)\, p(t) > 0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}^{K}\right\}. \tag{1.8}$$

Définition 1.15 *Pour $h > 0$, on définit la transformation cylindrique :*

$\xi_h : \mathbb{C}_h \rightarrow \mathbb{Z}_h$, par :

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h}\log(1 + zh),$$

où log *est le logarithme principale,*

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_h &= \left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < \operatorname{Im}(z) \leq \frac{\pi}{h}\right\}, \\ \mathbb{C}_h &= \left\{z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{1}{h}\right\}.\end{aligned}$$

Pour $h = 0$, on définit : $\xi_0(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Théorème 1.5 *On suppose que $p \in \Re$ et $t_0 \in \mathbb{T}$ un point fixé, alors le problème à valeur initiale*

$$y^{\Delta}(t) = p(t)\, y(t), y(t_0) = 1, \tag{1.9}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{T}$, donnée par

$$y(t) = e_p(t, t_0),$$

avec

$$e_p(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right).$$

Remarque 1.9 *Il est clair que*

$$e_p(\sigma(t), t_0) = (1 + \mu(t)\, p(t))\, e_p(t, t_0). \tag{1.10}$$

Remarque 1.10 *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la fonction exponentielle est donnée par :*

$$e_p(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, \Delta\tau\right)$$

où $t, t_0 \in \mathbb{R}$ et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Remarque 1.11 *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, la fonction exponentielle est donnée par :*

$$e_p(t, t_0) = \prod_{\tau=t_0}^{\tau=t} [1 + p(\tau)],$$

où $t, t_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 < t$ et, $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est une suite vérifie

$$p(t) \neq -1 \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Théorème 1.6 *Soit $a \in \mathbb{T}^k$, $b \in \mathbb{T}$ et $L : \mathbb{T} \times \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ est continue en (t, t), pour $t \in \mathbb{T}^k$, $t > a$ et $L^{\Delta}(t, .)$ est rd-continue dans $[a, \sigma(t)]$, on suppose que pour tout $\varepsilon > 0, \exists U$, un voisinage de t indépendant de $\tau \in [a, \sigma(t)]$ tel que :*

$$\left|L(\sigma(t),\tau)-L(s,\tau)-L^{\Delta}(t,\tau)(\sigma(t)-s)\right|\leq\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|,\qquad\forall s\in U.$$

Où f^{Δ} dénote la dérivée de f par rapport à la $1^{ière}$ variable alors on a :

$$g(t)=\int_a^t L(t,\tau)\,\Delta\tau\Rightarrow g^{\Delta}(t)=\int_a^t L^{\Delta}(t,\tau)\,\Delta\tau+L(\sigma(t),\tau),$$

et

$$h(t)=\int_t^b L(t,\tau)\,\Delta\tau\Rightarrow h^{\Delta}(t)=\int_t^b L^{\Delta}(t,\tau)\,\Delta\tau-L(\sigma(t),\tau).$$

Preuve. On a

$$g(t)=\int_a^t L(t,\tau)\,\Delta\tau,\quad g^{\Delta}(t)=\frac{g(\sigma(t))-g(t)}{\mu(t)},$$

ce qui donne

$$g^{\Delta}(t)=\frac{1}{\mu(t)}\int_a^{\sigma(t)} L(\sigma(t),\tau)\,\Delta\tau-\frac{1}{\mu(t)}\int_a^t L(t,\tau)\,\Delta\tau. \tag{1.11}$$

D'autre part on a :

$$L^{\Delta}(t,\tau)=\frac{L(\sigma(t),\tau)-L(t,\tau)}{\mu(t)},$$

d'où

$$L(\sigma(t),\tau)=\mu(t)\,L^{\Delta}(t,\tau)+L(t,\tau). \tag{1.12}$$

Remplaçons (1.12) dans l'équation (1.11), on obtient

$$\begin{aligned}
g^{\Delta}(t) &= \int_a^{\sigma(t)} \left(L(t,\tau) + \frac{L(t,\tau)}{\mu(t)} \right) \Delta\tau - \frac{1}{\mu(t)} \int_a^t L(t,\tau)\, \Delta\tau \\
&= \int_a^{\sigma(t)} L(t,\tau)\, \Delta\tau + \int_a^{\sigma(t)} \frac{L(t,\tau)}{\mu(t)} \Delta\tau + \int_t^a \frac{L(t,\tau)}{\mu(t)} \Delta\tau \\
&= \int_a^t L^{\Delta}(t,\tau)\, \Delta\tau + \int_a^{\sigma(t)} L^{\Delta}(t,\tau) + \frac{1}{\mu(t)} \int_t^{\sigma(t)} L(t,\tau)\, \Delta\tau,
\end{aligned}$$

et comme

$$\int_t^{\sigma(t)} L(\tau)\, \Delta\tau = \mu(t)\, L(t),$$

donc on a

$$g^{\Delta}(t) = \int_a^t L^{\Delta}(t,\tau)\, \Delta\tau + \mu(t)\, L^{\Delta}(t,t) + L(t,t),$$

ainsi

$$g^{\Delta}(t) = \int_a^t L^{\Delta}(t,\tau)\, \Delta\tau + L(\sigma(t),\tau). \tag{1.13}$$

■

1.4 Quelques inégalités importantes

Dans cette section, nous présentons quelques lemmes et définitions utiles dans le deuxième chapitre .

On commence par citer le Lemme suivant qui joue un rôle important dans l'estimation optimal des inégalités intégrales.

Lemme 1.1 [14] *On suppose que $p \geq q \geq 0$, $p \neq 0$ $a \geq 0$. Alors*

$$a^{\frac{q}{p}} \leq \frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} a + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}. \tag{1.14}$$

Pour chaque $K > 0$.

Deux classes de fonctions intervenant dans l'etablissemen des inégalités de type Pachepatte-Bihari données par les deux définitions suivantes :

Définition 1.16 [1]*Soit g une fonction continue positive et non décroissante définie sur $\mathbb{R}^+$, g est dite de classe $\mathcal{S}$, si elle vérifie*

$$\frac{1}{a}g(x) \leq g(\frac{x}{a}) \quad \text{pour tout } x \geq 0 \text{ et } a \geq 1. \tag{1.15}$$

Remarque 1.12 *Pour une brève discussion sur cette classe S de fonctions, le lecteur est invité à consulter $[1, Sect.4]$.*

Définition 1.17 *Soit g une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}^+$, g est dite de classe $\mathcal{T}$, si elle vérifie*

$$\frac{1}{a}g(x) \geq g(\frac{x}{a}) \quad \text{pour tout } x \geq 0 \text{ et } a \geq 1. \tag{1.16}$$

Un résultat considéré comme un outil de base dans l'étude des inégalités de type Pachepatte est donné par le lemme suivant :

Lemme 1.2 [10]*Soient $u(t_1,t_2), a(t_1,t_2), f\ (t_1,t_2) \in C\left(\overline{\mathbb{T}}_1 \times \overline{\mathbb{T}}_2, \mathbb{R}_0^+\right)$ où $a(t_1,t_2)$ est une fonction non décroissante par rapport a chacune de ces variables. Si*

$$u(t_1,t_2) \leq a(t_1,t_2) + \int_{a_1}^{t_1}\int_{a_2}^{t_2} f(s_1,s_2)\,u(s_1,s_2)\,\Delta_1 s_1 \Delta_2 s_2 \tag{1.17}$$

pour $(a_1,a_2), (t_1,t_2) \in \overline{\mathbb{T}}_1 \times \overline{\mathbb{T}}_2$, alors

$$u(t_1,t_2) \leq a(t_1,t_2)\, c_{\int_{a2}^{t_2} f(t_1,s_2)\ \Delta_2 s_2}(t_1,a_1), \qquad (t_1,t_2) \in \overline{\mathbb{T}}_1 \times \overline{\mathbb{T}}_2 \tag{1.18}$$

où $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ sont deux échelles de temps et $\overline{\mathbb{T}}_1 = [a_1,\infty) \cap \mathbb{T}_1$, $\overline{\mathbb{T}}_2 = [a_2,\infty) \cap \mathbb{T}_2$.

Chapitre 2

Sur quelques Inégalités intégrales à deux variables de type Pachpatte-Bihari

Dans ce chapitre nous énoncons avec bref détails les résultats du travail [15].

Théorème 2.1 *Soient $u(x,y)$, $f(x,y)$ des fonctions non négatives et continues en tout point dense à droite sur Ω et $L(x,y,t,s) \in C_{rd}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^+)$. c, p, q, $r \in \mathbb{R}_0^+$ vérifiant $p \geq q > 0$, $p \geq r > 0$. Si*

$$u^p(x,y) \leq c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t) \left[u^q(s,t) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) u^r(\tau,\eta) \Delta_2\eta \Delta_1\tau \right] \Delta_2 t \Delta_1 s \ , \quad (2.1)$$

et satisfaite pour tout $(x,y) \in \Omega$, alors

$$u(x,y) \leq \left\{ P(x,y) e_{\int_{y_0}^{y} Q(\tau,\eta)\ \Delta_2\eta}(x,x_0) \right\}^{\frac{1}{p}} , \quad (2.2)$$

où

$$P(x,y) = c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}} + \tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s, \quad (2.3)$$

$$Q(s,t) = f(s,t)\left[\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} + \tfrac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right], \quad (2.4)$$

et $K > 0$.

Preuve. Définissons la fonction $z(x,y)$ par

$$z(x,y) = c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[u^q(s,t) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)u^r(\tau,\eta)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s, \quad (2.5)$$

nous avons

$$z(x_0,y) = z(x,y_0) = c,$$

et

$$u^p(x,y) \leq z(x,y), \quad (2.6)$$

cette dernière inégalité donne

$$u(x,y) \leq z^{\frac{1}{p}}(x,y), \quad (2.7)$$

substituons (2.7) dans (2.5), nous obtenons

$$z(x,y) \leq c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[z^{\frac{q}{p}}(s,t) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)z^{\frac{r}{p}}(\tau,\eta)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s. \quad (2.8)$$

Appliquons le Lemme 1.3, l'inégalité (2.8) devient

$$z(x,y) \leq c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t) \left[\frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} z(s,t) + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}} \right. \tag{2.9}$$

$$\left. + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) \left(\frac{r}{p} K^{\frac{r-p}{p}} z(\tau,\eta) + \frac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}} \right) \Delta_2\eta\Delta_1\tau \right] \Delta_2 t\Delta_1 s,$$

Réécrivons (2.9), sous la forme suivante

$$\begin{aligned} z(x,y) \quad \leq \quad & c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t) \left[\frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}} + \frac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}} \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)\Delta_2\eta\Delta_1\tau \right] \Delta_2 t\Delta_1 s \\ & + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)z(s,t) \left[\frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} + \frac{r}{p} K^{\frac{r-p}{p}} \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)\Delta_2\eta\Delta_1\tau \right] \Delta_2 t\Delta_1 s, \end{aligned} \tag{2.10}$$

substituons (2.3) et (2.4) dans (2.10), nous obtenons

$$z(x,y) \leq P(x,y) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} Q(s,t)z(s,t)\Delta_2 t\Delta_1 s, \tag{2.11}$$

Appliquons le Théorème 1.7 à cette dernière inégalité , nous trouvons

$$z(x,y) \leq P(x,y)e_{\int_{y_0}^{y} Q(s,t)\Delta_2 t}(x,x_0)\,. \tag{2.12}$$

Le résultat souhaité découle des inégalités (2.7) et (2.12). ■

Théorème 2.2 *Soient $u(x,y)$, $f(x,y)$ et $a(x,y)$ des fonctions non négatives et continues en tout point dense à droite sur Ω, et soit $L(x,y,t,s) \in C_{rd}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^{+})$, $a(x,y)$ est non décroissante par rapport à chacune de ses variables et p, q, $r \in \mathbb{R}_0^+$ telle que $p \geq q > 0$,*

$p \geq r > 0$. *Si l'inégalité*

$$u^p(x,y) \leq a^p(x,y) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t) \left[u^q(s,t) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) u^r(\tau,\eta) \Delta_2\eta \Delta_1\tau \right] \Delta_2 t \Delta_1 s \ , \tag{2.13}$$

est satisfaite pout tout $(x,y) \in \Omega$, *alors*

$$u(x,y) \leq a(x,y) \left\{ P(x,y) e_{\int_{y_0}^{y} Q(\tau,\eta)\ \Delta_2\eta} (x,x_0) \right\}^{\frac{1}{p}} , \tag{2.14}$$

où

$$P\,(x,y) = \ 1 + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} F(s,t) \left[\tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}} + \tfrac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}} \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} H(s,t,\tau,\eta) \Delta_2\eta \Delta_1\tau \right] \Delta_2 t \Delta_1 s, \tag{2.15}$$

$$Q(s,t) = F(s,t) \left[\tfrac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} + \tfrac{r}{p} K^{\frac{r-p}{p}} \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} H(s,t,\tau,\eta) \Delta_2\eta \Delta_1\tau \right] , \tag{2.16}$$

$$F(s,t) = f\ (s,t) a^{q-p}(s,t), \tag{2.17}$$

$$H\,(s,t,\tau,\eta) = L(s,t,\tau,\eta) a^{r-q}(\tau,\eta), \tag{2.18}$$

et $K > 0$.

Preuve. Divisons les deux membres de (2.13) par $a^p(x,y)$, nous obtenons

$$\frac{u^p(x,y)}{a^p(x,y)} \leq 1 + \frac{1}{a^p(x,y)} \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t) \left[u^q(s,t) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) u^r(\tau,\eta) \Delta_2\eta \Delta_1\tau \right] \Delta_2 t \Delta_1 s, \tag{2.19}$$

comme $a(x,y)$ est non décroissante pour chacune de ces variables, (2.19) donne

$$\left(\frac{u(x,y)}{a(x,y)}\right)^p \leq 1 + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[\frac{u^q(s,t)}{a^p(s,t)} + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)\frac{u^r(\tau,\eta)}{a^p(\tau,\eta)}\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s. \quad (2.20)$$

Posons

$$w(x,y) = \frac{u(x,y)}{a(x,y)}, \quad (2.21)$$

substituons (2.21) dans (2.20), nous obtenons

$$w^p(x,y) \leq 1 + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)a^{q-p}(s,t)\left[w^q(s,t) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)a^{r-q}(\tau,\eta)w^r(\tau,\eta)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s. \quad (2.22)$$

Remplaçons (2.17) et (2.18) dans (2.22), cette dernière inégalité devient

$$w^p(x,y) \leq 1 + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} F(s,t)\left[w^q(s,t) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} H(s,t,\tau,\eta)w^r(\tau,\eta)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s. \quad (2.23)$$

(2.23) est similaire à (2.1), en vertu du Théorème 1.7 , nous obtenons

$$w(x,y) \leq \left\{P(x,y)e_{\int_{y_0}^{y} Q(\tau,\eta)\,\Delta_2\eta}(x,x_0)\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (2.24)$$

où P et Q sont données par (2.15) et (2.16) respectivement. Le résultat désiré découle de la combinaison entre (2.21) et (2.24). Ce qui achève la preuve. ■

2.1 Inégalités intégrales de type Pachpatte-Bihari

Dans cette section, nous présentons quelques inégalités intégrales de type Pachepatte-Bihari où nous introduisons les fonctions croissantes et les fonctions de classes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$.

Théorème 2.3 *Soient $u(x,y)$ et $f(x,y)$ deux fonctions non négatives et continues en tout point dense à droite sur Ω, $c \in \mathbb{R}_0^+$ et $L(x,y,t,s) \in C_{rd}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^+)$. $\varphi(x)$ et $g(x)$ deux fonctions continues est non décroissantes, satisfaisant $\varphi(x) > 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Si l'inégalité*

$$\varphi(u(x,y)) \leq c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t) \left[g(u(s,t)) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) g(u(\tau,\eta)) \Delta_2\eta\Delta_1\tau \right] \Delta_2 t\Delta_1 s \,, \tag{2.25}$$

est satisfaite pout tout $(x,y) \in \Omega$, alors

$$u(x,y) \leq \varphi^{-1}\left(G^{-1}\left(G(c) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t) \left[1 + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)\, \Delta_2\eta\Delta_1\tau \right] \Delta_2 t\Delta_1 s \right)\right), \tag{2.26}$$

où G est solution de

$$G^{\Delta_2 y\Delta_1 x}(z(x,y)) = \frac{z^{\Delta_2 y\Delta_1 x}(x,y)}{g\left(\varphi^{-1}(z(x,y))\right)}, \quad (x,y) \in \Omega. \tag{2.27}$$

G^{-1}, φ^{-1}sont les fonctions inverses de G, φ respectivement et

$$\left\{ G(c) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t) \left[1 + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)\, \Delta_2\eta\Delta_1\tau \right] \Delta_2 t\Delta_1 s \right\} \in Dom\left(G^{-1}\right).$$

Preuve. Définissons la fonction $z(x,y)$ par

$$z(x,y) = c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t) \left[g\left(u(s,t)\right) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) g\left(u(\tau,\eta)\right) \Delta_2\eta\Delta_1\tau \right] \Delta_2 t\Delta_1 s, \tag{2.28}$$

donc

$$z(x_0,y) = z(x,y_0) = z(x_0,y_0) = c \tag{2.29}$$

et

$$\varphi\left(u(x,y)\right) \leq z(x,y), \tag{2.30}$$

d'où

$$u(x,y) \leq \varphi^{-1}\left(z(x,y)\right), \tag{2.31}$$

remplaçons (2.31) dans (2.25), nous obtenons

$$z(x,y) \leq c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t) \ \left[g(\varphi^{-1}(z(s,t))) \right.$$

$$\left. + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) g\left(\varphi^{-1}\left(z(\tau,\eta)\right)\right) \Delta_2\eta\Delta_1\tau \right] \Delta_2 t\Delta_1 s. \tag{2.32}$$

Une double dérivation de l'inégalité (2.32) par rapport à x et y, donne

$$\begin{aligned} z^{\Delta_2 y\Delta_1 x}(x,y) \ &\leq \ f(x,y) \ \left[g(\varphi^{-1}(z(x,y))) \right. \\ &\left. + \int_{s_0}^{x}\int_{t_0}^{y} L(x,y,\tau,\eta) g\left(\varphi^{-1}\left(z(\tau,\eta)\right)\right) \Delta_2\eta\Delta_1\tau \right]. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Comme φ et q sont croissantes, (2.33) devient

$$z^{\Delta_2 y\Delta_1 x}(x,y) \leq f(x,y) g(\varphi^{-1}(z(x,y))) \left[1 + \int_{s_0}^{x}\int_{t_0}^{y} L(x,y,\tau,\eta)\Delta_2\eta\Delta_1\tau \right], \tag{2.34}$$

divisons les deux membres de (2.34) par $g(\varphi^{-1}(z(x,y)))$, nous trouvons

$$\frac{z^{\Delta_2 y\Delta_1 x}(x,y)}{g(\varphi^{-1}(z(x,y)))} \leq f(x,y) \left[1+\int_{s_0}^{x}\int_{t_0}^{y} L(x,y,\tau,\eta)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right] \Delta_2 t\Delta_1 s, \tag{2.35}$$

l'égalité (2.27), nous permet de réécrire (2.35) sous la forme suivante

$$G^{\Delta_2 y\Delta_1 x}(z(x,y)) \leq f(x,y) \left[1+\int_{s_0}^{x}\int_{t_0}^{y} L(x,y,\tau,\eta)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right] \Delta_2 t\Delta_1 s. \tag{2.36}$$

Remplaçons dans cette dernière inégalité x par s et y par t, puis intégrons les deux membres de l'inégalité résultante par rapport à t et s sur $[x_0,x]\times[y_0,y]$, nous obtenons

$$G\ (z(x,y)) - G\ (c) \leq \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[1+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)\ \Delta_2\eta\Delta_1\tau\right] \Delta_2 t\Delta_1 s. \tag{2.37}$$

Ainsi (2.37) entraîne

$$z(x,y) \leq G^{-1}\left(G(c)\ + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[1+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)\ \Delta_2\eta\Delta_1\tau\right] \Delta_2 t\Delta_1 s\right). \tag{2.38}$$

Substituons (2.38) dans (2.30), nous obtenons l'inégalité désirée. Ce qui achève la preuve.

■

Corollaire 2.1 *Soient $u(x,y)$ et $f(x,y)$ deux fonctions non négatives et continues en tout point dense à droite sur Ω. $c\in\mathbb{R}_0^+$ et $L(x,y,t,s)\in C_{rd}(\Omega\times\Omega,\mathbb{R}^+)$. $g(x)$ une fonction continue et non décroissante vérifiant $g(x)>0$ pour tout $x>0$. Si l'inégalité*

$$u(x,y) \leq c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[g\left(u(s,t)\right) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) g\left(u(\tau,\eta)\right) \Delta_2\eta\Delta_1\tau\right] \Delta_2 t\Delta_1 s\ , \tag{2.39}$$

est satisfaite pout tout $(x,y)\in\Omega$*, alors*

$$u(x,y)\leq G^{-1}\left(G(c)\ +\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}f(s,t)\left[1+\int\limits_{s_0}^{s}\int\limits_{t_0}^{t}L(s,t,\tau,\eta)\ \Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2t\Delta_1s\right)\tag{2.40}$$

où G *est solution de (2.27),* G^{-1} *l'inverse de* G *et*

$$\left\{G(c)\ +\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}f(s,t)\left[1+\int\limits_{s_0}^{s}\int\limits_{t_0}^{t}L(s,t,\tau,\eta)\ \Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2t\Delta_1s\right\}\in Dom\,(G^{-1}).$$

Corollaire 2.2 *Soient* $u(x,y)$ *et* $f(x,y)$ *deux fonctions non négatives et continues en tout point dense à droite sur* Ω*,* $c\in\mathbb{R}_0^+$ *et* $L(x,y,t,s)\in C_{rd}\,(\Omega\times\Omega,\mathbb{R}^+)$*.* $\varphi(x)$ *une fonction continue et non décroissante vérifiant* $\varphi(x)>0$ *pour tout* $x>0$*. Si l'inégalité*

$$\varphi\left(u(x,y)\right)\leq c+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}f(s,t)\ \left[u(s,t)+\int\limits_{s_0}^{s}\int\limits_{t_0}^{t}L(s,t,\tau,\eta)u(\tau,\eta)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2t\Delta_1s\ ,\tag{2.41}$$

est satisfaite pout tout $(x,y)\in\Omega$*, alors*

$$u(x,y)\leq\varphi^{-1}\left(G^{-1}\left(G(c)\ +\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}f(s,t)\left[1+\int\limits_{s_0}^{s}\int\limits_{t_0}^{t}L(s,t,\tau,\eta)\ \Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2t\Delta_1s\right)\right),\tag{2.42}$$

où G *est solution de (2.27), dont l'inverse est noté par* G^{-1} *et l'inverse de* φ *par* φ^{-1} *de plus*

$$\left\{G(c)\ +\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}f(s,t)\left[1+\int\limits_{s_0}^{s}\int\limits_{t_0}^{t}L(s,t,\tau,\eta)\ \Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2t\Delta_1s\right\}\in Dom\left(G^{-1}\right).$$

Théorème 2.4 *Soient* $u(x,y)$*,* $f(x,y)$ *et* $a(x,y)$ *des fonctions non négatives et continues en tout point dense à droite sur* Ω*.* $L(x,y,t,s)\in C_{rd}\,(\Omega\times\Omega,\mathbb{R}^+)$*,* $a(x,y)$ *est non décroissante pour chacune de ses variables,* $g(x)$ *une fonction continue et non décrois-*

sante vérifiant la condition (1.15) de plus $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Si l'inégalité

$$u(x,y) \leq a(x,y)+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t) \left[g\left(u(s,t)\right) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) g\left(u(\tau,\eta)\right) \Delta_2\eta\Delta_1\tau\right] \Delta_2 t\Delta_1 s \ , \tag{2.43}$$

est satisfaite pout tout $(x,y) \in \Omega$, alors

$$\begin{aligned} u(x,y) \ &\leq \ \max\left\{1, a(x,y)\right\} \\ &\times G^{-1}\left(G(1) \ + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[1+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) \ \Delta_2\eta\Delta_1\tau\right] \Delta_2 t\Delta_1 s\right), \end{aligned} \tag{2.44}$$

où G est solution de

$$G^{\Delta_2 y\Delta_1 x}(z(x,y)) = \frac{z^{\Delta_2 y\Delta_1 x}(x,y)}{g(z(x,y))}, \ (x,y) \in \Omega. \tag{2.45}$$

G^{-1}la fonction inverse de G et

$$\left\{G(1) \ + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[1+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) \ \Delta_2\eta\Delta_1\tau\right] \Delta_2 t\Delta_1 s\right\} \in Dom\left(G^{-1}\right).$$

Preuve. Posons

$$b(x,y) = \max\left\{1, a(x,y)\right\}, \tag{2.46}$$

(2.46) nous permet d'écrire (2.43), comme suit

$$\begin{aligned} u(x,y) \ &< \ b(x,y) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[\ g\left(u(s,t)\right)\right. \\ &\left. + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) g\left(u(\tau,\eta)\right) \Delta_2\eta\Delta_1\tau\right] \Delta_2 t\Delta_1 s \ , \end{aligned} \tag{2.47}$$

Divisons les deux membres de (2.47) par $b(x,y)$, nous trouvons

$$\frac{u(x,y)}{b(x,y)} \leq 1 + \frac{1}{b(x,y)} \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} f(s,t) \left[g(u(s,t)) + \int_{s_0}^{s} \int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) g(u(\tau,\eta)) \Delta_2\eta \Delta_1\tau \right] \Delta_2 t \Delta_1 s,$$

g étant non décroissante pour chacune de ses variables, (2.48) donne

$$\frac{u(x,y)}{b(x,y)} \leq 1 + \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} f(s,t) \left[\frac{1}{b(s,t)} g(u(s,t)) + \int_{s_0}^{s} \int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) \frac{1}{b(\tau,\eta)} g(u(\tau,\eta)) \Delta_2\eta \Delta_1\tau \right] \Delta_2 t \Delta_1 s, \quad (2.49)$$

comme g est de classe $\mathcal{S}$, (2.49) devient

$$\frac{u(x,y)}{b(x,y)} \leq 1 + \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} f(s,t) \left[g\left(\frac{u(s,t)}{b(s,t)}\right) + \int_{s_0}^{s} \int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) g\left(\frac{u(\tau,\eta)}{b(\tau,\eta)}\right) \Delta_2\eta \Delta_1\tau \right] \Delta_2 t \Delta_1 s. \quad (2.50)$$

Posons

$$w(x,y) = \frac{u(x,y)}{b(x,y)}, \quad (2.51)$$

la substitution de (2.51) dans (2.50), entraîne

$$w(x,y) \leq 1 + \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} f(s,t) \left[g(w(s,t)) + \int_{s_0}^{s} \int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) g(w(\tau,\eta)) \Delta_2\eta \Delta_1\tau \right] \Delta_2 t \Delta_1 s. \quad (2.52)$$

(2.52) étant similaire à (2.43), l'application du Corollaire 2.1, donne

$$w(x,y) \leq G^{-1}\left(G(1) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[1+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)\ \Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s\right). \quad (2.53)$$

Combinons (2.53), (2.51) et (2.46), nous obtenons l'inégalité demandé. Ce qui achève la preuve. ■

Théorème 2.5 *Soient $u(x,y)$, $f(x,y)$ et $a(x,y)$ des fonctions non négatives et continues en tout point dense à droite sur Ω, $c \in \mathbb{R}_0^+$, $L(x,y,t,s) \in C_{rd}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^+)$ et $a(x,y)$ est non décroissante pour chacune de ses variables, $\varphi(x)$ une fonction continue et non décroissante vérifiant la condition (1.16) de plus $\varphi(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Si l'inégalité*

$$\varphi(u(x,y)) \leq a(x,y) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[u(s,t) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)u(s,t)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s, \quad (2.54)$$

est satisfaite pout tout $(x,y) \in \Omega$, alors

$$\begin{aligned} u(x,y) \leq\ & \max\{1, a(x,y)\} \times \varphi^{-1}\Big(G^{-1}\Big(G(1) \\ & + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[1+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)\ \Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s\Big)\Big), \end{aligned} \quad (2.55)$$

où G est solution de

$$G^{\Delta_2 y\Delta_1 x}(z(x,y)) = \frac{z^{\Delta_2 y\Delta_1 x}(x,y)}{\varphi^{-1}(z(x,y))}, \quad (x,y) \in \Omega. \quad (2.56)$$

G^{-1}, φ^{-1} sont les fonctions inverses de G et φ respectivement et $\left\{G(1) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[1+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)\ \Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s\right\} \in Dom(G^{-1})$.

Preuve. Posons

$$b(x,y) = \max\{1, a(x,y)\}. \quad (2.57)$$

(2.57) permet d'écrire (2.54), sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\varphi\left(u(x,y)\right) \;\leq\; & b(x,y) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t) \\ & \times \left[u(s,t) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)u(s,t)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s\ , \qquad (2.58)\end{aligned}$$

divisons les deux membres de (2.58) par $b(x,y)$, nous obtenons

$$\frac{\varphi\left(u(x,y)\right)}{b(x,y)} \leq 1 + \frac{1}{b(x,y)}\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\ \left[u(s,t) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)u(s,t)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s, \tag{2.59}$$

$b(x,y)$ étant non décroissante pour chacune de ses variables, (2.59) devient,

$$\frac{\varphi\left(u(x,y)\right)}{b(x,y)} \leq 1 + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\ \left[\frac{u(s,t)}{b(s,t)} + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)\frac{u(\tau,\eta)}{b(\tau,\eta)}\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s, \tag{2.60}$$

comme φ est de classe $\mathcal{T}$, (2.60) devient

$$\varphi\left(\frac{u(x,y)}{b(x,y)}\right) \leq 1 + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\ \left[\frac{u(s,t)}{b(s,t)} + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)\frac{u(\tau,\eta)}{b(\tau,\eta)}\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s. \tag{2.61}$$

Considérons la fonction

$$w(x,y) = \frac{u(x,y)}{b(x,y)}. \tag{2.62}$$

Substitution (2.62) dans (2.61), nous trouvons

$$\varphi\left(w(x,y)\right) \leq 1 + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\ \left[w(s,t) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)w(\tau,\eta)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s. \tag{2.63}$$

(2.63) étant similaire à (2.54), appliquons le Corollaire 2.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} w(x,y) &\leq \varphi^{-1}\left(G^{-1}\left(G(1)\right.\right. \\ &\left.\left. + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[1+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)\ \Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s\right)\right). \quad (2.64)\end{aligned}$$

Le résultat désiré découle des inégalités (2.64), (2.62) et (2.57). La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.6 *Soient $u(x,y)$, $f(x,y)$ et $a(x,y)$ des fonctions non négatives et continues en tout point dense à droite sur Ω, $c \in \mathbb{R}_0^+$, $L(x,y,t,s) \in C_{rd}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^+)$ et $a(x,y)$ est non décroissante pour chacune de ses variables. $\varphi(x)$, $g(x)$ sont des fonctions continues et non décroissantes, $\varphi(x)$ satisfait la condition (1.12)et $g(x)$ satisfait la condition (1.11) de plus $\varphi(x) > 0$, $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Si l'inégalité*

$$\begin{aligned} \varphi(u(x,y)) &\leq a(x,y) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[g(u(s,t))\right. \\ &\left. + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) g(u(\tau,\eta))\,\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s, \quad (2.65)\end{aligned}$$

est satisfaite pout tout $(x,y) \in \Omega$, alors

$$\begin{aligned} u(x,y) &\leq \max\{1, a(x,y)\} \times \varphi^{-1}\left(G^{-1}\left(G(1)\right.\right. \\ &\left.\left. + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[1+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)\ \Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s\right)\right), \quad (2.66)\end{aligned}$$

où G est solution de (2.56). G^{-1}, φ^{-1} sont les fonctions inverses de G, φ respectivement et

$$\left\{G(c) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[1+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)\ \Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s\right\} \in Dom\left(G^{-1}\right).$$

Preuve. Posons

$$b(x,y)=\max\{1,a(x,y)\}. \tag{2.67}$$

(2.67) permet d'écrire (2.65), comme suit

$$\begin{aligned}\varphi\left(u(x,y)\right) &\leq b(x,y)+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[g\left(u(s,t)\right)\right.\\ &\left.+\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} L(s,t,\tau,\eta)g\left(u(\tau,\eta)\right)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s,\end{aligned} \tag{2.68}$$

divisons les deux membres de (2.68) par $b(x,y)$, nous trouvons

$$\begin{aligned}\frac{\varphi\left(u(x,y)\right)}{b(x,y)} &\leq 1+\frac{1}{b(x,y)}\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\ \left[g\left(u(s,t)\right)\right.\\ &\left.+\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} L(s,t,\tau,\eta)g\left(u(\tau,\eta)\right)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s,\end{aligned} \tag{2.69}$$

$b(x,y)$ étant non décroissante pour chacune de ses variables, (2.69) donne

$$\frac{\varphi\left(u(x,y)\right)}{b(x,y)}\leq 1+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\ \left[\frac{g\left(u(s,t)\right)}{b(s,t)}+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)\frac{g\left(u(\tau,\eta)\right)}{b(\tau,\eta)}\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s, \tag{2.70}$$

comme φ, g sont de classe $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ respectivement, (2.70) devient

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{u(x,y)}{b(x,y)}\right) &\leq 1+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\ \left[g\left(\frac{u(s,t)}{b(s,t)}\right)\right.\\ &\left.+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta)g\left(\frac{u(\tau,\eta)}{b(\tau,\eta)}\right)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 t\Delta_1 s.\end{aligned} \tag{2.71}$$

Posons

$$w(x,y) = \frac{u(x,y)}{b(x,y)}. \tag{2.72}$$

Substituons (2.72) dans (2.71), nous obtenons

$$\begin{aligned}\varphi\left(w(x,y)\right) \quad &\leq \quad 1 + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t) \ \left[g\left(w(s,t)\right) \right. \\ &\left. + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) g(w(\tau,\eta)) \Delta_2\eta\Delta_1\tau \right] \Delta_2 t \Delta_1 s, \end{aligned} \tag{2.73}$$

(2.73) étant similaire à (2.56), le Théorème 2.5 , assure

$$w(x,y) \leq \varphi^{-1}\left(G^{-1}\left(G(1) \ + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[1 + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) \ \Delta_2\eta\Delta_1\tau\right] \Delta_2 t\Delta_1 s\right)\right). \tag{2.74}$$

Le résultat désiré découle des inégalités (2.74), (2.72) et (2.67). La preuve est ainsi achevée. ■

2.2 Application

Dans cette section nous allons illustrer le résultat obtebu dans le Théorème 2.1 par une application à un type d'équation aux dérivées partielles.

Exemple 2.1 *Considérons l'équation aux dérivées partielles suivante sur l'échelle de temps* $\Omega = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$

$$(u^p(x,y))^{\Delta_2 y \Delta_1 x} = F(x, y, u^q(x,y), \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} h(s,t,\tau,\eta,u(\tau,\eta)) \Delta\eta\Delta\tau), \tag{2.75}$$

satisfaisant aux conditions initiales suivantes :

$$u(x,y_0)=\alpha(x),\ \ u(x_0,y)=\beta(y),\ \ \alpha(0)=\beta(0)=0. \tag{2.76}$$

où $u\in C_{rd}(\Omega,\mathbb{R})$, $h\in C_{rd}(\Omega\times\Omega\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* $F\in C_{rd}(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$. *supposons que*

$$\begin{aligned}
|h(x,y,s,t,u(s,t)| &\leq L(x,y,s,t)\,|u(s,t)|^r,\\
|F(x,y,u,v)| &\leq f(x,y)(|u|+|v|),\\
|\alpha(x)+\beta(y)| &\leq c,
\end{aligned} \tag{2.77}$$

où L, f, c, p, q *et* r *sont définies comme dans le Théorème 2.1.*

Dans ce qui suit, nous supposerons que le problème $(2.75)-(2.76)$ a une solution unique, que nous noterons $u_*(x,y)$.

Proposition 2.1 *Toute solution* $u(x,y)$ *du problème* $(2.75)-(2.76)$, *peut être estimé de la façon suivante*

$$u_*(x,y)\leq\left\{P(x,y)e_{\int_{y_0}^{y}Q(\tau,\eta)\,\Delta\eta}(x,x_0)\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{2.78}$$

où $P(x,y)$, $Q(x,y)$ *sont données par (2.51)-(2.52) respectivement.*

Preuve. La solution $u(x,y)$ verifie l'équation suivante

$$u_*^p(x,y)=\alpha(x)+\beta(y)+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}F(s,t,u_*^q(s,t),\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t}h(s,t,\tau,\eta,u_*(\tau,\eta))\Delta_2\eta\Delta_1\tau)\Delta_2t\Delta_1s, \tag{2.79}$$

les inégalités (2.77), nous permet de réécrire (2.79) comme suit

$$|u_*^p(x,y)|\leq c+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}f(t,s)(|u_*^q(t,s)|+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t}L(s,t,\tau,\eta)\,|u_*(\tau,\eta)|^r\,\Delta_2\eta\Delta_1\tau)\Delta_2t\Delta_1s. \tag{2.80}$$

Ainsi l'application du Théorème 2.1, à l'inégalité (2.80) nous permet d'aboutir à (2.78).

■

Conclusion 2.1 *Les inégalités traitées dans ce mémoire, nous permet d'étudier certaines classes d'équation différentielle non linéaire dont la solution ne peut être trouvé explicitement. Ces inégalités intégrales non linéaires à deux variables indépendantes, nous permettent d'établir les propriétés qualitatives les plus importantes des solutions des équations dynamiques partielles telle que l'estimation.*

Bibliographie

[1] **P. R. Beesack**, On some Gronwall-type integral inequalities in n independent variables, J. Math. Anal. Appl. 100 (1984), no. 2, 393–408.

[2] **B. Ben Nasser, K. Boukerrioua, and M. A. Hammami**, On the stability of perturbed time scale systems using integral inequalities. Appl. Sci. 16 (2014), 56–71.

[3] **B. Ben Nasser, K. Boukerrioua, and M. A. Hammami**, On stability and stabilization of perturbed time scale systems with Gronwall inequalities. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 11(3) (2015), 207-235.

[4] **M.Bohner, and A.Peterson,** Dynamic Equations on Time Scales : An Introduction with Applications,Birkhäuser, Boston, Mass, USA, 2001.

[5] **M.Bohner, and A.Peterson**, Eds., Advances in Dynamic Equations on Time Scales,Birkhäuser, Boston,Mass, USA, 2003.

[6] **K.Boukerrioua, and A.Guezane-Lakoud**, Some nonlinear integral inequalities arising in differential equations. Electronic Journal of Differential Equations, 2008.

[7] **K.Boukerrioua**, Note on Some Nonlinear Integral Inequalities and Applications to Differential Equations. International Journal of Differential Equations, 2011.

[8] **K.Boukerrioua**, Note on some nonlinear integral inequalities in two independent variables on time scales and applications. Int. J. Open Problems Comput. Math, 5(3) (2012).

[9] **K.Boukerrioua**, Note on some nonlinear integral inequalities on time scales and applications to dynamic equations. Journal of Advanced Research in Applied Mathematics, 5(2)(2013)..

[10] **R. A. Ferreira and D. F. Torres**, Some linear and nonlinear integral inequalities on time scales in two independent variables. Nonlinear Dyn. Syst. Theory 9 (2009), no. 2, 161–169.

[11] **Hugues Gilbert**, Thèse de doctorat,Théorèmes d'existence pour des systèmes d'équations différentielles et d'équations aux échelles de temps,2009.

[12] **S.Hilger**,Ein Ma β kettenkalk¨ ul mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, PhD thesis, Universität. Würzburg (1988).

[13] **S.Hilger**, Analysis on measure chains–a unified approach to continuous and discrete calculus,Results Math., 18 (1990), 18–56.

[14] **W.N.Li,M.A .Han, F. W. Meng**, some new delay integral inequalities and their applications.J. Comput. Appl. Math.180(2005)191-200.

[15] **B. Meftah and K. Boukerrioua**, On some nonlinear integral inequalities in two independent variables on time scales and their applications. J. Adv. Res. Dyn. Control Syst. 7 (2015), no. 3, 119–133.

[16] **B.G.Pachpatte**, Inequalities for Differential and integral equation, Academic Press, New York, 1998.

[17] **Wei Nian Li**, Nonlinear Integral Inequalities in Two Independent Variables on Time Scales,Advances in Difference Equations,Volume 2011, Article ID 283926, 11 pages.