République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématique

Option : **Mathématique Appliquée**

Par :

M^{lle} : Athamnia Razika

Intitulé

Sur un problème fractionnaire à coefficient opérationnel

Dirigé par : Dr.Chaoui Abderrezak

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr.Guebbai Hamza**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr.Chaoui Abderrezak**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr.Badraoui Salah**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2016

Remerciement

Par ce travail qui restera toujours notre compensation pour nos longues années d'études.

Jeremercie :

« Dieu »*pour son aide et sa bénédiction, je tiens en particulier à exprimer notre profonde gratitude à mon encadreur* ***« Dr Chaoui Abderrezak »****,pour nous avoir guider à l'élaboration de ce travail avec ces conseils, sescritiques et ses encouragements.*

Je remercie monsieur les membres du jury ***: Guebbai Hamza, Badraoui Salah****pour la caution qu'ils ont bien voulu apporter à ce travail et à qui nous devons notre profond respect et notre très haute considération.*

J'adress mes chaleureux remerciements à toute personne qui a participé directement et indirectement pour la cueillette de ce fruit.

Enfin, nous remercions tout membre du département Mathématique de l'université 08Mai 1945 Guelma.

Dédicace

Je remercie mon dieu qui m'a donné le courage, la volonté ainsi la santé pour que je puisse réussir dans ma vie.

Je dédie ce modeste travail comme signe de remerciement et reconnaissance sur tout.

*A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, **à mon père.***

*A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur**, à ma mère**que j'adore.*

A mon chère frère :Yacin

A mes sœurs : Hayette,Naima, Amel

A toute mes amies surtout : Fayrouze ,Aziza ,Selma .

Table des matières

Résumé

Notre travail a pour objet d'étudier le problème fractionnaire à coefficient opérationnel,et de présenter quelques notions et lemmes concernant ce thème dans une forme plus simple,pour le comprendre aussi pour préciser l'importance de la méthode de Rothe qui est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles.

Mots clés :équation de diffusion fractionnaire intégro-différentielle,solution faible, problème discret .

Introduction

Il existe nombreuses méthodes de résolution d'équations aux dérivées partielles ,l'une des ces méthodes est dite : la méthode de Rothe où discrétisation en temps,ou les dérivées par rapport à une variable sont remplacés par des quotients de différence qui conduisent finalement à des systèmes d'équations différentielles.

Cette méthode a été présenté par Rothe en 1930 pour des équations linéaires paraboliques du second ordre unidimensionnelles,cette méthode a été adoptée par Ladyzhenskaja,pour des problèmes paraboliques linéaires et quasi-linéaires de seconde ordre et les équations linéaires d'ordre supérieurs .

La méthode de discrétisation en temps c'est averé un outil théorique et numérique efficace dans l'étude des problèmes d'évolutions.

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'application de la méthode de Rothe pour prouver l'existence et l'unicité de la solution approchée d'une équation fractionnaire intégro-différentielle, à savoir les conditions initiales et les conditions de Dirichlet sur le bord avec l'opérateur intégral de Volterra (où l'opérateur mémoire) qui peut modéliser beaucoup des phénoménes physiques.

le contenu de ce mémoire comprend :

le $1^{ère}$ chapitre : contient quelques notions de bases et définitions élémentaires d'analyse fonctionnelle et fractionnaire qui seront utiles dans la suite.

le $2^{ème}$ chapitre :on présente le problème qu'on va étudier et son schéma de discrétisation ,nous construisons une solution numérique du problème discrétisé et nous tirons quelques estimations a priori pour les approximations, pour obtenir quelques résultats de convergence .

Le dernier chapitre :qui contient notre résultat principale est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité d'une solution faible.

Chapitre 1

Rappels

Ce chapitre contient quelques notions d'analyse fonctionnelle et du calcul fractionnaire qu'on va utiliser ultérieurement .

1.1 Espace de Banach

Tout epace vectoriel normé complet est appellé espace de Banach.

1.2 Espace de Lebesgue

Soit : p un élément de $[1. +\infty[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$,on appelle espace de Lebesgue et on note $L^p(\Omega)$,l'espace vectoriel des fonctions numériques u de Ω dans $\mathbb{C}$.Lebesgue mesurables vérifiant :

1) Si :$1 \leq p < +\infty \quad \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty$

2) Si : $p = +\infty \qquad \sup\limits_{x \in \Omega} |u(x)| < +\infty$

Où :

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf \{M \quad |u(x)| \leq M \quad \text{p.p}\}$$

Quelques propriétés :

a) L'application de $L^P(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^+$:

$$u \to \begin{cases} \|u\|_p & = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty\right) \ , 1 \leq p < +\infty \\ \|u\|_\infty & = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \qquad ,p = +\infty \end{cases}$$

définit une norme sur $L^P(\Omega)$,norme par laquelle $L^P(\Omega)$ est un espace de Banach.

b) Dual,pour toute réel p dans $[1, +\infty[$,le dual de $L^P(\Omega)$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à $L^q(\Omega)$,avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, l'application de dualité est définit par :

$$\begin{array}{ll} L^P(\Omega) \times L^q(\Omega) & \to \mathbb{C} \\ (u, v) & \to \int_\Omega u(x)v(x)dx \end{array}$$

pour tout reél p dans $[1, +\infty[$, le bidual de $L^P(\Omega)$ s'identifie algébriquement et topologiquement à $L^P(\Omega)$.

On dit que l'espace $L^P(\Omega)$ est réflexif.

1.3 Espace de Hilbert

Soit : V un ev sur $\mathbb{R}$

Définition 1.3.1 ***(produit scalaire) :***

On appelle produit scalaire dans un espace vectoriel V une forme bilinéaire symétrique définie positive sur V notée :$(.,.)$ $v \times v \to \mathbb{R}$.

et vérifiant les trois propriétés suivantes :

(i) symétrie :$\forall v, w \in V, (v, w)_v = (w, v)_v$

(ii) positivité :$\forall v \in V, (v, v)_v \geq 0$

(iii) $(w, v)_v - 0 \leftrightarrow v - 0$.

Remarque 1.3.1

Un produit scalaire sur V définit une norme sur V par la formule suivante :

$$\|x\|_v = \sqrt{< x, x >}$$

Définition 1.3.2 *(l'espace de Hilbert)*

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (donc normé),et complet pour la norme induite .

Un espace de Hilbert est donc un cas particulier d'espace de Banach (la norme est définie à partir d'un produit scalaire)

Définition 1.3.3 *(l'espace $L^2(\Omega)$)*

On note par :$L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions de carrée sommable sur Ω , où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ c'est-à-dire :

$\left\{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ mésurable tq} : \int_\Omega \ |f(x)|^2 < \infty\right\}$muni du produit scalaire :

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert .

1.4 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduit pour résoudre un bon nombore de problèmes

concernant les équations aux dérivées partielles.

Soit : $k \in \mathbb{N}$,$1 \leq p \leq +\infty$

On définit l'espace de Sobolev $W^{p,k}(\Omega)$ par :

$$W^{p,k}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \text{ existe et } D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$$

On munit l'espace de Sobolev par une structure d'espace normé dont les normes sont définies par :

$$\begin{aligned} \|f\|_{W^{p,k}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha f\ (x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} && 1 \leq p \leq +\infty \\ \|f\|_{W^{p,\infty}(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha f\ (x)| && p = +\infty \end{aligned}$$

Nous nous limetrons aux espaces les plus utiles.

On suppose l'ouvert Ω bornée.

1.4.1 L'espace $H^1(\Omega)$

On appelle : espace de Sobolev d'ordre 1 : $H^1(\Omega)$ sur Ω , le sous espace fonctionnelle linéaire défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2, 1 \leq i \leq n \right\}$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est formé des fonctions $u \in L^2$ dont le gradient s'identifie a une fonction de L^2.

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire noté :$(u, v)_{1.\Omega}$

$$(u, v)_{1.\Omega} = \int_{\Omega} (u.v + \nabla u.\nabla v)$$

la norme correspondante sera noté :

$$\|u\|_{1.\Omega} = \left((u, u)_{1.\Omega} \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.4.2 L'espace $H_0^1(\Omega)$

Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est un sous espace de $H^1(\Omega)$ qui représenté les fonctions de $H^1(\Omega)$ qui sont nulles sur la frontière ,et qui sera très utile pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet .

Alors $H_0^1(\Omega)$ est donnée par :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

1.5 Espace de Boschner

1. $\mathbb{C}(I, L^2(\Omega)) = \{ f : I \to L^2(\Omega)$ qui associé à $t \to f(t) \in L^2(\Omega)$ continue$\}$muni de la norme :

$$\|f\|_{\mathbb{C}(I,L^2(\Omega))} = \max_{t \in I} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

2. $L^2(I, V) = \{ f : I \to V$ qui associé à $t \to f(t) \in V\}$ muni du produit scalaire :

$$(f,g)_{L^2(I,V)} = \int\limits_I (f,g)_V dt$$

où V est un espace de Hilbert et on le muni de la norme :

$$\|f\|^2_{L^2(I,v)} = \int\limits_\Omega \|f\|^2_v dt$$

en particulier ici :
$L^2(I, L^2(\Omega)) = \{f : I \to L^2(\Omega)$ à carée intégrable $\}$ munit de la norme :

$$\|f\|^2_{L^2(I,v)} = \int\limits_\Omega \|f\|^2_v dt < \infty$$

1.6 Convergence Faible

Définition 1.6.1

Soit : E un espace de Banach .
(x_n) converge faiblement dans E vers x si l'on a :

$\lim\limits_{n\to\infty} \langle x', x_n\rangle = \langle x', x\rangle \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \langle x', x_n - x\rangle = 0, \forall x' \in E'$.
avec E' l'espace dual de E .
Notation :
On notera $x_n \rightharpoonup x$,ou $x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x$ pour être précis , la convergence faible dans E.
On notera de même $x_n \to x$,ou $x_n \xrightarrow{E} x$ pour être précis ,la convergence forte dans E (c'est-à-dire . la convergence en norme).
1. Si : $x_n \to x$ fortement $(\|x_n - x\|_E \to 0) \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$ car :
$\forall x' \in E'$. $\langle x', x_n - x\rangle \leq \|x'\| \|x_n - x\| \to 0$
2. Si : $\dim E = n < \infty$ on a équivalence de deux notions.
En effet :
$m \geq 1, x^m = (x_1^m, x_2^m, ..., x_n^m)$,
$\dim E' = n, \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ base de E
$\Rightarrow \{e_j^*\}_{j=1}^n$base dual tq :

$$e^*_{j_{(e_i)}} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$x^m \rightharpoonup x = (x_1, x_2, ..., x_n) \Rightarrow \forall i = 1, ..., n, x' = e^*_i$

$\langle e^*_i, x^m - x \rangle = x^m_i - x_i \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x^m_i - x_i| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$

alors :$\|x^m - x\|_1 \to 0$,ce qui donne $\|x^m - x\|_1 \to 0$ car tout les normes de E sont quivalentes.

Proposition 1.6.1

Soit E un espace de Banach .Si $x_n \rightharpoonup x$ dans E ,alors la suite $\{\|x_n\|\}$ est bornée et

$$\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$$

Remarque 1.6.1

la convergence faible n'implique pas la convergence forte .On pourra considérer une suite orthonormée dans un espace de Hilbert de dimension infinie puis montrer qu'elle converge faiblement vers 0 ,mais que l'on ne peut extraire aucune sous-suite fortement convergente.

Le théorème suivante joue un rôle fondamental dans l'étude des problèmes variationnels.

Théorème 1.6.1 *(de compacité faible dans un espace de Hilbert)*

H un espace de Hilbert , si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de H , alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite faiblement convergente.

1.7 Espace dual

Si :E un espace vectoriel normé sur $K = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$,le dual de E est l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{k})$ des formes linéaires continues sur $\mathbb{k}$,on le note E'et on munit E' de la norme subordonneé à la norme de E.

1.8 Quelques Inégalités utilisées

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

1.8.1 L'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$\forall u, v \in L^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u.v dx \right| &\leq \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ \left| \int_\Omega \sum_{i=1}^n u_i.v_i dx \right| &\leq \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n u_i dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n v_i dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

1.8.2 L'$\varepsilon-$inégalité :

$$|xy| \leq \frac{\varepsilon}{2} x^2 + \frac{1}{2\varepsilon} y^2 \quad \forall \varepsilon \geq 0, \forall x, y$$

1.8.3 L'inégalité de Gronwall :

a) Le cas continu :
Si pour tout $t \geq t_0$ on a :
1. $u(t)$ et $v(t)$ deux fonctions condition et $u(t) \geq 0, v(t) \geq 0$
2. $u(t) \leq k + \int_{t_0}^t u(s) v(s) ds, \quad k > 0.$

Alors :

$$u(t) \leq k \exp \int_{t_0}^t V(s) ds, t \geq t_0$$

Preuve.
d'après (2) on a :

$$\frac{u(t) v(t)}{k + \int_{t_0}^t u(s) v(s) ds} \leq v(t)$$

intégrons entre t_0 et t les deux membres :

$$\begin{array}{ll}
\left[\ln\left(k+\int_{t_0}^{t} u(s)\,v(s)\,ds\right)\right]_{t_0}^{t} & \leq \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds \\
\Rightarrow \ln\left(k+\int_{t_0}^{t} u(s)\,v(s)\,ds\right)-\ln k & \leq \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds \\
\Rightarrow k+\int_{t_0}^{t} u(s)\,v(s)\,ds & \leq k\exp\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds
\end{array}$$

Où :

$$u(t)\leq k+\int_{t_0}^{t} u(s)\,v(s)\,ds \leq k\exp\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds$$

d'où le résultat . ■

b)le cas discret :

soit $\{a_i\}$ une suite des nombres reéls positifs tq :

$$a_i \leq a$$

et

$$a_i \leq bh\sum_{k=1}^{i-1} a_k, \forall i=2,...$$

avec a, bet h sont des constantes positives , alors :

$$a_i \leq a\exp\left(b\,(i-1)\,h\right), i=2,....$$

1.8.4 Inégalité de Young :

Soient : $a, b \subset \mathbb{R}^{+}$,et $p, q \subset]1,+\infty[, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ alors :

$$a.b \leq \frac{a^p}{p}+\frac{a^q}{q}$$

1.8.5 Inégalité de Poincarreé :

Soit : Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$,bornée dans un direction d'espace (ou plus) ,Alors il existe une constante $c>0$ telle que :

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$$

En particulier l'expression $\|\nabla p\|_p$ est une norme sur $W_0^1(\Omega)$ qui est equivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}}$ sur $H_0^1(\Omega)$,l'expression $\int_\Omega \nabla u \nabla v$ est un produit scalaire qui induit la norme $\|\nabla u\|_{L^2}$ équivalente à la norme $\|u\|_{H^1}$.

1.9 Formule de Green

On suppose que :Ω est un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ régulière ,alors : $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\omega$$

où : $\dfrac{\partial}{\partial n}$ désigne la dérivation dans la direction de la normale extérieure à la frontière $\partial\Omega$ de Ω .

1.10 Quelques Théorèmes Utilisées

Théorème 1.10.1 *(de Minty Browder)*[4]

Soit : $d : (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application monotone pour la dernière variable

c-à-d :

$$(d(t,x,\xi_1)) - d(t,x,\xi_2))(\xi_1 - \xi_2) \geq 0 \quad \text{pour } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$$

et $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^P(Q_T)^n$

$d(t,x,u_n) \to X$ dans $L^P(Q_T)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sup \int_\Omega d(t,x,u_n) u_n dx \leq \int_\Omega Xudx$

Alors :

$$X = d\,(t, x, u_n)$$

Théorème 1.10.2 *(critère de compacité de Kolmogorov)*

Soit : Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$.l'ensemble M des fonctions $f \in L^p$ est précompact **ssi** :M est bornée et équicontinue c-à-d :
$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ telleque :

$$\forall f \in M \int\limits_{\Omega} |f(x+y) - f(x)|^p\, dx < \varepsilon \text{ pour } y \leq \delta$$

Notons que ce théorème connu sous le nom critère de compacité de Kolmogorov.

1.11 La fonction Gamma

La fonction Gamma (Γ) est la généralisation aux nombres réelles de la fonction factorielle définie pour les nombres entiers positifs ,elle est donné par la formule suivante :

$$\Gamma(x) = \int\limits_{0}^{\infty} y^{x-1} e^{-y} dy\ , x > 0 \qquad (*)$$

Propriétés :
à partir de l'expression $(*)$,on déduit que :$\Gamma(1) = 1$
Ainsi que : $\Gamma(x+1) = x * \Gamma(x)$
et pour $x \in \mathbb{N}$, on a :$\Gamma(x+1) = x!$

Cette fonction est utilisée pour donner un sens alternatif aux deux concepts : dérivation,intégration fractionnaire .

1.12 Intégral fractionnaire

Si :$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue , et $\alpha > 0$.Alors l'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α est définie par :

$$I_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{g(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds$$

où :$\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma.

1.13 La dérivée fractionnaire d'ordre α

Si : $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,la dérivée fractionnelle de Riemann-Liouville est donnée par :

$$D_{RL}^\alpha u\,(t,x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} g(s) ds$$

où, le nombre entier n est choisie de telle manière que : $\alpha \in [n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$

1.14 La dérivée de Caputo

Soit : $q \geq 0, n = [q] + 1$. Si : $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire q exprimé par :

$$^cD^q g\,(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t (t-s)^{n-q-1} g^{(n)}(s) ds, \qquad t > 0$$

Lemme 1.14.1 [1]

Soit : $p, q \geq 0,\ f \in L^1\,(a,b)$ Alors :

$$I^P I^q f(t) = I^{p+q} f(t) = I^{q+q} f(t) \text{ pour toute } t \in [a,b]\,.$$

Lemme 1.14.2 [1]

Soit :$T > 0, u \in C^m\,([0,T])\,, \alpha \in (m-1, m)\,, m \in \mathbb{N}$ et $v \in C^1\,[0,T]$ .Alors pour toute $t \in [0,T]$, on a les propriétées suivantes :

$$\begin{aligned}
D_{RL}^{\alpha}v\,(t) &= \frac{d}{dt}I^{1-\alpha}v(t) \qquad m=1 && (1.1)\\
D_{RL}^{\alpha}I^{\alpha}v\,(t) &= v(t) && (1.2)\\
I^{\alpha}D_{RL}^{\alpha}v(t) &= v-\sum_{k=1}^{m}\frac{t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+k)}\left(I^{k-\alpha}v\right)^{(m-k)}(0) && (1.3)\\
I^{\alpha}D_{RL}^{\alpha}v(t) &= v-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(I^{1-\alpha}v\right)(0) \qquad \text{si} : m=1 && (1.4)
\end{aligned}$$

Remarque 1.14.1

si : $g\in L^{p}(0.T)$, $1\leq p\leq\infty$,et $\varphi:]0,T]\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ est une fonction définie par :

$$\varphi\,(t)=\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma\,(1-\alpha)}$$

Alors (voir [1])
$\varphi\times g\in L^{p}\,(0,T)$, où :

$$\varphi\times g(t)=\int_{0}^{t}\varphi(t-s)g(s)ds$$

et $\varphi\times g$ est absolument continue tq :

$$\varphi(t-s)g(s)\in L^{1}\,(0,T)$$

De plus , si :h est une fonction tel que : $g\geq h$ Alors :

$$I^{\alpha}g(t)\geq I^{\alpha}h(t).$$

Ce qui signifie que : la fonction I^{α} est croissante .

Chapitre 2

Position du problème et estimation a priori

2.1 Position du problème

Dans ce chapitre on considère le problème (2.1) pour une équation intégro-différentielle d'ordre fractionnaire :

$$D_{RL}^{\alpha}u\left(t,x\right)-\triangle u\left(t,x\right)=\int\limits_{0}^{t}a\left(t-s\right)\triangle u\left(s,x\right)ds+f\left(t,x\right)\ \text{ dans }\ Q_T=\left(I\times\Omega\right) \tag{2.1}$$

avec condition initiale :

$$u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right)\qquad\text{dans } I \tag{2.a}$$

condition de Dirichlet :

$$u\left(t,x\right)=0\qquad\text{dans } I\times\partial\Omega \tag{2.b}$$

Et condition d'intégrale fractionnaire :

$$I^{1-\alpha}u\left(0^+\right)=u_1\left(x\right)\qquad\text{dans }\ \Omega \tag{2.c}$$

où $\alpha\in\left]0,1\right[$.
$I=[0,T]$:représente un intervalle du temps fini,$T>0$
Ω :est un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$ avec $n\geq 1$,avec une bord lisse $\partial\Omega$

$I^{1-\alpha}$:L'intégrale fractionnaire .
D^{α}_{RL} :La dérivée au sens de Riemann-Liouville.

Selon la relation (1.1) dans le lemme (1.14.2), le problème peut être écrite comme :

$$\frac{\partial}{\partial t} I^{1-\alpha} u(t,x) - \triangle u(t,x) = \int_0^t a(t-s) \triangle u(s,x) ds + f(t,x) \tag{2.2}$$

2.2 Hypothèses et Schéma de discrétisation

Dans cette section ,nous donnons des hypothèses qui assurent l'existence de la solution faible.

Soit : $L^2(\Omega)$:l'espace habituelle des fonctions careés intégrables de lebesgue sur Ω.dont le produit scalaire et la norme seront désigneés par : $(.,.)$et $\|.\|$ respectivement ,et $\|u\|_{-1}$: représente la norme dans $H^{-1}(\Omega)$ (l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$).

Soit :C une constante positive indépendante de i, j, h et n

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :
$(H1)$. La donné initiale vérifie : $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$.
$(H2)$. $f\ (t) \in L^2(\Omega)$ et elle est lipschitzienne continue en t i.e :

$$\forall t, t' \in I \text{ ,on a : } \left\| f(t) - f\left(t'\right) \right\| \leq \ell \left| t - t' \right|$$

$(H3)$. a est une fonction continue tel que :

$$\left| a(t) - a\left(t'\right) \right| \leq C_1 \left| t - t' \right|$$

Nous cherchons une solution faible dans le sense suivante.

Définition 2.2.1

une solution faible du problème (2.1) est une fonction u satisfaisant :
1/ $u \in L^2(I, H_0^1(\Omega))$,avec $I^{1-\alpha}(u) \in C(I, H^{-1}(\Omega))$
2/ $\partial_t I^{1-\alpha}(u) \in L^2(I, H^{-1}(\Omega))$
3/ u satisfait (2.a) et (2.b)
4/ pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,on a :

$$\int_I \left(\partial_t I^{1-\alpha}(u), \varphi\right) dt + \int_I (\nabla u, \nabla\varphi)\, dt = \int_I (f, \varphi)\, dt + \int_I \left(\int_0^t a(t-s)\nabla u(s)ds, \nabla\varphi\right) dt$$

2.2.1 La méthode de Rothe

On divise l'intervalle du temps I en n sous-intervalles de même longueur $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1...n$ où $t_i = ih$ et $h = \dfrac{T}{n}$.

On note par $u_i = u(x, ih)$ l'approximations de la fonction u.

On obtient un système formé de n fonctions , puis on remplace la dérivée de la fonction u i.e : $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ par $\delta u_i = \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h}$pour tout $t = t_i$.

On obtient un système formé de n équations en x ou l'inconnu est $u_i(x)$

.

donc on approxime le problème posé en tout point $t = t_i$, $i = 1...n$.par un nouveau problème discret .

En appliquant la formule de Green , le problème (2.1) est équivalent au problème variationnelle suivant :

$$\begin{cases} \text{pour tout } \varphi \in H_0^1(\Omega), \text{trouver } u \text{ solution de} \\ \left(\partial_t I^{1-\alpha} u(t,x), \varphi\right) + (\nabla u(t), \nabla\varphi) = (f_i, \varphi) + \int_0^t (a(t,s)\nabla u(s), \nabla\varphi) \end{cases}$$

Nous omettrons x par souci de simplicité.

Alors,le problème discrétisé qui correspond à (2.1) est :

trouver $u_i \in H_0^1(\Omega)$, $(i = 1...n)$ tel que pout tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\left(I^{1-\alpha}(u_i) - I^{1-\alpha}(u_{i-1}), \varphi\right) + h(\nabla u_i, \nabla\varphi) = h(f_i, \varphi) + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij}\nabla u_j, \nabla\varphi) \tag{2.3}$$

où : $\begin{cases} a_{ij} = a(t_j - t_i) \\ f_i = f(t_i) \end{cases}$

L'existence d'une solution faible $u_i \in H_0^1(\Omega)$ à chaque pas du temps est assurée vue la monotonie et la coercivité de l'opérateur :

$$\frac{I^{1-\alpha}(u_i)}{h} - \triangle u_i - a_{ij} h \nabla u_i$$

On construit les fonctions de Rothe ,c-à-d : On va approximer la solution u par une suite de polynôme de degré 1 par morceaux sur chaque sous intervalle $[t_{i-1}, t_i]$.

Les fonctions d'états correspondantes :

$$\bar{u}^n(t) = \begin{cases} u_i \ \ t \in [t_{i-1}, t_i] \\ u_0 \ t = 0 \end{cases} \qquad i = 1, ..., n \tag{2.4}$$

Aprés avoir démontrer quelques estimations pour la solution approchée ,nous établissons la convergence de la solution approchée $u^n(t)$ vers la solution du problème posé.

2.3 Estimations a priori

Dans cette section ,on va démontrer quelques estimations a priori pour obtenir quelques résultats de convergence en basant sur la compacité faible dans un espace de Hilbert .

Lemme 2.3.1

Les estimations suivantes sont vérifiées de manière uniforme par rapport n, i, j et h.

$$\sum_{i=1}^{\ell} h \left\| \delta I^{1-\alpha}(u_i) \right\|^2 \leq C \tag{2.5}$$

$$\left\| \nabla u_i \right\|^2 \leq C \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \left\| \nabla u_i - \nabla u_{i-1} \right\|^2 \leq C \tag{2.7}$$

Preuve.

posons : $\varphi = u_i - u_{i-1}$ dans (2.3), et en somment pour $i = 1, ..., \ell$

nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\ell} h\left(\frac{I^{1-\alpha}(u_i)-I^{1-\alpha}(u_{i-1})}{h},\delta u_i\right)+\sum_{i=1}^{\ell} h\left(\nabla u_i,\nabla u_i-\nabla u_{i-1}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{\ell} h\left(f_i,\delta u_i\right)+\sum_{i=1}^{\ell} h^2\sum_{j=1}^{i-1}\left(a_{ij}\nabla u_j,\nabla u_i-\nabla u_{i-1}\right)
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

L'égalité (2.8) est briévement noté par :

$$J_1+J_2=J_3+J_4$$

Maintenant on va estimer chaque terme à côté :

1. $J_1=\sum_{i=1}^{\ell} h\left(\delta I^{1-\alpha}(u_i),\delta u_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\ell} h\delta u_i \left\|\delta I^{1-\alpha}(u_i)\right\|^2$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \geq C\sum_{i=1}^{\ell} h\left\|\delta I^{1-\alpha}(u_i)\right\|^2$

donc

$$J_1\geq C\sum_{i=1}^{\ell} h\left\|\delta I^{1-\alpha}(u_i)\right\|^2 \tag{2.9}$$

2. $J_2=\sum_{i=1}^{\ell} h\left(\nabla u_i,\nabla u_i-\nabla u_{i-1}\right)$

En utilisant :

$$(x,x-y)=\frac{1}{2}\left[\|x\|^2-\|y\|^2+\|x-y\|^2\right]$$

$$
\begin{aligned}
2J_2&=2\sum_{i=1}^{\ell}\left(\nabla u_i,\nabla u_i-\nabla u_{i-1}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{\ell}\left[\|\nabla u_i\|^2-\|\nabla u_{i-1}\|^2+\|\nabla u_i-\nabla u_{i-1}\|^2\right]\\
&=\left[\|\nabla u_l\|^2-\|\nabla u_0\|^2+\sum_{i=1}^{\ell}\|\nabla u_i-\nabla u_{i-1}\|^2\right]\\
&=\|\nabla u_l\|^2-\|\nabla u_0\|^2+\sum_{i=1}^{\ell}\|\nabla u_i-\nabla u_{i-1}\|^2
\end{aligned}
$$

Alors :

$$J_2=\|\nabla u_l\|^2-\|\nabla u_0\|^2+\sum_{i=1}^{\ell}\|\nabla u_i-\nabla u_{i-1}\|^2 \tag{2.10}$$

3. $J_3=\sum_{i=1}^{\ell} h\left(f_i,\delta u_i\right)$

$$\begin{aligned}
|J3| = \left|\sum_{i=1}^{\ell} h\,(f_i, \delta u_i)\right| &\overset{c-s}{\leq} \sum_{i=1}^{\ell} h\,\|f_i\|_{L^2}\,\|\delta u_i\|_{L^2}\\
&\overset{c-s}{\leq} \sum_{i=1}^{\ell} h\,\|f_i\|_{L^2}\,\|\delta u_i\|_{L^2}\\
&\leq C\sum_{i=1}^{\ell} h\,\|\delta u_i\|_{L^2} \text{ d'aprés } (H2).\\
&\overset{\varepsilon-I}{\leq} C\sum_{i=1}^{\ell} h\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{\varepsilon}\,\|\delta u_i\|_{L^2}^2\right)\\
&\leq \sum_{i=1}^{\ell} Ch\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{\varepsilon}C\sum_{i=1}^{\ell} h\,\|\delta u_i\|_{L^2}^2\\
&\leq \left[C\ell h\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{\varepsilon}C\sum_{i=1}^{\ell} h\,\|\delta u_i\|_{L^2}^2\right]\\
&\leq CT\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{\varepsilon}Ch\sum_{i=1}^{\ell} \|\delta u_i\|_{L^2}^2\\
&\leq \max(CT, C)\left[\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{\varepsilon}h\sum_{i=1}^{\ell} \|\delta u_i\|_{L^2}^2\right]
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincarrée on obtient :

$$|J_3| = \left|\sum_{i=1}^{\ell} h\,(f_i, \delta u_i)\right| \leq C(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{\ell} h\,\|\nabla\delta u_i\|_{L^2}^2) \tag{2.11}$$

4. $J_4 = \sum_{i=1}^{\ell}(h\sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij}\nabla u_j, \nabla u_i - \nabla u_{i-1}))h$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, l'inégalité de Young puis en changeant l'ordre de la somme .le terme mémoire peut être estimé comme suit :

$$\begin{aligned}
|J_4| &= \left|\sum_{i=1}^{\ell}(h^2\sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij}\nabla u_j, \nabla\delta u_i)\right|\\
&\leq \sum_{i=1}^{\ell} h^2\sum_{j=1}^{i-1} |(a_{ij}\nabla u_j, \nabla\delta u_i)|\\
&\overset{C-S}{\leq} C\sum_{i=1}^{\ell} h^2\sum_{j=1}^{i-1} \|\nabla\delta u_i\|_{L^2}^2\\
&\overset{\varepsilon-I}{\leq} C\sum_{i=1}^{\ell} h^2\sum_{j=1}^{i-1}\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\,\|\nabla\delta u_i\|_{L^2}^2\right)\\
&\leq C\sum_{i=1}^{\ell} h^2(i-1)\varepsilon + C\sum_{i=1}^{\ell} \frac{h^2}{\varepsilon}(i-1)\,\|\nabla\delta u_i\|_{L^2}^2\\
&\leq C\sum_{i=1}^{\ell} h\varepsilon + C\frac{h}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{\ell} \|\nabla\delta u_i\|_{L^2}^2\\
&\leq C\varepsilon + C\frac{h}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{\ell} \|\nabla\delta u_i\|_{L^2}^2\\
&\leq C\left[\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{\ell} h\,\|\nabla\delta u_i\|^2\right]
\end{aligned}$$

d'où :

$$J_4 \leq C\left[\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{\ell} h \left\|\nabla \delta u_i\right\|^2\right] \tag{2.12}$$

Résument toute ses considérations , En tenant compte (2.8), (2.11) en choisissant ε,suffisamment petite , Alors le lemme de Gronwall discret nous donne la preuve du lemme (2.3.1) ■

On note par : f^n, M^n et $\bar{I}_n\left(\bar{u}^n\left(t\right)\right)$ les fonctions :

$$\bar{I}_n\left(\bar{u}^n\left(t\right)\right) = \begin{cases} u_i & t \in [t_i, t_{i-1}] \\ u_0 & t = 0 \end{cases} \quad i = 1, ..., n \tag{2.13}$$

$$f^n\left(t\right) = \begin{cases} f_i & t \in [t_i, t_{i-1}] \\ f_0 & t = 0 \end{cases} \quad i = 1, .., n \tag{2.14}$$

$$M^n\left(t\right) = \begin{cases} h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\nabla u_j & t \in [t_i, t_{i-1}] \\ ha_{10}\nabla u_0 & t = 0 \end{cases} \quad i = 1, .., n \tag{2.15}$$

Nous définissons les fonctions de Rothe sur l'intervalle I par :

$$\bar{u}^n\left(t\right) = u_{i-1} + (t_i - t_{i-1})\delta u_i \qquad t \in [t_{i-1}, t_i] \quad i = 1...n \tag{2.16}$$

$$\overline{I}\left(\bar{u}^n\left(t\right)\right) = I^{1-\alpha}\left(u_{i-1}\right) + (t_i - t_{i-1})\delta I^{1-\alpha}(u_i).\ t \in [t_{i-1}, t_i] \ \forall i \tag{2.17}$$

Lemme 2.3.2 *L'estimation a priori :*

$$\int_I \left\|\partial_t I_n\right\|_{-1}^2 \leq C$$

est satisfaite pour $1 \leq i \leq n$.

Où :

$$\left\|\partial_t I_n\right\|_{-1} = \sup_{\|\varphi\|\leq 1, \varphi \in H_0^1} \left|\left(\partial_t I_n, \varphi\right)\right|$$

Preuve. En appliquant le lemme (2.3.1) ,on conclut la preuve ■

Lemme 2.3.3 *Il existe une constante C telle que :*

$$\sum_{i=1}^{j} h \left\|\nabla u_i\right\|^2 \leq C, \qquad 1 \leq j \leq n$$

Preuve. En utilisant le lemme (2.3.1), on a :

$$h \|\nabla u_i\|^2 \leq hC$$

en sommant sur $i = 1, ..., j$

$$\sum_{i=1}^{j} h \|\nabla u_i\|^2 \leq \sum_{i=1}^{j} hC = j\frac{T}{n}C \leq C \qquad j \leq n$$

Alors : $\sum_{i=1}^{j} h \|\nabla u_i\|^2 \leq C, \qquad 1 \leq j \leq n$ ■

Chapitre 3

L'existence et L'unicité de la solution faible

Maintenant on va montrer que le problème discrétisé va converger vers notre problème variationnelle continue.

3.1 Résultats de convergence de la solution

Vue les lemmes (2.3.1), (2.3.2),on peut dire :

$$\max_{I} \|I_n\| + \|\partial_t I_n\|_{L^2(I,H^{-1}(\Omega))} \leq C$$

il suit qu'il existe $\omega \in C\left(I, H^{-1}(\Omega)\right) \cap L^{\infty}\left(I, L^2(\Omega)\right)$,avec $\partial_t \omega \in L^2$ $\left(I, H^{-1}(\Omega)\right)$ et une sous-suite $(I_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(I^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$I_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \omega \quad \text{dans} \quad C\left(I, H^{-1}(\Omega)\right) \quad I_{n_k}(t) \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} \omega(t) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)$$

$$I_{n_k}(t) \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} \omega(t) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \partial_t I_{n_k}(t) \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} \partial_t \omega(t) \quad \text{dans} \quad L^2\left(I, H^{-1}(\Omega)\right) \tag{3.1}$$

D'autre part d'aprés le lemme (2.3.1) ,on déduit que la suite $\{\bar{u}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément borné dans $L^2\left(I, H_0^1(\Omega)\right)$,par la suite nous pouvons extraire une sous-suite$\{\bar{u}^{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\bar{u}^{nk} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u \text{ dans } L^2\left(I, H_0^1(\Omega)\right)$$

il vient D'aprés $(H2)$ que :

$$\|f^n(t) - f(t)\|_{L^2(I,L^2(\Omega))} \leq \frac{C}{n}$$

D'où :

$$f^n(t) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(t) \quad \text{dans } L^2\left(I, L^2(\Omega)\right) \tag{3.2}$$

Lemme 3.1.1

La suite $\{M^n\}_n$ est uniformément borné et possède une sous-suite $\{M^{nk}\}_k$ telle que :

$$M^{nk} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} M \text{ dans } L^2\left(I, L^2(\Omega)\right) \tag{3.3}$$

où :

$$(M(u), \varphi) = (\int_0^t a(t-s)\nabla u(s)\, ds, \nabla\varphi)$$

Notre prochaine but est de prouver la convergence forte de $\{I_n\}_n$ et $\{\bar{u}^n\}_n$ dans $L^2(I, L^2(\Omega))$ et $L^2(I, H_0^1(\Omega))$ respectivement .

Lemme 3.1.2

Il existe une sous suite $\{I_{nk}\}_k$ de $\{I_n\}_n$ et $\{u^{nk}\}_k$ de $\{u^n\}_n$ telle que

$$I_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \omega \quad \text{dans} \quad L^2\left(I, L^2(\Omega)\right) \tag{3.4}$$

$$\bar{u}^{nk} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ dans } L^2\left(I, H_0^1(\Omega)\right)$$

Preuve. En vertu de critère de compacité de Kolmogorov , il suffit de prouver :

1/ $\|I_n\|^2_{L^2(I,L^2(\Omega))} + \|\bar{u}^n\|^2_{L^2\left(I,H_0^1(\Omega)\right)} \leq C$

2/ $\|I_n\,(t+s,x+h) - I_n(t,x)\|_{L^2(I,L^2(\Omega))} \underset{s,|h|\to 0}{\longrightarrow} 0$

3/ $\|\bar{u}^n\,(t+s,x+h) - \bar{u}^n(t,x)\|_{L^2\left(I,H_0^1(\Omega)\right)} \underset{s,|h|\to 0}{\longrightarrow} 0$

pour s , $|h| \to 0$ uniformément par rapport à n .

Ceci peut être obtenu de manière simple en utilisant des estimations a priori de la dernière section . ■

le résultat principal de ce mémoire est donnée dans le théorème suivant .

Théorème 3.1.1

La limite u est la solution faible du problème (2.1) au sens de la définition (2.2.1).

Preuve. Compte tenu du lemme (3.1.2),et le théorème de Minty-Browder, on peut conclure $\omega = I^{1-\alpha}(u)$.

D'autre part , d'après l'égalité :

$$I_{nk}\left(\bar{u}^{nk}\right) - u_1 = \int_0^t \partial_t I_{nk}\left(\bar{u}^{nk}\,(s)\right) ds \tag{3.5}$$

on obtient quand $k \longrightarrow \infty$:

$$I^{1-\alpha}(u) - u_1 = \int_0^t \partial_t I^{1-\alpha}\left(u\,(s)\right) ds \tag{3.6}$$

Ceci implique que :

$$I^{1-\alpha}(u\left(0^+\right)) = u_1$$

par conséquent , la condition $(2.b)$ est vérifiée.

En vertu de (2.4)-(2.17) l'identité (2.3) peut être écrite comme suit :

$$\int_I \left(\partial_t I_n(t), \varphi\right) dt + \int_I \left(\nabla\bar{u}^n, \nabla\varphi\right) dt = \int_I \left(f^n, \varphi\right) dt + \int_I \left(M^n, \nabla\varphi\right) dt \tag{3.7}$$

$\forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega)$

maintenant remplaçant n par $n_k \to \infty$ dans (2.7)

puis en prenant (3.1), (3.2), (3.6) ,en considération les lemmes (3.1.1), (3.1.2),il s'ensuit :

$$\int_I \left(\partial_t I^{1-\alpha}(u), \varphi\right) dt + \int_I (\nabla u, \nabla\varphi)\, dt = \int_I (f, \varphi)\, dt + \int_I \left(\int_0^t a(t-s)\nabla u(s) ds, \nabla\varphi\right) dt \tag{3.8}$$

Donc u est une solution faible de (2.1) au sens de la définition (2.2.1) . ■

3.2 Unicité de la solution faible

Dans cette section nous montrons l'unicité de la solution faible .

Théorème 3.2.1

Selon les hypothèses $(H1), (H2)$,le problème (2.1) à une unique solution faible.

Preuve. On suppose que le problème (2.1) à deux solutions faibles :u_1, u_2.

En possant :$u = u_1 - u_2$.puis en substituant φ sur la partie gauche de l'identité.

$$\int_I \left(\partial_t (I^{1-\alpha} u_1 - I^{1-\alpha} u_2), \varphi\right) dt + \int_I (\nabla u, \nabla\varphi)\, dt = \int_I \left(\int_0^t a(t-s)\nabla u(s) ds, \nabla\varphi\right) dt \tag{3.9}$$

On divise l'intervalle I en sous-intervalles de longueur p telle que :

$$\max_I |a(t)| .p < 1$$

Donc ,on choissie la fonction φ dans (3.9) comme :

$$\varphi(t) : \begin{cases} u(t) & t \in [0, p] \\ 0 & t \in]p, T] \end{cases}$$

il est facile de voir que : $\varphi \in L^2(I, H_0^1)$

On obtient :

$$\begin{aligned}&(I^{1-\alpha}(u_1) - I^{1-\alpha}(u_2), u_1 - u_2) + \int_0^p \|\nabla u(t)\|^2\, dt \\ &= \int_0^p \left(\int_0^t a(t-s)\nabla u(s)ds, \nabla u(t)\right) dt\end{aligned} \tag{3.10}$$

La monotonie de $I^{1-\alpha}$ donne :

$$\left(I^{1-\alpha}(u_1) - I^{1-\alpha}(u_2), u_1 - u_2\right) \geq 0$$

L'hypothèse $(H3)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous donne :

$$\begin{aligned}\int_0^p \|\nabla u(t)\|^2\, dt &\leq \int_0^p \left|\left(\int_0^t a(t-s)\nabla u(s)ds, \nabla u(t)\right)\right| dt \\ &\leq \int_0^p \left\|\int_0^t a(t-s)\nabla u(s)ds\right\| \|\nabla u(t)\|\, dt \\ &\leq \max_I |a\,(t)|\, \left\|\int_0^p \nabla u(t)dt\right\|^2 \int_0^p \|\nabla u(t)\|^2\, dt\end{aligned} \tag{3.11}$$

ce qui signifie que :

$$\left\|\int_0^p \nabla u(t)dt\right\| \leq \int_0^p \|\nabla u(t)\|\, dt$$

$$\int_0^p \|\nabla u(t)\|^2\, dt \leq \max_I |a(t)(| \int_0^p \|\nabla u(t)\|\, dt)^2$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz implique :

$$\int_0^p \|\nabla u(t)\|^2\, dt \leq \max_I |a(t)|\, .p \int_0^p \|\nabla u(t)\|^2\, dt$$

comme :

$$\max_I |a(t)|\, .p < 1$$

on obtient :

$$\|u\|_{L^2([0,p],H_0^1(\Omega))} = 0$$

ce qui preuve que :

$$u(t) = 0 \qquad \forall t \in [0, p]$$

De manière similaire sur les intervalles $[ip, (i+1)p]$, $i = 1, ..., n$, on obtient :

$$u(t) = 0 \qquad \forall t \in I$$

par conséquent :

$$u_1 = u_2$$

D'où le résultat . ■

Bibliographie

[1] A. A.kilbas,H. M.Srivastava and J.J.Trujillo,Theory and applications of fractional differential equations ,ElsevierScience B.V.Amesterdam,2006.

[2] A. Chaoui and A.Guezane lakoud, solution to an integrodifferential degenerate equation witch integral condition to a pear in applied mathematics and computations B.P.4.1.2400,Guelma.Algria.

[3] A. Chaoui and A .Guezane Lakoud, Rothe -Galerkin's method for a nonlinear integrodifferential equation ,Boundary Value Problems 2012,2012 :10.

[4] A.Guezane-Lakoud, D. Belakroum, Rothe's method for a telegraph equation with integral conditions, Nonlinear Anal .70(2009)3842-853.

[5] A.Guezane-Lakoud,M.S.Jasmati ,A. Chaoui. Rothe's method for a integrodifferential equation with integral conditions,Nonlinear Analysis .72(2010) 1522_1530 .

[6] K. Rektorys,The method of discretisation in time and partial differential equation ,D.Reidel Publishing company, 1982.

[7] K. Rektorys. On application of direct variational methods to the solution of parabolic boundary value problems of arbitrary order in space variables ,Czech.Math .J.21(1971) 318-339.

[8] O.A.Ladyzenskaja,On solution of nonstationary operator equations,Math Sb.39(4)(1956).

[9] D.Bahuguna,S.Abbas, and J.Dabas,Partial functional differential equation with an integral condition and application to population dynamics .Nonliear analysis 69(2008) 2623-2635.

[10] D.Bahuguna ,V.Raghavendra,Rothe's method to parabolic integrodifferential equation via abstract integrodifferential equation ,Appl,anal, 33(1989) 153-167.