

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

5101 200

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

WJG



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : **Mathématique Appliquée**

Par :

M^r. Brahmia Aziza

Intitulé

**Non existence des solutions périodiques pour les
systèmes différentiels planaires**

Dirigé par : **Mme. Badi Sabrina**

Devant le jury

PRESIDENT
RAPPORTEUR
EXAMINATEUR

Dr. Ellagoune Fateh
Dr. Badi Sabrina
Dr. Tabouche Nora

Univ-Guelma
Univ-Guelma
Univ-Guelma

Session Juin 2016

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier ALLAH qui ma donné le courage, la santé, et la volonté pour réaliser ce modeste travail tout au long de mes années d'études.

A : Dr Badi Sabrina, que je remercie de m'avoir proposé ce sujet, pour son encadrement et pour ces précieux et judicieux conseils qu'elle m'a cessé de me prodiguer tout au long de ce travail.

Je suis très honoré que Dr. Ellagoune Fateh, ait accepté de rapporter mon travail et de présider mon jury de Mémoire, je le remercie pour ses conseils et ses précieuses remarques.

Je remercie Dr. Tabouche Nora d'avoir accepté d'examiner mon travail, je suis très heureuse de le voir participer à mon jury.

Mes remerciements vont également à tous mes enseignants de l'université de Guelma qui m'ont aidé pendant mes années d'étude.

Je remercie tout ceux que ont participé de loin ou de près à la réalisation de ce travail.

A mes collègues pour tous les moments qu'on a passé ensemble.

Dédicace

A l'aide de dieu tout puissant, qui ma tracé le chemin de ma vie, j'ai pu réaliser ce travail que je dédie :

- ❖ A la lumière de mes yeux, l'ombre de mes pas et le bonheur de **ma mère** que Dieu ait son âme, qui espérait assister a cette journée, et malheureusement elle n'est pas présente, mais elle est présente dans le cœur de sa fille.
- ❖ A mon cher **père** qui m'a appris le sens de la persévérance
Tout au long de mes études, pour son sacrifice, ses conseils et ses encouragements.
- ❖ A mes sœurs : **Wasila, Samra, Karima, Najet, Farida, Gania et Hakima.**
- ❖ A mes frères : **Lotfi, Samir et Faysel**
- ❖ A toute la famille.
- ❖ A mes amis : **Salma, Razika et Fayrouse.**

Table des matières

Résumé	ii
Introduction	iii
1 Rappel et définitions	1
1.1 Système dynamique	1
1.2 Flots, points critiques et plan de phase d'une équation différentielle	3
1.3 Linéarisation, Nature des points critiques	4
1.4 Solution périodique, cycle limite	12
1.5 Théorie de la stabilité	14
1.5.1 Méthode des fonctions de Lyapunov	16
2 Existence des solutions périodiques	18
2.1 Théorème de Poincaré Bendixon	18
3 Non existence des solutions périodiques	22
3.1 Facteur intégrant inverse	22
3.2 Non existence des cycles limites via le facteur intégrant inverse	24
3.3 Critère de Bendixon	28
3.4 Critère de Dulac	29
3.5 Méthode pour obtenir les fonctions de Dulac	29
3.5.1 Quelques applications pour l'obtention des fonctions de Dulac	31

Résumé

Dans ce mémoire, on étudie les systèmes différentiels planaires, On s'intéresse à la non existence des solutions périodiques. On présente plusieurs critères de non existence. En effet, on explicitera la notion du facteur intégrant inverse, le critère de Bendixon et celui de Dulac. Cette étude sera enrichie par des applications.

Introduction

Ce mémoire porte sur un aspect important de la théorie qualitative des systèmes différentiels planaires, à savoir les cycles limites.

Ces êtres mathématiques furent introduits vers la fin du 19^{ème} siècle par Henri Poincaré [5]

Comme étant des solutions périodiques isolés dans l'ensemble de toutes les solutions périodiques d'un système différentiel autonome plan donné. Ils sont représentés dans le plan de phase par des courbes fermées isolées.

Les autres solutions se rapprochent des cycles limites ou s'en éloignent asymptotiquement lorsque le temps croît indéfiniment. Il s'agit là de stabilité des cycles limites.

Les cycles limites apparurent pour la 1^{ère} fois dans les applications en 1924 via l'équation de Vender Pol

$$\ddot{x} + (1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

Où $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ qui décrit les oscillations d'un circuit électronique.

Un des théorèmes les plus importants de la dynamique non linéaire est le théorème de Poincaré-Bendixon qui affirme que dans une région compacte et bornée du plan, une trajectoire d'un système plan converge vers un point d'équilibre ou un cycle limite.

Le critère de Bendixon et celui de Dulac prédisent la non existence des cycles limites, ainsi que la notion des facteurs intégrants inverses donnent des conditions de non existence de cycle limite.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la non existence des solutions périodiques pour des systèmes différentiels planaires.

Notre travail est repartit en trois chapitres :
Dans le premier chapitre, nous rappelons certaines définitions élémentaires sur les systèmes différentiels, tels que : système dynamique, flot, points critiques. Nous donnons une classification des points critiques pour des systèmes

différentiels planaires à coefficient constantes, nous rappelons aussi la théorie de stabilité.

Dans le deuxième chapitre, on présente un théorème fondamental de Poincaré-Bendixon qui s'intéresse à l'existence des solutions périodiques.

Le troisième chapitre qui est notre sujet principal est consacré à la non existence des solutions périodiques via le facteur intégrant inverse, on aborde aussi d'autres critères de non existences.

Chapitre 1

Rappel et définitions

Ce chapitre contient quelques notions générales et préliminaires pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires.

1.1 Système dynamique

Définition 1.1.1 *Un système dynamique U sur \mathbb{R}^n est une application*

$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que :

- 1) $U(., x) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- 2) $U(t, .) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- 3) $U(0, x) = x$.
- 4) $U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Remarque 1.1.1 *Les systèmes dynamiques sont engendrés par les systèmes différentiels.*

exemple 1.1.1 *Soit le système linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

$A \in M_n(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$

La solution de cet problème est :

$$x(t) = e^{At}x_0$$

Ce système engendre un système dynamique sur \mathbb{R}^n défini comme suit :

$$U : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t, x) \longrightarrow U(t, x) = e^{At}x$$

Vérifions qu'il satisfait les 4 propriétés précédentes :

1) $\forall t, \tau \in \mathbb{R}^+, x$ fixé alors

$$\begin{aligned} \|U(t + \tau, x) - U(t, x)\| &= \| e^{A(t+\tau)}x - e^{At}x \|, \\ &= \| e^{At}e^{A\tau}x - e^{At}x \|, \\ &= \| e^{At}(e^{A\tau}x - x) \|, \\ &= \| e^{At} \| \| e^{A\tau} - I \| \|x\|, \\ &\leq e^{\|A\|t} (e^{\|A\|\tau} - 1) \|x\| \longrightarrow 0 \text{ pour } \tau \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

$\Rightarrow U(\cdot, x)$ est continue par rapport à t .

2) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, t$ fixé alors

$$\begin{aligned} \|U(t, x) - U(t, y)\| &= \| e^{At}x - e^{At}y \|, \\ &= \| e^{At}(x - y) \| \\ &= \| e^{At} \| \| (x - y) \|, \\ &\leq e^{\|A\|t} \| (x - y) \|, \\ &\leq M \| (x - y) \|, \end{aligned}$$

$\Rightarrow U(t, \cdot)$ est continue par rapport à x .

$$\begin{aligned} 3) U(0, x) &= e^{A \times 0}x, \\ &= (I + 0 + \dots + 0)x, \\ &= Ix, \\ &= x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) U(t + s, x) &= e^{A(t+s)}x, \\ &= e^{At}e^{As}x, \\ &= e^{At}U(s, x), \\ &= U(t, U(s, x)), \end{aligned}$$

D'où le résultat.

1.2. FLOTS, POINTS CRITIQUES ET PLAN DE PHASE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Remarque 1.1.2 *Un système dynamique sur E est linéaire si :*

$$\Phi(t, \alpha x + \beta y) = \alpha \Phi(t, x) + \beta \Phi(t, y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } x, y \in E$$

1.2 Flots, points critiques et plan de phase d'une équation différentielle

Définition 1.2.1 *Soit le système différentiel non linéaire*

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$, $x_0 \in E$, E est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et $f \in C^1(E)$. Soit $\Phi(t, x_0)$ la solution de (1.1).

L'ensemble des applications Φ_t défini par

$$\Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0)$$

est appelé le flot de l'équation différentielle (1.1).

Remarque 1.2.1 *Le flot est dit autonome si f ne dépend pas explicitement du temps t , sinon il est dit non autonome.*

Définition 1.2.2 *Le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est appelé point critique ou point d'équilibre du système (1.1) s'il vérifie*

$$f(x_0) = 0$$

Définition 1.2.3 *Le point critique x_0 est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(x_0)$ n'a pas de partie réelle nulle.*

Définition 1.2.4 *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{1.2}$$

Le portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace des phases. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables, les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.2) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées orbites.

Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase, et le plan (x, y) est le plan de phase.

1.3 Linéarisation, Nature des points critiques

Définition 1.3.1 *Le système*

$$\dot{x} = Ax \tag{1.3}$$

où

$$\begin{aligned} A &= Df(x_0) \\ &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \end{aligned}$$

est appelé le système linéarisé du système (1, 1).

exemple 1.3.1 *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 2x_1^2 + x_2^3 - 2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1^2 + x_2^3 - 2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Les points critiques sont :

$$(-1, 0) \text{ et } (1, 0)$$

On a :

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 & 3x_2^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Au point $(-1, 0)$

$$Df(-1, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors le système linéarisé est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -4x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 \end{cases}$$

2. Au point $(1, 0)$

$$Df(1, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3. LINÉARISATION, NATURE DES POINTS CRITIQUES

alors le système linéarisé est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

Remarque 1.3.1 *La linéarisation du système d'équations différentielles nous ramène à l'étude de la nature des points critiques.*

Nature des points critiques

Soit le système différentiel linéaire (1.3) où A est une matrice d'ordre 2 et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice. on distingue les différents cas selon ces valeurs propres

1) λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe différent, l'origine $(0, 0)$ est un point selle, il est toujours instable.

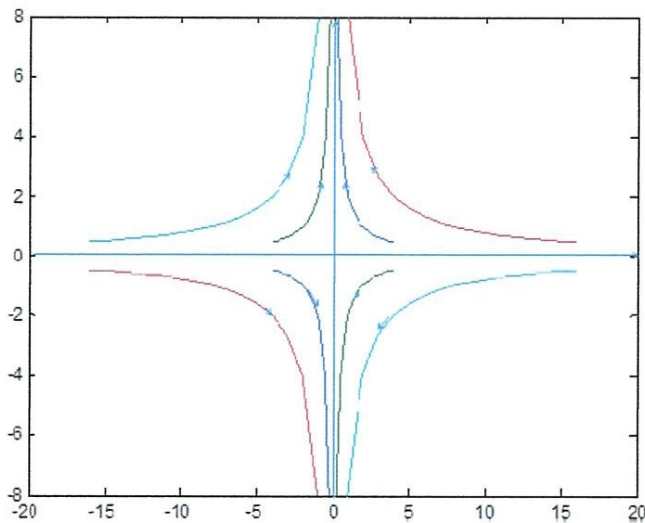


Figure1 : point selle

exemple 1.3.2 *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

Le point critique est $(0, 0)$, la matrice A est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 2 \text{ et } \lambda_2 = -1$$

alors le point critique $(0, 0)$ est un point selle.

2) λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe

a) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, l'origine $(0, 0)$ est un noeud impropre asymptotiquement stable.

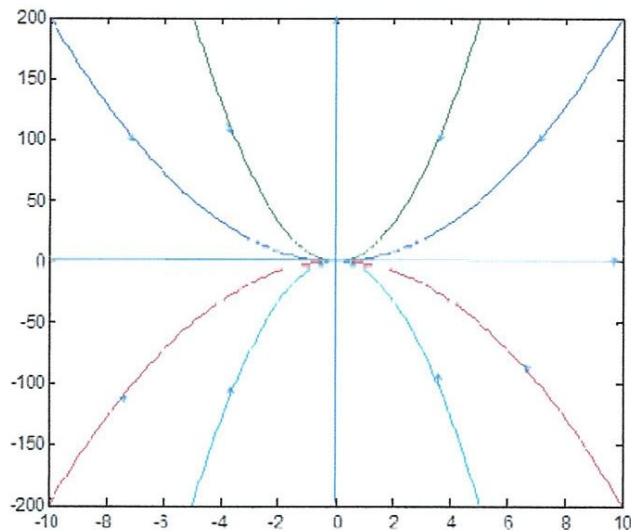


Figure2 : Noeud impropre asymptotiquement stable.

b) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, l'origine $(0, 0)$ est un noeud impropre instable.

1.3. LINÉARISATION, NATURE DES POINTS CRITIQUES

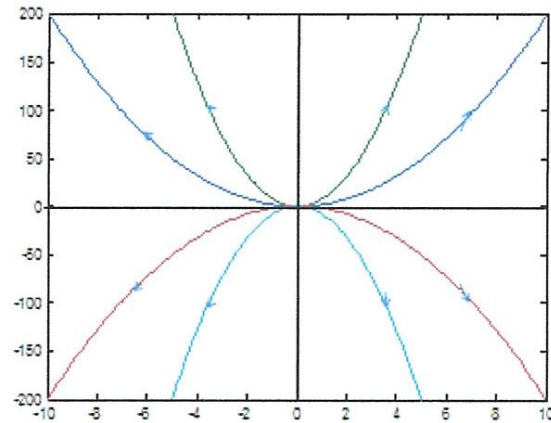


Figure3 : Noeud impropre instable

c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ l'origine $(0, 0)$ est un noeud propre, il est asymptotiquement stable si $\lambda < 0$, et instable si $\lambda > 0$

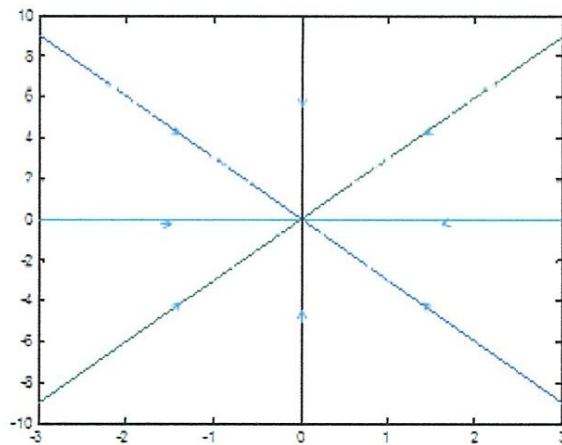


Figure 4 : Noeud propre asymptotiquement stable

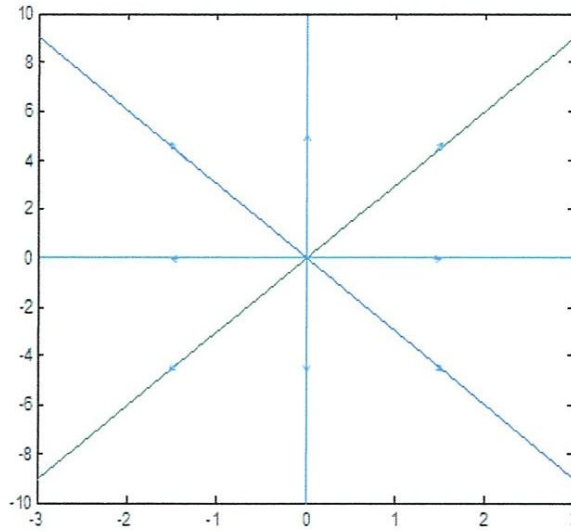


Figure 5 : Noeud propre instable

a) Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

Le point critique est $(0, 0)$, la matrice A est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = -2 \text{ et } \lambda_2 = -1$$

alors le point critique $(0, 0)$ est un noeud asymptotiquement stable.

b) Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

Le point critique est $(0, 0)$, la matrice A est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3. LINÉARISATION, NATURE DES POINTS CRITIQUES

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 2 \text{ et } \lambda_2 = 1$$

alors le point critique $(0, 0)$ est un noeud instable.

c) Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x \\ \dot{y} = -3y \end{cases}$$

Le point critique est $(0, 0)$, la matrice A est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3$$

alors le point critique $(0, 0)$ est un noeud propre asymptotiquement stable.

d) Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x \\ \dot{y} = 3y \end{cases}$$

Le point critique est $(0, 0)$, la matrice A est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

alors le point critique $(0, 0)$ est un noeud propre instable.

3) λ_1 et λ_2 sont des complexes conjuguées et $\text{Im}(\lambda_{1,2} \neq 0)$, alors l'origine $(0, 0)$ est un foyer. Il est asymptotiquement stable si $\text{Re}(\lambda_{1,2} < 0)$, et instable si $\text{Re}(\lambda_{1,2} > 0)$.

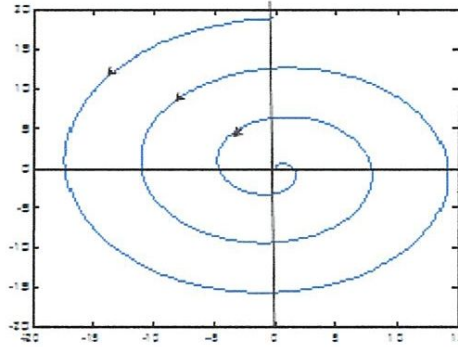


Figure 6 : Foyer asymptotiquement stable

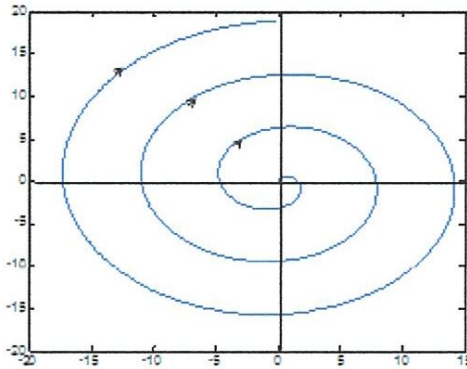


Figure 7 : Foyer instable

a) Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

Le point critique est $(0, 0)$, la matrice A est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.3. LINÉARISATION, NATURE DES POINTS CRITIQUES

Les valeurs propres sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$$

alors le point critique $(0, 0)$ est un foyer asymptotiquement stable.

b) Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$$

Le point critique est $(0, 0)$, la matrice A est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$$

alors le point critique $(0, 0)$ est un foyer instable.

4) λ_1 et λ_2 sont des imaginaires pures, alors l'origine $(0, 0)$ est un centre, il est stable mais n'est pas asymptotiquement stable.

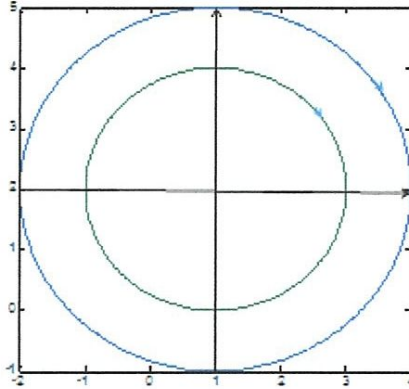


Figure 8 : centre stable

exemple 1.3.3 Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$$

Le point critique est $(0, 0)$, la matrice A est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{6}$$

alors le point critique $(0, 0)$ est un centre stable.

1.4 Solution périodique, cycle limite

Définition 1.4.1 On appelle orbite (trajectoire ou courbe) du système (1.1)

$$\gamma(x_0) = \{\Phi(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$$

1.4. SOLUTION PÉRIODIQUE, CYCLE LIMITE

- Pour $t > 0$, on l'appelle orbite positive

$$\gamma^+(x_0) = \{\Phi(t, x_0), t > 0\}$$

- Pour $t < 0$, on l'appelle orbite négative

$$\gamma^-(x_0) = \{\Phi(t, x_0), t < 0\}$$

Définition 1.4.2 On appelle solution périodique toute trajectoire $\Phi_t(x)$ de $(1, 1)$ telle qu'il existe un nombre $T > 0$, vérifiant

$$\Phi(t + T, x) = \Phi(t, x) \tag{1.5}$$

Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie (1.5) est appelé période.

Une solution périodique représentée graphiquement par une orbite fermée.

Définition 1.4.3 Un cycle limite C du système (1.1) est une trajectoire fermée isolée dans l'espace de phase. Ceci signifie s'il existe un voisinage de C dans lequel il n'y a pas d'autres courbes fermées.

Définition 1.4.4 Si toutes les trajectoires voisines s'approchent du cycle limite, le cycle est dit stable ou attractif, sinon, il est dit instable. Dans le cas où les trajectoires voisines s'approchent d'un côté et s'éloignent d'un autre côté il est dit semi-stable.

exemple 1.4.1 Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

tel que $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, le système précédent devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r (1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

d'où

$$\dot{r} = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r = 1 \text{ ou } r = -1 \text{ refusé.}$$

pour $r = 1$ on a l'orbite périodique

$$(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta), \sin(t + \theta)) \text{ avec } \theta(0) = \theta_0.$$

cette orbite périodique est un cycle limite stable pour $\alpha > 0$, et instable pour $\alpha < 0$.

Si $\alpha = 0$ le système a une infinité de nombre des orbites périodiques, et il n'y a pas de cycle limite.

Remarque 1.4.1 *Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.*

1.5 Théorie de la stabilité

Considérons le système $\dot{x} = f(x)$ (1.1)

Supposons que f satisfait les conditions d'existence et d'unicité de la solution.

Définition 1.5.1 *Une solution $\Phi(t)$ du système (1.1) telle que $\Phi(t_0) = \Phi$ est dite stable au sens de Lyapunov si :*

$\forall \varepsilon > 0$, il \exists un $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout solution $x(t)$ de (1.1) on a :

$$x(t_0) = x_0 \text{ et } \|x(t_0) - \Phi(t_0)\| < \eta$$

On aura

$$\|x(t) - \Phi(t)\| < \varepsilon, \forall t > t_0.$$

Maintenant $\Phi(t)$ est dite asymptotiquement stable si elle est stable et de plus :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = 0$$

Définition 1.5.2 *La solution $\Phi(t) = 0$ du système (1.1) est dite stable si :*

$\forall \varepsilon > 0$, il \exists un $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ telle que pour tout solution $x(t)$ de (1.1) on a :

$$\|x(t_0)\| < \eta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t > t_0.$$

exemple 1.5.1 *Montrons que la solution du problème suivant est stable :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \\ x(0) - y(0) = 0 \end{cases}$$

Solution

On a besoin de connaître $\Phi(t)$ qui vérifie $\Phi(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$X(t)$ telle que $X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

On résout le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

où :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Les solutions de ce système sont :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos t - c_2 \sin t \\ c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{pmatrix}$$

or $x(0) = y(0) = 0$ alors

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos 0 - c_2 \sin 0 \\ c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $c_1 = c_2 = 0$, et la solution est

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On va montrer que la solution $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable

Soit $X(t)$ la solution de ce système telle que

$$X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ y_0 \sin t + x_0 \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|X(t)\| &= \left\| \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ y_0 \sin t + x_0 \cos t \end{pmatrix} \right\| \\ &= |x_0 \cos t - y_0 \sin t| + |y_0 \sin t + x_0 \cos t| \\ &< |x_0| + |y_0| + |x_0| + |y_0| \\ &< 2 \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ tel que $\|X(0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t)\| < \varepsilon \forall t > 0$

Donc la solution $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable.

1.5.1 Méthode des fonctions de Lyapunov

Soit $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction différentiable
soit le système :

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, n \quad (1.6)$$

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x) \quad (1.7)$$

Théorème 1.5.1 *Si pour le système (1.6), il existe une fonction $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ définie positive (ou négative) telle que :*

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$$

est une fonction semi définie négative (ou positive) ou identiquement nulle. Alors le point critique $(0, \dots, 0)$ est stable au sens de Lyapunov.

$v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est dite fonction de Lyapunov.

exemple 1.5.2 *Soit le système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -xy^4 \\ \frac{dy}{dt} = yx^4 \end{cases}$$

soit $v(x_1, x_2) = x^4 + y^4$ définie positive.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dot{y} = 4x^3(-xy^4) + 4y^3(yx^4) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est stable.}$$

Théorème 1.5.2

Si pour le système (1.6), il existe une fonction $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de signe définie telle que :

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$$

est une fonction de signe définie inverse de v . Alors le point critique $(0, \dots, 0)$ est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.

exemple 1.5.3 Soit le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^3 \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y^3 \end{cases}$$

soit $v(x, y) = x^2 + y^2$ définie positive.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dot{y} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - 3y^3) = -(x^4 + 3y^4)$$

négative $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est asymptotiquement stable.

Théorème 1.5.3 Si pour le système (1.6), il existe une fonction $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vérifiant $v(0, \dots, 0) = 0$ telle que :

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$$

est une fonction définie positive et s'il existe aussi près que l'on veut de $(0, \dots, 0)$ des points en $v(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$. Alors le point critique $(0, \dots, 0)$ est instable au sens de Lyapunov.

exemple 1.5.4 Soit le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$

soit $v(x, y) = x^2 - y^2$, $v(0, 0) = 0$.

$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dot{y} = 2x \times x - 2y \times (-y) = 2(x^2 + y^2)$ définie positive,
prenons

$v(x, 0) = x^2 > 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est instable.

Chapitre 2

Existence des solutions périodiques

2.1 Théorème de Poincaré Bendixon

Théorème 2.1.1 *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

Soit A une région fermée et bornée de \mathbb{R}^2 , supposons qu'une orbite $\gamma^+(x_0)$ du système (2.1), Soit à l'intérieur de A (contenue dans A entièrement) alors :

- 1) Où bien $\gamma^+(x_0)$ est une solution périodique.
- 2) Où bien $\gamma^+(x_0)$ tend vers une solution périodique.
- 3) Où bien $\gamma^+(x_0)$ tend vers un point d'équilibre de (2.1) .

Ce résultat est important quand A ne contient pas des points d'équilibres. Car il garantit l'existence d'au moins une solution périodique.

La difficulté dans l'application de ce résultat est bien la construction de l'anneau A . Pour cela cherchons deux cercles C_1 et C_2 telle que C_1 soit à l'intérieur de C_2 .

La recherche des cercles C_1 et C_2 ressemble à la recherche de la fonction de Lyapunov $v(x, y) = x^2 + y^2, x^4 + y^2, x^4 + y^4 \dots$

Soit $C : v(x, y) = x^2 + y^2 = c$

$$\begin{aligned} c_1 > 0 : & C_1 : x^2 + y^2 = c_1 \\ c_2 > 0 : & C_2 : x^2 + y^2 = c_2 \end{aligned} \quad \text{telle que } c_1 < c_2$$

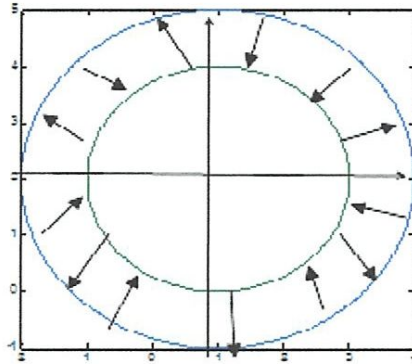
2.1. THÉORÈME DE POINCARÉ BENDIXON

Soit $C : v(x, y) = x^2 + y^2 = c > 0$.

Si pour tout point $p \in C$

$$\text{On a } \left[\frac{dv}{dt} \right]_p = \frac{dv}{dx} \dot{x} + \frac{dv}{dy} \dot{y} > 0$$

\Rightarrow Toute trajectoire qui passe par le point p se dirige vers son extérieur.



exemple 2.1.1 Montrons que le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + x = f(x, y) \\ \dot{y} = -x - y^3 + y = g(x, y) \end{cases}$$

admet au moins une solution périodique dans une région de \mathbb{R}^2 .

Solution

$(0, 0)$ est le seul point d'équilibre.

la matrice jacobienne en $(0, 0)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i$$

$(0, 0)$ est un foyer instable pour le système linéarisé \Rightarrow il reste foyer instable pour le système non linéaire.

cherchons l'anneau A :

soit $v(x, y) = x^2 + y^2 = c$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\dot{x} + \frac{dv}{dy}\dot{y} = 2x(y - x^3 + x) + 2y(-x - y^3 + y)$$

$$= 2[(x^2 + y^2) - (x^4 + y^4)]$$

On a pour

$$0 < x^2 + y^2 < 1$$

$$x^4 + y^4 < (x^2 + y^2)^2 < x^2 + y^2$$

si on prend $(C_1) : x^2 + y^2 = c_1$

avec $0 < C_1 < 1$ $\frac{dv}{dt} > 0$

\Rightarrow toute trajectoire coupant C_1 se dirige vers l'extérieur.

on a pour

$$x^2 + y^2 > 2$$

$$2(x^4 + y^4) > (x^2 + y^2)^2 > 2(x^2 + y^2)$$

pour $C_2 > 2$ $\frac{dv}{dt} < 0$

\Rightarrow toute trajectoire passant par C_2 se dirige vers l'intérieur.

Alors d'après le théorème de Poincaré-Bendixon il existe au moins une solution périodique dans l'anneau A formé des deux cercles C_1 et C_2 .

exemple 2.1.2 Montrer que le système suivant admet au moins une solution périodique dans \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Solution

$(0, 0)$ est un point d'équilibre

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i \text{ (complexes avec } \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) > 0)$$

Alors $(0, 0)$ foyer instable.

2.1. THÉORÈME DE POINCARÉ BENDIXON

Posons :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow C : x^2 + y^2 = r^2 \quad r > 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos \theta \dot{r} - r \sin \theta \dot{\theta} = r \cos \theta - r \sin \theta - r^3 \cos \theta \\ \dot{y} = \sin \theta \dot{r} + r \cos \theta \dot{\theta} - r^3 \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

$$(1) \times \cos \theta + (2) \times \sin \theta \Rightarrow \dot{r} = r - r^3$$

$$(2) \times \cos \theta - (1) \times \sin \theta \Rightarrow r \dot{\theta} = r$$

On obtient le système écrit en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = 1 \text{ ou } r = -1.$$

pour $r > 1$ on a $\frac{dr}{dt} < 0$: les trajectoire \nearrow (vers à l'extérieur).

pour $0 < r < 1$ on a $\frac{dr}{dt} > 0$: les trajectoire \searrow (vers à l'intérieur).

$C_1 : x^2 + y^2 = r_1$ telle que $0 < r_1 < 1$

\Rightarrow toute trajectoire passant par C_1 se dirige vers l'extérieur (\nearrow).

$C_2 : x^2 + y^2 = r_2$ telle que $r_2 > 1$

\Rightarrow toute trajectoire passant par C_2 se dirige vers l'intérieur (\searrow).

Alors d'après le théorème de Poincaré Bendixon il existe au moins une solution périodique dans l'anneau A formé des deux cercle C_1 et C_2 .

Chapitre 3

Non existence des solutions périodiques

Beaucoup de problèmes dans la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires dans le plan de phase sont reliés aux cycles limites, ce fait motive leur étude.

3.1 Facteur intégrant inverse

Définition 3.1.1 *soit le système d'équation différentielles*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (3.1)$$

où $f_i : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 2$ sont des fonctions de classe C^1 et U est un ensemble ouvert simplement connexe.

Considérons le champ des vecteurs

$$F = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

Alors (3.1) peut s'écrire sous la forme

$$\dot{x} = F(x), \quad x = (x_1, x_2) \in U \quad (3.2)$$

3.1. FACTEUR INTÉGRANT INVERSE

Définition 3.1.2 *La fonction $v : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $v \in C^1(U, \mathbb{R})$ est appelée facteur intégrant inverse de (3.1) si elle n'est pas localement nulle et satisfait l'équation aux dérivées partielles*

$$f_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) v \quad (3.3)$$

Remarque 3.1.1 *Un facteur intégrant inverse est une solution de l'équation*

$$Fv = \operatorname{div}(F)v$$

Il est bien connu que le facteur intégrant inverse est un outil important dans l'étude qualitative des équations différentielles, mais sa détermination est un problème déffcil.

Lobjectif de ce chapitre est d'utiliser les facteurs intégrants inverses pour donner des critères de non existence des cycles limites des équations différentielles planaires.

En particulier, on obtient une preuve pour la non existence des cycles limites pour les équations différentielles polynômiales homogènes.

On donne quelques exemples pour illustrer des applications de ces résultats.

En réécrivant (3.1) sous sa forme de Pfaff

$$\omega = -f_2(x_1, x_2) dx_1 + f_1(x_1, x_2) dx_2 = 0 \quad (x_1, x_2) \in U \quad (3.4)$$

On note que l'équation ci-dessus est exactement l'équations différentielle des orbites du système (3.1).

Définition 3.1.3 *Un facteur intégrant pour $\omega = 0$ est une fonction de classe C^1 , $\mu : U \rightarrow \mathbb{R}$ qui rend $\mu\omega$ une forme exacte dans le cas où U est simplement connexe ceci est équivalent à*

$$\frac{\partial(-\mu f_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial(\mu f_1)}{\partial x_1} \quad (3.5)$$

Remarque 3.1.2 μ est un facteur intégrant de (3.4) si et seulement si $v = \frac{1}{\mu}$ est un facteur intégrant inverse de (3.1) dans le domaine approprié.

3.2 Non existence des cycles limites via le facteur intégrant inverse

Théorème 3.2.1 *Soit $v : U \rightarrow \mathbb{R}$ un facteur intégrant inverse de (3.1) si $\gamma \subset U$ est un cycle limite de (3.1), alors γ est contenu dans l'ensemble $v^{-1}(0) = \{(x_1, x_2) \in U, v(x_1, x_2) = 0\}$*

Remarque 3.2.1 *Il est possible d'imposer certaines conditions sur (3.5) pour déterminer des cas spéciaux du facteur intégrant.*

Notre premier résultat est une observation que ces techniques peuvent être adaptées pour exclure l'existence des cycles limites.

Proposition 3.2.1 *Soit U un ensemble ouvert simplement connexe, supposons que le champ de vecteurs*

$$F = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$$

Si l'une des conditions suivantes satisfait alors (3.1) ne possède pas de cycle limite dans U

1) La fonction $\alpha_i = \text{div}(F) / f_i$ ne dépend que de x_i pour $i \in \{1, 2\}$ et elle est continue.

2) La fonction $\beta_i = \text{div}(F) / (f_1 x_2 + f_2 x_1)$ dépend de $Z = x_1 x_2$ et elle est continue.

Preuve. On considère le cas (1) avec α_1 dépend uniquement de x_1 , on cherche un facteur intégrant inverse, utilisons l'équation associée

$$f_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) v.$$

Supposons que v dépend uniquement de x_1 , donc l'équation précédente se réduit à :

$$f_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) v$$

qui est réécrite sous la forme

$$\frac{\partial \log v}{\partial x_1} = \frac{1}{f_1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) = \alpha_1$$

3.2. NON EXISTENCE DES CYCLES LIMITES VIA LE FACTEUR
INTÉGRANT INVERSE

De l'hypothèse $v = \exp \left(\int^{x_1} \alpha_1(s) ds \right)$ est un facteur intégrant inverse et $v^{-1}(0) = \emptyset$, donc d'après le théorème (3.2.1), le système (3.1) ne possède pas des cycles limites. ■

exemple 3.2.1 *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^3x_2^2 - x_2^2 - 1 \end{cases}$$

On a $\operatorname{div}(F) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) = 2x_2 + 2x_1^3x_2 - 2x_2 = 2x_1^3x_2$

Alors $\frac{\operatorname{div}(F)}{f_1} = x_1^2$ est une fonction de x_1 et continue.

Donc d'après la proposition (3.2.1), le système ne possède pas des cycles limites.

On peut appliqué le théorème(3.2.1)

En effet

Soit v un facteur intégrant inverse, utilisons l'équation associée

$$f_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) v.$$

supposons que v dépend uniquement de x_2 , donc l'équation précédente se réduit à

$$f_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) v$$

qui est réécrite sous la forme

$$\frac{\partial \log v}{\partial x_2} = \frac{1}{f_2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) = \alpha_1 = x_1^2$$

De l'hypothèse $v = \exp \left(\int^{x_1} x_1^2 ds \right)$ est un facteur intégrant inverse et $v^{-1}(0) = \emptyset$ (car $\exp \left(\int^{x_1} x_1^2 ds \right) > 0$), donc d'après le théorème précédent, ce système ne possède pas des cycles limites.

exemple 3.2.2 *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + ax_1^2 + bx_2^3 \cos x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

On a $\operatorname{div}(F) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) = 2\alpha x_1$

on a $\frac{\operatorname{div}(F)}{f_2} = 2\alpha$ est une fonction continue .

Donc d'après la proposition (2.1.1) , le problème ne possède pas des cycles limites.

On peut appliquer le théorème(3.2.1)

En effet :

Soit v un facteur intégrant inverse, utilisons l'équation associée

$$f_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) v.$$

supposons que v dépend uniquement de x_2 , donc l'équation précédente se réduit à

$$f_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) v$$

qui est réécrire sous la forme

$$\frac{\partial \log v}{\partial x_2} = \frac{1}{f_2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) = \alpha_2 = 2a$$

De l'hypothèse $v = \exp \left(\int^{x_2} 2a \, ds \right)$ est un facteur intégrant inverse et

$v^{-1}(0) = \emptyset \left(\text{car } \exp \left(\int^{x_2} 2a \, ds \right) > 0 \right)$, donc d'après le théorème précédent,

ce système ne possède pas des cycles limites.

Maintenant, utilisons la proposition (3.1.1) pour étudier quelques systèmes spéciaux. considérons l'équation

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1(x_1) r_2(x_2) \\ \dot{x}_2 = s_1(x_1) \end{cases} \quad (3.6)$$

on a le résultat suivant.

3.2. NON EXISTENCE DES CYCLES LIMITES VIA LE FACTEUR
INTÉGRANT INVERSE

Corollaire 3.2.1 *Si $r_1(x_1) > 0$ (< 0) alors (3.6) ne possède pas des cycles limites dans U .*

Preuve. En effet l'expression

$$\frac{\operatorname{div}(F)}{f_1} = \frac{r_1'(x_1)}{r_1(x_1)}$$

est continue et dépend uniquement de x_1 , donc le résultat découle de la proposition (3.1 .1). ■

exemple 3.2.3 *considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (2 + \sin(x_1))(x_2^3 - x_2^2 + x_2) \\ \dot{x}_2 = x_1^4 + 5x_1 \end{cases}$$

Il ne possède pas des cycles limites car $(2 + \sin(x_1)) > 0$

Remarque 3.2.2 *Le portrait de phase d'équation différentielle essentiellement ne change pas si on multiplie le champ de vecteur par une fonction non nulle.*

Lemme 3.2.1 *Supposons que le système (3.1) a une cycle limite α*

et $\beta : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positive (négative) à valeur réelles, alors α est un cycle limite du système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \beta f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = \beta f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.7)$$

Maintenant, utilisons le lemme (3.2.1), on obtient une généralisation de nos résultats.

Proposition 3.2.2 *Soit U un ensemble ouvert simplement connexe.*

Supposons que $\beta : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positive (négative) de classe C^1 telle que $\operatorname{div}(\beta F)/\beta f_i$, dépend uniquement de x_i pour $i \in \{1, 2\}$ et elle est continue, alors (3.1) ne possède pas des cycles limites dans U .

3.3 Critère de Bendixon

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (3.8)$$

Soit $X = (P, Q)$ le champ de vecteur associé à (3.8) .

Dans une région simplement connexe D du plan si

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

est non nulle et de signe constant (> 0 ou < 0) alors il ne peut avoir des solutions périodiques pour (3.8) entièrement contenues dans D .

Preuve. supposons qu'il existe une solution périodique γ de période T contenues dans D . Elle est représentée par une trajectoire fermée dans le plan.

Soit G l'intérieur de cette trajectoire. D'après le formule de Green on a :

$$\begin{aligned} \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{\gamma} P(x, y) dy - Q(x, y) dx \\ &= \int_0^T \left[P(x, y) \frac{dy}{dt} - Q(x, y) \frac{dx}{dt} \right] dt \\ &= \int_0^T 0 dt = 0 \end{aligned}$$

Contradiction avec $\operatorname{div} X = 0$.

\Rightarrow Il ne peut avoir des solutions périodiques contenues dans D . ■

exemple 3.3.1 Soit l'équation de Liénard

$$\ddot{x} + f(x) \dot{x} + x = 0 \quad (3.9)$$

avec $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$(3.9) \iff \begin{cases} \dot{x} = y = P(x, y) \\ \dot{y} = \ddot{x} = -f(x)y - x = Q(x, y) \end{cases}$$

on a

$$\operatorname{div}(P, Q) = -f(x) < 0$$

Donc d'après le **Critère de Bendixon** il ne peut avoir des solutions périodiques pour (3.9) .

3.4 Critère de Dulac

Dans un région simplement connexe D , s'il existe une fonction $h(x, y) \in C^1(D)$, pour laquelle $\operatorname{div}(hX) \neq 0$ et de signe constant, et s'annule au plus sur un ensemble de mesure nulle dans ce cas le système (3.8) ne peut avoir des solutions périodiques entièrement contenue dans D .

exemple 3.4.1 Soit l'équation

$$\ddot{x} + b\dot{x} - \beta x^2 + ax - \alpha x^2 = 0$$

montrons cette équation ne possède pas des solutions périodiques.

prenons $\Psi(x, y) = be^{-2\beta x}$ $b \neq 0$

l'équation est $\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -by + \beta x^2 - ax + \alpha x^2 \end{cases}$

On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(hX) &= \frac{\partial(hP)}{\partial x} + \frac{\partial(hQ)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(bye^{-2\beta x}) + \frac{\partial}{\partial y}(be^{-2\beta x}[-by + \beta x^2 - ax + \alpha x^2]) \\ &= -2\beta b ye^{-2\beta x} + be^{-2\beta x}(-b + 2\beta y) \\ &= -b^2 e^{-2\beta x} < 0 \end{aligned}$$

D'après le **Critère de Dulac** cette équation ne possède pas des solutions périodiques.

3.5 Méthode pour obtenir les fonctions de Dulac

La liste des fonctions h données ci-dessus ne sert qu'à un nombre limité de système. On discute quelques situation plus générales.

On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (*)$$

CHAPITRE 3. NON EXISTENCE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES

1. Premièrement, proposons une autre fonction positive ou négative $K(x_1, x_2)$ qui s'annule seulement sur l'ensemble de mesure nulle telle qu'elle satisfasse

$$\frac{\partial (f_1 h)}{\partial x_1} + \frac{\partial (f_2 h)}{\partial x_2} = K(x_1, x_2)$$

2. Maintenant choisissons K pour obtenir quelques résultats. Alors prenons $K(x_1, x_2) = c(x_1, x_2) \times h(x_1, x_2)$, avec c est une fonction positive ou négative qui s'annule uniquement sur l'ensemble de mesure nulle, et substituons cette relation dans l'équation précédente pour obtenir l'expression suivante

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + h \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) = c(x_1, x_2) \times h(x_1, x_2) \quad (3.10)$$

On peut réécrire cette équation

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = h \left(c(x_1, x_2) - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \right) \quad (3.11)$$

3. Trouvons la solution de cette équation aux dérivées partielles quasi-linéaire du premier ordre.

4. Finalement, voyons si h est une fonction de Dulac pour le système (*)

Jusqu'ici, on a construit une méthode qui nous permet d'écarter les orbites périodiques associées au système d'équations différentielles dans le plan telle qu'elle est résumée dans ce qui suit.

Théorème 3.5.1 *pour le système d'équations différentielles (*) une solution h du système associées (3.11) (pour quelques fonctions c qui ne changent pas de signe et s'annulent seulement sur un sous-ensemble de mesure nulle), est une fonction de Dulac pour le système (*) dans tout région A simplement connexe contenu dans $D \setminus \{h^{-1}(0)\}$.*

Corollaire 3.5.1 *pour le système d'équations différentielles (*), si (3.11) (pour quelques fonctions c qui ne changent pas de signe et s'annulent seulement sur un sous-ensemble de mesure nulle) a une solution h sur D telle que h ne change pas de signe et s'annule sur un sous-ensemble de mesure nulle, alors h est une fonction de Dulac pour le système (*) sur D .*

Remarque 3.5.1 *Avec le choix de K dans l'étape 2, on obtient une équation linéaire (*) qui est simple à manipuler.*

Remarque 3.5.2 *Avec le choix de c est utilisé pour simplifier l'équation (3.10), on peut toujours prendre c une constante non nulle.*

3.5.1 Quelques applications pour l'obtention des fonctions de Dulac

exemple 3.5.1 *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) \\ \dot{x}_2 = 3x_1^2 x_2 \end{cases}$$

Remplaçons dans l'équation (3.11), on a l'expression

$$x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) \frac{\partial h}{\partial x_1} + 3x_1^2 x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = h [c(x_1, x_2) - (2x_1 x_2^2 (1 - \cos x_2) + 3x_1^2)]$$

qui est une équation différentielle aux dérivées partielles quasilinéaire.

En appliquant la méthode des caractéristiques, on obtient le système associé suivant

$$\begin{cases} dx_1 = x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) dt \\ dx_2 = 3x_1^2 x_2 dt \\ dh = h [c(x_1, x_2) - (2x_1 x_2^2 (1 - \cos x_2) + 3x_1^2)] dt \end{cases}$$

des deux premières équation, on élimine le paramètre t , on obtient

$$3x_1^2 x_2 dx_1 = x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) dx_2$$

Résolvons cette équation, on obtient la première caractéristique

$$3x_1 \mid x_2 \sin x_2 + \cos x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 = c_1$$

Prenons $c = 3x_1^2$ dans la dernière équation et on multiplie l'équation par x_1 , on trouve

$$x_1 dh = h (2x_1 x_2^2 (1 - \cos x_2)) dt$$

que l'on peut écrire comme suit, en remplaçant dans la première équation

$$x_1 dh = -2h dx_1$$

et résolvons, on trouve $h = \frac{c_2}{x_1^2}$.

Notons que h est une fonction de Dulac pour le système donné en $x_1 > 0$ ou $x_1 < 0$, en particulier s'il ya une orbite périodique, elle doit couper $x_1 = 0$ qui n'est pas possible.

exemple 3.5.2 *Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2x_2^2 \cos x_1 + (1 + x_1^2)x_2 + x_2^2 \end{cases}$$

Remplaçons dans l'équation (3.11), et prenons $c = 1 + x_1^2$, on obtient

$$-2x_1x_2 \frac{\partial h}{\partial x_1} + x_1^2x_2^2 \cos x_1 + (1 + x_1^2)x_2 + x_2^2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = -h (2x_2x_1^2 \cos x_1)$$

Supposons que h dépend uniquement de x_1 on a

$$-2x_1x_2 \frac{\partial h}{\partial x_1} = -h (2x_2x_1^2 \cos x_1)$$

Alors la solution est

$$h = \exp \left(\int x_1 \cos x_1 \right)$$

Cet exemple donne une fonction de Dulac complètement différente de celles indiquées dans la remarque (1.1).

Bibliographie

- [1] **D.W.Jorden and P. Smith**, Oxford, New York, Third edition 1999. Nonlinear ordinary differential equations, Discrete and Continuous Dynamical systems 17 (2007), 529-540.
- [2] **Eric Benoit**, Polycopié du cours : Equation différentielle CIMPA (2008).
- [3] **J. Hale and H. kocak**, Dynamics and bifurcations springer_Verlog, New Yourk, 1991.
- [4] **Polycopies de Cours de Master deux**, Introduction aux systèmes dynamiques.
- [5] **Perko**, Differential equation and dynamical systemes(2001).