République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques appliqués**

Par :Tébaibia Asma

M^r^. Sellami Nabil

Intitulé

Sur les équations différentielles à coefficients périodiques

Dirigé par :

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Bouattia Yassine	MCB	UnivGuelma
RAPPORTEUR	Dr. Sellami Nabil	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Badi Sabrina	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2016

Dédicaces

C'est avec une très grande émotion et un immense plaisir que je dédie ce modeste travail à:

Mes parents tout deux ont su m'apprendre le respect,

la volonté et tant d'autres valeurs importantes

Mes frères Ilyes et Choaib et mes soeurs Imen, Zina et Nada et ma cousine Amira

Et je n'oublie pas mon fiancé qui m'a implanté le courage et l'amour du travail.

A tout les membres de ma famille paternelle et maternelle.

A ma chère amie Ibtissam qui m'a beaucoup aidé durant ces années d'études.

Mes collèges de départements, je remercie chacun de vous pour le soutien et l'aide qu'il m'a apporté.

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord M. Sellami Nabil, qui m'a encadré, tout au long de ce mémoire. Je lui apporte aussi toute ma reconnaissance pour son attention, ses conseils et son écoute qui ont été nécessaires pour la bonne réussite de ce travail. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

J'adresse tout particulièrement mes remerciements à mes professeurs.

J'exprime également ma gratitude à monsieur le chef de département qui a été toujours disponible pour nous.

Enfin, je ne saurai oublier de remercier mes parents.

Résumé

Dans ce mémoire, on étudie les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques.

On commence par l'étude des équations différentielles linéaires autonomes et non autonomes, puis on passe à la théorie des équations différentielles non autonomes à coefficients périodiques. On introduit les notations de base de cette théorie qui nous permettent de connaitre les propriétés et le comportement des solutions.

Enfin, on se restreint, à l'étude des solutions périodiques pour des équations différentielles d'ordre 2 à coefficients périodiques.

Introduction

En mathématiques, une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées.

L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques par exemple pour les études de la radioactivité ou de la mécanique céleste.

Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

La théorie des équations différentielles linéaires périodiques connue sous le nom de théorie de Floquet-Lyapunov a été développée à l'origine pour des équations linéaires à variables complexes par G.Floquet en 1883. [3] ensuite par Lyapunov.

Ce mémoire comporte trois chapitres. Dans le premier chapitre on rappelle certaines notations préliminaires sur les systèmes différentiels linéaires autonomes et non autonomes.

Pour les systèmes autonomes, on donne la formule de leurs solutions explicites qui se base sur le calcul de l'exponentielle d'une matrice.

Pour les systèmes non autonomes, on définie la notion de matrice fondamentale de solutions qui représente la base des autres solutions du système.

Le second chapitre est consacré à la recherche des solutions pour des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques.

Nous introduisons les notations des matrices fondamentales et de monodromies et les multiplicateurs caractéristiques et les exposants caractéristiques et leurs relations avec les solutions

Dans le dernier chapitre, nous allons présenter deux résultats sur les solutions périodiques pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients périodiques.

Table des matières

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Systèmes autonome et non autonome

Considérons le système de n équations différentielles du 1^er ordre

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f\left(t, x\right) \tag{1.1}$$

telle que

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

On suppose que les f_i sont de classe $C^n \left(n \geqslant 1\right)$ en x et t. Par un changement de variables approprié, les EDO d'ordre n $(n > 1)$ peuvent se transformer en un système de n équations différentielles d'ordre 1 (la forme normale).

Exemple 1.1

Soit

$$\frac{d^n x}{dt^n} = x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-1)}) \tag{1.2}$$

posons $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \ddot{x}, \cdots$, on trouve

$$(1.2) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \cdots \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \end{cases}$$

Le système (1.1) est dit non autonome lorsque la variable indépendante t apparait explicitement dans l'éxprésion de f, dans le cas contraire il est dit autonome et on écrit

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \tag{1.3}$$

La solution du système (1.3) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ sera notée $x(t, x_0)$ elle décrit dans l'espace des phases $x = (x_1, ..., x_n)$ une courbe appellé trajectoire ou orbite .

Lorsque le champ de vecteurs f dépend explicitement du temps (non autonome) la courbe $x(t, x_0)$ dépend de t_0, dans le cas où le système est autonome la trajectoire ne dépend pas de t_0.

Stabilité

Définition 1.1

1. Une solution φ de

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.4}$$

est stable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| < \varepsilon \text{ si } \|\varphi(0) - \psi(0)\| < \delta_\varepsilon$$

pour tout t, pour toute solution ψ de (1.4) .

2. Une solution φ de (1.4) est asymptotiquement stable si elle est stable et si toute solution ψ qui part assez proche de φ approche φ pour $t \longrightarrow \infty$.

1.2 Systèmes linéaires autonomes

1.2.1 Systèmes linéaires autonomes homogènes

Définition 1.2

On appelle système linéaire autonome homogène tout système de la forme

$$\dot{x}(t) = A.x(t), \qquad t \in I \tag{1.5}$$

où $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice constante.

Proposition 1.1

Soient $(x_1, ..., x_n)$ les n solutions de (1.5), soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Elle sont linéaiement indépendantes si et seulement si $x_1(t_0), ..., x_n(t_0)$ sont n vecteurs linéairement indépendants.

1. Soit A diagonalisable. cela veut dire que A admet n vecteurs propres V_i linéairement indépendants associés à n valeurs propres $\lambda_i \in I$, non nécessairement distinctes; cela est aussi équivalent à dire que $A = PDP^{-1}$où P est une matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs propres de A et D est une matrice diagonale ayant sur la diagonale les valeurs propres de A. Alors, les n fonctions $t \longrightarrow e^{\lambda_i t}V_i$ sont à chaque instant t, linéairement indépendant et forment donc une base pour S^0 : l'ensemble de toutes les solutions de (1.5).Cela implique que la solution générale de (1.5) est

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c^{\lambda_i t} V_i, \alpha_i \subset I$$

2. Supposons que $I = \mathbb{R}$, et que A ne soit pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais sur $\mathbb{C}$. Soient $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2, \ldots, \lambda_m, \lambda_m \in \mathbb{C}, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l \in \mathbb{R}$ les valeurs propores de A (pas néccssairememt distinctes) et $v_1, \bar{v}_1, v_2, \bar{v}_2, \ldots, v_m, \bar{v}_m \in \mathbb{C}^n, w_1, \ldots, w_l \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs propres associés $(2m + l = n)$.

Les fonctions $t \longrightarrow \operatorname{Re}\left(e^{\lambda_i t}V_i\right), t \longrightarrow \operatorname{Im}\left(e^{\lambda_i t}V_i\right), i1, \ldots, m, t \longrightarrow e^{\mu_i t}W_i, i = 1, \ldots, l$ sont $2m + l$ solutions réelles linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.1 Une deuxième méthode pour obtenir la solution générale réelle consiste à considérer la partie réelle de la solution générale complexe.

3. Dans le cas générale on travaille avec l'expenentiel de A.

Théorème 1.1

Soit le système d'équations linéaires homogènes autonomes (1.5), sa solution générale est donnée par

$$x(t) = e^{At}.V \tag{1.6}$$

Preuve

On a

$$x(t) = e^{At}.V \Longrightarrow \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{At}.V\right) = A.e^{At}.V = A.x(t)$$

Définition 1.3

Une matrice fondamentale de solutions est une matrice M dont les colonnes sont n solutions linéairement indépendantes de (1.5).

Théorème 1.2

1) La matrice $M(t) = e^{At}$ est une matrice fondamentale de solutions, c'est-à-dire que ses colonnes sont n solutions linéairement indépendantes de (1.5).

2) N'importe quelle matrice fondamentale $M(t)$ satisfait

$$M(t) = e^{At}M(0)$$

Remarque 1.2

La solution générale de (1.5) est

$$X(t) = M(t)V$$

si $M(t)$ est une matrice fondamentale de solutions.

1.2.2 Systèmes linéaires autonomes non homogènes

Définition 1.4

On appelle système linéaire autonome non homogène tout système de la forme

$$\dot{x} = Ax + b(t) \tag{1.7}$$

Théorème 1.3

La solution générale de (1.7) est

$$x(t) = x_{GH}(t) + x_p(t)$$

où $x_{GH}(t) = e^{At}$ est la solution générale de $\dot{x} = Ax$ et $x_p(t)$ est la solution particulière de (1.7).

Recherche de $x_p(t)$:

Comment trouver une solution $x_p(t)$? Il y'a deux méthodes :

1. Si on connait e^{At}, on cherche une solution de la forme $e^{At}W$. On trouve que

$$x_p(t) = \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s)\, ds$$

est une solution particulière.

2. En générale, si $M(t)$ est une matrice fondamentale de solutions, où $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sont ses n colonnes on peut chercher une solution de la forme

$$x_p(t) = \alpha_1(t) M_1(t) + \cdots + \alpha_n(t) M_n(t)$$

On trouve quc

$$\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \ldots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = M^{-1}(t)\, b(t)$$

Exemple 1.2

Soit le système (1.5) pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de A sont $1, 3, -2$. A est donc diagonalisable. Les vecteurs propres sont respectivement

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solution générale est donc une combinaison linéaire de

$$e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 1.4

Les solutions de (1.5) sont asymptotiquement stables si toute valeur propre de A est à partie réelle strictement négative, ou bien est à partie réelle nulle et le bloc correspondant est diagonalisable.

La stabilité du

$$\dot{x} = Ax(t) + b(t)$$

est la même que la stabilité du (1.5)

1.3 Systèmes linéaires non autonomes

Définition 1.5

Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n à termes réelles, soit n^2 fonctions $t \longrightarrow a_{ij}(t)\,(i, j = 1 \cdots n)$ définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si pour tout $i, j = 1, \ldots, n$ $a_{ij} \in C(I, \mathbb{R})$, le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \qquad \cdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases} \tag{1.8}$$

s'appelle système différentiel linéaire du 1^{er} ordre (où $b_i \in C(I, \mathbb{R})$).

Si on note par

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

et

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

et

$$b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Alors le système (1.8) s'écrit

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t), \qquad t \in \mathbb{R} \tag{1.9}$$

Si $b(t) \neq 0$, le système est appelé système linéaire non homogène.

Si $b(t) = 0$ alors (1.9) est appelé système linéaire homogène,.il devient

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

1.3.1 Système linéaire non autonome homogène

Proposition 1.3

Soit S^0 l'ensemble de toutes les solutions de (1.9) alors, S^0 est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

Définition 1.6

Une famille de fonctions $(\varphi_i(t))_{i=1}^m$ définie sur un intervalle I est dite libre sur I si $\forall (\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i(t) & = & 0, \forall t \in I \Longrightarrow \alpha_i = 0, \forall i = 1, \ldots, n \\ & \Updownarrow & \\ \varphi_i & : & I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t & \longrightarrow & \varphi_i(t) = \begin{bmatrix} \varphi_{1i} \\ \vdots \\ \varphi_{ni} \end{bmatrix} i = 1, \cdots, n \end{array}$$

Définition 1.7

Une famille de fonctions $(\varphi_i(t))_{i=1}^n$ (n l'ordre de la matrice $A(t)$ de (1.10))

$$\varphi_i(t) = \begin{bmatrix} \varphi_{1i} \\ \vdots \\ \varphi_{ni} \end{bmatrix}$$

est une solution de (1.10) $\forall i = 1, \ldots, n$ si

$$\dot{\varphi}_i(t) = A(t)\varphi_i(t), \forall t \in I, \forall i = 1, \ldots, n$$

Remarque 1.3

La famille de fonctions $(\varphi_i(t))_{i=1}^n$ constitue un système fondamental de solution de (1.9) si elle est libre sur I.

Le système (1.9) possède un système fondamental de solutions et $\dim S^0 = n$.

Définition 1.8

Une famille matricielle $\phi : t \in I \longrightarrow \phi(t) = (\varphi_1 \cdots \varphi_n)$ définie sur un intervalle I où

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n1}(t) \end{pmatrix}, \ldots \varphi_n = \begin{pmatrix} \varphi_{1n}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$\left(\varphi_{ij} : t \in I \longrightarrow \varphi_{ij}(t) \in \mathbb{R}\right)$ s'appellle matrice fondamentale de solution du système (1.8) si ses colonnes $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ forment un système fondamental de solutions de (1.8)

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \ldots \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \ldots \varphi_{2n}(t) \\ & \ldots & \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \ldots \varphi_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

Définition 1.9

Soit $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ un système de n solutions de (1.9) alors le déterminant

$$w(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

s'appelle le wronskien de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.

Solution générale de (1.9) :

Proposition 1.4

Soit S l'ensemble de toutes les solutions de (1.8) et S^0 l'ensemble de toutes les solutions de (1.9) alors $S = S^0 + \omega$ où ω est une solution quelconque de (1.8)

Résolution de (1.9) :

Pour (1.9) il n'y a pas une méthode générale de trouver un système fondamental de solution de (1.10) .

Si on peut trouver un système fondamental de solution $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ de (1.10), on peut trouver une solution (particulière) ω de (1.9) par une méthode qui s'appelle méthode de variation des constantes.

Méthode de variation des constantes :

Soit $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ un système fondamental de solution de (1.9), on note par

$$\phi(t) = (\varphi_{1,} \ldots, \varphi_n) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{2n} \\ & \vdots & \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors la solution générale de (1.8) est :

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$$

où les c_k sont des constantes réelles quelconques, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x &= c_1 \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \\ \vdots \\ \varphi_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \\ \vdots \\ \varphi_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} \varphi_{1n} \\ \varphi_{2n} \\ \vdots \\ \varphi_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\varphi_{11} + c_2\varphi_{12} + \cdots + c_n\varphi_{1n} \\ c_1\varphi_{21} + c_2\varphi_{22} + \cdots + c_n\varphi_{2n} \\ \vdots \\ c_1\varphi_{n1} + c_2\varphi_{n2} + \cdots + c_n\varphi_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ & \vdots & & \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquant, si on note par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, on obtient

$$x_0(t) = \phi(t)\, C$$

La méthode de variation des constantes consiste en la recherche de ω de la forme

$$\omega(t) = \phi(t)\, C(t)$$

La recherche de $C(t)$:

$$\dot{\omega}(t) = \dot{\phi}(t)\, C(t) + \phi(t)\, \dot{C}(t)$$

et comme

$$\dot{\phi}(t) = A(t)\, \phi(t)$$

donc

$$\begin{aligned} \dot{\omega}(t) &= A(t)\, \phi(t)\, C(t) + \phi(t)\, \dot{C}(t) \\ &= A(t)\, \omega(t) + \phi(t)\, \dot{C}(t) \qquad \forall t \in I \end{aligned}$$

Donc pour que ω soit une solution de (1.7), il suffit de prendre

$$\phi(t)\, \dot{C}(t) = b(t)$$

ce qui donne :

$$\dot{C}(t) = \phi^{-1}(t)\, b(t)$$

$\left(\exists \phi^{-1}(t), \phi(t) \text{ est une matrice fondamentale de solution}\right)$

alors

$$C(t) = \int \phi^{-1}(t)\, b(t)\, dt$$

Donc

$$\omega(t) = \phi(t) . \int \phi^{-1}(t)\, b(t)\, dt$$

et la solution générale de (1.7) est :

$$x(t) = \phi(t)\, C + \phi(t) . \int \phi^{-1}(t)\, b(t)\, dt$$

Exemple 1.3

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-2}{t^2} x_1 + \frac{2}{t} \end{cases} , t \in \mathbb{R}^*$$

Montrer que

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice fondamentale de ce système.

Solution

1. On a

$$\dot{\phi}(t) - \begin{pmatrix} 2t & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$A(t)\,\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \dot{\phi}(t) .$$

2. On a $\det(\phi(t)) = t^2 \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}^*$

D'aprés 1 et 2 on trouve que $\phi(t)$ est une matrice fondamentale donc la solution de ce système est

$$x(t) = \phi(t)\, C$$

Chapitre 2

Systèmes linéaires à coefficients périodiques

2.1 Systèmes linéaires homogènes à coefficients périodiques

Définition 2.1. On appelle Système linéaire homogène à coefficients périodiques tout système de la forme

$$\dot{x} = A(t)\,x \tag{2.1}$$

où A est une matrice $n \times n$ de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que

$$A(t+T) = A(t) \;\; \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

On appelle période de A le nombre $T \in \mathbb{R}$.

Soit $\phi(t)$ une matrice fondamentale, alors la solution du système (2.1) est

$$X(t) = \phi(t)\,.C$$

Lemme 2.1

Si $\phi(t)$ est une matrice fondamentale alors on a $\psi(t) = \phi(t) B$ est une matrice fondamentale pour n'importe quelle matrice constante non singulière B.

Preuve

On a $\phi(t)$ et B sont non-singulier alors l'inverse de $\psi(t)$ est $B^{-1}\phi^{-1}(t)$ qui ce donne que $\psi(t)$ et aussi non-singulier et de plus

$$\dot{\psi} = \dot{\phi}B = A\phi B = A\psi$$

alors $\dot{\psi}(t) = A\psi(t)$.

Théorème 2.1 Soit $\phi(t)$ est une matrice fondamentale de solutions pour (2.1) alors $\psi(t)$ définie telle que

$$\psi(t) = \phi(t+T), \forall t \in \mathbb{R}$$

est aussi une matrice fondamentale.

Preuve. Soit $\phi(t)$ est une matrice fondamentale de solutions pour (2.1)

On a :

$$\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

Soit $\psi(t)$ une matrice telle que

$$\psi(t) = \phi(t+T), \forall t \in \mathbb{R}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}(t) &= \dot{\phi}(t+T), \forall t \in \mathbb{R} \\
&= A(t+T)\phi(t+T) \\
&= A(t)\psi(t), \forall t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

car A est T-périodique. Donc ψ vérifie l'équation (2.1).

De plus, comme ϕ est une matrice de solutions, son déterminant est non nul :

$$\det\left(\phi\left(t\right)\right) \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

d'où

$$\det\left(\phi\left(t+T\right)\right) \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Par conséquant, ψ est inversible et vérifie (2.1). C'est une matrice fondamentale de solutions.

Comme $\phi\left(t\right)$ est une matrice fondamentale de solutions pour (2.1)

D'aprés le résultat précédent, ψ et ϕ sont deux matrices fondamentales de solutions pour (2.1), donc il existe une matrice canstante C telle que

$$\phi\left(t+T\right) = \phi\left(t\right)C \tag{2.3}$$

d'où

$$C = \phi^{-1}\left(t\right)\phi\left(t+T\right) = \phi^{-1}\left(0\right)\phi\left(T\right)$$

Si on suppose que $\phi\left(t\right)$ est telle que $\phi\left(0\right) = I$, on note $\phi\left(t\right) = \phi\left(t,0\right)$ alors $\phi^{-1}\left(0\right) = I$ d'où

$$C = \phi\left(T,0\right) \tag{2.4}$$

Alors (2.3) devient

$$\phi\left(t+T,0\right) = \phi\left(t,0\right)\phi\left(T,0\right) \tag{2.5}$$

La matrice inversible C définie par (2.4) est appelée matrice principale ou de monodromie du système $\left(2.1\right)$.

Observant que C dépend de la matrice fondamentale choisie.

Soit $\tilde{\phi}\left(t\right)$ une telle matrice, on a :

$$\tilde{\phi}\left(t+T\right) = \tilde{\phi}\left(t\right)\tilde{C}$$

Il existe une matrice U inversible telle que :

$$\tilde{\phi}(t) = \phi(t)\, U$$

On a :

$$\tilde{C} = \tilde{\phi}^{-1}(0)\,\tilde{\phi}(T) = U^{-1}\phi^{-1}(0)\,\phi(T)\,U = UCU^{-1}$$

$\Longrightarrow C$ et $\tilde{C}$ sont semblables.

On conclut que le spectre de toutes ces matrices C correspondant à des matrices fondamentales différentes est invariant et il est déterminé par le système.

Les valeurs propres de la matrice de monodromie C définie par (2.4) sont appelées les multiplicateurs caractéristiques du système.

Remarque 2.1

$C = \phi(T, 0)\,, \det C \neq 0 \Longleftrightarrow$ Il n'existe aucune valeur propre nulle.

Définition 2.2 (Les multiplicateurs caractéristiques et les exposants caractéristiques) :

Soient $\rho_{1,}\ldots,\rho_n$ les multiplicateurs caractéristiques de (2.4).

Les exposants caractéristiques ou bien les exposants de floquet sont $\mu_1, \ldots, \mu_n$ vérifiant

$$\rho_1 = e^{\mu_1 T}, \rho_2 = e^{\mu_2 T}, \qquad \ldots \qquad \rho_n = e^{\mu_n T}$$

où μ_j pour $j \in \mathbb{N}$ peut être complexe.

Théorème 2.2 (de Floquet)

La matrice fondamentale $\phi(t, 0)$ du système (2.1) peut s'écrire sous la forme

$$\phi(t, 0) = P(t)\, e^{Bt}$$

où $P(t)$ est une matrice régulière T-périodique, $P(t+T) = P(t)\,, P(0) = I$ et B est une matrice constante.

Preuve. Soit B une matrice qui satisfait :

$$e^{BT} = C = \phi(T, 0)$$

on peut écrire :

$$\phi(t, 0) = \phi(t, 0)\, e^{-Bt} e^{Bt}$$

Posons $P(t) = \phi(t, 0)\, e^{-Bt}$

$$\begin{aligned} P(t+T) &= \phi(t+T, 0)\, e^{-Bt} e^{-BT} \\ &= \phi(t, 0)\, \phi(T, 0)\, e^{-Bt} e^{-BT} \\ &= \phi(t, 0)\, e^{BT} e^{-BT} e^{-Bt} = \phi(t, 0)\, e^{-Bt} = P(t) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice B définie par $e^{BT} = \phi(T, 0)$ sont appelés les exposants caractéristiques du système (2.1).

Proposition 2.1

A chaque exposant caractéristique μ, il lui correspondant une solution φ du système (2.1) de la forme

$$\varphi(t) = e^{\mu t} P(t)\,, P(t+T) = P(t)$$

Preuve

Soit w le vecteur propre associé à μ, et soit la solution φ telle que $\varphi(0) = w$; on a

$$\varphi(t) = P(t)\, e^{Bt} w = P(t)\, e^{\mu t} w = e^{\mu t} P(t)\, w = e^{\mu t} p(t)$$

où $p(t) = P(t)\, w$, $p(t+T) = p(t)$

Corollaire 2.1

Le système (2.1) possède une solution T-périodique resp ($2T$-périodique) si et seulement si le nombre 1 (resp (-1)) est un multiplicateur caractéristique.

Preuve

1.Sens nécessaire

Si 1 est un multiplicateur caractéristique de (2.1), alors

$$\exists v \neq 0 \text{ tel que } Cv = v, \phi(T,0)\, v = v.$$

Soit la solution $\varphi(t)$ telle que $\varphi(0) = v$, on a $\varphi(t) = \phi(t,0)\, v$, et

$$\varphi(t+T) = \phi(t+T,0)\, v = \phi(t,0)\, \phi(T,0)\, v = \varphi(t)$$

Si -1 est un multiplicateur caractéristique alors $\exists v \neq 0$ tel que $\phi(T,0)\, v = -v$.
Soit la solution de (2.1) telle que $\varphi(0) = v$,

$$\varphi(t+2T) = \phi(t+2T,0)\, v = -\phi(t+T,0)\, v = \phi(t,0)\, v = \varphi(t).$$

2. Sens suffisant

Si $\varphi_1(t)$ est une solution $T-$périodique non triviale alors

$$\begin{aligned} \varphi_1(t+T) &= \varphi_1(t) \Longrightarrow \varphi_1(T) = \varphi_1(0) \\ &\Longrightarrow \phi(T,0)\,\varphi_1(0) - \varphi_1(0) \longrightarrow (\phi(T,0) - I)\,\varphi_1(0) = 0 \end{aligned}$$

Comme $\varphi_1(0) \neq 0 \Longrightarrow 1$ est un multiplicateur caractéristique du système (2.1).
Si $\varphi_2(t)$ est une solution périodique non triviale de période minimale $2T$; on a :

$$\begin{aligned} \varphi_2(t+2T) &= \varphi_2(t) \\ \varphi_2(2T) &= \varphi_2(0) \Longleftrightarrow C^2\varphi_2(0) = \varphi_2(0), (C = \phi(T,0)) \\ (C^2 - I)\varphi_2(0) &= 0 \Longleftrightarrow (C+I)(C-I)\,\varphi_2(0) = 0 \\ \det(C+I)\det(C-I) &= 0 \end{aligned}$$

Si -1 n'est pas un multiplicateur caractéristique, alors

$$\det(C+I) \neq 0 \Longrightarrow \det(C-I) = 0$$

donc 1 est un multiplicateur caractéristique de (2.1) $\Longrightarrow$ il existe une solution $T-$périodique or la période minimale est $2T$, donc -1 est un multiplicateur caractéristique

$$\det(C+I) = 0, C\varphi_2(0) = -\varphi_2(0).$$

Corollaire 2.2

Si le système (2.1) possède k solutions linéairements indépendantes $T-$périodiques (resp $2T-$ périodiques) alors la multiplicité de multiplicateur caractéristique 1 (resp -1) est au moins égale à k dans le polynôme caractéristique de la matrice de monodromie.

Preuve

Si le système (2.1) possède k solutions périodiques, alors

$$\begin{aligned} \varphi^m(T) &= \varphi^m(0), m = 1, \ldots, k \\ &\Longrightarrow \phi(T,0)\varphi^m(0) = \varphi^m(0), m = 1, \ldots, k \end{aligned}$$

Ceci signifie q'au multiplicateur caractéristique 1 est associé k vecteurs linéairements indépendantes.

c'est-à-dire son sous espace propre est de dimension k.

Si le système (2.1) possède k solutions linéairements indépendantes $2T-$périodiques, alors

$$\phi(T,0)\varphi^m(0) = -\varphi^m(0), m = 1, \ldots, k$$

même raisonnement.

Exemple 2.1. Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left(1 + \frac{\cos(t)}{2+\sin(t)}\right) x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Ici, nous savons que la solution est en générale

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 e^t \left(2 + \sin(t)\right) \\ x_2 &= c_1 e^t \left(2 + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}\cos(t)\right) + c_2 e^{-t} \end{aligned}$$

Que nous pouvons écrire comme

$$x = c_1 e^t \begin{bmatrix} 2 + \sin(t) \\ 2 + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}\cos(t) \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant toutes les définitions ci-dessus, la matrice fondamentale est :

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^t \left(2 + \sin(t)\right) & 0 \\ e^t \left(2 + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}\cos(t)\right) & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Et donc

$$\begin{aligned} C &= \phi^{-1}(0)\,\phi(2\pi) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-3}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{2\pi} & 0 \\ \frac{3}{2}e^{2\pi} & e^{-2\pi} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{2\pi} & 0 \\ \frac{3}{2}e^{2\pi} & e^{-2\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2\pi} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On conclus que, $\rho_1 = e^{2\pi}, \rho_2 = e^{-2\pi}$ et donc $\mu_1 = 1$ et $\mu_2 = -1$, le théorème.2.1 nous dit alors qu'il existe $p_1(t)$ et $p_2(t)$ qui sont $2\pi-$périodiques tels que la solution est de la forme

$$x_1 = e^t p_1(t) \qquad\qquad x_2 = e^{-t} p_2(t)$$

Nous savons que, en fait

$$p_1(t) = \begin{bmatrix} 2 + \sin(t) \\ 2 + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}\cos(t) \end{bmatrix}, p_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Théorème 2.3

Si $A(t)$ est réelle alors il existe une matrice régulière $P(t)$ $T-$périodique, $P(0) = I$, telle que la transformation $x = P(t)z$ transforme le système (2.1) en un système linéaire à coefficients constants.

Preuve

Posons

$$P(t) = \phi(t, 0)\, e^{-Bt}$$

substituons $x = P(t)z$ dans (2.1), on a :

$$\begin{aligned} \dot{P}.z + P.\dot{z} &= APz \\ &\Longrightarrow \dot{z} = P^{-1}\left(AP - \dot{P}\right)z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}\left(AP - \dot{P}\right) &= e^{Bt}\phi^{-1}\left(A\phi e^{-Bt} - \dot{\phi}e^{-Bt} + \phi B e^{-Bt}\right) \\ &\Longrightarrow \dot{z} = Bz \end{aligned}$$

où B est telle que $e^{Bt} = \phi(t, 0)$.

Nous avons défini les exposants caractéristiques du système (2.1), comme les valeurs propres de la matrice B du système $\dot{z} = B.z$.

Si nous définissons ce système comme un système périodique avec la période T, alors sa matrice de monodromie est $\psi(t, 0) = e^{Bt}$.

Donc le système $\dot{z} = B.z$ considéré comme un système à coefficients périodiques a les même multiplications caractéristiques que le système (2.1).

Ceci est un cas particulier d'une propriété générale : si nous transformons le système (2.1) en un autre système par une transformation périodique alors les multiplicateurs de ce nouveau système seront les mêmes que ce dernier système.

Proposition 2.2

Soit $S(t)$ une matrice périodique $S(t+T) = S(t)$, telle que $S^{-1}(t)$ existe alors $S^{-1}(t)$ est aussi périodique.

Preuve

Montrons que $S^{-1}(t+T) = S^{-1}(t)$

$$\begin{aligned} S^{-1}(t+T) &= S^{-1}(t) \Longleftrightarrow S(t+T)\,S^{-1}(t+T) = S(t+T)\,S^{-1}(t) \\ &\Longleftrightarrow I = S(t+T)\,S^{-1}(t) \Longleftrightarrow I = S(t)\,S^{-1}(t). \end{aligned}$$

Théorème 2.4 (Lyapunov)

Soit $S(t)$, $t \in \mathbb{R}^{+}$, une matrice régulière $T-$périodique, la transformation $x = S(t)\,z$ transforme le système (2.1) en un système linéaire à coefficients périodiques dont les multiplicateurs caractéristiques coincident avec ceux du système (2.1).

Preuve

Mettons $x = S(t)\,z$ dans (2.1), on obtient :

$$\dot{S}(t)\,z + S(t)\,\dot{z} = A(t)\,S(t)\,z$$

$z(t)$ satisfait donc le système

$$\dot{z} = S^{-1}(t)\left(A(t)\,S(t) - \dot{S}(t)\right)z \tag{2.6}$$

Cette matrice est continue et $T-$périodique.

Soit $\phi(t,0)$ la matrice fondamentale de (2.1) telle que $\phi(0,0) = I$, alors $\psi(t) = S^{-1}(t)\,\phi(t,0)$ est aussi une matrice fondamentale de (2.6) $(z = S^{-1}(t)\,x, \phi(t,0) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)))$

Les multiplicateurs caractéristiques de (2.6) sont les valeurs propres de $\psi^{-1}(0)\,\psi(T)$

Mais :

$$\begin{aligned}
\psi^{-1}(t)\,\psi(t) &= \phi^{-1}(0,0)\,S(0)\,S^{-1}(T)\,\phi(T,0) \\
&= \phi^{-1}(0,0)\,S(0)\,S^{-1}(0)\,\phi(T,0) \\
&= \phi(T,0) = C
\end{aligned}$$

On a les mêmes matrices de monodromie, donc on a les mêmes multiplicateurs caractéristiques.

Les multiplicateurs caractéristiques est un ensemble invariant d'un système linéaire à coefficients périodiques dans le sens que cet ensemble est invariant par une transformation périodique.

Les propriétés de cet ensemble détermine le comportement des solutions, l'existence d'une solution périodique et la stabilité.

Pour déterminer les multiplicateurs caractéristiques, on a besoin d'une matrice fondamentale c'est-à-dire connaître toutes les solutions.

Pour trouver la transformation qui réduit le système périodique à un système à coéfficient constants, ce n'est pas facile.

Il existe une méthode qui donne des approximations des multiplicateurs.

2.2 Systèmes linéaires non homogènes à coefficients périodiques

Soit le système linéaire périodique non homogène :

$$\dot{x} = A(t)\,x + b(t),\ A(t+T) = A(t),\ b(t+T) = b(t) \tag{2.7}$$

Théorème 2.5

Si le système homogène (2.1) n'a aucune solution périodique à part la solution nulle alors le système (2.7) possède une et une seule solution périodique de période T.

Preuve

On sait qu'il existe une matrice $P(t)$ régulière telle que $x = P(t)\,z$ transforme de (2.1) en

$$\dot{z} = B.z \tag{2.8}$$

où B est une matrice constante.

La même transformation transforme (2.7) en

$$\dot{z} = B.z + P^{-1}(t)\,b(t) \tag{2.9}$$

Si (2.1) n'a aucune solution périodique à part la solution nulle, il est clair que (2.8) n'en a pas aussi, ceci implique que (2.9) a une seule solution périodique.

Et ceci implique que (2.7) a une solution périodique unique de période T.

Corollaire 2.3

Si 1 n'est pas un multiplicateur caractéristique du système (2.1), alors le système (2.7) a une seule solution périodique.

Définition 2.3

Soit le système non homogène à coefficient constants

$$\dot{x} = A.x + b(t) \tag{2.10}$$

où $b(t+T) = b(t)$.

Une solution quelconque de ce système est :

$$\varphi(t) = e^{At}\varphi_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)\,ds, \varphi(0) = \varphi_0$$

Proposition 2.3

φ est une solution périodique si et seulement si $\varphi(T) = \varphi(0)$.

Preuve :

Si $\varphi(t)$ est une solution périodique alors : $\varphi(t+T) = \varphi(t) \Longrightarrow \varphi(T) = \varphi(0)$.

Supposons que $\varphi(t)$ est une solution telle que $\varphi(T) = \varphi(0)$ montrons que $\varphi(t)$ est $T-$périodique.

Soit la fonction $\psi(t) = \varphi(t+T), \psi(t)$ est une solution du système car :

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}(t) &= \dot{\varphi}(t+T) = A\varphi(t+T) + b(t+T) \\
&= A\varphi(t+T) + b(t) = A\psi(t) + b(t)
\end{aligned}$$

Donc $\psi(t)$ est une solution du système. on a

$\psi(0) = \varphi(T) = \varphi(0) \Longrightarrow \psi(t)$ et $\varphi(t)$ sont deux solutions qui ont les mêmes conditions initiales alors $\psi(t) = \varphi(t)$ c'est-à-dire : $\varphi(t+T) = \varphi(t)$, d'aprés l'unicité de la solution.

$\varphi(T) = \varphi(0) \Longleftrightarrow e^{AT}\varphi(0) + \int\limits_0^T e^{A(T-s)} b(s)\, ds = \varphi(0)$.

on pose $\varphi(0) = \varphi_0$.

Proposition 2.4. Soit A une matrice constante $n \times n$, alors

$$(\alpha, \vec{v}) \text{ est un couple propre de } A \Longleftrightarrow \left(e^{\alpha t}, \vec{v}\right) \text{ est un couple propre de } e^{At}.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
A\vec{v} &= \alpha\vec{v} \Longrightarrow A^2\vec{v} = A(A\vec{v}) = A(\alpha\vec{v}) = \alpha^2\vec{v} \\
A^n\vec{v} &= \alpha^n\vec{v} \\
e^{At}\vec{v} &= \left(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \cdots\right)\vec{v} \\
&= \vec{v} + t\alpha\vec{v} + \cdots + \frac{1}{n!}t^n\alpha^n\vec{v} + \cdots \\
&= \left(1 + \alpha t + \cdots + \frac{(\alpha t)^n}{n!} + \cdots\right)\vec{v} = e^{\alpha t}\vec{v}
\end{aligned}$$

Théorème 2.6

Si le système homogène $\dot{x} = Ax$ correspondant au système non homogène (2.10) n'a aucune solution périodique de période T à part la solution nulle, alors le système non homogène a une seule solution périodique de période T.

Preuve

La condition de périodicité est :

$$e^{AT}\varphi_0 + \int_0^T e^{A(T-s)}b(s)\,ds = \varphi_0$$

ou bien

$$\left(e^{-AT} - I\right)\varphi_0 = \int_0^T e^{-As}b(s)\,ds \tag{2.11}$$

φ_0 est l'unique solution de (2.11) $\Longleftrightarrow$ $\det\left(I - e^{-AT}\right) \neq 0$

$\det\left(I - e^{AT}\right) = 0 \Longleftrightarrow 1$ est une valeur propre de e^{AT} ceci se produit si $\frac{2k\pi i}{T}$ est une valeur propre de A ; pour k entier.

On a vu que si $(\alpha, \vec{v})$ est un couple propre de A alors $(e^{\alpha t}, \vec{v})$ est un couple propre de e^{At}.

Si 1 est une valeur propre de e^{At} on a : $e^{At}\vec{v} = \vec{v}$ et $e^{\alpha T} = 1$

$\Longrightarrow \alpha T = 2k\pi i \Longrightarrow \alpha = \frac{2k\pi i}{T}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Le système homogène $\dot{x} = Ax$ a une solution périodique si et seulement si $\frac{2k\pi i}{T}$ est une valeur propre de A.

pour un certain k entier.

La période de cette solution est : $\frac{T}{k}$

Exemple 2.2

$$\dot{x} - x = \cos t \Longrightarrow \dot{x} = x + \cos t, A = 1, b(t) = \cos t, T = 2\pi$$

$\dot{x} = x \Longrightarrow x = ce^{t}$ n'est pas périodique donc d'aprés le théorème 2.4 il existe une seule solution périodique de période 2π.

Cherchons cette solution

$$x = e^t \varphi_0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)} \cos s ds$$

la condition de périodicité est :

$$\begin{aligned}
e^{2\pi}\varphi_0 + \int\limits_0^{2\pi} e^{2\pi - s} \cos s ds &= \varphi_0 \\
\left(1 - e^{2\pi}\right)\varphi_0 &= e^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-s} \cos s ds \\
&= e^{2\pi} \left[\frac{e^{-s}}{2}\left(\sin s - \cos s\right)\right]_0^{2\pi} \\
\left(1 - e^{2\pi}\right)\varphi_0 &= e^{2\pi} \left[-\frac{1}{2}\left(e^{-2\pi} - 1\right)\right] \Longrightarrow \varphi_0 = -\frac{1}{2} \\
&\Longrightarrow x(t) = \varphi(t) = \frac{1}{2}\left(\sin t - \cos t\right)
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Résultats complémentaires sur les solutions pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients périodiques

Dans ce chapitre, nous allons présenter deux résultats sur les solutions périodiques pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients périodiques. Pour cela, nous nous intéressons a une équation de la forme suivante :

$$\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x = c(t) \tag{3.1}$$

avec a, b et c trois fonctions réelles continues et T-périodiques.
Nous allons énoncer deux théorèmes d'existence et d'unicité de solutions périodiques pour une telle équation.

Théorème 3.1

Considérons une équation du type ci-dessus, L'équation homogène associée s'écrit donc :

$$\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x = 0 \tag{3.2}$$

Alors (3.1) admet une solution T-périodique pour toutes fonction $c(t)$ si et seulement si (3.2) n'en a pas

Lemme 3.1. L'équation (3.1) admet une solution T-périodique si et selement s'il existe une solution x vérifiant la condition de périodicité :

$$x(T) = x(0) \qquad\qquad x'(T) = x'(0) \tag{3.3}$$

Démonstration du lemme 3.1 :

Sens nécessaire : Il est évident que si x est une solution T-périodique alors x est au moins de classe C^2 et on a (3.3).

Sens suffisant : Supposons que x est une solution vérifiant (3.3).

Alors x vérifie le problème de cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + a(t)\,\dot{x}(t) + b(t)\,x(t) = c(t) \\ x(0) = \alpha, \qquad x'(0) = \beta \end{cases}$$

On pose y telle que : $y(t) = x(t+T)$.

y vérifie alors le problème de cauchy suivant :

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + a(t+T)\,\dot{y}(t) + b(t+T)\,y(t) = c(t+T) \\ y(0) = \alpha, \qquad y'(0) = \beta \end{cases}$$

Comme a, b et c sont des fonctions T-périodiques, on obtient exactement le même problème de cauchy pour x et y, donc par unicité des solutions, on a que x est une solution T-périodique de (3.1).

Démonstration du théorème 3.1. Considérons maintenant l'équation homogène (3.2). On détermine (x_1, x_2) une base de solution pour (3.2) telle que :

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1 \qquad x_1'(0) = 0 \\ x_2(0) &= 0 \qquad x_2'(0) = 1 \end{aligned}$$

La solution $\bar{x}$ de l'équation (3.3) vérifiant $\bar{x}(0) = A$ et $\bar{x}'(0) = B$ s'écrit alors :

$$\bar{x}(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

De la, par là méthode de variation des constantes, on en déduit la solution x de (3.1) avec $x(0) = A$ et $x'(0) = B$:

$$x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) - x_1(t)\int_0^t \frac{c(u)x_2(u)}{W(x_1,x_2)(u)}du + x_2(t)\int_0^t \frac{c(u)x_1(u)}{W(x_1,x_2)(u)}du$$

où $W(x_1, x_2)(t)$ est le wronskien de x_1, x_2 au point t.

On injecte cette expression dans la condition de périodicité (3.3) :

$$\begin{aligned} x(0) &= Ax_1(0) + Bx_2(0) - x_1(0)\int_0^0 \frac{c(u)\,x_2(u)}{W(x_1,x_2)(u)}du + x_2(0)\int_0^0 \frac{c(u)\,x_1(u)}{W(x_1,x_2)(u)}du \\ x(T) &= Ax_1(T) + Bx_2(T) - x_1(T)\int_0^T \frac{c(u)\,x_2(u)}{W(x_1,x_2)(u)}du + x_2(T)\int_0^T \frac{c(u)\,x_1(u)}{W(x_1,x_2)(u)}du \\ x(0) &= x(T) \Longleftrightarrow A = Ax_1(T) + Bx_2(T) + C_1 \end{aligned}$$

et pour la dérivée, on obtient de la même manière

$$\begin{aligned} x'(0) &= x'(T) \\ B &= Ax_1'(T) + Bx_2'(T) + C_2 \end{aligned}$$

où C_1 et C_2 sont les termes intégrales dépendants de $c(t)$ pris en T.

Donc, de (3.3), on déduit le système suivant sur A et B :

$$\begin{aligned} (1 - x_1(T))\, A - x_2(T)\, B &= C_1 \\ -x_1'(T)\, A + (1 - x_2'(T))\, B &= C_2 \end{aligned}$$

On obtient un unique vecteur $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ solution du système si et seulement si la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 - x_1(T) & -x_2(T) \\ -x_1'(T) & 1 - x_2'(T) \end{pmatrix}$$

est inversible et donc on obtiendrait une unique solution périodique pour (3.1).

Or on est en dimension finie, donc cela équivaut a l'injéctivité de la matrice, ie :

$$P \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquant, cela revient a montrer que P est injective si et seulement si les fonctions x_1 et x_2 ne sont pas T-périodiques.

On montre le sens suffisant par contraposée : supposons que P n'est pas injective.

Alors il existe un vecteur $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ non nul tel que

$$\begin{aligned} (1 - x_1(T))A - x_2(T)\, B &= 0 \\ -x_1'(T)\, A + (1 - x_2'(T))\, B &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient une solution $\bar{x}$ de (3.2) qui serait périodique :

$$\bar{x}(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

A et B étant des constantes. Alors, il est nécessaire et suffisant que x_1 ou x_2 est périodique.

Par conséquent, on obtient un unique vecteur solution $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ donnant une unique solution périodique pour (3.1) si et seulement si x_1 et x_2 ne sont pas T-périodiques

Ceci démontre le théorème 3.1

Remarque 3.1

Ce théorème est un théorème d'unicité : pour toute fonction $c(t)$ il existe une unique solution périodique.

Théorème.3.2

On suppose que $a(t) = 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R}$. Donc l'équation (3.1) s'écrit

$$\ddot{x}(t) + b(t)\,x(t) = c(t) \tag{3.4}$$

où b et c sont des fonctions T-périodiques.

Alors, (3.4) admet une solution périodique si et seulement si on a :

$$\int_0^T \phi(u)\,c(u)\,du = 0$$

pour toute solution périodique ϕ de l'équation homogène associée a (3.4).

Excrcicc

Nous allons se placer dans le cas où $b(t) = n^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$

On considère alors l'équation diffirentielle suivante :

$$\ddot{x}(t) + n^2 x(t) = f(t) \tag{3.5}$$

où n est un entier non nul et f une fonction 2π-périodique.

Montrons que (3.5) admet une solution périodique si et seulement si on a :

$$\int_0^{2\pi} f(u)\cos(nu)\,du = \int_0^{2\pi} f(u)\sin(nu)\,du = 0.$$

Solution :

Sens direct :

Déterminons d'abord les solutions de l'équation homogène associée a (3.5).

On cherche en effet x_1 et x_2 vérifiant

$$x_1(0) = 1, \quad x_1'(0) = 0; \qquad x_2(0) = 0, \quad x_2'(0) = 1$$

On considère le polynôme caractéristique de l'équation homogène dont on a une racine réelle double n .De la, on obtient les solutions x_1 et x_2 qui satisfont :

Pour x_1 :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(nt) + B_1 \sin(nt) \\ x_1(0) &= 1 \\ x_1'(0) &= 0 \end{aligned}$$

d'où $x_1(t) = \cos(nt)$.

Pour x_2 :

$$\begin{aligned} x_2(t) &= A_2 \cos(nt) + B_2 \sin(nt) \\ x_2(0) &= 0 \\ x_2'(0) &= 1 \end{aligned}$$

d'où $x_2(t) = \sin(nt)$.

Donc on obtient la base fondamentale de solutions $(\cos(nt), \sin(nt))$

dont le wronskien en tout point est

$$W(\cos(nt), \sin(nt)) = \begin{pmatrix} \cos(nt) & \sin(nt) \\ -n\sin(nt) & n\cos(nt) \end{pmatrix} = n\cos^2(nt) + n\sin^2(nt) = n.$$

Maintenant, revenons a l'équation (3.5). Soit x une solution périodique de (3.5). Il existe deux réels A et B tels que

$$x(t) = A\cos(nt) + B\sin(nt) - \cos(nt)\int_0^t \frac{f(u)\sin(nu)}{W(\cos(nt),\sin(nt))}du + \sin(nt)\int_0^t \frac{f(u)\cos(nu)}{W(\cos(nt),\sin(nt))}du$$

x étant 2π-périodique, elle vérifie la condition de périodicité et on a alors le système :

$$\begin{aligned}
x(0) &= A\cos(0) + B\sin(0) - \cos(0)\int_0^0 \frac{f(u)\sin(nu)}{n}du + \sin(0)\int_0^0 \frac{f(u)\cos(nu)}{n}du \\
x(2\pi) &= A\cos(2n\pi) + B\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi)\int_0^{2\pi} \frac{f(u)\sin(nu)}{n}du + \sin(2n\pi)\int_0^{2\pi} \frac{f(u)\cos(nu)}{n}du \\
x(0) &= x(2\pi) \Longleftrightarrow A = A + \int_0^{2\pi} \frac{f(u)\cos(nu)}{n}du
\end{aligned}$$

et on fait la même chose pour

$$\begin{aligned}
x'(t) &= -nA\sin(nt) + nB\cos(nt) + n\sin(nt)\int_0^t \frac{f(u)\cos(nu)}{W(\cos(nt),\sin(nt))}du \\
&\quad + n\cos(nt)\int_0^t \frac{f(u)\sin(nu)}{W(\cos(nt),\sin(nt))}du
\end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned}
x'(0) &= x'(2\pi) \\
nB &= nB + n\int_0^{2\pi} \frac{f(u)\sin(nu)}{n}du
\end{aligned}$$

Donc on a les égalités suivantes

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(u)\sin(nu)}{n}du = 0 \quad et \quad n\int_0^{2\pi} \frac{f(u)\cos(nu)}{n}du = 0.$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(u)\sin(nu)du = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(u)\cos(nu)du = 0$$

d'ou la résultat attendu pour $b(t) = n^2$.

Sens réciproque :

On suppose que pour toute fonction f 2π-périodique, on a :

$$\int_0^{2\pi} f(u)\sin(nu)\,du = \int_0^{2\pi} f(u)\cos(nu)du = 0$$

On reprend ce qu'on a déja fait dans le sens direct . Si x est une solution de (3.5) pour une certaine fonction f , alors elle s'écrit :

$$x(t) = A\cos(nt) + B\sin(nt) - \cos(nt)\int_0^t \frac{f(u)\sin(nu)}{n}du + \sin(nt)\int_0^t \frac{f(u)\cos(nu)}{n}du$$

On a donc facilement que

$$x(0) = A \qquad x'(0) = nB$$

mais aussi

$$x(2\pi) = A \qquad x'(2\pi) = nB$$

car les termes intégrales sont nuls.

Donc x vérifie la condition de périodicité (3.3) et est solution de (3.5), c'est-a-dire x est 2π-périodique.

Bibliographie

[1] Marc Diener. Equations différentielles. OPU.1983.

[2] Kray Marie. Perturbation d'un système différentiel ayant une solution périodique. Mémoire 2007.

[3] G.Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coéfficients périodiques. Annales scientifiques de l'E.N.S. 2^{eme} série, tome 12 (1883) $.47 - 88$.

[4] Amar Makhlouf. Cours systèmes dynamiques $1^{ère}$ année Post-graduation. université d'Annaba 2002/2003