République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématique Appliqué**

Par :

Melle. Abdellioui Bouthaina

Intitulé

Equations des vols d'insectes

Dirigé par : **Pr. Aissaoui. Med Zine**

Devant le jury

PRESIDENT	**Mlle.Belhireche hanane**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Pr. Aissaoui. Med Zine**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Pr. Hisao Fujuta Yashima**	**Univ- Guelma**

Session Jin 2016

REMERCIEMENT

En premier lieu et avant tout je tiens à exprimer mes remerciement à 'ALLAH ' qui m'a entouré de sa bienveuillance et m'a renforcé avec le courage et la force pour avoir enfin mené à bien ce travail.

Ensuite, j'exprime mon profonde gratitude à : « Pr .Aissaoui.Med.Z » et « Pr. Hisao Fujita Yashima » pour avoir accepter de me suivre, et mes plus vifs remerciements pour ses soutients, ses patience, ses conseils judicieux, pertinent, ses sympathies dont ils ma fait preuve tout au long de lélaboration de ce travail.

J'adresse également mes remerciements, à tous mes enseignant, qui m'ont donnée les bases de la science, je remercie très sincèrement, les membres de jury pour m'avoir fait l'honneur dévaluer mon travail

Et finalement à tous ceux qui m'ont aidés de prés

ou de loin à accomplir ce travail.

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents qui ont toujours été là pour moi.

A ma chère mère, en témoignage de ma profonde gratitude et de mon incontestable reconnaissance, pour tous les sacrifices qu'elle me contente, tout la confiance qu'elle m'accorde et tout l'amour dont elle m'entour.la plus belle mère du monde.

A mon cher père, qui est le meilleur père dans ce monde, grâce à son encouragement, sa confiance et son soutien moral et matériel et pour son amour infini en exprimant mes gratitudes, mon profond amour et ma passion.

A mes chers frères « djamel,samir et taki» et ma très belle sœur 'Manar'.

A mes collègue «Zayneb,Meryem,ibtissem et souad » et la section M.A 2016.

A toute ma famille et tous ceux qui me sont chers et surtout à ma fiancé 'Rabeh', que 'ALLAH' vous garde.

Bouthaina.

Equations des vols d'insectes

Abdellioui Bouthaina
Mémoire de Master en mathématiques
Université 8 Mai 1945 Guelma

15 juin 2016

Table des matières

Résumé

Dans ce travail, on va étudier un modèle du vol des insectes. D'abord, en prenant l'exemple de libellule, on examine le nombre de Reynolds du mouvement de l'air provoqué par le battement des ailes. Compte tenu que le nombre de Reynolds est grand et que le mouvement du battement des ailes est périodique en t, on propose le développement en série de Fourier de la densité et de la vitesse de l'air. Sous l'hypothèse que l'effet du battement soit décrit approximativement par un terme analogue à une force extérieure, on transforme le système d'équations aux dérivées partielles en un système infini d'équations pour les coefficients de Fourier. A la fin, on propose une approximation par troncature, qui nous donne un système fini d'équations.

Introduction

Pour voler, certains insectes battent ces ailes plusieurs dizaines ou centaines de fois par seconde, malgré sa petite taille chaque insecte a un mécanisme de vol. Parmi les caractéristiques de vol sa hyperactivité et elle peut régulier sa vitesse même s'elle subit un fort vent.

L'écoulement turbulent ou laminaire s'observe assez souvent dans la nature et intéresse beaucoup des physiciens et d'ingénieurs, qui s'occupent de la mécanique des fluides et ses applications. Malgré le nombre de recherches sur le sujet, la nature physique-mathématique de la turbulence n'est pas encore éclaricie.

Dans ce présent mémoire, on va étudier le modèle mathématique de battement des ailes de libellule, ce mouvement se réalise dans l'air pour cela il est essentiellement de déterminé par les équations fondamentales du mouvement de l'air. À cause de sa complixité,*le modèle baratropique* qui consiste à simplific le système. voir[8]. Le mouvement non régulière donne un mécanisme spécifique pour le vol des insectes c'est le nombre de Reynolds. Un écoulement de l'air est caractérisé par ce nombre qui a un grand influence sur l'étude mathématique, ce qui nous suggére un choix judicieux de la méthode á utiliser.

Pour l'étude mathmatique de ce phénomène, nous utilisons la série de

Fourier par rapport au temps t et nous considérons le battement des ailes de libellule dans un domaine de l'air qui contient le mouvement entier provoqué par le battement des ailes.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Equations fondamentales du mouvement de l'air

Comme le mouvement de l'insect en vol se réalise dans l'air, il est conditionné, ou essentiellement déterminé, par la mécanique des fluides de l'air. Pour cela, nous rappelons avant tout les équations fondamentales du mouvement de l'air ; pour les formes fondamentales de ces équations, nous suivons le livre classique [7].

Désignons par $\varrho = \varrho(t,x)$ la densité de l'air, par $v = v(t,x) = (v_1(t,x), v_2(t,x), v_3(t,x))$ la vitesse (avec ses trois composantes), par $p = p(t,x)$ la pression et par $T = T(t,x)$ la température. La loi de conservation de la masse et celle de la quantité de mouvement s'expriment par les équations

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0, \tag{1.1}$$

$$\varrho \partial_t v_j + \varrho \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} p = \tag{1.2}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \Big(\eta \big(\frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_k - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v \big) \Big) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\zeta \nabla \cdot v) + f_j, \qquad j = 1, 2, 3.$$

tandis que le bilan de l'énergie, exprimé en fonction de la température, sera décrit par l'équation

$$\varrho c_v(\partial_t T + v \cdot \nabla T) + p\nabla \cdot v = \tag{1.3}$$

$$= \nabla \cdot \kappa \nabla T + \eta \sum_{j,k=1}^{3} \Big(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla \cdot v \Big) \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \zeta(\nabla \cdot v)^2 + E;$$

enfin la pression p doit être déterminée par la densité ϱ et la température T ; en adoptant l'approximation du gaz idéal on a

$$p = R\frac{\varrho}{\mu}T. \tag{1.4}$$

Dans les équations (1.1)-(1.4) η et ζ sont les coefficients de viscosité d'écoulement et volumique de l'air, $f = (f_1, f_2, f_3)$ est la force extérieure, E est la source de chaleur, c_v est la chaleur spécifique de l'air, κ est la thermo-conductibilité de l'air, R est la constante universelle des gaz ($R \approx 8.31 \cdot 10^7\ erg/mole \cdot K$) et μ est la masse molaire moyenne de l'air ($\mu \approx 28.96$). Dans les conditions normales, la force extérieure f doit contenir la force due à la gravitation, qui peut être représentée par

$$-\varrho\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi,$$

où Φ est le géopotentiel. Mais, comme nous allons voir, dans l'approximation que nous allons proposer, la force extérieure f devra contenir aussi l'effet mécanique du mouvement de l'insect sur l'air. Quant à la source de chaleur E, pour la mécanique générale de l'air, elle serait principalement la source due à la radiation. Toutefois dans notre étude elle n'aura pas de rôle particulier.

Or, du point de vue mathématique, le système d'équations (1.1)-(1.4) est excessivement compliqué et son étude mathématique est très difficile. Pour cette raison on propose une approximation dite *modèle du gaz baratropique* où beaucoup d'études de caractère mathématique ont été faites sur ce système d'équations (voir par exemple, [8], en particulier l'Introduction).

Le modèle des gaz visqueux barotropiques consiste à adopter une approximation qui considère la température comme fonction de la densité, par conséquent la pression se la réduit à une fonction seulement de la densité ϱ, de sorte que le système d'équations qui se trouve après la transformation ne contiendra pas explicitement la fonction inconnue T représentant la température, ce qui implique qu'on n'a pas besoin de l'équation du bilan de l'énergie. D'après ce modèle, l'équation (1.2) se réduit à

$$\varrho\partial_t v_j + \varrho\sum_{l=1}^{3} v_l\frac{\partial}{\partial x_l}v_j + \frac{\partial}{\partial x_j}p(\varrho) = \tag{1.5}$$

$$= \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_l}\Big(\eta\big(\frac{\partial}{\partial x_l}v_j+\frac{\partial}{\partial x_j}v_l-\frac{2}{3}\delta_{jl}\nabla\cdot v\big)\Big)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta\nabla\cdot v)+f_j, \qquad j=1,2,3.$$

Si on considère η et ζ constants dans (1.5), on a

$$\varrho\partial_t v + \varrho(v\cdot\nabla)v + \nabla p(\varrho) = \eta\Delta v + (\frac{\eta}{3}+\zeta)\nabla(\nabla\cdot v) + f. \tag{1.6}$$

L'équation (1.5) ou (1.6) doit être accouplée avec l'équation (1.1). D'autre part, comme dans l'équation (1.5) et aussi (1.6) la pression $p=p(\varrho)$ est une fonction seulement de ϱ, le système d'équations (1.5), (1.1), ou (1.6), (1.1) ne dépend pas de la fonction T qui figure dans l'équation (1.3).

Quant à la fonction $p(\varrho)$, généralement elle est considérée comme une fonction strictement positive et croissante de ϱ. Pour les gaz ordinaire (dont la densité n'est pas trop élevée comme l'air dans les conditions ordinaires), on utilise souvent l'approximation

$$p(\varrho) = h\varrho^{\gamma}. \tag{1.7}$$

où h est constant strictement positive et le nombre γ est donné par la relation

$$\gamma = \frac{c_v + \frac{R}{\mu}}{\frac{R}{\mu}};$$

sa valeur se trouve entre 1 et 2 (dans le cas de l'air, $\gamma \approx 1.4$) et est appelé normalement *exposant adiabatique*. Pour la déduction de (1.7), voir [2].

1.2 Nombre de Reynolds pour notre problème

Dans la section précédente nous avons vu le système d'équations qui décrit le mouvement de l'air et sa version alternative obtenue par l'approximation barotropique. Mais en réalité dans le cas où le nombre de Reynolds est grand, l'écoulement de l'air sera turbulent et il nous sera difficile d'obtenir des caractérisations suffisamment précises sur la solution directement du système d'équations ; dans tel cas nous devons chercher une autre méthode adéquate pour l'écoulement turbulent. Pour cela, nous allons examiner d'abord le nombre de Reynolds de l'écoulement d'air que nous allons considérer.

Rappelons que le nombre de Reynolds est déterminé par les trois caractéristiques de l'écoulement et du fluide : la vitesse, la densité et la viscosité. Il est inversement proportionnel à la viscosité cinématique, qui est le rapport de la viscosité dynamique par rapport à la densité du fluide. On définit le nombre de Reynolds $\Re$ par

$$\Re = \frac{vl}{\nu} = \frac{vl\varrho}{\eta}, \tag{1.8}$$

où v est la vitesse caractéristique du fluide (en m/s), l est la dimension (longueur) caractéristique du mouvement (en m) et ν est la viscosité cinématique (en m^2/s). Pour la viscosité cinématique ν on a la relation

$$\nu = \frac{\eta}{\varrho},$$

où ϱ est la densité du fluide et η est la viscosité dynamique du fluide.

Pour le mouvement del'air provoqué par le battement des ailes d'un insecte, le nombre de Reynolds est fonction de trois paramètres (v, ν, l), où v est la vitesse relative de l'aile par rapport à l'air (en m/s), ν est la viscosité cinématique (en m^2/s) de l'air et l est la longueur de la corde de l'aile.

Parmi les insectes volants nous prenons en considération l'exemple de libellule. La vitesse du mouvement (battement) des ailes du libellule est approximativement $v = 30m/s$ et sa taille est de 27 à $31mm$.

Rappelons la valeur de viscosité de l'air :

$$\eta = 1.8 \times 10^{-4} g/s.cm. \qquad \nu = 0,150cm^2/s.$$

Si nous calculons le nombre de Reynolds avec les données

$$v = 30m/s, \qquad l = 31mm, \qquad \nu = 0,150cm^2/s,$$

ou, en transformant les valeurs en même unité

$$v = 30m/s, \qquad l = 0,031m, \qquad \nu = 0,000015m^2/s,$$

nous obtenons

$$\Re = \frac{30 \times 0,031}{0,000015} = 62000. \tag{1.9}$$

Le nombre de Reynolds ainsi calculé s'avère beaucoup plus grand que la valeur critique. En effet, selon les calculs de S. A. Orszag de 1971 (voir [7], p.149), la plus petite valeur de $\Re$ pour laquelle apparaissent des perturbation non amorties, est égale à $\Re$=5772. Ça signifie que le nombre de Reynolds obtenu dans (1.9) est sensiblement plus grand que la valeur critique et donc nous devons supposer que l'écoulement de l'air provoqué par le battement des ailes d'un libellule est turbulent. Ce fait nous exige de trouver une méthode approximative (et bien formulée) pour analyser le mouvement de l'air dû au battement des ailes de l'insecte.

1.3 Série de Fourier

Comme nous l'avons remarqué ci-dessus, le nombre de Reynolds du mouvement de l'air dans le voisinage d'un libellule est très grand et donc nous devons supposer que le mouvement de l'air est turbulent (ou chaotique). Nous devons donc admettre qu'il est difficile de résoudre les équations. Pour cela nous devons chercher une méthode différente de la résolution des équations conçue comme la recherche d'une solution exacte ; la méthode que nous devons chercher devrait être efficace pour obtenir une caractérisation significative même si elle est une approximation.

Comme le battement des ailes d'un libellule (mais aussi généralement d'un insecte volant) est périodique par rapport au temps t, nous proposons l'utilisation de la série de Fourier. Or, pour que l'utilisation de la série de Fourier soit efficace, nous allons utiliser l'approximation du mouvement de l'air avec une température constante. En effet, le mouvement de l'air provoqué par le battement des ailes d'un libellule se réalise dans un domaine de diamètre de quelques centimètres ou on observe que dans un la température reste presque constante, ce qui justifie l'utilisation du modèle du mouvement de l'air avec une température constante. Ce modèle est équivalent au modèle barotropique (système d'équations (1.1) et (1.5) ou (1.6)) avec $\gamma = 1$ dans la définition (1.7) de la pression $p(\varrho)$

$$p(\varrho) = \omega\varrho^{\gamma} = \omega\varrho,$$

où ω est une constante. Utilisant (1.6) plutôt que (1.5), on a

$$\partial_t\varrho + \nabla\cdot(\varrho v) = 0, \tag{1.10}$$

$$\varrho\partial_t v + \varrho(v\cdot\nabla)v + \omega\nabla\varrho = \eta\Delta v + (\frac{\eta}{3} + \zeta)\nabla(\nabla\cdot v) + f. \tag{1.11}$$

Avant d'utiliser la série de Fourier, rappelons rapidement sa définition et ses propriétés les plus élémentaires.

Rappel

Soit f une fonction 2π-périodique et intégrable sur $[-\pi,\pi]$. Alors on définit la série de fourier de f par

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big) \tag{1.12}$$

avec

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \end{cases}$$

On peut définir une variante de la notion de série de Fourier même pour les fonctions qui sont $2L$-périodiques. En effet, si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, $2L$-périodique et intégrable sur l'intervalle $[-L,L]$, en introduisant le changement de variables

$$t = \frac{Lx}{\pi},$$

on a

$$f(t) = f(Lx/\pi).$$

Donc, en substituant ces relations dans les expression citées ci-dessus, on obtient

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\frac{t\pi}{L}) + b_n \sin(n\frac{t\pi}{L}) \right) \tag{1.13}$$

avec

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)dt \\ a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos(n\frac{t\pi}{L})dt \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \sin(n\frac{t\pi}{L})dt. \end{cases}.$$

Remarque.

Si la fonction f vérifie l'égalité (1.12), alors on a

$$\frac{df(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(- a_n(n\frac{\pi}{L}) \sin(n\frac{t\pi}{L}) + b_n(n\frac{\pi}{L}) \cos(n\frac{t\pi}{L}) \right), \tag{1.14}$$

pourvu que cette série converge.

Démonstration. D'après les formules précédentes on a

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{d}{dt}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d}{dt}(a_n) - a_n\frac{n\pi}{L} \sin(\frac{nt\pi}{L}) + \frac{d}{dt}(b_n) \sin(\frac{nt\pi}{L}) + b_n\frac{n\pi}{L} \cos\frac{nt\pi}{L} \right],$$

d'où, compte tenu des relations

$$\frac{d}{dt}a_0 = 0, \qquad \frac{d}{dt}a_n = 0, \qquad \frac{d}{dt}b_n = 0,$$

on obtient la formule (1.14). □

Chapitre 2

Formulation du problème en série de Fourier

2.1 Principe de la représentation des fonctions en série de Fourier

Rappelons que le mouvement de l'air en considération se réalise dans l'espace rempli par l'air. Or, pour bien formuler le problème du point de vue mathématique, nous avons besoin de fixer un domaine. Effectivement il nous sera commode de considérer un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ borné mais suffisament grand par rapport au corps de l'insecte, de sorte que l'on puisse considérer le vol libre, c'est-à-dire vol sans obstacle particulier, d'un insecte dans ce domaine.

Naturellement on peut se demander si ce domaine peut comprendre toute la trajectoire d'un vol comme le cas d'une abeille, qui vole des centaines de mètres dans un couple de minutes. Mais dans cette étude nous préférons nous limiter aux vols dans lesquels les insectes ne se déplacent pas beaucoup, comme dans le cas d'un libellule qui battant ses ailes très rapidement se positionne dans un endroit de l'air presque immobile. Dans ce cas il suffira de considérer un domaine de quelques centimètres ou quelques dizaines de centimètres dans l'air.

Nous considérons donc un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ dans lequel l'insecte vole. Nous supposons que le domaine Ω est borné et muni de la frontière régulière. Nous supposons aussi que la densité $\varrho(x,t)$ et la vitesse $v(x,t)$ sont des fonctions périodiques en t de période $2L$ en tout point $x \in \Omega$.

Dans ces conditions, nous pouvons représenter les fonctions de la densité $\varrho(x,t)$ et de la vitesse $v(x,t) = (v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t))$ en série de Fourier en chaque point $x \in \Omega$. Plus précisément nous posons

$$\varrho(x,t) = \varrho_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n(x) \cos \frac{tn\pi}{L} + b_n(x) \sin \frac{tn\pi}{L} \Big), \tag{2.1}$$

$$v_j(x,t) = v_{0j}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(N_{nj}(x) \cos \frac{tn\pi}{L} + M_{nj}(x) \sin \frac{tn\pi}{L} \Big), \tag{2.2}$$
$$j = 1, 2, 3.$$

Dans les égalités (2.1)–(2.2) $\varrho_0(x)$, $a_n(x)$, $b_n(x)$, $v_{0j}(x)$, $N_{nj}(x)$, $M_{nj}(x)$ ($n = 1, 2, \cdots$, $j = 1, 2, 3$) sont des fonctions définies sur Ω ($x \subset \Omega$).

La représentation (2.1) et (2.2) de $\varrho(x,t)$ et de $v_j(x,t)$ en série de Fourier étant introduite, nous pouvons maintenant procéder pour réécrire les équations (1.10) et (1.11) avec la série de Fourier.

2.2 Calcul pour l'équation de continuité

Commençons par l'examen de chaque terme de l'équation de contunuité (1.10).

Considérons d'abord le terme $\partial_t \varrho(x,t)$. On a

$$\partial_t \varrho(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[(-a_n(x)\frac{n\pi}{L}) \sin\frac{tn\pi}{L} + (b_n(x)\frac{n\pi}{L}) \cos\frac{tn\pi}{L} \Big]. \qquad (2.3)$$

En multipliant les deux membres de (2.3) par $\cos\frac{tk\pi}{L}$ et par $\sin\frac{tk\pi}{L}$ et en intégrant par rapport au temps t, on a

$$\int_{-L}^{L} \partial_t \varrho(x,t) \cos\frac{tk\pi}{L} dt =$$

$$= \int_{-L}^{L} \sum_{n=1}^{\infty} \Big[(-a_n(x)\frac{n\pi}{L}) \sin\frac{tn\pi}{L} + (b_n(x)\frac{n\pi}{L}) \cos\frac{tn\pi}{L} \Big] \cos\frac{tk\pi}{L} dt = b_k(x) k\pi,$$

$$\int_{-L}^{L} \partial_t \varrho(x,t) \sin\frac{tk\pi}{L} dt =$$

$$= \int_{-L}^{L} \sum_{n=1}^{\infty} \Big[(-a_n(x)\frac{n\pi}{L}) \sin\frac{tn\pi}{L} + (b_n(x)\frac{n\pi}{L}) \cos\frac{tn\pi}{L} \Big] dt = -a_k(x) k\pi.$$

Examinons maintenant le terme $\nabla_x \cdot (\varrho v) = \varrho \nabla_x \cdot v + v \cdot \nabla_x \varrho$. D'après (2.1)–(2.2) le terme $\varrho \nabla_x \cdot v$ multiplié par $\cos\frac{tk\pi}{L}$ aura l'expression

$$\varrho \nabla_x \cdot v \cos\frac{tk\pi}{L} = \sum_{j=1}^{3} \Big[\varrho_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cos\frac{tn\pi}{L} + b_n(x) \sin\frac{tn\pi}{L} \Big] \times \qquad (2.4)$$

$$\times \Big[\partial_{x_j} v_{0,j} + \sum_{m=1}^{\infty} \partial_{x_j} N_{mj}(x) \cos\frac{tm\pi}{L} + \partial_{x_j} M_{mj}(x) \sin\frac{tm\pi}{L} \Big] \cos\frac{tk\pi}{L}.$$

En faisant l'intégration du second membre de (2.4) par rapport à t, on obtient

$$\sum_{j=1}^{3} \int_{-L}^{L} \Big[\varrho_0(x) \partial_{x_j} v_{0,j} \cos\frac{tk\pi}{L} +$$

$$+ \varrho_0(x) \cos\frac{tk\pi}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\partial_{x_j} N_{mj}(x) \cos\frac{tm\pi}{L} + \partial_{x_j} M_{mj}(x) \sin\frac{tm\pi}{L} \Big) +$$

$$+\partial_{x_j} v_{0,j}(x)\cos\frac{tk\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n(x)\cos\frac{tn\pi}{L}+b_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big)+$$

$$+\cos\frac{tk\pi}{L}\sum_{n,m=1}^{\infty}\Big(a_n(x)\cos\frac{tn\pi}{L}+b_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big)\times$$

$$\times\Big(\partial_{x_j} N_{mj}(x)\cos\frac{tm\pi}{L}+\partial_{x_j} M_{mj}(x)\sin\frac{tm\pi}{L}\Big)\Big]dt.$$

Examinons chaque terme de cette intégrale. On a

$$\int_{-L}^{L}\sum_{j=1}^{3}\varrho_0(x)\partial_{x_j} v_{0,j}\cos\frac{tk\pi}{L}dt=0.$$

$$\int_{-L}^{L}\sum_{j=1}^{3}\varrho_0(x)\cos\frac{tk\pi}{L}\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\partial_{x_j} N_{mj}(x)\cos\frac{tm\pi}{L}+\partial_{x_j} M_{mj}(x)\sin\frac{tm\pi}{L}\Big)dt=$$

$$=\sum_{j=1}^{3}\varrho_0(x)\partial_{x_j} N_{kj}(x)L,$$

$$\int_{-L}^{L}\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j} v_{0,j}(x)\cos\frac{tk\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n(x)\cos\frac{tn\pi}{L}+b_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big)dt=$$

$$=\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j} v_{0,j}(x)a_k(x)L.$$

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{tk\pi}{L}\sum_{j=1}^{3}\sum_{n,m=1}^{\infty}\Big(a_n(x)\cos\frac{tn\pi}{L}+b_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big)\times$$

$$\times\Big(\partial_{x_j} N_{mj}(x)\cos\frac{tm\pi}{L}+\partial_{x_j} M_{mj}(x)\sin\frac{tm\pi}{L}\Big)dt=$$

$$=A_1+A_2+A_3,$$

où

$$A_1=\sum_{k=n+m}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}a_n(x)\partial_{xj} N_{mj}(x)L+\frac{1}{2}b_n(x)\partial_{x_j} M_{mj}(x)L.$$

$$A_2 = \sum_{k=n-m} \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2} a_n(x) \partial_{xj} N_{mj}(x) L - \frac{1}{2} b_n(x) \partial_{x_j} M_{mj}(x) L,$$

$$A_3 = \sum_{k=m-n} \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2} a_n(x) \partial_{xj} N_{mj}(x) L - \frac{1}{2} b_n(x) \partial_{x_j} M_{mj}(x) L,$$

où le symble $\sum\limits_{k=n+m}$ signifie que l'on fait la somme pour (n, m) appartenant à l'ensemble

$$\{(n, m) \in \mathbb{N} \backslash \{0\} | n + m = k\},$$

$\sum\limits_{k=n-m}$ signifie que l'on fait la somme pour (n, m) appartenant à l'ensemble

$$\{(n, m) \in \mathbb{N} \backslash \{0\} | n - m = k\}$$

et analoguement $\sum\limits_{k=m-n}$ signifie que l'on fait la somme pour (n, m) appartenant à l'ensemble

$$\{(n, m) \in \mathbb{N} \backslash \{0\} | m - n = k\}.$$

Dans la suite nous utilisons les mêmes symboles $\sum\limits_{k=n+m}$, $\sum\limits_{k=n-m}$ et $\sum\limits_{k=m-n}$ avec le même sens et donc dans la suite nous les utiliserons sans répéter cette explication de ces symboles.

Maintenant en multipliant $v \cdot \nabla_x \varrho$ par $\cos \frac{tk\pi}{L}$, on a

$$\cos \frac{tk\pi}{L} v(x, t) \cdot \nabla_x \varrho(x, t) = \tag{2.5}$$

$$= \cos \frac{tk\pi}{L} \sum_{j=1}^{3} \left[v_{0,j}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} N_{mj}(x) \cos \frac{tm\pi}{L} + M_{mj}(x) \sin \frac{tm\pi}{L} \right] \times$$

$$\times \left[\partial_{x_j} \rho_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\partial_{x_j} a_n(x) \cos \frac{tn\pi}{L} + \partial_{x_j} b_n(x) \sin \frac{tn\pi}{L} \right) \right]$$

En intégrant ces termes de $-L$ à L par rapport à t, on va examiner chaque terme. On a

$$\int_{-L}^{L}\sum_{j=1}^{3} v_{0,j}(x)\partial_{x_j}\varrho_0(x)\cos\frac{tk\pi}{L}dt = 0,$$

$$\int_{-L}^{L}\sum_{j=1}^{3} v_{0,j}(x)\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\partial_{x_j}a_n(x)\cos\frac{tn\pi}{L}+\partial_{x_j}b_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big)dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} v_{0,j}(x)\partial_{x_j}a_k(x)L,$$

$$\int_{-L}^{L}\sum_{j=1}^{3}\partial_{xj}\varrho_0(x)\cos\frac{tk\pi}{L}\sum_{m=1}^{\infty}\Big(N_{mj}(x)\cos\frac{tm\pi}{L}+M_{mj}(x)\sin\frac{tm\pi}{L}\Big)dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}\varrho_0(x)N_{kj}(x)L,$$

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{tk\pi}{L}\sum_{j=1}^{3}\sum_{n,m=1}^{\infty}\Big(\partial_{x_j}a_n(x)\cos\frac{tn\pi}{L}+\partial_{x_j}b_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big)\times$$

$$\times\Big(N_{mj}(x)\cos\frac{tm\pi}{L}+M_{mj}(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big)dt =$$

$$= B_1 + B_2 + B_3,$$

où

$$B_1 = \sum_{k=n+m}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\partial_{x_j}a_n(x)N_{mj}(x)L - \frac{1}{2}\partial_{x_j}b_n(x)M_{mj}(x)L,$$

$$B_2 = \sum_{k=n-m}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\partial_{x_j}a_n(x)N_{mj}(x)L + \frac{1}{2}\partial_{x_j}b_n(x)M_{mj}(x)L,$$

$$B_3 = \sum_{k=m-n}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\partial_{x_j}a_n(x)N_{mj}(x)L + \frac{1}{2}\partial_{x_j}b_n(x)M_{mj}(x)L.$$

D'une manière analogue, on va examiner les termes qui résultent de la multiplication de $\varrho\nabla_x \cdot v$ par $\sin\frac{tk\pi}{L}$. On a

$$\int_{-L}^{L}\sum_{j=1}^{3}\varrho_0(x)\partial_{x_j}v_{0,j}\sin\frac{tk\pi}{L}dt = 0.$$

$$\int_{-L}^{L}\varrho_0(x)\sin\frac{tk\pi}{L}\sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\partial_{x_j}N_{mj}(x)\cos\frac{tm\pi}{L}+\partial_{x_j}M_{mj}(x)\sin\frac{tm\pi}{L}\Big)dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\varrho_0(x)\partial_{x_j}M_{kj}(x)L,$$

$$\int_{-L}^{L}\sum_{j=1}^{3}\partial_{xj}v_{0,j}(x)\sin\frac{tk\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)\cos\frac{tn\pi}{L}+b_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}v_{0,j}(x)b_k(x)L,$$

$$\int_{-L}^{L}\sum_{j=1}^{3}\sin\frac{tk\pi}{L}\sum_{n,m=1}^{\infty}\Big(a_n(x)\cos\frac{tn\pi}{L}+b_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big)\times$$

$$\times\Big(\partial_{xj}N_{m_j}(x)\cos\frac{tm\pi}{L}+\partial_{x_j}M_{mj}(x)\sin\frac{tm\pi}{L}\Big)dt =$$

$$- C_1 + C_2 + C_3,$$

où

$$C_1 = \sum_{k=n+m}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}a_n(x)\partial_{x_j}M_{mj}(x)L + \frac{1}{2}b_n\partial_{x_j}N_{mj}(x)L,$$

$$C_2 = \sum_{k=n-m}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}b_n\partial_{x_j}N_{mj}(x)L,$$

$$C_3 = \sum_{k=m-n}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}a_n(x)\partial_{x_j}M_{mj}(x)L.$$

Examinons maintenant les termes qui résultent de la multiplication de $v \cdot \nabla_x \varrho$ par la fonction $\sin \frac{tk\pi}{L}$; on a

$$\int_{-L}^{L} \sum_{j=1}^{3} v_{0,j}(x) \partial_{x_j} \varrho_0(x) \sin \frac{tk\pi}{L} dt = 0.$$

$$\int_{-L}^{L} \sum_{j=1}^{3} v_0(x) \sum_{n=1}^{\infty} \partial_{x_j} a_n(x) \cos \frac{tn\pi}{L} + \partial_{x_j} b_n(x) \sin \frac{tn\pi}{L} \Big) \sin \frac{kt\pi}{L} dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} v_{0,j}(x) \partial_{x_j} b_k(x) L,$$

$$\int_{-L}^{L} \sum_{j=1}^{3} \sin \frac{tk\pi}{L} \partial_{x_j} \varrho_0(x) \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \Big(N_{mj}(x) \cos \frac{tm\pi}{L} + M_{mj}(x) \sin \frac{tm\pi}{L} \Big) dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j} \varrho_0(x) M_{kj}(x) L,$$

$$\int_{-L}^{L} \sum_{j=1}^{3} \sin \frac{tk\pi}{L} \sum_{n,m=1}^{\infty} \Big[\partial_{x_j} a_n(x) \cos \frac{tn\pi}{L} + \partial_{x_j} b_n(x) \sin \frac{tn\pi}{L} \Big] \times$$

$$\times \Big[N_{mj}(x) \cos \frac{tm\pi}{L} + M_{mj}(x) \sin \frac{tn\pi}{L} \Big] dt =$$

$$= D_1 + D_2 + D_3,$$

où

$$D_1 = \sum_{k=n+m} \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2} \partial_{xj} a_n(x) M_{mj}(x) L + \frac{1}{2} \partial_{x_j} b_n(x) N_{mj}(x) L,$$

$$D_2 = \sum_{k=n \quad m} \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2} \partial_{x_j} b_n(x) N_{mj}(x) L.$$

$$D_3 = \sum_{k=m-n} \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2} \partial_{x_j} a_n(x) M_{mj}(x) L.$$

Maintenant en va calculer l'intégrale de chaque terme de (1.10) écrit en fonction de série de Fourier multiplié par 1. Ça correspond à $\cos \frac{t0\pi}{L} = 1$, c'est-à-dire que nous pouvons procéder de la même manière que dans le calcul précédent, en posant $k = 0$ dans $\cos \frac{tk\pi}{L} = 1$ dans l'intégrand dans le calcul précédent.

On a d'abord

$$\int_{-L}^{L} \partial_t \varrho(x,t) dt =$$

$$= \int_{-L}^{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-a_n(x) \frac{n\pi}{L}) \sin \frac{tn\pi}{L} + (b_n(x) \frac{n\pi}{L}) \cos \frac{tn\pi}{L} \right] \cos \frac{tk\pi}{L} dt = 0,$$

Examinons maintenant le terme $\nabla_x \cdot (\varrho v) = \varrho \nabla_x \cdot v + v \cdot \nabla_x \varrho$.

En faisant l'intégration de (2.4) par rapport à t. Examinons chaque terme de cette intégrale. On a

$$\int_{-L}^{L} \sum_{j=1}^{3} \varrho_0(x) \partial_{x_j} v_{0,j} dt = 2L \sum_{j=1}^{3} \varrho_0(x) \partial_{x_j} v_{0,j},$$

$$\int_{-L}^{L} \sum_{j=1}^{3} \varrho_0(x) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\partial_{x_j} N_{mj}(x) \cos \frac{tm\pi}{L} + \partial_{x_j} M_{mj}(x) \sin \frac{tm\pi}{L} \right) dt = 0,$$

$$\int_{-L}^{L} \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j} v_{0,j}(x) \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(x) \cos \frac{tn\pi}{L} + b_n(x) \sin \frac{tn\pi}{L} \right) dt = 0$$

$$\int_{-L}^{L} \sum_{j=1}^{3} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(a_n(x) \cos \frac{tn\pi}{L} + b_n(x) \sin \frac{tn\pi}{L} \right) \times$$

$$\times \left(\partial_{x_j} N_{mj}(x) \cos \frac{tm\pi}{L} + \partial_{x_j} M_{mj}(x) \sin \frac{tm\pi}{L} \right) dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} 2L(a_n(x)\partial_{xj} N_{nj}(x)L - b_n(x)\partial_{x_j} M_{nj}(x)L),$$

Maintenant en faisant l'intégrale de (2.5), on va examiner chaque terme. On a

$$\int_{-L}^{L} \sum_{j=1}^{3} v_{0,j}(x)\partial_{x_j}\varrho_0(x) = 2L\sum_{j=1}^{3} v_{0,j}(x)\partial_{x_j}\varrho_0(x),$$

$$\int_{-L}^{L} \sum_{j=1}^{3} v_{0,j}(x) \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\partial_{x_j} a_n(x)\cos\frac{tn\pi}{L} + \partial_{x_j} b_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big)dt = 0$$

$$\int_{-L}^{L} \sum_{j=1}^{3} \partial_{xj}\varrho_0(x) \sum_{m=1}^{\infty} \Big(N_{mj}(x)\cos\frac{tm\pi}{L} + M_{mj}(x)\sin\frac{tm\pi}{L}\Big)dt = 0$$

$$\int_{-L}^{L} \sum_{j=1}^{3} \sum_{n,m=1}^{\infty} \Big(\partial_{x_j} a_n(x)\cos\frac{tn\pi}{L} + \partial_{x_j} b_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big)\times$$
$$\times\Big(N_{mj}(x)\cos\frac{tm\pi}{L} + M_{mj}(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big)dt$$
$$= \sum_{j=1}^{3} 2L\Big(\partial_{x_j} a_n(x)N_{nj}(x) + \partial_{x_j} b_n(x)M_{nj}(x)L\Big),$$

2.3 Calcul pour l'équation de quantité de mouvement

Maintenant on va transformer l'équation de quantité de mouvement (1.2). Mais dans cette équation il y a un petit changement, en effet dans cette équation à cause la force du battement nous ajoutons un terme dans la forme 'une force supplementaire F qui "traduit" l'effet mécanique du battement des ailes.

En acceptant que la force gravitationnelle peut être écrite dans la forme

$$\partial_{x_j}\Phi = g$$

($g > 0$), et que la pression peut être écrite dans la forme

$$p = \omega\varrho$$

($\omega > 0$), notre équation de la conservation de la quantité de mouvement aura la forme

$$\varrho\partial_t v_j + \varrho\sum_{l=1}^{3} v_l\frac{\partial}{\partial x_l}v_j + \omega\frac{\partial}{\partial x_j}\varrho(x,t) = \tag{2.6}$$

$$= \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_l}\Big(\eta\big(\frac{\partial}{\partial x_l}v_j + \frac{\partial}{\partial x_j}v_l - \frac{2}{3}\delta_{jl}\nabla\cdot v\big)\Big) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta\nabla\cdot v) - \varrho g e_3 + F(x,t),$$

$$j = 1, 2, 3.$$

Ici $F(x,t)$ représente l'effet comme "force apparente" du battement des ailes et nous supposons que $F(x,t)$ est une fonction périodique en t de période $2L$ et donc est représentée par

$$F(x,t) = f_0(x) + \sum_{s=1}^{\infty} c_s(x)\cos\frac{st\pi}{L} + d_s(x)\sin\frac{st\pi}{L}. \tag{2.7}$$

Examinons les termes qui figure dans l'équation (2.6). Nous commençons par l'examen du terme $\varrho\partial_t v_j$. On a

$$\varrho(x,t)\partial_t v_j = \Big[\varrho_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\cos\frac{tk\pi}{L} + b_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big]\times \tag{2.8}$$

$$\times\Big[\sum_{m=1}^{\infty}\Big((-N_{mj}(x))\frac{L}{m\pi}\sin\frac{tm\pi}{L} + M_{mj}(x)\frac{L}{m\pi}\cos\frac{tm\pi}{L}\Big)\Big].$$

En multipliant chaque terme de cette expression par $\cos\frac{tk\pi}{L}$ et en l'intégrant sur $[-L, L]$, on obtient

$$\int_{-L}^{L}\varrho_0(x)\cos\frac{tk\pi}{L}\Big[\sum_{m=1}^{\infty}(-N_{mj}(x)\frac{L}{m\pi})\sin\frac{tm\pi}{L}+M_{mj}\frac{L}{m\pi}\cos\frac{tm\pi}{L}\Big]dt=$$

$$=\varrho_0(x)\frac{L^2}{m\pi}M_{mj}(x),$$

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{tk\pi}{L}\sum_{n,m=1}^{\infty}\Big(a_n(x)\cos\frac{tn\pi}{L}+b_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big)\times$$

$$\times\Big((-N_{mj}(x)\frac{L}{m\pi})\sin\frac{tm\pi}{L}+M_{mj}(x)\frac{L}{m\pi}\cos\frac{tm\pi}{L}\Big)dt=$$

$$=E_1+E_2+E_3,$$

où

$$E_1=\sum_{k=n+m}\frac{1}{2}a_n(x)M_{mj}(x)\frac{L^2}{m\pi}+\frac{1}{2}b_n(x)N_{mj}(x)\frac{L^2}{m\pi},$$

$$E_2=\sum_{k=n-m}\frac{1}{2}a_n(x)M_{mj}(x)\frac{L^2}{m\pi}-\frac{1}{2}b_n(x)N_{mj}(x)\frac{L^2}{m\pi},$$

$$E_3=\sum_{k=m-n}\frac{1}{2}a_n(x)M_{mj}(x)\frac{L^2}{m\pi}-\frac{1}{2}b_n(x)N_{mj}(x)\frac{L^2}{m\pi},$$

De la même façon, en multipliant l'expression de (2.8) par $\sin\frac{tk\pi}{L}$ et en faisant l'intégrale, on a

$$\int_{-L}^{L}\varrho_0(x)\sin\frac{tk\pi}{L}\Big[\sum_{m=1}^{\infty}(-N_{mj}(x)\frac{L}{m\pi})\sin\frac{tm\pi}{L}+M_{mj}\frac{L}{m\pi}\cos\frac{tm\pi}{L}\Big]dt=$$

$$=\varrho_0(x)\frac{L^2}{m\pi}N_{kj}(x),$$

$$\int_{-L}^{L}\sum_{n,m=1}^{\infty}\Big(a_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}+b_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big)\times$$

$$\times\Big((-N_{mj}(x)\frac{L}{m\pi})\sin\frac{tm\pi}{L}+M_{mj}(x)\frac{L}{m\pi}\cos\frac{tm\pi}{L}\Big)dt=$$
$$=F_1+F_2+F_3,$$

où

$$F_1=\sum_{k=n+m}\frac{-1}{2}a_n(x)N_{mj}(x)\frac{L^2}{m\pi}+\frac{1}{2}b_n(x)M_{mj}(x)\frac{L^2}{m\pi},$$
$$F_2=\sum_{k=n-m}\frac{1}{2}b_n(x)M_{mj}(x)\frac{L^2}{m\pi},$$
$$F_3=\sum_{k=m-n}\frac{-1}{2}a_n(x)N_{mj}(x)\frac{L^2}{m\pi}.$$

Pour le deuxième terme $\varrho(x,t)\sum_{l=1}^{3}v_l\frac{\partial}{\partial x_l}v_j$ on a l'expression

$$\varrho(x,t)\sum_{l=1}^{3}v_l\frac{\partial}{\partial x_l}v_j=\Big[\varrho_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)\cos\frac{tn\pi}{L}+b_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big]\times \tag{2.9}$$
$$\times\sum_{l=1}^{3}\Big(v_{0,l}+\sum_{r=1}^{\infty}N_{rl}(x)\cos\frac{tm\pi}{L}+M_{rl}(x)\sin\frac{tm\pi}{L}\Big)\times$$
$$\times\Big(\partial_{x_l}v_{0,j}+\sum_{m=1}^{\infty}\partial_{x_l}N_{mj}(x)\cos\frac{tm\pi}{L}+\partial_{x_l}M_{mj}(x)\sin\frac{tm\pi}{L}\Big).$$

En multipliant chaque terme de cette expréssion par $\cos\frac{tk\pi}{L}$, et en l'intégrant, on obtient

$$\int_{-L}^{L}\sum_{l=1}^{3}\varrho_0(x)v_{0,l}\partial_{x_l}v_{0,j}(x)\cos\frac{tk\pi}{L}dt=0.$$

$$\int_{-L}^{L}\sum_{l=1}^{3}\varrho_0v_{0,l}\cos\frac{tk\pi}{L}\Big[\sum_{m=1}^{\infty}\partial_{x_l}N_{mj}(x)\cos\frac{tm\pi}{L}+\partial_{x_l}M_{mj}(x)\sin\frac{tm\pi}{L}\Big]dt=$$
$$=\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\varrho_0v_{0,l}\partial_{x_l}N_{kj}(x)L,$$

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{tk\pi}{L}\sum_{l=1}^{3}\partial_{x_l}v_{0,j}\varrho_0\sum_{r-1}^{\infty}\Big(N_{rl}(x)\cos\frac{tr\pi}{L}+M_{rl}\sin\frac{tr\pi}{L}\Big)dt-$$

$$= \sum_{l=1}^{3} \varrho_0 N_{kl}(x) \partial_{x_l} v_{0,j} L,$$

$$\int_{-L}^{L} \sum_{l=1}^{3} \varrho_0 \cos \frac{tk\pi}{L} \sum_{m,r=1}^{\infty} \Big(N_{rl}(x) \cos \frac{tr\pi}{L} + M_{rl} \sin \frac{tr\pi}{L} \Big) \times$$

$$\times \Big(\partial_{x_l} N_{mj}(x) \cos \frac{tm\pi}{L} + \partial_{x_l} M_{mj} \sin \frac{tm\pi}{L} \Big) dt =$$

$$= G_1 + G_2 + G_3,$$

où

$$G_1 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=m+r} \frac{1}{2} \varrho_0 N_{rl}(x) \partial_{x_l} N_{mj}(x) L - \frac{1}{2} \varrho_0 M_{rl} \partial_{x_l} M_{mj} L,$$

$$G_2 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=m-r} \frac{1}{2} \varrho_0 N_{rl}(x) \partial_{x_l} N_{mj} L + \frac{1}{2} \varrho_0 M_{rl}(x) \partial_{x_l} M_{mj}(x) L,$$

$$G_3 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=r-m} \frac{1}{2} \varrho_0 N_{rl}(x) \partial_{x_l} N_{mj}(x) L + \frac{1}{2} \varrho_0 M_{rl} \partial_{x_l} M_{mj} L,$$

$$\int_{L}^{-L} \cos \frac{tk\pi}{L} \sum_{l=1}^{3} v_{0,l} \partial_{x_l} v_{0,j} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n(x) \cos \frac{nt\pi}{L} + b_n(x) \sin \frac{nt\pi}{L} \Big) dt =$$

$$= \sum_{l=1}^{3} v_{0,l} \partial_{x_l} v_{0,j} a_k(x) L,$$

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{kt\pi}{L} \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n(x) \cos \frac{nt\pi}{L} + b_n(x) \sin \frac{nt\pi}{L} \Big) \Big] \times$$

$$\times \sum_{l=1}^{3} \Big[v_{0,l} + \sum_{r=1}^{\infty} \Big(N_{rl}(x) \cos \frac{rt\pi}{L} + M_{rl}(x) \sin \frac{tr\pi}{L} \Big) \Big] \times$$

$$\times \Big[\partial_{x_l} v_{0,j} + \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\partial_{x_l} N_{mj} \cos \frac{tm\pi}{L} + \partial_{x_l} M_{mj}(x) \sin \frac{tm\pi}{L} \Big) \Big] dt$$

où

$$\int_{L}^{-L} \cos \frac{tk\pi}{L} \sum_{l=1}^{3} v_{0,l} v_{0,j} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n(x) \cos \frac{nt\pi}{L} + b_n(x) \sin \frac{nt\pi}{L} \Big) dt =$$

$$= \sum_{l=1}^{3} v_{0,l} \partial_{x_l} v_{0,j} a_k(x) L,$$

$$\int_{L}^{-L} \cos \frac{tk\pi}{L} v_{0,l}$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \Big(a_n(x) \cos \frac{nt\pi}{L} + b_n(x) \sin \frac{nt\pi}{L} \Big) \Big(\partial_{x_l} N_{mj} \cos \frac{tm\pi}{L} + \partial_{x_l} M_{mj} \sin \frac{tm\pi}{L} \Big) dt =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=n+m} \frac{1}{2} a_n(x) v_{0,l} \partial_{x_l} N_{mj} L - \frac{1}{2} v_{0,l} b_n(x) \partial_{x_l} M_{mj}(x) L,$$

$$I_2 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=n-m} \frac{1}{2} a_n(x) v_{0,l} \partial_{x_l} N_{mj} L - \frac{1}{2} v_{0,l} b_n(x) \partial_{x_l} M_{mj}(x) L,$$

$$I_3 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=m-n} \frac{1}{2} a_n(x) v_{0,l} \partial_{x_l} N_{mj} L - \frac{1}{2} v_{0,l} b_n(x) \partial_{x_l} M_{mj}(x) L,$$

$$\int_{-L}^{L} \sum_{l=1}^{3} \cos \frac{tk\pi}{L} \partial_{x_l} v_{0,j} \sum_{r,n=1}^{\infty} \Big(a_n(x) \cos \frac{nt\pi}{L} + b_n(x) \sin \frac{nt\pi}{L} \Big) \times$$

$$\times \Big(N_{rl}(x) \cos \frac{rt\pi}{L} + M_{rl} \sin \frac{rt\pi}{L} \Big) dt == J_1 + J_2 + J_3$$

où

$$J_1 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=r+n} \frac{1}{2} a_n(x) \partial_{x_l} v_{0,j} N_{rl} L - \frac{1}{2} \partial_{x_l} v_{0,j} b_n(x) M_{rl} L,$$

$$J_2 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=r-n} \frac{1}{2} a_n(x) \partial_{x_l} v_{0,j} N_{rl} L + \frac{1}{2} \partial_{x_l} v_{0,j} b_n(x) M_{rl} L,$$

$$J_3 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=n-r} \frac{1}{2} a_n(x) \partial_{x_l} v_{0,j} N_{rl} L + \frac{1}{2} \partial_{x_l} v_{0,j} b_n(x) M_{rl} L,$$

$$\int_{L}^{L} \sum_{l=1}^{3} \cos \frac{tk\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n(x) \cos \frac{nt\pi}{L} + b_n(x) \sin \frac{nt\pi}{L} \Big)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\Big(N_{rl}\cos\frac{rt\pi}{L}+M_{rl}\sin\frac{rt\pi}{L}\Big)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\partial_{x_l}N_{mj}\cos\frac{mt\pi}{L}+\partial_{x_l}M_{mj}\sin\frac{mt\pi}{L}\Big)dt$$

$$=P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6+P_7,$$

$$P_1=\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n+m+r}\frac{1}{4}a_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L-\frac{1}{4}b_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L-$$

$$-\frac{1}{4}a_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L-\frac{1}{4}b_n(x)N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}(x)L,$$

$$P_2=\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n+m-r}\frac{1}{4}a_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L-\frac{1}{4}b_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L$$

$$+\frac{1}{4}a_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L+\frac{1}{4}b_n(x)N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}(x)L,$$

$$P_3=\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n-m+r}\frac{1}{4}a_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+\frac{1}{4}b_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L$$

$$-\frac{1}{4}b_n(x)N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L,$$

$$P_4=\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m-n+r}-\frac{1}{4}a_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}(x)L,$$

$$P_5=\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n-m-r}\frac{1}{4}a_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+\frac{1}{4}b_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L$$

$$+\frac{1}{4}b_n(x)N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L,$$

$$P_6=\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m-n-r}\frac{1}{4}a_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L(x)L.$$

$$P_7=\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=r-m-n}\frac{1}{4}a_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L\quad\frac{1}{4}b_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L$$

$$+\frac{1}{4}a_n(x)M_{rl}\partial_{xl}M_{mj}L+\frac{1}{4}b_n(x)N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}(x)L,$$

où le symbole $\sum\limits_{k=n+m+r}$ signifie que la somme de (m,n,r) appartenant à l'ensemble

$$\{(m,n,r)\in\mathbb{N}\backslash\{0\}|m+n+r=k\}$$

et analoguement $\sum\limits_{k=n-m+r}$ signifie que l'on fait la somme de (n,m,r) $(n-m,r)$ appartenant à l'ensemble

$$\{(m,n,r)\in\mathbb{N}\backslash\{0\}|n-m+r=k\}$$

et analoguement $\sum\limits_{k=m-n+r}$ signifie que l'on fait la somme de (n,m,r) $(n-m,r)$ appartenant à l'ensemble

$$\{(m,n,r)\in\mathbb{N}\backslash\{0\}|m-n+r=k\}$$

et aussi pour les autres ensembles. Dans la suite nous utilisons les mêmes symboles $\sum\limits_{k=n+m+r}$, $\sum\limits_{k=n-m+r}$, $\sum\limits_{k=m-n+r}$, avec le même sens et donc dans la suite nous les utiliserons sans répéter cette explication de ces symboles. Maintenant en multipliant (2.9) par $\sin\frac{tk\pi}{L}$, et en faisant l'int'egral, on obtient

$$\int_{-L}^{L}\varrho_0(x)v_{0,l}\partial_{x_l}v_{0,j}(x)\sin\frac{tk\pi}{L}dt=0$$

$$\int_{-L}^{L}\varrho_0v_{0,l}\sin\frac{tk\pi}{L}\Big[\sum_{m=1}^{\infty}\partial_{x_l}N_{mj}(x)\cos\frac{tm\pi}{L}+\partial_{x_l}M_{mj}(x)\sin\frac{tm\pi}{L}\Big]dt=$$

$$=\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\varrho_0v_{0,l}\partial_{x_l}M_{kj}(x)L,$$

$$\int_{-L}^{L}\sum_{l=1}^{3}\varrho_0\partial_{x_l}v_{0,j}\sum_{r=1}^{\infty}\Big(N_{rl}(x)\cos\frac{tr\pi}{L}+M_{rl}\sin\frac{tr\pi}{L}\Big)\sin\frac{tk\pi}{L}dt$$

$$= \sum_{l=1}^{3} \varrho_0 M_{kl}(x) \partial_{x_l} v_{0,j} L,$$

$$\int_{-L}^{L} \sum_{l=1}^{3} \varrho_0 \sin \frac{tk\pi}{L}$$

$$\sum_{m,r=1}^{\infty} \Big(N_{rl}(x) \cos \frac{tr\pi}{L} + M_{rl} \sin \frac{tr\pi}{L} \Big) \times$$

$$\times \Big(\partial_{x_l} N_{mj}(x) \cos \frac{tm\pi}{L} + \partial_{x_l} M_{mj} \sin \frac{tm\pi}{L} \Big) dt =$$

$$= Q_1 + Q_2 + Q_3$$

où

$$Q_1 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=m+r} \frac{1}{2} \varrho_0 M_{rl} \partial_{x_l} N_{mj} L + \frac{1}{2} \varrho_0 N_{rl} \partial_{x_l} M_{mj} L,$$

$$Q_2 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=m-r} \varrho_0 M_{rl} \partial_{x_l} N_{mj} L.$$

$$Q_3 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=r-m} \varrho_0 N_{rl} \partial_{x_l} M_{mj} L,$$

$$\int_{L}^{-L} \sin \frac{tk\pi}{L} \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n(x) \cos \frac{nt\pi}{L} + b_n(x) \sin \frac{tn\pi}{L} \Big) \Big]$$

$$\times \sum_{l=1}^{3} \Big[v_{0,l} + \sum_{r=1}^{\infty} N_{rl}(x) \cos \frac{rt\pi}{L} + M_{rl}(x) \sin \frac{tr\pi}{L} \Big]$$

$$\times \Big[\partial_{x_l} v_{0,j} + \sum_{m=1}^{\infty} \partial_{x_l} N_{mj} \cos \frac{tm\pi}{L} + \partial_{x_l} M_{mj}(x) \sin \frac{tm\pi}{L} \Big] dt$$

$$\int_{L}^{-L} \sin \frac{tk\pi}{L} \sum_{l=1}^{3} v_{0,l} v_{0,j} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n(x) \cos \frac{nt\pi}{L} + b_n(x) \sin \frac{tn\pi}{L} \Big) dt =$$

$$- \sum_{l=1}^{3} v_{0,l} \partial_{x_l} v_{0,j} b_k(x) L,$$

$$\int_L^{-L} \sin\frac{tk\pi}{L} v_{0,l} \sum_{m,n=1}^{\infty}\Big(a_n(x)\cos\frac{nt\pi}{L} + b_n(x)\sin\frac{nt\pi}{L}\Big)\times$$
$$\times\Big(\partial_{x_l} N_{mj}\cos\frac{tm\pi}{L} + \partial_{x_l} M_{mj}\sin\frac{tm\pi}{L}\Big)dt$$
$$= R_1 + R_2 + R_3$$

$$R_1 = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n+m}\frac{1}{2}a_n(x)v_{0,l}\partial_{x_l}M_{mj}L + \frac{1}{2}v_{0,l}b_n(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L,$$

$$R_2 = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n-m}\frac{1}{2}b_n(x)v_{0,l}\partial_{x_l}N_{mj}L,$$

$$R_3 = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m-n}\frac{1}{2}v_{0,l}a_n(x)\partial_{x_l}M_{mj}(x)L,$$

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{tk\pi}{L}\sum_{l=1}^{3}\partial_{x_l}v_{0,j}\sum_{r,n=1}^{\infty}\Big(a_n(x)\cos\frac{nt\pi}{L} + b_n(x)\sin\frac{nt\pi}{L}\Big)$$
$$\Big(N_{rl}(x)\cos\frac{rt\pi}{L} + M_{rl}\sin\frac{rt\pi}{L}\Big)dt = S_1 + S_2 + S_3$$

$$S_1 = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=r+n}\frac{1}{2}a_n(x)\partial_{x_l}v_{0,j}M_{rl}L + \frac{1}{2}\partial_{x_l}v_{0,j}b_n(x)N_{rl}L,$$

$$S_2 = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=r-n}\frac{1}{2}a_n(x)\partial_{x_l}v_{0,j}M_{rl}L,$$

$$S_3 = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n-r}\frac{1}{2}b_n(x)\partial_{x_l}v_{0,j}N_{rl}L,$$

$$\int_{-L}^{L}\sum_{l=1}^{3}\sin\frac{tk\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n(x)\cos\frac{nt\pi}{L}+b_n(x)\sin\frac{nt\pi}{L}\Big)\sum_{r=1}^{\infty}\Big(N_{rl}\cos\frac{rt\pi}{L}+M_{rl}\sin\frac{rt\pi}{L}\Big)$$
$$\times\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\partial_{x_l}N_{mj}\cos\frac{mt\pi}{L} + \partial_{x_l}M_{mj}\sin\frac{mt\pi}{L}\Big)dt$$

$$= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7$$

$$T_1 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=n+m+r} \frac{1}{4} a_n(x) M_{rl}(x) \partial_{x_l} N_{mj}(x) L + \frac{1}{4} b_n(x) N_{rl}(x) \partial_{x_l} N_{mj}(x) L +$$

$$+ \frac{1}{4} a_n(x) N_{rl} \partial_{x_l} M_{mj} L - \frac{1}{4} b_n(x) M_{rl} \partial_{x_l} M_{mj}(x) L,$$

$$T_2 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=n+m-r} \frac{1}{4} a_n(x) M_{rl}(x) \partial_{x_l} N_{mj}(x) L + \frac{1}{4} b_n(x) N_{rl} \partial_{x_l} N_{mj}(x) L,$$

$$T_3 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=n-m+r} \frac{1}{4} a_n(x) N_{rl}(x) \partial_{x_l} M_{mj}(x) L + + \frac{1}{4} b_n(x) N_{rl}(x) \partial_{x_l} N_{mj}(x) L +$$

$$+ \frac{1}{4} b_n(x) M_{rl} \partial_{xl} M_{mj} L,$$

$$T_4 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=m-n+r} \frac{1}{4} a_n(x) M_{rl} \partial_{x_l} N_{mj} L(x) L + \frac{1}{4} a_n(x) N_{rl} \partial_{x_l} M_{mj} L(x) L +$$

$$+ \frac{1}{4} b_n(x) M_{rl} \partial_{x_l} M_{mj} L(x) L.$$

$$T_5 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=n-m-r} \frac{1}{4} b_n(x) N_{rl}(x) \partial_{x_l} N_{mj}(x) L,$$

$$T_6 - \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=m-n-r} \frac{1}{4} a_n(x) M_{ml} \partial_{x_l} N_{mj} L(x) L,$$

$$T_7 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=r-m-n} \frac{1}{4} a_n(x) N_{rl}(x) \partial_{x_l} M_{mj}(x) L - \frac{1}{4} b_n(x) M_{rl}(x) \partial_{x_l} M_{mj}(x) L,$$

le troisième terme : $\omega \frac{\partial}{\partial x_j} \varrho(x,t)$ avec ω est constant nous donne :

$$\omega \frac{\partial}{\partial x_j} \varrho(x,t) = \omega \Big[\frac{\partial}{\partial x_j} \varrho_0(x) + \tag{2.10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_j} a_n(x) \cos \frac{tn\pi}{L} + \frac{\partial}{\partial x_j} b_n(x) \sin \frac{tn\pi}{L} \Big]$$

En multipliant par $\cos\frac{tk\pi}{L}$, et en faisant l'intégrale on obtient :

$$\omega\int_{-L}^{L}\frac{\partial}{\partial x_j}\varrho_0(x)\cos\frac{tk\pi}{L}dt=0$$

et

$$\int_{-L}^{L}\omega\cos\frac{tk\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}a_n(x)\cos\frac{tn\pi}{L}+\frac{\partial}{\partial x_j}b_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big)dt=$$

$$=\omega\frac{\partial}{\partial x_j}a_k(x)L,$$

En multipliant l'équation (2.10) par $\sin\frac{tk\pi}{L}$, et en faisant l'intégral on obtient :

$$\omega\int_{-L}^{L}\frac{\partial}{\partial x_j}\varrho_0(x)\sin\frac{tk\pi}{L}dt=0$$

$$\omega\int_{-L}^{L}\sin\frac{tk\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}a_n(x)\cos\frac{tn\pi}{L}+\frac{\partial}{\partial x_j}b_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big)dt=$$

$$=\omega\frac{\partial}{\partial x_j}b_k(x)L.$$

Pour le second membre de l'équation (2.6)

le premier terme :

$$\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_l}\eta\Big(\frac{\partial}{\partial x_l}v_j+\frac{\partial}{\partial x_j}v_l+\frac{-2}{3}\delta_{jl}\nabla v\Big)$$

on a :

$$\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_l}\eta \tag{2.11}$$

$$\Big[\Big(\partial x_l v_{0,j}+\sum_{m=1}^{\infty}\partial x_l N_{mj}(x)\cos\frac{tm\pi}{L}+\partial x_l M_{mj}\sin\frac{tm\pi}{L}\Big)+$$

$$+\Big(\partial x_j v_{0,l}+\sum_{r=1}^{\infty}\partial x_j N_{rl}(x)\cos\frac{tr\pi}{L}+\partial x_j M_{rl}(x)\sin\frac{tr\pi}{L}\Big)-$$

$$\frac{-2}{3}\delta_{jl}\sum_{j=1}^{3}\Big(\partial x_j v_{0,j}+\sum_{h=1}^{\infty}\partial x_j N_{hj}\cos\frac{ht\pi}{L}+\partial x_j M_{hj}\sin\frac{ht\pi}{L}\Big)\Big]$$

En multipliant par $\cos\frac{kt\pi}{L}$, et en faisant l'intégral on obtient :

$$\int_{-L}^{L}\eta\cos\frac{tk\pi}{L}\sum_{l=1}^{3}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}v_{0,j}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}N_{mj}(x)\cos\frac{tm\pi}{L}+\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}M_{mj}(x)\sin\frac{tm\pi}{L}\Big)dt=$$

$$=\eta\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}N_{kj}(x)L,$$

$$\int_{-L}^{L}\eta\cos\frac{tk\pi}{L}\sum_{l=1}^{3}\Big[\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_j}v_{0,l}+\sum_{r=1}^{\infty}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_j}N_{rl}(x)\cos\frac{tr\pi}{L}+$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_j}M_{rl}(x)\sin\frac{tr\pi}{L}\Big)\Big]dt==\eta\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_j}N_{kl}(x)L,$$

$$\int_{-L}^{L}\eta\cos\frac{kt\pi}{L}\sum_{l=1}^{3}\frac{-2}{3}\delta_{jl}\sum_{i=1}^{3}\Big[\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_l}v_{0.i}+\Big(\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_i}N_{hi}(x)\cos\frac{ht\pi}{L}+$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_i}M_{hi}(x)\sin\frac{ht\pi}{L}\Big)\Big]dt=\eta\sum_{l=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{-2}{3}\delta_{jl}\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_i}N_{ki}(x)L,$$

La même chose en multipliant l'équation(2.11) par $\sin\frac{tk\pi}{L}$, et en faisant l'intégral, on obtient :

$$\int_{-L}^{L}\eta\sin\frac{tk\pi}{L}\sum_{l=1}^{3}\Big[\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}v_{0,j}+\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}N_{mj}(x)\cos\frac{tr\pi}{L}+\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}M_{mj}(x)\sin\frac{tr\pi}{L}\Big)\Big]dt=$$

$$=\eta\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}M_{kj}(x)L,$$

$$\int_{-L}^{L}\eta\sin\frac{tk\pi}{L}\sum_{l=1}^{3}\Big[\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_j}v_{0.l}+\sum_{r=1}^{\infty}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_j}N_{rl}(x)\cos\frac{tr\pi}{L}+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_j}M_{rl}(x)\sin\frac{tr\pi}{L}\Big)\Big]dt=\eta\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_j}M_{kl}(x)L.$$

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{kt\pi}{L}\sum_{l=1}^{3}\frac{-2}{3}\delta_{jl}\eta\sum_{i=1}^{3}\Big[\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_i}v_{0,i}+\sum_{h=1}^{\infty}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_i}N_{hi}(x)\cos\frac{ht\pi}{L}+$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_i}M_{hi}(x)\sin\frac{ht\pi}{L}\Big)\Big]dt=\eta\sum_{l=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{-2}{3}\delta_{jl}\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_i}M_{ki}(x)L,$$

Le deuxième tèrme

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\zeta\nabla\cdot v\Big)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\zeta\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}v_{0,i}(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x_i}N_m(x)\cos\frac{tm\pi}{L}+\frac{\partial}{\partial x_i}M_m(x)\sin\frac{tm\pi}{L}\Big)\qquad(2.12)$$

En multipliant cette l'équation par $\cos\frac{tk\pi}{L}$, et en intégrant on obtient :

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{tk\pi}{L}\zeta\sum_{i=1}^{3}\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}N_{mi}(x)\cos\frac{tm\pi}{L}+\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}M_{mi}(x)\sin\frac{tm\pi}{L}\Big)dt=$$

$$=\zeta\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}N_{ki}(x)L,$$

tel que ζ est constant.

En multipliant l'équation (2.12) par $\sin\frac{tk\pi}{L}$, et en intégrant on obtient :

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{tk\pi}{L}\zeta\sum_{i=1}^{3}\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}N_{mi}(x)\cos\frac{tm\pi}{L}+\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}M_{mi}(x)\sin\frac{tm\pi}{L}\Big)dt=$$

$$=\zeta\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}M_{ki}(x)L,$$

Le troisième terme :

$$\varrho g e_3=$$

$$=\Big(\varrho_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)\cos\frac{tn\pi}{L}+b_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big)ge_3\qquad(2.13)$$

En multipliant cette équation parcos $\frac{tk\pi}{L}$, et en intégrant on obtient :

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{tk\pi}{L}\Big(\varrho_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\cos\frac{tn\pi}{L} + b_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big) ge_3 dt$$

$$= -a_k(x)Lge_3,$$

De la même façon, en multipliant l'équation (2.13) par sin $\frac{tk\pi}{L}$, et en intgrant on obtient :

$$= -b_k(x)Lge_3,$$

Et le dernier terme égale :

$$F(x,t) = f_0(x) + \sum_{s=1}^{\infty} c_s(x)\cos\frac{kt\pi}{L} + d_s(x)\sin\frac{kt\pi}{L} \tag{2.14}$$

alors :

$$\int_{-L}^{L} F(x,t)\cos\frac{tk\pi}{L}dt = c_k(x)L,$$

et aussi

$$\int_{-L}^{L} F(x,t)\sin\frac{tk\pi}{L}dt = d_k(x)L,$$

Maintenant en va calculer l'intégrale de chaque terme de (1.2) écrit en fonction de série de Fourier multiplié par 1. Ça correspond à cos $\frac{t0\pi}{L} = 1$, c'est-à-dire que nous pouvons procéder de la même manière que dans le calcul précédent, en posant $k = 0$ dans cos $\frac{tk\pi}{L} = 1$ dans l'intégrand dans le calcul précédent Examinons les termes qui figure dans l'équation (2.6). Nous commençons par l'examen du terme $\varrho\partial_t v_j$. On a

En intégrant l'équation(2.8) sur $[-L, L]$, on obtient

$$\int_{-L}^{L} \varrho_0(x)Big[\sum_{m=1}^{\infty}\Big((-N_{mj}(x))\frac{L}{m\pi}\sin\frac{tm\pi}{L} + M_{mj}(x)\frac{L}{m\pi}\cos\frac{tm\pi}{L}\Big)\Big]dt = 0$$

$$\int_{-L}^{L} Big[\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\cos\frac{tk\pi}{L} + b_n(x)\sin\frac{tn\pi}{L}\Big]\times$$

$$\times\Big[\sum_{m=1}^{\infty}\Big((-N_{mj}(x))\frac{L}{m\pi}\sin\frac{tm\pi}{L} + M_{mj}(x)\frac{L}{m\pi}\cos\frac{tm\pi}{L}\Big)\Big]dt =$$

$$= 2L\Big[a_n(x)M_{nj}(x)\frac{L}{n\pi} - b_n(x)N_{nj}(x)\frac{L}{n\pi}\Big]$$

Pour le deuxieume terme $\varrho(x,t)\sum_{l=1}^{3} v_l\frac{\partial}{\partial x_l}v_j$ on a l'expression En faisant l'intégration de l'équation (2.9), on obtient

$$\int_{-L}^{L}\sum_{l=1}^{3}\varrho_0(x)v_{0,l}\partial_{x_l}v_{0,j}(x) = 2L\sum_{l=1}^{3}\varrho_0(x)v_{0,l}\partial_{x_l}v_{0,j}(x),$$

$$\int_{-L}^{L}\sum_{l=1}^{3}\varrho_0 v_{0,l}\Big[\sum_{m=1}^{\infty}\partial_{x_l}N_{mj}(x)\cos\frac{tm\pi}{L} + \partial_{x_l}M_{mj}(x)\sin\frac{tm\pi}{L}\Big]dt = 0$$

$$\int_{-L}^{L}\sum_{l=1}^{3}\partial_{x_l}v_{0,j}\varrho_0\sum_{r=1}^{\infty}\Big(N_{rl}(x)\cos\frac{tr\pi}{L} + M_{rl}\sin\frac{tr\pi}{L}\Big)dt = 0$$

$$\int_{-L}^{L}\sum_{l=1}^{3}\varrho_0\sum_{m,r=1}^{\infty}\Big(N_{rl}(x)\cos\frac{tr\pi}{L} + M_{rl}\sin\frac{tr\pi}{L}\Big)\times$$

$$\times\Big(\partial_{x_l}N_{mj}(x)\cos\frac{tm\pi}{L} + \partial_{x_l}M_{mj}\sin\frac{tm\pi}{L}\Big)dt =$$

$$= \sum_{l=1}^{3}2L\Big[\varrho_0(x)N_{ml}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x) + \varrho_0(x)M_{ml}(x)\partial_{x_l}M_{mj}(x)\Big]$$

$$\int_{L}^{-L}\sum_{l=1}^{3}v_{0,l}\partial_{x_l}v_{0,j}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n(x)\cos\frac{nt\pi}{L} + b_n(x)\sin\frac{nt\pi}{L}\Big)dt = 0$$

$$\int_{L}^{-L}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n(x)\cos\frac{nt\pi}{L} + b_n(x)\sin\frac{nt\pi}{L}\Big)\Big]\times$$

$$\times\sum_{l=1}^{3}\Big[v_{0,l} + \sum_{m=1}^{\infty}\Big(N_{rl}(x)\cos\frac{rt\pi}{L} + M_{rl}(x)\sin\frac{tr\pi}{L}\Big)\Big]\times$$

$$\times\Big[\partial_{x_l}v_{0,j}+\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\partial_{x_l}N_{mj}\cos\frac{tm\pi}{L}+\partial_{x_l}M_{mj}(x)\sin\frac{tm\pi}{L}\Big)\Big]dt$$

alors, le résultat de chaque intégrale est

$$\int_{L}^{-L}\sum_{l=1}^{3}v_{0,l}\partial_{x_l}v_{0,j}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n(x)\cos\frac{nt\pi}{L}+b_n(x)\sin\frac{nt\pi}{L}\Big)dt=0$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\Big(a_n(x)\cos\frac{nt\pi}{L}+b_n(x)\sin\frac{nt\pi}{L}\Big)\Big(\partial_{x_l}N_{mj}\cos\frac{tm\pi}{L}+\partial_{x_l}M_{mj}\sin\frac{tm\pi}{L}\Big)dt=$$

$$=\sum_{l=1}^{3}2L\Big[a_n(x)v_{0,l}\partial_{x_l}N_{nj}-b_n(x)v_{0,l}\partial_{x_l}M_{nj}\Big]$$

$$\int_{-L}^{L}\sum_{l=1}^{3}\partial_{x_l}v_{0,j}\sum_{r,n=1}^{\infty}\Big(a_n(x)\cos\frac{nt\pi}{L}+b_n(x)\sin\frac{nt\pi}{L}\Big)$$

$$\Big(N_{rl}(x)\cos\frac{rt\pi}{L}+M_{rl}\sin\frac{rt\pi}{L}\Big)dt=$$

$$=\sum_{l=1}^{3}2L\Big[a_n(x)\partial_{x_l}v_{0,j}N_{rl}(x)[b_n(x)\partial_{x_l}v_{0,j}M_{nl}(x)\Big]$$

$$\int_{-L}^{L}\sum_{l=1}^{3}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n(x)\cos\frac{nt\pi}{L}+b_n(x)\sin\frac{nt\pi}{L}\Big)\times$$

$$\times\sum_{r=1}^{\infty}\Big(N_{rl}\cos\frac{rt\pi}{L}+M_{rl}\sin\frac{rt\pi}{L}\Big)\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\partial_{x_l}N_{mj}\cos\frac{mt\pi}{L}+\partial_{x_l}M_{mj}\sin\frac{mt\pi}{L}\Big)dt=0$$

Le troisième terme :

En intégrant l'équation (2.10) par rapport à t on a

$$\omega\int_{L}^{L}\frac{\partial}{\partial x_j}\varrho_0(x)\cos\frac{tk\pi}{L}dt=2L\omega\frac{\partial}{\partial x_j}\varrho_0(x)$$

et

$$\int_{-L}^{L} \omega \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{\partial}{\partial x_j} a_n(x) \cos \frac{tn\pi}{L} + \frac{\partial}{\partial x_j} b_n(x) \sin \frac{tn\pi}{L} \Big) dt = 0$$

Pour le second membre de l'équation (2.6)

le premier terme : En intégrant l'équation(2.11) par rapport à t on a

$$\int_{-L}^{L} \eta \sum_{l=1}^{3} \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} v_{0,j} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} N_{rj}(x) \cos \frac{tr\pi}{L} + \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} M_{rj}(x) \sin \frac{tr\pi}{L} \Big) dt =$$

$$= 2L\eta \sum_{l=1}^{3} \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} v_{0,j},$$

$$\int_{-L}^{L} \eta \sum_{l=1}^{3} \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j} v_{0,l} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j} N_{ml}(x) \cos \frac{tm\pi}{L} + \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j} M_{ml}(x) \sin \frac{tm\pi}{L} \Big) dt =$$

$$= \eta 2L \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j} v_{0,l},$$

$$\int_{-L}^{L} \eta \sum_{l=1}^{3} \frac{-2}{3} \delta_{jl} \sum_{i=1}^{3} \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} v_{0,i} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_i} N_{hi}(x) \cos \frac{ht\pi}{L} + \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_i} M_{hi}(x) \sin \frac{ht\pi}{L} \Big) dt =$$

$$= \eta 2L \sum_{l=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{-2}{3} \delta_{jl} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} v_{0,i}(x),$$

Le deuxième tèrme En intégrant l'équation (2.12) sur $[-L, L]$ on obtient

$$\int_{-L}^{L} \varsigma \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} v_{0,i} \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} N_{mi}(x) \cos \frac{tm\pi}{L} +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} M_{mi}(x) \sin \frac{tm\pi}{L} \Big) dt = 2L \partial_{x_i} v_{0,i}$$

le troisième terme :

soit l'équation(2.13) en faisant l'intégrale on obtient

$$\int_{-L}^{L} \Big(\varrho_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cos \frac{tn\pi}{L} + b_n(x) \sin \frac{tn\pi}{L} \Big) g e_3 dt$$

$$= 2L\varrho_0(x)ge_3.$$

Et le dernier terme, pour l'équation (2.14) en faisant l'intégrale sur $[-L, L]$ alors

$$\int_{-L}^{L} F(x,t)dt = 2Lf_0(x),$$

2.4 Equation de contunuité transformé

Maintenant nous présentons l'équation qui résulte des calculs effectués ci-dessus.

Proposition 1. *On suppose que les fonctions inconnues ϱ et v_j ont la forme (2.1) et (2.2). Alors l'équation (1.10) peut être écrite formellement dans la forme suivante (avec des séries formelles)*

$$b_k(x)k\pi+\sum_{j=1}^{3}\Big(\varrho_0\partial_{x_j}N_{kj}(x)L+\partial_{x_j}v_{0,j}(x)a_k(x)L+v_0(x)\partial_{x_j}a_k(x)L++\partial_{x_j}\varrho_0(x)N_{kj}(x)L\Big)+ \tag{2.15}$$

$$+\sum_{k=n+m}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)\partial_{x_j}N_{mj}L-b_n(x)\partial_{x_j}MmjL+\partial_{xj}a_n(x)M_{mj}(x)L+\partial_{x_j}b_n(x)N_{mj}(x)L\Big)$$

$$+\sum_{k=n-m}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)\partial_{x_j}N_{mj}L+b_n(x)\partial_{x_j}M_{mj}L+\partial_{x_j}b_n(x)M_{mj}(x)L+\partial_{x_j}b_n(x)N_{mj}(x)L\Big)+$$

$$+\sum_{k=m-n}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)\partial_{x_j}N_{mj}L+b_n(x)\partial_{x_j}M_{mj}L+\partial_{x_j}b_n(x)M_{mj}(x)L+\partial_{x_j}b_n(x)N_{mj}(x)L\Big)=0.$$

$$\text{pour} \quad k=1,2,\cdots,$$

$$-a_k(x)k\pi+\sum_{j-1}^{3}\Big(\varrho_0\partial_{x_j}M_{kj}(x)L+\partial_{x_j}v_{0,j}(x)b_k(x)L+v_{0,j}(x)\partial_{x_j}b_k(x)L+\partial_{x_j}\varrho_0(x)M_{kj}(x)L\Big)+ \tag{2.16}$$

$$+\sum_{k=n+m}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)\partial_{x_j}M_{mj}L+b_n(x)\partial_{x_j}N_{mj}L+\partial_{x_j}a_n(x)M_{mj}(x)L+\partial_{x_j}b_n(x)N_{mj}(x)L\Big)+$$

$$+\sum_{k=n-m}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\Big(\partial_{x_j}N_{mj}(x)b_n(x)L+\partial_{x_j}b_n(x)N_{mj}(x)L\Big)+\sum_{k=m-n}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\Big(\partial_{x_j}M_{mj}(x)a_n(x)L+$$

$$+\partial_{x_j}a_n(x)M_{mj}(x)L\Big)=0.$$

pour $k=1,2,\cdots.$

$$2L\sum_{j=1}^{3}\varrho_0(x)\partial_{x_j}v_{0.j}+2L\sum_{j=1}^{3}v_{0.j}(x)\partial_{x_j}\varrho_0(x)+ \tag{2.17}$$

$$+\sum_{j=1}^{3}2L\Big(\partial_{x_j}a_n(x)N_{nj}(x)+\partial_{x_j}b_n(x)M_{nj}(x)\Big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{3}2L\Big(a_n(x)\partial_{xj}N_{nj}(x)L-b_n(x)\partial_{x_j}M_{nj}(x)L\Big)=0.$$

Démonstration. Les égalités (2.15), (2.16) et(2.17) avec des séries formelles résultent des calculs illustrés ci-dessus (dans la section "Calcul pour l'équation de continuité"). □

Il est clair qu'ici on démontre seulement l'expression formelle et la convergence des séries impliquées n'est pas encore démontrée.

2.5 Equation de quantité de mouvement transformé

En ce qui concerne l'équation de la quantité de mouvement, d'après les calculs effectués ci dessus, nous avons l'expression suivante.

PROPOSITION 2. *On suppose que les fonctions inconnues ϱ et v_j ont la forme (2.1) et (2.2) et que la fonction donnée F a la forme (2.7). Alors l'équation (1.11) peut être écrite formellement dans la forme suivante (avec des séries formelles)*

$$\varrho_0(x)\frac{L^2}{m\pi}M_{kj}(x)+\sum_{l=1}^{3}\varrho_0(x)v_{0,l}\partial_{x_l}N_{kj}(x)L\varrho_0(x)N_{kl}\partial_{x_l}v_{0,j}L+v_{0,l}\partial_{x_l}v_{0,j}a_k(x)L+\omega\partial_{x_j}a_k(x)L+ \tag{2.18}$$

$$+\sum_{k=n+m}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)M_{mj}\frac{L^2}{m\pi}+b_n(x)N_{mj}\frac{L^2}{m\pi}+\sum_{l=1}^{3}a_n(x)\partial_{x_l}v_{0,j}N_{ml}L-\partial_{x_l}v_{0,j}b_n(x)M_{ml}L\Big)+$$

$$+\sum_{k=n-m}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)M_{mj}\frac{L^2}{m\pi}-b_n(x)N_{mj}\frac{L^2}{m\pi}+\sum_{l=1}^{3}a_n(x)\partial_{x_l}v_{0,j}N_{ml}L+\partial_{x_l}v_{0,j}b_n(x)M_{ml}L\Big)+$$

$$+\sum_{k=m-n}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)M_{mj}\frac{L^2}{m\pi}-b_n(x)N_{mj}\frac{L^2}{m\pi}+\sum_{l=1}^{3}a_n(x)\partial_{x_l}v_{0,j}N_{ml}L+\partial_{x_l}v_{0,j}b_n(x)M_{ml}L\Big)+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n+m}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)v_{0,l}(x)\partial_{x_l}N_{mj}L-v_{0,l}b_n(x)\partial_{x_l}M_{mj}L\Big)+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n-m}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)v_{0,l}(x)\partial_{x_l}N_{mj}L-v_{0,l}b_n(x)\partial_{x_l}M_{mj}L\Big)+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m-n}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)v_{0,l}(x)\partial_{x_l}N_{mj}L-v_{0,l}b_n(x)\partial_{x_l}M_{mj}L\Big)+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m+r}\frac{1}{2}\Big(\varrho_0(x)N_{rl}\partial_{x_l}N_{mj}L-M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L\varrho_0(x)\Big)+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m-r}\frac{1}{2}\Big(\varrho_0(x)\times$$

$$\times N_{rl}\partial_{x_l}N_{mj}L+M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L\varrho_0(x)\Big)+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=r-m}\frac{1}{2}\Big(\varrho_0(x)N_{rl}\partial_{x_l}N_{mj}L+$$

$$+M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L\varrho_0(x)\Big)+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n+m+r}\frac{1}{4}\Big(a_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L-$$

$$-b_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L - a_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L - b_n(x)N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}(x)L\Big)$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n+m-r}\frac{1}{4}\Big(a_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L - b_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+$$

$$+a_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L + b_n(x)N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}(x)L\Big) + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n-m+r}\frac{1}{4}$$

$$\Big(a_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L + b_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L-$$

$$-b_n(x)N_{rl}\partial_{xl}M_{mj}L\Big) + +\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m-n+r}-\frac{1}{4}\Big(a_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L(x)L\Big)$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n-m-r}\frac{1}{4}\Big(a_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+b_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+b_n(x)N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L\Big)$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m-n-r}\frac{1}{4}a_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L(x)L+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=r-m-n}\frac{1}{4}\Big(a_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L-$$

$$-b_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L + a_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L + b_n(x)N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}(x)L\Big) =$$

$$= \sum_{l=1}^{3}\eta\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}N_{kj}(x)L + \frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_j}N_k(x)L + \sum_{i=1}^{3}\frac{-2}{3}\delta_{jl}\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_i}N_{ki}L\Big)+$$

$$+\zeta\Big(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_i}N_{ki}(x)L\Big) - a_k(x)L\partial_{x_j}g + c_k(x)L$$

$$\text{pour}\quad k = 1, 2, \cdots,$$

et

$$\varrho_0(x)\frac{L^2}{m\pi}N_{kj}L + \sum_{l=1}^{3}\varrho_0(x)v_{0,l}\partial_{x_l}M_{kj}(x)L + \varrho_0(x)M_{kl}\partial_{x_l}v_{0,j}L+ \tag{2.19}$$

$$+v_{0,l}\partial_{x_l}v_{0,j}b_k(x)L + \omega\partial_{x_j}b_k(x)L + \sum_{k=n+m}\frac{1}{2}\Big(- a_n(x)N_{mj}\frac{L^2}{m\pi}+$$

$$+b_n(x)M_{mj}\frac{L^2}{m\pi}+\sum_{l=1}^{3}a_n(x)\partial_{x_l}v_{0,j}M_{rl}L-\partial_{x_l}v_{0,j}b_n(x)N_{rl}L\Big)+$$

$$+\sum_{k=m-n}\frac{1}{2}\Big(-a_n(x)N_{mj}\frac{L^2}{m\pi}+\sum_{l=1}^{3}a_n(x)\partial_{x_l}v_{0,j}M_{ml}L\Big)+\sum_{k=n-m}\frac{1}{2}\Big(b_n(x)M_{mj}\frac{L^2}{m\pi}+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}b_n(x)\partial_{x_l}v_{0,j}N_{ml}L\Big)+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n+m}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)v_{0,l}(x)\partial_{x_l}M_{mj}L+v_{0,l}b_n(x)\partial_{x_l}N_{mj}L\Big)$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n-m}\frac{1}{2}b_n(x)v_{0,l}(x)\partial_{x_l}N_{mj}L+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m-n}\frac{1}{2}a_n(x)v_{0,l}(x)\partial_{x_l}M_{mj}L+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m+r}\frac{1}{2}\Big(\varrho_0(x)M_{rl}\partial_{x_l}N_{mj}L+N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L\varrho_0(x)\Big)+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m-r}\frac{1}{2}\varrho_0(x)M_{rl}\partial_{x_l}N_{mj}L+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=r-m}\frac{1}{2}\varrho_0(x)N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n+m+r}\frac{1}{4}a_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+\frac{1}{4}b_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+\frac{1}{4}a_n(x)N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L-$$

$$-\frac{1}{4}b_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}(x)L+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n+m-r}\frac{1}{4}\Big(a_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+$$

$$+b_n(x)N_{rl}\partial_{x_l}N_{mj}(x)L\Big)+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n-m+r}\frac{1}{4}\Big(a_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}M_{mj}(x)L+b_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+$$

$$+b_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L\Big)+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m-n+r}\frac{1}{4}\Big(a_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+a_n(x)N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}(x)L+$$

$$+b_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L(x)L\Big)+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n-m-r}\frac{1}{4}b_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m-n-r}\frac{1}{4}a_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=r-m-n}\frac{1}{4}a_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}M_{mj}(x)L-$$

$$-\frac{1}{4}b_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}M_{mj}(x)L = \sum_{l=1}^{3}\eta\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}M_{kj}(x)L + \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j}M_k(x)L +$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\frac{-2}{3}\delta_{jl}\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_i}M_{ki}L\Big) + \zeta\Big(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_i}M_{ki}(x)L\Big) - b_k(x)L\partial_{x_j}g + d_k(x)L$$

$$\text{pour } k = 1, 2, \cdots, \qquad j = 1, 2, 3$$

$$2L\sum_{l=1}^{3}\varrho_0(x)v_{0,l}\partial_{x_l}v_{0,j}(x) + +2L\Big[a_n(x)M_{nj}(x)\frac{L}{n\pi} - b_n(x)N_{nj}(x)\frac{L}{n\pi}\Big] + \tag{2.20}$$

$$+\sum_{l=1}^{3}2L\Big[\varrho_0(x)N_{ml}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x) + \varrho_0(x)M_{ml}(x)\partial_{x_l}M_{mj}(x)\Big] +$$

$$+\sum_{l=1}^{3}2L\Big[a_n(x)v_{0,l}\partial_{x_l}N_{nj} - b_n(x)v_{0,l}\partial_{x_l}M_{nj}\Big] +$$

$$+\sum_{l=1}^{3}2L\Big[a_n(x)\partial_{x_l}v_{0,j}N_{rl}(x)[b_n(x)\partial_{x_l}v_{0,j}M_{nl}(x)\Big] + 2L\omega\frac{\partial}{\partial x_j}\varrho_0(x) =$$

$$= 2L\eta\sum_{l=1}^{3}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}v_{0,j} + \sum_{l=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{-2}{3}\delta_{jl}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l}v_{0,i}(x)\Big) +$$

$$+2L\partial_{x_i}v_{0,i}\varrho_0(x)ge_3 + 2Lf_0(x).$$

DÉMONSTRATION. Les égalités (2.18), (2.19) et (2.20) avec des séries formelles résultent des calculs illustrés ci-dessus (dans la section "Calcul pour l'équation de quantité de mouvement"). □

Chapitre 3

Formulation d'équation approchée

Les propositions 1 et 2 que nous avons montrées, certes, nous donnent une caractérisation intéressante du mouvement de l'air provoqué par le vol d'un insecte. Toutefois, elles ne disent que, si $\varrho(x,t)$ et $v(x,t)$ sont des fonctions périodiques en t et l'est aussi la fonction $F(x,t)$ et si les séries formelles figurant dans les équations (2.15), (2.16),(2.17), (2.18), (2.19)et (2.20) convergent, alors les séries de Fourier de $\varrho(x,t)$, $v(x,t)$ et $F(x,t)$ doivent vérifier les équations (2.15), (2.16),(2.17), (2.18), (2.19) et(2.20) . Mais on ne sait pas s'il existe des fonctions $\varrho(x,t)$ et $v(x,t)$ qui vérifient ces équations

Or, si on regarde les coefficients de Fourier $\varrho_0(x)$, $a_n(x)$, $b_n(x)$, $v_{0j}(x)$, $N_{nj}(x)$, $M_{nj}(x)$ de $\varrho(x,t)$ et $v(x,t)$ (voir (2.1) et (2.2)) et aussi les coefficients de Fourier $f_0(x)$, $c_s(x)$ et $d_s(x)$ de F (voir (2.7)), on voit que les équations (2.15), (2.16), (2.18),(2.17), (2.19) et (2.20) constituent un système infini d'équations aux dérivées partielles (dérivées par rapport à $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$) pour un nombre infini de fonctions inconnues $\varrho_0(x)$, $a_n(x)$, $b_n(x)$, $v_{0j}(x)$, $N_{nj}(x)$, $M_{nj}(x)$, $f_0(x)$, $c_s(x)$, $d_s(x)$ $(n,j,s = 1,2,\cdots)$. De plus, les équations sont non linéaires (en fonctions inconnues). Il est clair qu'il est difficile de résoudre ce système infini d'équations.

Vue la difficulté, voire impraticabilité, de résoudre le système infini d'équations (2.15), (2.16), (2.17),(2.18),(2.19), (2.20) et nous proposons un système réduit par troncature d'équations, ou approximation par la troncature du système d'équations.

Soit I un nombre naturel supérieur ou égal à 1. On pose

$$\varrho^{[I]}(x,t) = \varrho_0(x) + \sum_{n=1}^{I}(a_n(x)\cos\frac{nt\pi}{L} + b_n(x)\sin\frac{nt\pi}{L}), \tag{3.1}$$

$$v_j^{[I]}(x,t) = v_{0j}(x) + \sum_{m=1}^{I}(N_{mj}(x)\cos\frac{mt\pi}{L} + M_{mj}(x)\sin\frac{mt\pi}{L}). \tag{3.2}$$

On pose analoguement

$$F^{[I]}(x,t) = f_0(x) + \sum_{s=1}^{I}(c_s(x)\cos\frac{st\pi}{L} + d_s(x)\sin\frac{st\pi}{L}). \tag{3.3}$$

En outre nous introduisons les notations :

par $\sum\limits_{k=n+m}^{[I]}$ on désigne la somme pour (n,m) appartenant à l'ensemble

$$\{(n,m)\in\mathbb{N}^2\,|\,n+m=k,\ 1\le n\le I,\ 1\le m\le I\},$$

par $\sum\limits_{k=n-m}^{[I]}$ on désigne la somme pour (n,m) appartenant à l'ensemble

$$\{(n,m)\in\mathbb{N}^2\,|n-m=k,\ 1\le n\le I,\ 1\le m\le I\},$$

par $\sum\limits_{k=m-n}^{[I]}$ on désigne la somme pour (n,m) appartenant à l'ensemble

$$\{(n,m)\in\mathbb{N}^2\,|m-n=k,\ 1\le n\le I,\ 1\le m\le I\},$$

par $\sum_{k=n+m+r}^{[I]}$ on désigne la somme pour (m, n, r) appartenant à l'ensemble

$$\{(m, n, r) \in \mathbb{N}^3 \mid m + n + r = k, \ 1 \leq n \leq I, \ 1 \leq m \leq I, \ 1 \leq r \leq I\},$$

par $\sum_{k=n-m+r}^{[I]}$ on désigne la somme pour (n, m, r) appartenant à l'ensemble

$$\{(m, n, r) \in \mathbb{N}^3 \mid n - m + r = k, \ 1 \leq n \leq I, \ 1 \leq m \leq I, \ 1 \leq r \leq I\},$$

par $\sum_{k=m-n+r}^{[I]}$ on désigne la somme pour (n, m, r) appartenant à l'ensemble

$$\{(m, n, r) \in \mathbb{N}^3 \mid m - n + r = k, \ 1 \leq n \leq I, \ 1 \leq m \leq I, \ 1 \leq r \leq I\}.$$

En réalité, comme nous considérons seulement $n, m, r > 0$, l'opération de somme $\sum_{k=n+m}^{[I]}$ introduite ici et l'opération de somme $\sum_{k=n+m}$ introduite précédemment sont équivalentes. Analoguement l'opération de somme $\sum_{k=n+m+r}^{[I]}$ introduite ici et l'opération de somme $\sum_{k=n+m+r}$ introduite précédemment sont équivalentes. Donc on peut même épargner la nouvelle définition de $\sum_{k=n+m}^{[I]}$ et de $\sum_{k=n+m+r}^{[I]}$. Mais pour l'uniformité de notation, nous utilisons les nouvelles notations.

Ces notations étant introduites, de manière analogue à la formulation des équations (2.15), (2.16),(2.17), (2.18) ,(2.19),(2.20) nous proposons le système d'équations réduit

$$
\begin{aligned}
&b_k(x)k\pi+\sum_{j=1}^{3}\Big(\varrho_0\partial_{x_j}N_{kj}(x)L+\partial_{x_j}v_{0,j}(x)a_k(x)L+v_0(x)\partial_{x_j}a_k(x)L+\partial_{x_j}\varrho_0(x)N_{kj}(x)L\Big)+\\
&+\sum_{k=n+m}^{[I]}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)\partial_{x_j}N_{mj}L-b_n(x)\partial_{x_j}MmjL+\partial_{xj}a_n(x)M_{mj}(x)L+\partial_{x_j}b_n(x)N_{mj}(x)L\Big)\\
&+\sum_{k=n-m}^{[I]}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)\partial_{x_j}N_{mj}L+b_n(x)\partial_{x_j}M_{mj}L+\partial_{x_j}b_n(x)M_{mj}(x)L+\partial_{x_j}b_n(x)N_{mj}(x)L\Big)+\\
&+\sum_{k=m-n}^{[I]}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)\partial_{x_j}N_{mj}L+b_n(x)\partial_{x_j}M_{mj}L+\partial_{x_j}b_n(x)M_{mj}(x)L+\partial_{x_j}b_n(x)N_{mj}(x)L\Big)=0
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

pour $k=1,\cdots,I,$

$$
\begin{aligned}
&-a_k(x)k\pi+\sum_{j=1}^{3}\Big(\varrho_0\partial_{x_j}M_{kj}(x)L+\partial_{x_j}v_{0,j}(x)b_k(x)L+v_{0,j}(x)\partial_{x_j}b_k(x)L+\partial_{x_j}\varrho_0(x)M_{kj}(x)L\Big)+\\
&+\sum_{k=n+m}^{[I]}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)\partial_{x_j}M_{mj}L+b_n(x)\partial_{x_j}N_{mj}L+\partial_{x_j}a_n(x)M_{mj}(x)L+\partial_{x_j}b_n(x)N_{mj}(x)L\Big)+\\
&\qquad+\sum_{k=n-m}^{[I]}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\Big(\partial_{x_j}N_{mj}(x)b_n(x)L+\partial_{x_j}b_n(x)N_{mj}(x)L\Big)\\
&\qquad+\sum_{k=m-n}^{[I]}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\Big(\partial_{x_j}M_{mj}(x)a_n(x)L+\partial_{x_j}a_n(x)M_{mj}(x)L\Big)=0
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

pour $k=1,\cdots,I,$

$$
\varrho_0(x)\frac{L^2}{m\pi}M_{kj}L+\sum_{l-1}^{3}\varrho_0(x)v_{0,l}\partial_{x_l}N_{kj}(x)L\varrho_0(x)N_{kl}\partial_{x_l}v_{0,j}L+v_{0,l}\partial_{x_l}v_{0,j}a_k(x)L+\omega\partial_{x_j}a_k(x)L+
\tag{3.6}
$$

$$+\sum_{k=n+m}^{[I]}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)M_{mj}\frac{L^2}{m\pi}+b_n(x)N_{mj}\frac{L^2}{m\pi}+\sum_{l=1}^{3}a_n(x)\partial_{x_l}v_{0,j}N_{ml}L-\partial_{x_l}v_{0,j}b_n(x)M_{ml}L\Big)+$$

$$+\sum_{k=n-m}^{[I]}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)M_{mj}\frac{L^2}{m\pi}-b_n(x)N_{mj}\frac{L^2}{m\pi}+\sum_{l=1}^{3}a_n(x)\partial_{x_l}v_{0,j}N_{ml}L+\partial_{x_l}v_{0,j}b_n(x)M_{ml}L\Big)+$$

$$+\sum_{k=m-n}^{[I]}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)M_{mj}\frac{L^2}{m\pi}-b_n(x)N_{mj}\frac{L^2}{m\pi}+\sum_{l=1}^{3}a_n(x)\partial_{x_l}v_{0,j}N_{ml}L+\partial_{x_l}v_{0,j}b_n(x)M_{ml}L\Big)+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n+m}^{[I]}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)v_{0,l}(x)\partial_{x_l}N_{mj}L-v_{0,l}b_n(x)\partial_{x_l}M_{mj}L\Big)+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n-m}^{[I]}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)v_{0,l}(x)\partial_{x_l}N_{mj}L$$

$$-v_{0,l}b_n(x)\partial_{x_l}M_{mj}L\Big)+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m-n}^{[I]}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)v_{0,l}(x)\partial_{x_l}N_{mj}L-v_{0,l}b_n(x)\partial_{x_l}M_{mj}L\Big)$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m+r}^{[I]}\frac{1}{2}\Big(\varrho_0(x)N_{rl}\partial_{x_l}N_{mj}L-M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L\varrho_0(x)\Big)$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m-r}^{[I]}\frac{1}{2}\Big(\varrho_0(x)N_{rl}\partial_{x_l}N_{mj}L+M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L\varrho_0(x)\Big)$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=r-m}^{[I]}\frac{1}{2}\Big(\varrho_0(x)N_{rl}\partial_{x_l}N_{mj}L+M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L\varrho_0(x)\Big)+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n+m+r}^{[I]}\frac{1}{4}\Big(a_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)$$

$$-b_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L-a_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L-b_n(x)N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}(x)L\Big)$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n+m-r}^{[I]}\frac{1}{4}\Big(a_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L-b_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+a_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L$$

$$+b_n(x)N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}(x)L\Big)+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n-m+r}^{[I]}\frac{1}{4}\Big(a_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+b_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L$$

$$-b_n(x)N_{rl}\partial_{xl}M_{mj}L\Big)+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m-n+r}^{[I]}-\frac{1}{4}\Big(a_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L(x)L\Big)$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n-m-r}^{[I]}\frac{1}{4}\Big(a_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+b_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+b_n(x)N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L\Big)$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m-n-r}^{[I]}\frac{1}{4}a_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L(x)L+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=r-m-n}^{[I]}\frac{1}{4}\Big(a_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L$$

$$-b_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+a_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L+b_n(x)N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}(x)L\Big)=$$

$$=\sum_{l=1}^{3}\eta\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}N_{kj}(x)L+\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_j}N_k(x)L+\sum_{i=1}^{3}\frac{-2}{3}\delta_{jl}\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_i}N_{ki}L\Big)+$$

$$+\zeta\Big(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_i}N_{ki}(x)L\Big)-a_k(x)L\partial_{x_j}g+c_k(x)L$$

$$\text{pour}\quad k=1,\cdots,I,$$

et

$$\varrho_0(x)\frac{L^2}{m\pi}N_{kj}L+\sum_{l=1}^{3}\varrho_0(x)v_{0,l}\partial_{x_l}M_{kj}(x)L+\varrho_0(x)M_{kl}\partial_{x_l}v_{0,j}L+ \tag{3.7}$$

$$+v_{0,l}\partial_{x_l}v_{0,j}b_k(x)L+\omega\partial_{x_j}b_k(x)L+\sum_{k=n+m}^{[I]}\frac{1}{2}\Big(-a_n(x)N_{mj}\frac{L^2}{m\pi}+$$

$$+b_n(x)M_{mj}\frac{L^2}{m\pi}+\sum_{l=1}^{3}a_n(x)\partial_{x_l}v_{0,j}M_{rl}L-\partial_{x_l}v_{0,j}b_n(x)N_{rl}L\Big)+$$

$$+\sum_{k=m-n}^{[I]}\frac{1}{2}\Big(-a_n(x)N_{mj}\frac{L^2}{m\pi}+\sum_{l=1}^{3}a_n(x)\partial_{x_l}v_{0,j}M_{ml}L\Big)+\sum_{k=n-m}^{[I]}\frac{1}{2}\Big(b_n(x)M_{mj}\frac{L^2}{m\pi}+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}b_n(x)\partial_{x_l}v_{0,j}N_{ml}L\Big)+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n+m}^{[I]}\frac{1}{2}\Big(a_n(x)v_{0,l}(x)\partial_{x_l}M_{mj}L+v_{0,l}b_n(x)\partial_{x_l}N_{mj}L\Big)$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n-m}^{[I]}\frac{1}{2}b_n(x)v_{0,l}(x)\partial_{x_l}N_{mj}L+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m-n}^{[I]}\frac{1}{2}a_n(x)v_{0,l}(x)\partial_{x_l}M_{mj}L+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m+r}^{[I]}\frac{1}{2}\Big(\varrho_0(x)M_{rl}\partial_{x_l}N_{mj}L+N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L\varrho_0(x)\Big)+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m-r}^{[I]}\frac{1}{2}\varrho_0(x)M_{rl}\partial_{x_l}N_{mj}L+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=r-m}^{[I]}\frac{1}{2}\varrho_0(x)N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n+m+r}^{[I]}\frac{1}{4}a_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+\frac{1}{4}b_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+\frac{1}{4}a_n(x)N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L-$$

$$-\frac{1}{4}b_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}(x)L+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n+m-r}^{[I]}\frac{1}{4}\Big(a_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+$$

$$+b_n(x)N_{rl}\partial_{x_l}N_{mj}(x)L\Big)+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n-m+r}^{[I]}\frac{1}{4}\Big(a_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}M_{mj}(x)L+b_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+$$

$$+b_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L\Big)+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m-n+r}^{[I]}\frac{1}{4}\Big(a_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+a_n(x)N_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}(x)L+$$

$$+b_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}M_{mj}L(x)L\Big)+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=n-m-r}^{[I]}\frac{1}{4}b_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=m-n-r}^{[I]}\frac{1}{4}a_n(x)M_{rl}\partial_{x_l}N_{mj}(x)L+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=r-m-n}^{[I]}\frac{1}{4}a_n(x)N_{rl}(x)\partial_{x_l}M_{mj}(x)L-$$

$$-\frac{1}{4}b_n(x)M_{rl}(x)\partial_{x_l}M_{mj}(x)L=\sum_{l=1}^{3}\eta\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}M_{kj}(x)L+\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_j}M_k(x)L+$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{-2}{3}\delta_{jl}\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_i}M_{ki}L\Big)++\zeta\Big(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_i}M_{ki}(x)L\Big)-b_k(x)L\partial_{x_j}g+d_{k_j}(x)L$$

pour $k=1,\cdots,I.$