République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématique Appliqué**

Par :

Melle. Annaka Ibtissem

Intitulé

Equations du mouvement d'un gaz visqueux dans un domaine discrétisé

Dirigé par : Pr. Hisao Fujita Yashima

Devant le jury

PRESIDENT	Pr. Aissaoui Med Zine	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Pr. Hisao Fujita Yashima	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Guebbai Hamza	Univ-Guelma

Session Juin 2016

REMERCIEMENT

C'est avec beaucoup d'honneur que j'exprime ici mon premier remerciement à DIEU de m'avoir permis d'accomplir ce travail, tous mes remerciements

Je remercier du fond du cœur *mes parents* pour leur contribution, leur soutien et leur

Patience durant toutes mes études et qui m'ont toujours aidé et encouragé aux moments

Je voudrais remercier le professeur Hisao Fujita Yashima en tant que Directeur de mémoire, c'est un honneur pour moi de travailler avec lui, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Je remercie le Professeur Mohamed Zinne Aissaoui, non seulement parce qu'il a accepté de faire partie de mon jury, mais aussi de m'avoir accueilli au laboratoire de mathématique de l'université 8 mai 1945 de Guelma.
Messieurs Guebai Hamza Aissaoui Med Zinne m'ont fait l'honneur de participer au Jury de soutenance; je les en remercie profondément.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers mes amis et collègues du laboratoire qui m'ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de ma démarche et qui ont partagé avec moi mes soucis et mes joies.

Enfin, tous ceux qui me sont soutenu d'une manière où d'une autre je vous dis merci.

Dédicace

Au Dieu tout puissant, qui ma accordé santé, force et courage pour la rédaction de ce mémoire,

A ma chère mère qui, qui m'a encouragé, et qui m'a donné tout son amour pour reprendre mes études.

A mon cher père qui a été toujours près de moi, pour m'écouter et me soutenir. Puisse ce travail exprimer le respect et l'amour que je vous porte.

A mes frères youssef et bilel et ma sœurs narjes, à qui je souhaite tout le bonheur du monde

A ma meilleur amie Asma pour leurs conseils et leurs encouragements durant nos études

A tous ceux qui m'aiment .....

Equations du mouvement d'un gaz visqueux dans un domaine discrétisé

Annaka Ibtissem
Mémoire de Master en mathématiques
Université 8 Mai 1945 Guelma

15 juin 2016

Table des matières

Résumé

Nous considérons le système d'équations du mouvement d'un gaz visqueux barotropique en coordonnées lagrangiennes en une dimention dans un domaine discrétisé et nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution, premièrement dans le cas sans force extérieure et en second lieu avec la présence d'une force extérieure. En outre nous examinons le comportement asymptotique de la solution, en démontrant la convergence de la solution vers 0 dans le cas d'absence de la force extérieure. Pour obtenir ces résultats, en particulier pour le comportement asymptotique, il est essentiel d'obtenir de bonnes estimations de la solution.

Introduction

Dans ce mémoire nous étudions le système d'équations du mouvement d'un gaz visqueux dans un domaine en une dimension discrétisé.

Dans les années 1970, Kazhikhov ([17]) a démontré l'existence et l'unicité de la solution du système d'équations du mouvement d'un gaz visqueux barotropique dans un domaine en une dimension. Vers la fin du XX siècle Tornatore et Fujita Yashima [16], ont généralisé le résultat de l'existence et l'unicité de la solution au cas où on ajoute aux équations une perturbation stochastique. Dans ce travail on trouve une "bonne" estimation de la vitesse qui pourrait faire prévoir l'existence d'une mesure invariante, c'est-à-dire la version stochastique de la solution stationnaire vers laquelle la solution converge. Toutefois, il a fallu plus une quinzaine d'années et une modification des équations par des approximations, pour obtenir l'existence d'une mesure invariante pour cette équation stochastique (voir [4]). L'approximation introduite dans ce travail (voir [4]), consiste à discrétiser le domaine et à introduire un poids $\varepsilon > 0$ qui régularise la fonction de densité.

Cet aspect de l'approximation fait naître une curiosité : si nous retournons au système d'équations déterministes, c'est-à-dire, si nous éliminons la perturbation stochastique, quelle solution nous pouvons obtenir ? Quelle est la relation entre le système d'équations dans le domaine continu et celui dans le domaine discrétisé ? Dans le présent mémoire nous allons chercher à répondre à cette question.

Pour cette raison, dans ce travail, nous nous intéressons à étudier le système d'équations du mouvement d'un gaz visqueux barotropique dans un domaine discrétisé avec la régularisation de la densité. Nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution des équations discrétisées dans deux cas sans force extérieur et avec force extérieur. L'étude du convergence de la solution vers 0 dans le cas d'absence de la force nous permet d'analyser le comportement asymptotique de cette solution à savoir l'obtention de sa éstimation. Ainsi, nous avons réssi à démontrer l'existence de la solution et sa comportement.

Le plan de travail est le suivant

Le premier chapitre consiste à rappeler le système d'équations général, qui décrit le mouvement d'un gaz visqueux barotropique et sa réduction à un domaine en une dimension.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons la transformation des équations en coordonné lagrangiennes massiques. Nous allons donner quelques caractérisations de la solution de ce système d'équations.

Ainsi, dans le troisième chapitre, consiste à l'étude du système d'équations dans le domaine discrétisé et avec un poids régularisant la densité. Cette discrétisation peut correspondre à un schéma de différences finies du système. Nous avons d'abord obtenu, d'après les résultats généraux sur les EDO, l'existence et l'unicité de la solution avec des données initiales sans force extérieur. Enfin, étudions quelques tentatives sur le comportement asymptotique.

Enfin, dans le quatrième chapitre, nous généralisons le résultat obtenu dans le chapitre 3 concernant l'existence de la solution avec force extérieur.

Chapitre 1

Equation du mouvement d'un gaz visqueux barotropique

1.1 Système d'équations général du mouvement d'un gaz

Les équations qui décrivent le mouvement d'un gaz visqueux se trouvent dans plusieurs ouvrages ; nous citons [11], qui est un des plus classiques, et nous suivons en général la formulation donnée par cette réfference [11]. Ces équations sont établies par les lois de la conservation de la masse, de la conservation de la quantité de mouvement et de la conservation de l'énergie.

Désignons par $\varrho = \varrho(t, x)$, la densité du gaz, par $v = v(t, x) = (v_1(t, x),$ $v_2(t, x), v_3(t, x))$ la vitesse, par $p = p(t, x)$ la pression et par $T = T(t, x)$ la température. La loi de conservation de la masse et celle de la quantité de mouvement, s'expriment par les équations

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0, \tag{1.1}$$

$$\varrho \partial_t v_j + \varrho \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} p = \tag{1.2}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \Big(\eta \big(\frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_k - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v \big) \Big) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\zeta \nabla \cdot v) + \varrho f_j,$$

$$j = 1, 2, 3,$$

tandis que le bilan de l'énergie, exprimé en fonction de la température, sera décrit par l'équation

$$\varrho c_v (\partial_t T + v \cdot \nabla T) + p \nabla \cdot v = \tag{1.3}$$

$$= \nabla \cdot \kappa \nabla T + \eta \sum_{j,k=1}^{3} \big(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v \big) \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \zeta (\nabla \cdot v)^2 + E;$$

enfin la pression p doit être déterminée par la densité ϱ et la température ; en adoptant l'approximation du gaz idéal on a

$$p = R \frac{\varrho}{\mu} T. \tag{1.4}$$

Dans ces équations, η et ζ sont les coefficients de viscosité d'écoulement et volumique du gaz, $f = (f_1, f_2, f_3)$ est la force extérieure, E est la source de chaleur (par exemple, dans l'atmosphère E est principalement due à la radiation), tandit que c_v est la chaleur spécifique du gaz, κ est la conductivité thermique du gaz, R est la constante universelle des gaz ($R \approx 8,31 \cdot 10^7 \; erg/mole \cdot K$) et μ est la masse molaire moyenne du gaz considéré (dans le cas de l'air on a $\mu \approx 28,96$).

1.2 Modèle d'un gaz barotropique

Le système d'équations (1.1), (1.2), (1.3) est assez complexe. Pour cela, on considère souvent un système un peu simplifié en adoptant une approximation qui considère la température comme fonction de la densité. Cela peut réduire la pression à une fonction seulement de la densité, de sorte que le système ne contiendra pas explicitement la fonction inconnue T représentant la température. Le gaz dont le mouvement est décrit par un système d'équations de ce type est appelé gaz barotropique.

Pour construire un modèle d'un gaz barotropique, nous partons de quelques considérations sur l'équation (1.3). Comme la diffusion de la chaleur due au flux de la chaleur $-\kappa\nabla T$ est, dans les gaz, assez lente et la contribution à l'augmentation de la température due au frottement interne du gaz est elle aussi petite par rapport aux autres termes, en posant

$$R_1 = \frac{R}{\mu},$$

nous considérons l'équation approchée

$$\varrho c_v(\partial_t T + v \cdot \nabla T) + R_1 \varrho T \nabla \cdot v = 0. \tag{1.5}$$

Pour cette équation, notons que le long de la trajectoire de chaque partie du gaz le rapport donné par

$$\vartheta(t,x) = \frac{T(t,x)^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho(t,x)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}, \qquad \gamma = \frac{c_v + R_1}{c_v}, \tag{1.6}$$

reste invariant. Plus précisement, on a le lemme suivant.

LEMME. *Si v, ϱ et T vérifient les équations (1.1) et (1.5) dans le domaine Ω pour $t_0 \leq t \leq t_1$ et si la trajectoire*

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = x(t,x_0), t_0 \leq t < t_1\}, \qquad x(t,x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t', x(t', x_0))dt'$$

reste dans le domaine Ω, alors pour $\vartheta(t,x)$ donné par (1.6) on a

$$\vartheta(t, x(t,x_0)) = \vartheta(t_0, x_0), \qquad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{1.7}$$

Pour la démonstration, voir [1].

On remarque que, d'après ce lemme, ϑ reste constante sur la trajectoire de chaque partie du gaz et donc on a

$$T(t,x) = \vartheta^{\gamma} \varrho(t,x)^{\gamma-1}.$$

Si la valeur de ϑ est constante dans tout le domaine Ω, alors on peut poser

$$T(t,x) = \vartheta^{\gamma} \varrho(t,x)^{\gamma-1}, \tag{1.8}$$

où ϑ est une constante positive. Si on substitue la relation (1.8) dans (1.4), on obtient

$$p = R_1 \vartheta^{\gamma} \varrho \varrho^{\gamma-1} = h\varrho^{\gamma}, \tag{1.9}$$

où $h = R_1 \vartheta^{\gamma}$. Maintenant, si on substitue (1.9) dans (1.2), on a

$$\varrho \partial_t v_j + \varrho \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + h \frac{\partial}{\partial x_j} \varrho^{\gamma} = \tag{1.10}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \Big(\eta \big(\frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_k - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v \big) \Big) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\zeta \nabla \cdot v) + \varrho f_j,$$

$$j = 1, 2, 3,$$

En outre, si nous considérons η et ζ comme constants, l'équation (1.10) se réduit à

$$\varrho \partial_t v + \varrho (v \cdot \nabla) v + h \nabla \varrho^{\gamma} = \eta \Delta v + (\frac{\eta}{3} + \zeta) \nabla (\nabla \cdot v) + \varrho f. \tag{1.11}$$

On remarque que le système d'équations (1.1), (1.11) est considérablement plus simple par rapport au système d'équations (1.1), (1.2), (1.3) et que la température T ne figure plus comme quantité indépendante dans le système. Ces circonstance ont certainement favorisé la réalisation de nombreux travaux mathématiques concernant le système d'équation (1.1), (1.11).

1.3 Equations du gaz barotropique en une dimension en coordonnées eulériennes

Si on suppose que le mouvement d'un gaz est homogène dans deux directions, on aura un système d'équations en une seule variable spatiale. Plus précisément, nous supposons que toutes les fonctions qui figurent dans le système d'équation (1.1), (1.11) ne dépendent que de x_1. Alors le système d'équation (1.1), (1.11) se réduit à

$$\partial_t \varrho + \partial_{x_1}(\varrho v) = 0, \tag{1.12}$$

$$\varrho \partial_t v + \varrho(v\partial_{x_1})v + h\partial_{x_1}\varrho^\gamma = \eta \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} v + (\frac{\eta}{3} + \zeta)\partial_{x_1}(\partial_{x_1} v) + \varrho f, \tag{1.13}$$

où, pour simplifier la notation, nous avons écrit v au lieu de v_1. Or, si on pose

$$\mu = \frac{4\eta}{3} + \zeta,$$

et si on écrit simplement x au lieu de x_1, l'équation (1.13) se simplifie dans la forme

$$\varrho(\partial_t v + v\partial_x v) = \mu \partial_x^2 v - h\partial_x \varrho^\gamma + \varrho f. \tag{1.14}$$

Le système d'équation (1.12), (1.14) peut être envisagé par exemple dans le domaine $D =]0, 1[$ avec les conditions aux limites

$$v = 0 \qquad \text{pour} \quad x = 0, \quad x = 1, \tag{1.15}$$

et les conditions initiales

$$\varrho(0,x) = \varrho_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x). \tag{1.16}$$

A titre de comparaison, citons aussi le système d'équations du mouvement d'un gaz visqueux et calorifère en une dimension en coordonnées eulériennes. En effet, si on réduit les équations (1.1), (1.2), (1.3) à une seule dimension spatiale et si on considère constants les coefficients de viscosité et de conductivité thermique, le système d'équations se réduit à

$$\partial_t\varrho + \partial_x(\varrho v) = 0, \tag{1.17}$$

$$\varrho(\partial_t v + v\partial_x v) = \mu\partial_x^2 v - R_1\partial_x(\varrho T) + \varrho f, \tag{1.18}$$

$$\varrho c_v(\partial_t T + v\partial_x T) + R_1\varrho T\partial_x v = \kappa\partial_x^2 T + \mu(\partial_x v)^2, \tag{1.19}$$

où

$$\mu = \frac{4}{3}\eta + \zeta.$$

On peut envisager le système d'équations (1.17)-(1.19) par exemple dans le domaine $D =]0,1[$, c'est-à-dire

$$0 < x < 1,$$

avec les conditions aux limites

$$v = 0, \qquad \partial_x T = 0 \qquad \text{pour} \qquad x = 0, \qquad x = 1, \tag{1.20}$$

et les conditions initiales

$$\varrho(0,x) = \varrho_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x), \quad T(0,x) = T_0(x) \qquad \text{pour } \ x \in [0,1]. \tag{1.21}$$

1.4 Equation du mouvement d'un gaz barotropique en une dimension en coordonnées lagrangiennes

Comme il est bien connu, lorsqu'il s'agit d'une équation du mouvement d'un gaz en une dimension spatiale, l'utilisation des coordonnées dites lagrangiennes peut être utile. Les coordonnées lagrangiennes (t, x_0) normalement utilisées dans la mécanique des milieux continus utilisent la position initiale x_0 comme coordonnées spatiale, de sorte que les coordonnées lagrangiennes (t, x_0) sont liées aux coordonnées eulériennes (t, x) par les relations

$$\frac{dx(x_0;t)}{dt} = v(t, x(x_0;t)) \tag{1.22}$$

avec les conditions initiales

$$x(x_0;0) = x_0. \tag{1.23}$$

Ces relations nous conduiront à la transformation des équations (1.17)-(1.19) en

$$\partial_t \varrho + \frac{\varrho^2}{\varrho_0}\partial_{x_0} v = 0, \tag{1.24}$$

$$\partial_t v + R_1 \frac{1}{\varrho_0}\partial_{x_0}(\varrho T) = \mu \frac{1}{\varrho_0}\partial_{x_0}(\frac{\varrho}{\varrho_0}\partial_{x_0} v) + f, \tag{1.25}$$

$$c_v \partial_t T + R_1 \frac{\varrho}{\varrho_0} T \partial_{x_0} v = \kappa \frac{1}{\varrho_0}\partial_{x_0}(\frac{\varrho}{\varrho_0}\partial_{x_0} T) + \mu \frac{\varrho}{\varrho^2}(\partial_{x_0} v)^2. \tag{1.26}$$

(pour les détails de cette transformation, voir [1] ,[2]).

Pour le mouvement d'un gaz en une dimension spatiale (dans un intervalle borné) on peut utiliser un autre système de coordonnées, qui est souvent plus commode. Il s'agit des coordonnées (t, ξ) dites *coordonnées lagrangiennes* *massiques*, qui sont définies par les relations

$$\xi = \xi(x_0) = \int_0^{x_0} \varrho_0(x')dx', \qquad t = t.$$

On remarque que la variable $\xi = \xi(x_0)$ représente la masse du gaz contenu dans l'intervalle $[0, x_0]$ à l'instant $t = 0$. On a les relations

$$\frac{d\xi(x_0)}{dx_0} = \varrho_0(x_0), \qquad \frac{\partial}{\partial x_0} = \frac{d\xi(x_0)}{dx_0}\frac{\partial}{\partial \xi} = \varrho_0(x_0)\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Ces relations nous permettent de transformer le système d'équations (1.24)-(1.26) en un système d'équations exprimées dans les coordonnées (t, ξ) dans la forme

$$\partial_t \varrho + \varrho^2 \partial_\xi v = 0, \tag{1.27}$$

$$\partial_t v + R_1 \partial_\xi(\varrho T) = \mu \partial_\xi(\varrho \partial_\xi v) + f, \tag{1.28}$$

$$c_v \partial_t T + R_1 \varrho T \partial_\xi v = \kappa \partial_\xi(\varrho \partial_\xi T) + \mu \varrho (\partial_\xi v)^2. \tag{1.29}$$

Pour les détails des coordonnées lagrangiennes massiques et pour la transformation de (1.25)-(1.27) en (1.28)-(1.32), voir [2].

Comme dans le cas des équations en coordonnées eulériennes, on peut envisager le système d'équation (1.27)-(1.29) par exemple dans le domaine $D =]0, 1[$ avec les conditions aux limites

$$v = 0, \qquad \partial_\xi T = 0, \qquad \text{pour} \quad \xi = 0, \quad \xi = 1, \tag{1.30}$$

et les conditions initiales

$$\varrho(0, \xi) = \varrho_0(\xi), \quad v(0, \xi) = v_0(\xi), \quad T(0, \xi) = T_0(\xi) \qquad \text{pour} \;\; \xi \in [0, 1]. \tag{1.31}$$

Formellement le choix du domaine $D =]0,1[$ rassemble à celui du cas des équations en coordonnées eulériennes. Mais dans les coordonnées lagrangiennes massiques le choix du domaine $D =]0,1[$ signifie que la masse totale normalisée du gaz est égale à 1, tandis que l'ampleur du domaine spatial (physique) est donnée par

$$\int_0^1 \frac{1}{\varrho(t,\xi)} d\xi.$$

L'existence et l'unicité de la solution dans tout l'intervalle de temps du problème (1.27)-(1.31) ont été démontrées par Kazhikhov et Shelukin [8].

Si nous considérons le modèle barotropique, en utilisant les coordonnées lagrangiennes massiques, nous pouvons transformer les équations (1.12), (1.14) en

$$\partial_t \varrho + \varrho^2 \partial_\xi v = 0, \tag{1.32}$$

$$\partial_t v + h \partial_\xi \varrho^\gamma = \mu \partial_\xi (\varrho \partial_\xi v) + f. \tag{1.33}$$

Le système d'équations (1.32)-(1.33) peut être envisagé par exemple dans le domaine $D =]0,1[$ avec les conditions aux limites

$$v = 0 \qquad \text{pour} \qquad \xi = 0, \qquad \xi = 1, \tag{1.34}$$

et les conditions initiales

$$\varrho(0,\xi) = \varrho_0(\xi), \qquad v(0,\xi) = v_0(\xi), \qquad \text{pour} \qquad \xi \in [0,1]. \tag{1.35}$$

L'existence et l'unicité de la solution globale du problème (1.32)-(1.35) ont été démontrées par Kazhikhov [7].

Chapitre 2

Equation du mouvement d'un gaz visqueux dans un domaine discrétisé

Dans ce chapitre, nous allons formuler le système d'équations d'un gaz visqueux barotropique en coordoonnées lagrangienne, en une dimension sur un domaine discrétisé. Il s'agit de la version déterministe du système d'équations stochastiques étudié dans [4] (voir aussi [5]). Cette discrétisation peut correspondre à un schéma de différence finies du système pour le calcul numérique.

2.1 Domaine discrétisé du mouvement d'un gaz visqueux

Rappelons d'abord le système d'équations (1.32)-(1.33), en coordonnées lagrangiennes massiques ξ du mouvement d'un gaz visqueux barotropique, en une dimension spatiale, que nous réécrivons dans la forme

$$\partial_t v = \eta \partial_\xi (\rho \partial_\xi v) - h \partial_\xi (\rho^\gamma) + f, \tag{2.1}$$

$$\partial_t \frac{1}{\varrho} = \partial_\xi v; \tag{2.2}$$

nous le considérons dans le domaine

$$0 < \xi < 1 \tag{2.3}$$

avec la condition aux limites

$$v(0) = v(1) = 0. \tag{2.4}$$

Il est bon de rappeler également que pour la pression p nous avons utilisé l'équation

$$p = h\varrho^\gamma \qquad (h : \text{constante positive}).$$

Pour formuler les équations dans un domaine discrétisé, équations correspondantes aux équations (2.1)-(2.2), nous définissons une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$ en N sous-intervalles. Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, On pose

$$\xi_i = \frac{i}{N} \qquad i = 0, 1, ..., N. \tag{2.5}$$

Nous posons aussi

$$\delta = \frac{1}{N}. \tag{2.6}$$

Considérons les deux fonctions $v(t, \xi)$ et $\varrho(t, \xi)$ définies sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$, qui représenteraient respectivement la vitesse et la densité du gaz et devraient vérifier les équations (2.1)-(2.2). Supposons que $\varrho(t, \xi) > 0$ pour tout $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$. Posons

$$\widehat{v}_i(t) = v(t, \xi_i), \qquad \widehat{\varrho}_i(t) = \varrho(t, \frac{\xi_i + \xi_{i-1}}{2}), \qquad i = 0, 1, \cdots, N.$$

REMARQUE. *On pose*

$$R_N^{[1,i]} = \partial_\xi v\big|_{\xi = \frac{\xi_{i-1}+\xi_i}{2}} - \frac{1}{\delta}(\widehat{\varrho}_i(t) - \widehat{\varrho}_{i-1}(t)), \qquad i = 0, 1, \cdots, N,$$

$$R_N^{[2,i]} = \partial_\xi(\varrho^\gamma)\big|_{\xi=\xi_i} - \frac{1}{\delta}((\widehat{\varrho}_{i+1}(t))^\gamma - (\widehat{\varrho}_i(t))^\gamma), \qquad i = 0, 1, \cdots, N-1,$$

$$R_N^{[3,i]} = \partial_\xi v\big|_{\xi=\frac{\xi_i+\xi_{i-1}}{2}} - \frac{1}{\delta}(\widehat{\varrho}_i - \widehat{\varrho}_{i-1}).$$

Si $v(t,\cdot) \in C^2([0,1])$ et $\varrho(t,\cdot) \in C^1([0,1])$ (pour $t \in \mathbb{R}_+$ fixé), alors on a

$$R_N^{[1,i]} \to 0, \qquad R_N^{[2,i]} \to 0, \qquad R_N^{[3,i]} \to 0, \qquad \textit{pour} \qquad N \to \infty.$$

La démonstration de ces relations est immédiate de la définition des espaces $C^2([0,1])$ et $C^1([0,1])$.

Cette remarque justifie que les approximations

$$\partial_\xi(\varrho\partial_\xi v)\big|_{\xi=\xi_i} \approx \frac{1}{\delta}[\widehat{\varrho}_{i+1}\frac{\widehat{v}_{i+1}-\widehat{v}_i}{\delta} - \widehat{\varrho}_i\frac{\widehat{v}_i-\widehat{v}_{i-1}}{\delta}] \tag{2.7}$$

$$= \frac{1}{\delta^2}(\widehat{\varrho}_{i+1}\widehat{v}_{i+1} - (\widehat{\varrho}_{i+1}+\widehat{\varrho}_i)\widehat{v}_i + \widehat{\varrho}_i\widehat{v}_{i-1}),$$

$$\partial_\xi(\varrho^\gamma)\big|_{\xi=\xi_i} \approx \frac{1}{\delta}((\widehat{\varrho}_{i+1})^\gamma - (\widehat{\varrho}_i)^\gamma), \tag{2.8}$$

$$\partial_\xi v\big|_{\xi=\frac{\xi_i+\xi_{i-1}}{2}} \approx \frac{1}{\delta}(\widehat{v}_i - \widehat{v}_{i-1}) \tag{2.9}$$

sont valables dans le sens que les deuxièmes membres de ces égalités approximatives tendent vers les premiers membres quand N tend vers l'infini.

Rappelons également que les approximations (2.7)-(2.9), sont du même type que celles communément utilisées dans le calcule numérique.

Sur la base des relations (2.7)-(2.9) nous proposons les équations approchées des équations (2.1)-(2.2) ayant la forme

$$\frac{d}{dt}v_i = \frac{\nu}{\delta^2}(\varrho_{i+1}v_{i+1} - (\varrho_{i+1}+\varrho_i)v_i + \varrho_i v_{i-1}) - \frac{h}{\delta}((\varrho_{i+1})^\gamma - (\varrho_i)^\gamma) + f_i, \tag{2.10}$$

$$i = 1, \cdots, N-1,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{\delta}[v_i - v_{i-1}], \qquad i = 1, \cdots, N. \tag{2.11}$$

Dans (2.10) η et h sont des constantes, strictement positives et γ est une constante telle que $1 < \gamma < 2$, comme dans (2.1). Il s'agit donc d'un système d'équations pour $2N - 1$ inconnues $v_1, \cdots, v_{N-1}, \varrho_1, \cdots, \varrho_N$.

L'équation (2.10) doit être complétée par

$$v_0 = v_N = 0,$$

ce qui correspond évidemment aux conditions aux limites (2.4).

2.2 Formulation des équations du mouvement d'un gaz barotropique en une dimension spatiale dans un domaine discrétisé avec un poids régularisant

Les auteurs de l'article [4] disent qu'ils ont trouvé une difficulté pour le moment insurmontable pour démontrer l'existence d'une mesure invariante, pour le système d'équations stochastiques correspondant au système d'équations (2.10)-(2.11). Pour cela ils ont proposé un système d'équations approché, en introduisant un "poids" ε régularisant la densité. En prenant acte de cette difficulté, nous proposons nous aussi d'introduire une approximation de l'équation (2.11).

Soit $\varepsilon > 0$. Au lieu de (2.11), nous considérons

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{\delta}[v_i - v_{i-1}] + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\varrho_i}, \qquad i = 1, \cdots, N.$$

Donc, en définitive, le système d'équations que nous allons considérer est

$$\frac{d}{dt}v_i = \frac{\eta}{\delta^2}(\varrho_{i+1}v_{i+1} - (\varrho_{i+1} + \varrho_i)v_i + \varrho_i v_{i-1}) - \frac{h}{\delta}((\varrho_{i+1})^\gamma - (\varrho_i)^\gamma) + f_i, \tag{2.12}$$

$$i = 1, \cdots, N-1,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{\delta}[v_i - v_{i-1}] + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\varrho_i}, \qquad i = 1, \cdots, N. \tag{2.13}$$

Le système d'équations (2.12)-(2.13) devra être considéré avec les conditions aux limites

$$v_0 = v_N = 0 \tag{2.14}$$

et la condition initiale

$$v_i(0) = v_{0i}, \qquad i = 1, \cdots, N-1, \qquad \varrho_i(0) = \varrho_{0i}, \qquad i = 1, \cdots, N. \tag{2.15}$$

Lorsque nous considérons la condition initiale (2.15), outre la condition naturelle pour la densité

$$\varrho_i(0) > 0, \qquad i = 1, \cdots, N,$$

nous exigeons également que

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\delta}{\varrho_i(0)} = 1. \tag{2.16}$$

La condition (2.16) signifie que l'espace occupé par le gaz à l'instant $t = 0$ est 1 (c'est-à-dire, normalisé pour l'unité de longueur).

2.3 Quelques considérations préliminaires

Si $\varrho_i > 0$ (ϱ_i devant correspondre à la densité à un point, nous voulons que $\varrho_i > 0$), alors, en posant

$$\sigma_i = \log \varrho_i,$$

on peut transformer le système (2.12)-(2.13) en

$$\frac{d}{dt}v_i = \frac{\eta}{\delta^2}(e^{\sigma_{i+1}}v_{i+1}-(e^{\sigma_{i+1}}+e^{\sigma_i})v_i+e^{\sigma_i}v_{i-1})-\frac{h}{\delta}((e^{\sigma_{i+1}})^\gamma-(e^{\sigma_i})^\gamma)+f_i, \quad (2.17)$$

$$i=1,\cdots,N-1,$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_i = -\frac{e^{\sigma_i}}{\delta}[v_i - v_{i-1}] - \varepsilon(e^{\sigma_i}-1), \qquad i=1,\cdots,N. \quad (2.18)$$

Le système (2.12)-(2.13) est à considérer à valeurs dans $\mathbb{R}^{N-1}\times(\mathbb{R}_+)^N$, tandis que le système (2.17)-(2.18) est à considérer à valeurs dans $\mathbb{R}^{2N-1}$. Donc, du point de vue technique, il est plus convenable de considérer le système d'équations (2.17)-(2.18).

On rappelle que l'équation

$$\partial_t\varrho = -\varrho^2\partial_\xi v,$$

joint à la condition

$$v(0)=v(1)=0,$$

entraîne la relation

$$\int_0^1 \frac{1}{\varrho(\xi,t)}d\xi = \int_0^1 \frac{1}{\varrho(\xi,0)}d\xi, \qquad \forall\, t\geq 0.$$

Comme, dans les coordonnées lagrangiennes massiques, $\frac{1}{\varrho(\xi,t)}$ représente le volume occupé par le gaz, cette égalité signifie que l'espace (longueur de l'intervalle) occupé par le gaz reste invariante. Si on normalise la longueur de l'intervalle occupé par le gaz, on aura $\int_0^1(\varrho(\xi,t))^{-1}d\xi = \int_0^1(\varrho(\xi,0))^{-1}d\xi = 1$. A ce fait devrait correspondre, dans notre problème discrétisé, la relation

$$\sum_{i=1}^N \frac{\delta}{\varrho_i(t)} = 1, \qquad \forall\, t\geq 0. \quad (2.19)$$

En effet, si on somme les deux membres de (2.13) pour $i = 1, \cdots, N$, en tenant compte des conditions (2.14), on a

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta}{\varrho_i(t)} = \varepsilon - \varepsilon\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta}{\varrho_i(t)};$$

si on considère cette équation comme une équation différentielle ordinaire pour la fonction (inconnue) $y(t) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta}{\varrho_i(t)}$ et on résout le problème de Cauchy consistant à cette équation, avec la condition initiale (2.16), on trouve (2.19).

Pour l'expression en σ_i, la condition (2.16) s'exprime évidemment par

$$\delta\sum_{i=1}^{N} e^{-\sigma_i(0)} = 1 \tag{2.20}$$

et la relation (2.19) sera exprimée par

$$\delta\sum_{i=1}^{N} e^{-\sigma_i(t)} = 1, \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{2.21}$$

Chapitre 3

Solution du système d'équations sans force extérieure

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution du système d'équations (2.12)-(2.13) sans force extérieure, c'est-à-dire système d'équations (2.12)-(2.13) avec $f_i = 0$ avec les conditions aux limites (2.14) et avec la condition initiale (2.15). Plus précisément on considère le problème

$$\frac{d}{dt}v_i = \frac{\eta}{\delta^2}(\varrho_{i+1}v_{i+1} - (\varrho_{i+1} + \varrho_i)v_i + \varrho_i v_{i-1}) - \frac{h}{\delta}((\varrho_{i+1})^\gamma - (\varrho_i)^\gamma), \quad i = 1, \cdots, N-1, \tag{3.1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{\delta}[v_i - v_{i-1}] + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\rho_i}, \qquad i = 1, \cdots, N, \tag{3.2}$$

$$v_0 = v_N = 0, \tag{3.3}$$

$$v_i(0) = v_{0i}, \qquad i = 1, \cdots, N-1, \qquad \varrho_i(0) = \varrho_{0i}, \qquad i = 1, \cdots, N. \tag{3.4}$$

Or, comme nous l'avons remarqué, du point de vue technique, il nous convient de considérer le système d'équations exprimées en

$$\sigma_i = \log \varrho_i.$$

Donc, sachant que les deux systèmes d'équations sont équivalents, nous allons considérer le système d'équations

$$\frac{d}{dt}v_i = \frac{\eta}{\delta^2}(e^{\sigma_{i+1}}v_{i+1} - (e^{\sigma_{i+1}} + e^{\sigma_i})v_i + e^{\sigma_i}v_{i-1}) - \frac{h}{\delta}((e^{\sigma_{i+1}})^\gamma - (e^{\sigma_i})^\gamma), \quad (3.5)$$

$$i = 1, \cdots, N-1,$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_i = -\frac{e^{\sigma_i}}{\delta}[v_i - v_{i-1}] - \varepsilon(e^{\sigma_i} - 1), \qquad i = 1, \cdots, N. \quad (3.6)$$

avec la condition aux limites

$$v_0 = v_N = 0, \quad (3.7)$$

et les conditions initiales

$$v_i(0) = v_{0i}, \qquad i = 1, \cdots, N-1, \qquad \sigma_i(0) = \sigma_{0i}, \qquad i = 1, \cdots, N. \quad (3.8)$$

Pour les données initiales, nous exigeons également la condition

$$\delta \sum_{i=1}^{N} e^{-\sigma_{0i}} = 1. \quad (3.9)$$

Il est clair qu'il s'agit du problème de Cauchy pour le système de $2N-1$ équations différentielles ordinaires, dont les inconnues sont

$$v_i(t), \quad i = 1, \cdots, N-1, \qquad \sigma_i(t), \quad i = 1, \cdots, N,$$

ou, si on l'écrit dans la forme vectorielle,

$$X(t) = (v_1(t), \cdots, v_{N-1}(t), \sigma_1(t), \cdots, \sigma_N(t)) \in \mathbb{R}^{2N-1};$$

la condition initiale est

$$X_0 = (v_{01}, \cdots, v_{0N-1}, \sigma_{01}, \cdots, \sigma_{0N}).$$

Dans le formalisme du problème de Cauchy pour un système d'équations différentielles ordinaires, la condition $v_0 = v_N = 0$ signifie simplement, que v_0 et v_N ne sont pas inconnues, mais elles sont deux valeurs (dans notre cas $= 0$) données. Mais nous avons écrit la condition (3.7) comme il s'agissait des conditions aux limites pour les équations aux dérivées partielles, car dans le raisonnement pour la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution, nous allons utiliser cette condition d'une manière analogue au cas des équations aux dérivées partielles.

3.2 Existence et unicité de la solution du système d'équations sans force extérieure

Notre premier résultat est le théorème d'existence et unicité de la solution du système d'équations (3.5)-(3.6) avec la condition initiale (3.8) satisfaisant à la condition (3.9). On va démontrer le résultat suivant.

Proposition 1. *On suppose que* $(\sigma_{01}, \cdots, \sigma_{0N})$ *vérifie la condition* (3.9). *On pose*

$$v_0 = v_N = 0. \tag{3.7}$$

Alors, quel que soit $t_1 > 0$, *le système d'équations* (3.5)-(3.6) *avec la condition initiale* (3.8) *admet, dans l'intervalle* $[0, t_1]$, *une solution* $(v_1(t), \cdots, v_{N-1}(t), \sigma_1(t), \cdots, \sigma_N(t))$ *et une seule. En outre elle vérifie la relation*

$$\delta \sum_{i=1}^{N} e^{-\sigma_i(t)} = 1. \qquad \forall t \geq 0. \tag{3.10}$$

Démonstration. On considère le système d'équations

$$dv_i = [\frac{\eta}{\delta^2}(e^{\sigma_{i+1}}v_{i+1} - (e^{\sigma_{i+1}} + e^{\sigma_i})v_i + e^{\sigma_i}v_{i-1}) - \frac{h}{\delta}((e^{\sigma_{i+1}})^\gamma - (e^{\sigma_i})^\gamma)]dt \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_i = -\frac{1}{\delta}(e^{\sigma_i}[v_i - v_{i-1}]) - \varepsilon(e^{\sigma_i} - 1), \qquad i = 1, \cdots, N, \quad (3.12)$$

avec la condition initiale

$$v_i(0) = v_{0i}, \qquad i = 1, \cdots, N-1, \qquad \sigma_i(0) = \sigma_{0i}, \qquad i = 1, \cdots, N, \quad (3.13)$$

Lemme 1. *Il existe un $\tilde{t}_1 > 0$ tel que le système d'équations (3.11)-(3.12) avec les conditions (3.7), (3.13) admette, dans l'intervalle $[0, \tilde{t}_1]$, une solution $(v_1, \cdots, v_{N-1}, \sigma_1, \cdots, \sigma_N)$ et une seule et elle vérifie l'inégalité*

$$\frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{N-1}(v_i(t))^2 + \frac{h\delta}{\gamma - 1}\sum_{i=1}^{N}(e^{\sigma_i(t)})^{\gamma-1} \leq C_0 + C_1 t, \qquad \forall t \in [0, \tilde{t}_1], \quad (3.14)$$

où C_0 et C_1 sont deux constantes positives.

Démonstration du lemme. On remarque que ce systèmc est un système d'équations différentielles ordinaires dont le deuxième membre vérifie localement la condition de Lipschitz. Donc pour tout $(v_1, \cdots, v_{N-1}, \sigma_1, \cdots, \sigma_N) \in \mathbb{R}^{2N-1}$, le problème en considération admet, dans un intervalle $[0, \tilde{t}_1]$ $(\tilde{t}_1 > 0)$, une solution $(v_1, \cdots, v_{N-1}, \sigma_1, \cdots, \sigma_N)$ et une seule.

Pour démontrer l'inégalité (3.14), on considère la fonction

$$\psi(t) = \frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{N-1}(v_i(t))^2.$$

Si on revenons aux système d'équation

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\eta}{\delta^2}(e^{\sigma_{i+1}}v_{i+1} - (e^{\sigma_{i+1}} + e^{\sigma_i})v_i + e^{\sigma_i}v_{i-1}) - \frac{h}{\delta}((e^{\sigma_{i+1}})^\gamma - (e^{\sigma_i})^\gamma),$$

en multipliant par v_i et δ les deux membres de cette égalité et en faisant la somme pour $i = 1, \cdots, N-1$, on obtient

$$\delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i \frac{dv_i}{dt} = \delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i G_i \tag{3.15}$$

où

$$G_i = \frac{\eta}{\delta^2}(e^{\sigma_{i+1}} v_{i+1} - (e^{\sigma_{i+1}} + e^{\sigma_i}) v_i + e^{\sigma_i} v_{i-1}) - \frac{h}{\delta}((e^{\sigma_{i+1}})^\gamma - (e^{\sigma_i})^\gamma).$$

On a donc

$$\delta \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{d}{dt} |v_i|^2 = \delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i G_i.$$

On va utiliser aussi la notation $\|v\|$ définie par

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} |v_i|^2.$$

En utilisant cette notation, on peut écrire l'égalité (3.15) dans la forme

$$\frac{\delta}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2 = \delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i (\frac{\eta}{\delta^2}(e^{\sigma_{i+1}} v_{i+1} - (e^{\sigma_{i+1}} + e^{\sigma_i}) v_i + e^{\sigma_i} v_{i-1}) - \frac{h}{\delta}((e^{\sigma_{i+1}})^\gamma - (e^{\sigma_i})^\gamma)). \tag{3.16}$$

Or, on remarque que, à l'aide de la relation (3.7), on a

$$\delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i \frac{\eta}{\delta^2}(e^{\sigma_{i+1}} v_{i+1} - (e^{\sigma_{i+1}} + e^{\sigma_i}) v_i + e^{\sigma_i} v_{i-1}) =$$

$$= - \sum_{i=2}^{N-1} \frac{\eta}{\delta} e^{v_i} (v_i - v_{i-1})^2 + \frac{\eta}{\delta} e^{\sigma_N} (v_N - v_{N-1}) v_{N-1} - \frac{\eta}{\delta} e^{\sigma_1} (v_1 - v_0) v_1 =$$

$$= - \sum_{i=1}^{N} \frac{\eta}{\delta} e^{\sigma_i} (v_i - v_{i-1})^2.$$

En outre, en utilisant toujours la relation (3.7), on a

$$-\delta\sum_{i=1}^{N-1} v_i\frac{h}{\delta}((e^{\sigma_{i+1}})^\gamma-(e^{\sigma_i})^\gamma)=h\delta\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\delta}(v_i-v_{i-1})e^{\sigma_i}(e^{\sigma_i})^{\gamma-1}.$$

En y substituant l'expression de $\frac{1}{\delta}(v_i-v_{i-1})e^{\sigma_i}$ qui résulte de (3.12) et en utilisant l'égalité

$$(e^{\sigma_i})^{\gamma-1}\frac{d}{dt}\sigma_i=\frac{1}{\gamma-1}\frac{d}{dt}(e^{\sigma_i})^{\gamma-1},$$

on obtient

$$-\delta\sum_{i=1}^{N-1} v_i\frac{h}{\delta}((e^{\sigma_{i+1}})^\gamma-(e^{\sigma_i})^\gamma)=$$

$$=-\frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}(e^{\sigma_i})^{\gamma-1}-h\varepsilon\delta\sum_{i=1}^{N}((e^{\sigma_i})^\gamma-(e^{\sigma_i})^{\gamma-1}).$$

Si on substitue ces égalités dans (3.16), on trouve

$$\frac{\delta}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2=-\sum_{i=1}^{N}\frac{\eta}{\delta}e^{\sigma_i}(v_i-v_{i-1})^2-\frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}(e^{\sigma_i})^{\gamma-1}-h\varepsilon\delta\sum_{i=1}^{N}((e^{\sigma_i})^\gamma-(e^{\sigma_i})^{\gamma-1}),$$

ou

$$\frac{\delta}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2+\frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}(e^{\sigma_i})^{\gamma-1}= \tag{3.17}$$

$$=-\sum_{i=1}^{N}\frac{\eta}{\delta}e^{\sigma_i}(v_i-v_{i-1})^2-h\varepsilon\delta\sum_{i=1}^{N}((e^{\sigma_i})^\gamma-(e^{\sigma_i})^{\gamma-1}).$$

On remarque que

$$-((e^{\sigma_i})^\gamma-(e^{\sigma_i})^{\gamma-1})\le\sup_{s>0}(s^{\gamma-1}-s^\gamma)=(\frac{\gamma-1}{\gamma})^{\gamma-1}-(\frac{\gamma-1}{\gamma})^\gamma \tag{3.18}$$

D'autre part, il est clair que

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\eta}{\delta}e^{\sigma_i}(v_i-v_{i-1})^2\le 0$$

Donc compte tenu de (3.18), on déduit de (3.17) que

$$\frac{\delta}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2 + \frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}(e^{\sigma_i})^{\gamma-1} \leq h\varepsilon((\frac{\gamma-1}{\gamma})^{\gamma-1} - (\frac{\gamma-1}{\gamma})^{\gamma}). \tag{3.19}$$

On voit aisément que l'inégalité (3.19) implique l'inégalité (3.14) avec

$$C_0 = \frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{N-1}(v_{0i})^2 + \frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}(e^{\sigma_{0i}})^{\gamma-1}, \qquad C_1 = h\varepsilon((\frac{\gamma-1}{\gamma})^{\gamma-1} - (\frac{\gamma-1}{\gamma})^{\gamma}).$$

Le lemme est démontré. □

CONTINUATION DE LA DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Comme nous l'avons déjà remarqué dans la déduction préliminaire de (2.21), on a

$$\frac{d}{dt}\delta\sum_{i=1}^{N}e^{-\sigma_i} = -\delta\sum_{i=1}^{N}e^{-\sigma_i}\frac{d}{dt}\sigma_i =$$

$$-\delta\sum_{i=1}^{N}e^{-\sigma_i}(-\frac{e^{\sigma_i}}{\delta}[v_i - v_{i-1}]) - \varepsilon(e^{\sigma_i}-1)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}[v_i - v_{i-1}] + \sum_{i=1}^{N}\delta\varepsilon(1 - e^{-\sigma_i}) =$$

Il est clair que, en vertu de la condition (3.7), on a

$$\sum_{i=1}^{N}[v_i - v_{i-1}] = v_N - v_0 = 0.$$

Donc, en rappelant la relation $\sum_{i=1}^{N}\delta = 1$, on a

$$\frac{d}{dt}\delta\sum_{i=1}^{N}e^{-\sigma_i} = \varepsilon(1 - \delta\sum_{i=1}^{N}e^{-\sigma_i}),$$

Si on pose

$$y(t) = \delta \sum_{i=1}^{N} e^{-\sigma_i(t)}$$

et si on tient compte de la condition initiale

$$y(0) = \delta \sum_{i=1}^{N} e^{-\sigma_{0i}} = 1$$

donnée par la condition (3.9), on a le problème de Cauchy

$$\frac{d}{dt} y(t) = \varepsilon(1 - y(t)), \qquad y(0) = 1,$$

dont l'unique solution est, comme on le voit immédiatement,

$$y(t) = 1 \qquad \forall t > 0,$$

c'est-à-dire, la relation

$$\delta \sum_{i=1}^{N} e^{-\sigma_i(t)} = 1 \qquad \forall t > 0 \tag{3.10}$$

est établie.

La relation (3.10) implique entre autres que

$$e^{-\sigma_i(t)} \leq \frac{1}{\delta} \qquad \text{pour tout } i \text{ et pour tout } t > 0.$$

D'autre part l'inégalité (3.14) implique que

$$(e^{\sigma_i(t)})^{\gamma-1} \leq \frac{(\gamma-1)(C_0 + C_1 t)}{h\delta},$$

ou

$$e^{\sigma_i(t)} \leq \left(\frac{(\gamma-1)(C_0 + C_1 t)}{h\delta}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \qquad \text{pour tout } i \text{ et pour tout } t > 0.$$

De ces relations on déduit que

$$0 < \delta \leq e^{\sigma_i(t)} \leq \Big(\frac{(\gamma-1)(C_0+C_1t)}{h\delta}\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

pour tout i et pour tout $t > 0$, ou

$$\log \delta \leq \sigma_i(t) \leq \frac{1}{\gamma-1}\log\Big(\frac{(\gamma-1)(C_0+C_1t)}{h\delta}\Big) \tag{3.20}$$

pour tout i et pour tout $t > 0$.

On rappelle d'autre part que d'après (3.14) on a

$$v_i(t)^2 \leq \frac{2(C_0+C_1t)}{\delta},$$

ou

$$-\frac{\sqrt{2(C_0+C_1t)}}{\sqrt{\delta}} \leq v_i(t) \leq \frac{\sqrt{2(C_0+C_1t)}}{\sqrt{\delta}} \tag{3.21}$$

pour tout i et pour tout $t > 0$.

Les relations (3.20) et (3.21) nous permettent de prolonger la solution locale construite dans le lemme 1 jusqu'à n'importe $t_1 > 0$, c'est-à-dire, on a la solution globale. L'unicité de la solution globale dans l'intervalle arbitraire $[0, t_1]$ résulte de l'unicité de la solution locale.

Comme l'égalité (3.10) a été déjà démontrée et donc la proposition 1 est complètement démontrée. □

3.3 Comportement asymptotique de la solution du système d'équations sans force extérieure

Pour examiner le comportement asymptotique de la solution du système d'équations (3.5)-(3.6) avec la condition initiale (3.8) (et avec la condition

(3.9)), nous partons de l'égalité (3.17), que pour la commodité de citation nous numérotons de nouveau

$$\frac{\delta}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2 + \frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}(e^{\sigma_i})^{\gamma-1} = \tag{3.22}$$

$$= -\sum_{i=1}^{N}\frac{\eta}{\delta}e^{\sigma_i}(v_i - v_{i-1})^2 - h\varepsilon\delta\sum_{i=1}^{N}((e^{\sigma_i})^{\gamma} - (e^{\sigma_i})^{\gamma-1})$$

démontrée dans la section précédente. On va d'abord établir quelques inégalités concernant les termes du second membre de (3.22).

Lemme 2. *On a*

$$-\sum_{j=1}^{N}\frac{\eta e^{\sigma_j}(v_j - v_{j-1})^2}{\delta} \leq -\delta\eta\|v\|^2. \tag{3.23}$$

DÉMONSTRATION. Comme $v_0 = 0$ par hypothèse, on a

$$v_i = \sum_{j=1}^{i}(v_j - v_{j-1}),$$

ou

$$|v_i|^2 = \Big(\sum_{j=1}^{i}(v_j - v_{j-1})\Big)^2.$$

On a donc

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{N}\Big(\sum_{j=1}^{i}(v_j - v_{j-1})\Big)^2 = \sum_{i=1}^{N}\Big(\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(e^{\sigma_j})^{\frac{1}{2}}}\Big[(e^{\sigma_j})^{\frac{1}{2}}(v_j - v_{j-1})\Big]\Big)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N}\Big[\frac{\delta}{\eta}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{e^{\sigma_j}}\sum_{j=1}^{i}\frac{\eta e^{\sigma_j}(v_j - v_{j-1})^2}{\delta}\Big] =$$

$$= \frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{N}\Big(\sum_{j=1}^{i}\delta\frac{1}{e^{\sigma_j}}\Big)\sum_{j=1}^{i}\frac{\eta e^{\sigma_j}(v_j - v_{j-1})^2}{\delta}.$$

Or, comme on a

$$\delta\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{e^{\sigma_j}}\leq\delta\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{e^{\sigma_j}}=1$$

on déduit de l'inégalité précédente que

$$\|v\|^2\leq\frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i}\frac{\eta e^{\sigma_j}(v_j-v_{j-1})^2}{\delta}.$$

On a d'autre part

$$\frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i}\frac{\eta e^{\sigma_j}(v_j-v_{j-1})^2}{\delta}\leq\frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\eta e^{\sigma_j}(v_j-v_{j-1})^2}{\delta}=$$

$$=\frac{N}{\eta}\sum_{j=1}^{N}\frac{\eta e^{\sigma_j}(v_j-v_{j-1})^2}{\delta}=\frac{1}{\delta\eta}\sum_{j=1}^{N}\frac{\eta e^{\sigma_j}(v_j-v_{j-1})^2}{\delta}.$$

On en déduit

$$\|v\|^2\leq\frac{1}{\delta\eta}\sum_{j=1}^{N}\frac{\eta e^{\sigma_j}(v_j-v_{j-1})^2}{\delta},$$

ce qui donne (3.23). Le lemme est démontré. □

Lemme 3. *On a*

$$-\delta\sum_{i=1}^{N}((e^{\sigma_i})^{\gamma}-(e^{\sigma_i})^{\gamma-1})=\delta\sum_{i=1}^{N}\big[-(e^{-\sigma_i})^{-\gamma}+(e^{-\sigma_i})^{-(\gamma-1)}-e^{-\sigma_i}+1\big]\leq 0. \tag{3.24}$$

Démonstration. Comme $\delta\sum_{i=1}^{N}e^{-\sigma_i(t)}=1$ (voir (3.10)), on a

$$\delta\sum_{i=1}^{N}\big[-e^{-\sigma_i}+1\big]=0$$

et donc on obtient immédiatement la première égalité de (3.24).

Considérons la fonction

$$f_1(s) = -s^{-\gamma} + s^{-(\gamma-1)} - s + 1 \qquad (s > 0).$$

En faisant la dérivée de $f_1(s)$, on a

$$\frac{d}{ds} f_1(s) = \gamma s^{-\gamma-1} - (\gamma - 1)s^{-\gamma} - 1.$$

On voit aisément que

$$\frac{d}{ds} f_1(s) > 0 \quad \text{pour} \quad 0 < s < 1, \qquad \frac{d}{ds} f_1(s) < 0 \quad \text{pour} \quad s > 1, \tag{3.25}$$

$$\frac{d}{ds} f_1(s) = 0 \quad \text{pour} \quad s = 1.$$

Comme d'ailleurs $f_1(1) = 0$, on a

$$f_1(s) \leq 0 \qquad \forall s > 0.$$

On a donc

$$\delta \sum_{i=1}^{N} \left[-(e^{-\sigma_i})^{-\gamma} + (e^{-\sigma_i})^{-(\gamma-1)} - e^{-\sigma_i} + 1 \right] = \delta \sum_{i=1}^{N} f_1(e^{-\sigma_i}) \leq 0.$$

Le lemme est démontré. $\square$

De (3.22) et (3.24) on peut déduire que

$$\frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{N} |v_i|^2 + \frac{h\delta}{\gamma - 1} \sum_{i=1}^{N} (e^{\sigma_i})^{\gamma-1} \leq \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{N} |v_{0i}|^2 + \frac{h\delta}{\gamma - 1} \sum_{i=1}^{N} (e^{\sigma_{0i}})^{\gamma-1}. \tag{3.26}$$

Toutefois, nous allons voir un comportement plus fort que (3.26).

Lemme 4. *Si on pose*

$$\overline{s}_1 = \frac{3}{2}, \qquad \overline{\alpha}_1 = \gamma(\gamma + 1)\overline{s}_1^{\,-\gamma-2} - \gamma(\gamma - 1)\overline{s}_1^{\,-\gamma-1}, \tag{3.27}$$

on a

$$\overline{\alpha}_1 > 0,$$

$$f_1(s) = -s^{-\gamma} + s^{-(\gamma-1)} - s + 1 \leq -\overline{\alpha}_1 \frac{(s-1)^2}{2} \qquad \textit{pour} \quad 0 < s \leq \overline{s}_1. \quad (3.28)$$

Démonstration. En calculant la dérivée seconde et la dérivée troisième de $f_1(s)$, on a

$$\frac{d^2}{ds^2} f_1(s) = -\gamma(\gamma+1)s^{-\gamma-2} + \gamma(\gamma-1)s^{-\gamma-1},$$

$$\frac{d^3}{ds^3} f_1(s) = \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)s^{-\gamma-2} - (\gamma+1)\gamma(\gamma-1)s^{-\gamma-2}.$$

Par des calculs élémentaires on voit que $\frac{d^2}{ds^2} f_1(s)$ est négative pour $0 < s \leq \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$ et que $\frac{d^3}{ds^3} f_1(s)$ est positive pour $0 < s \leq \frac{\gamma+2}{\gamma-1}$; donc $\frac{d^2}{ds^2} f_1(s)$ est croissante pour $0 < s \leq \frac{\gamma+2}{\gamma-1}$. Si on choisit $\overline{s}_1 = \frac{3}{2}$, on a évidemment $1 < \overline{s}_1 < \frac{\gamma+1}{\gamma-1} < \frac{\gamma+2}{\gamma-1}$. On en déduit que

$$\frac{d^2}{ds^2} f_1(s) \leq \frac{d^2}{ds^2} f_1(s)\Big|_{s=\overline{s}_1} = -\overline{\alpha}.$$

Donc, compte tenu des relations

$$f_1(1) = \frac{d}{ds} f_1(s)\Big|_{s=1} = 0,$$

on a

$$f_1(s) \leq -\overline{\alpha}\frac{(s-1)^2}{2}.$$

Le lemme est démontré. □

Lemme 5. *On a*

$$\frac{d}{dt}\Big[\delta \sum_{i=1}^{N} (e^{\sigma_i})^{\gamma-1}\Big] = \frac{d}{dt}\Big[\delta \sum_{i=1}^{N} \left((e^{\sigma_i})^{\gamma-1} + (\gamma-1)(e^{-\sigma_i}-1) - 1\right)\Big]. \quad (3.29)$$

DÉMONSTRATION. L'égalité (3.29) résulte de la même manière que la première égalité de (3.24). □

Lemme 6. *Si on pose*

$$\overline{\alpha}_2 = \gamma(\gamma-1)2^{\gamma+1}, \tag{3.30}$$

on a

$$f_2(s) \equiv s^{-(\gamma-1)} + (\gamma-1)(s-1) - 1 \leq \overline{\alpha}_2 \frac{(s-1)^2}{2} \qquad pour \quad s \geq \frac{1}{2}. \tag{3.31}$$

DÉMONSTRATION. Comme la dérivée seconde de $f_2(s)$ est égale à

$$\frac{d^2}{ds^2} f_2(s) = \gamma(\gamma-1)s^{-\gamma-1}$$

et est décroissante pour tout $s > 0$, compte tenu des relations

$$f_2(1) = \frac{d}{ds} f_2(s)\Big|_{s=1} = 0, \qquad \overline{\alpha}_2 = \frac{d^2}{ds^2} f_2(s)\Big|_{s=\frac{1}{2}},$$

on obtient (3.31). □

Lemme 7. *Pour* $\frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{2}$ *on a*

$$-s^{-\gamma} + s^{-(\gamma-1)} - s + 1 \leq -\frac{\overline{\alpha}_1}{\overline{\alpha}_2}(s^{-(\gamma-1)} + (\gamma-1)(s-1) - 1). \tag{3.32}$$

DÉMONSTRATION. En utilisant successivement les inégalités (3.28) et (3.31), on obtient (3.32). □

On pose maintenant

$$A = \frac{h\vartheta}{\gamma-1} \min(f_3(\frac{1}{2}), f_3(\frac{3}{2})), \tag{3.33}$$

$$B_\sigma = \inf\{h\varepsilon\delta\sum_{i=1}^{N}\left[-(e^{-\sigma_i})^{-\gamma}+(e^{-\sigma_i})^{-(\gamma-1)}-e^{-\sigma_i}+1\right] \mid \frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N} f_2(e^{-\sigma_i}) \geq \frac{A}{2}\}, \tag{3.34}$$

$$B_v = \inf\{\sum_{i=1}^{N}\frac{\eta}{\delta}e^{\sigma_i}(v_i - v_{i-1})^2 \mid \frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{N}|v_i|^2 \geq \frac{A}{2}\}. \tag{3.35}$$

Si pour un $t \geq 0$ on a

$$\frac{\delta}{2}\|v\|^2 + \frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}(e^{\sigma_i})^{\gamma-1} \geq A,$$

alors on a

$$\frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N} f_2(e^{-\sigma_i}) \geq \frac{A}{2}$$

ou

$$\frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{N}|v_i|^2 \geq \frac{A}{2}.$$

Donc d'après les définitions (3.34) et (3.35) on déduit de (3.22)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\delta}{2}\|v\|^2 + \frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}(e^{\sigma_i})^{\gamma-1}\right] \leq -\min[B_\sigma, B_v] < 0.$$

Donc dans un temps fini la valeur de $\frac{\delta}{2}\|v\|^2+\frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}(e^{\sigma_i})^{\gamma-1}$ parvient à une valeur inférieure ou égale à A. A partir de ce moment, en vertu des lemmes 2 et 7 on a

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\delta}{2}\|v\|^2 + \frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}\left[\delta\sum_{i=1}^{N}\left((e^{\sigma_i})^{\gamma-1} + (\gamma-1)(e^{-\sigma_i}-1)-1\right)\right]\right] \leq$$

$$\leq -\delta\eta\|v\|^2 - \frac{\overline{\alpha}_1}{\alpha_2}h\varepsilon\left[\delta\sum_{i=1}^{N}\left((e^{\sigma_i})^{\gamma-1} + (\gamma-1)(e^{-\sigma_i}-1)-1\right)\right]$$

Cette inégalité nous conduit à la conclusion :

$$\frac{\delta}{2}\|v\|^2 + \frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}\left[\delta\sum_{i=1}^{N}\left((e^{\sigma_i})^{\gamma-1} + (\gamma-1)(e^{-\sigma_i}-1)-1\right)\right] \to 0$$

pour $t \to \infty$.

Pour comprendre mieux les affirmations que nous venons de démontrer, nous donnons ci-dessous quelques remarque qui confirment, par l'utilisation de taylor des fonctions concernées, les aspects déjà mentionnées.

On considère la formule de taylor de la fonction $f(t) = t^{-(\gamma-1)}$ dans le voisinage de $t = 1$. On a

$$f(t) = 1 - (\gamma - 1)(t - 1) + \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2}(t - 1)^2 + R(t - 1);$$

où $R(t-1)$ a l'expression

$$R(t - 1) = \frac{1}{2}\int_1^t (\tau - 1)^2(-(\gamma - 1)\gamma(\gamma + 1))\tau^{-(\gamma+1)}d\tau$$

Donc il existe une constante $\alpha_1 > 0$ telle que

$$t^{-(\gamma-1)} \leq 1 - (\gamma - 1)(t - 1) + \gamma(\gamma - 1)(t - 1)^2 \qquad \forall t \in [1 - \alpha_1, 1 + \alpha_1]. \quad (3.36)$$

D'autre part, on rappelle que

$$\sum_{i=1}^{N} \delta e^{-\sigma_i} = 1,$$

ce qui entraîne

$$\sum_{i=1}^{N} \delta(\gamma - 1)(e^{-\sigma_i} - 1) = 0. \quad (3.37)$$

En appliquant l'inégalité (3.36) à $\sum_{i=1}^N \delta(e^{-\sigma_i})^{-(\gamma-1)}$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} \delta(e^{-\sigma_i})^{-(\gamma-1)} < 1 - \sum_{i=1}^{N} \delta(\gamma - 1)(e^{-\sigma_i} - 1) + \sum_{i=1}^{N} \delta\gamma(\gamma - 1)(e^{-\sigma_i} - 1)^2$$

Pourvu que $|e^{-\sigma_i} - 1| \leq \alpha_1$, donc d'après (3.37) on a

$$\sum_{i=1}^{N} \delta(e^{-\sigma_i})^{-(\gamma-1)} \leq \sum_{i=1}^{N} \delta\gamma(\gamma-1)(e^{-\sigma_i}-1)^2 \tag{3.38}$$

Pourvu que $|e^{-\sigma_i} - 1| \leq \alpha_1$.

On considère la formule de taylor de la fonction $f(t) = t^{-\gamma} - t^{-(\gamma-1)}$ dans le voisinage de $t = 1$. On a

$$f(t) = -(t-1) + \gamma(t-1)^2 + R(t-1)$$

Où $R(t-1)$ à expression

$$R(t-1) = \frac{1}{2}\int_1^t (\tau-1)^2(-\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\tau^{-(\gamma+2)} + \gamma(\gamma-1)(\gamma+1)\tau^{-(\gamma+1)})$$

Donc il existe une constante $\beta_1 > 0$ telle que

$$t^{-\gamma} - t^{-(\gamma-1)} \geq -(t-1) + \frac{\gamma}{2}(t-1)^2 \qquad \forall t \in [1-\beta_1, 1+\beta_1] \tag{3.39}$$

D'autre part d'après $\sum_{i=1}^{N} \delta e^{-\sigma_i} = 1$ on trouve

$$-\sum_{i=1}^{N} \delta(e^{-\sigma_i} - 1) = 0, \tag{3.40}$$

En appliquant l'inégalité (3.39) à $\sum_{i=1}^{N} \delta((e^{-\sigma_i})^{-\gamma} - (e^{-\sigma_i})^{-(\gamma-1)})$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} \delta((e^{-\sigma_i})^{-\gamma} - (e^{-\sigma_i})^{-(\gamma-1)}) \geq -\sum_{i=1}^{N} \delta(e^{-\sigma_i} - 1) + \sum_{i=1}^{N} \delta\frac{\gamma}{2}(e^{-\sigma_i} - 1)^2$$

Pourvue que $|e^{-\sigma_i} - 1| \leq \beta_1$, donc d'après (3.40) on a

$$\sum_{i=1}^{N} \delta((e^{-\sigma_i})^{-\gamma} - (e^{-\sigma_i})^{-(\gamma-1)}) \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \delta\gamma(e^{-\sigma_i} - 1)^2 \tag{3.41}$$

Donc

$$- h\varepsilon \sum_{i=1}^{N} \delta((e^{-\sigma_i})^{-\gamma} - (e^{-\sigma_i})^{-(\gamma-1)}) \leq \frac{-h\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{N} \delta\gamma(e^{-\sigma_i} - 1)^2 \qquad (3.42)$$

Nous routournons aux systèmes d'équations (3.17), et nous considérons les égalités (3.23), (3.38), (3.42) on trouve

$$\frac{\delta}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2 + \frac{\delta h}{\gamma - 1} \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}(e^{\sigma_i})^{\gamma-1} \leq -\delta\eta\|v\|^2 - \frac{h\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{N} \delta\gamma(e^{-\sigma_i} - 1)^2 \quad (3.43)$$

D'aprés l'égalité (3.38) on a

$$- \sum_{i=1}^{N} \delta\gamma(\gamma - 1)(e^{-\sigma_i} - 1)^2 \leq - \sum_{i=1}^{N} \delta(e^{-\sigma_i})^{-(\gamma-1)}$$

Donc

$$- \sum_{i=1}^{N} \delta\gamma(e^{-\sigma_i} - 1)^2 \leq - \frac{1}{\gamma - 1} \sum_{i=1}^{N} \delta(e^{-\sigma_i})^{-(\gamma-1)}$$

Si en multipliant par $\frac{h\varepsilon}{2}$ on trouve

$$- \frac{h\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{N} \delta\gamma(e^{-\sigma_i} - 1)^2 \leq - \frac{h\varepsilon}{2(\gamma - 1)} \sum_{i=1}^{N} \delta(e^{-\sigma_i})^{-(\gamma-1)} \qquad (3.44)$$

donc le deuxième membre de l'égalité (3.43) devient comme suit

$$-\delta\eta\|v\|^2 - \frac{h\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{N} \delta\gamma(e^{-\sigma_i} - 1)^2 \leq -\delta\eta\|v\|^2 - \frac{h\varepsilon}{2(\gamma - 1)} \sum_{i=1}^{N} \delta(e^{-\sigma_i})^{-(\gamma-1)}$$

Ce qui implique

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\delta}{2}\|v\|^2 + \frac{\delta h}{\gamma - 1} \sum_{i=1}^{N} (e^{\sigma_i})^{\gamma-1}\Big) \leq -\delta\eta\|v\|^2 - \frac{h\varepsilon}{2(\gamma - 1)} \sum_{i=1}^{N} \delta(e^{-\sigma_i})^{-(\gamma-1)} \qquad (3.45)$$

Si on pose

$$Y(t) = \frac{\delta}{2}\|v\|^2 + \frac{\delta h}{\gamma - 1} \sum_{i=1}^{N} (e^{\sigma_i})^{\gamma-1}$$

Donc (3.45) devient

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\delta}{2}\|v\|^2+\frac{\delta h}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}(e^{\sigma_i})^{\gamma-1}\Big)\leq -2\eta(\frac{\delta}{2}\|v\|^2)-\frac{\varepsilon}{\delta 2}\Big(\frac{\delta h}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}\delta(e^{\sigma_i})^{\gamma-1}\Big) \tag{3.46}$$

On a

$$-2\eta\Big(\frac{\delta}{2}\|v\|^2\Big)-\frac{\varepsilon}{\delta 2}\Big(h\delta\sum_{i=1}^{N}\delta\gamma(e^{-\sigma_i}-1)^2\Big)\leq -min(2\eta,\frac{\varepsilon}{\delta 2})Y(t)$$

Donc de (3.46) on obtient

$$\frac{d}{dt}Y(t)\leq -min(2\eta,\frac{\varepsilon}{\delta 2})Y(t)=-C_1Y(t) \tag{3.47}$$

On déduit que

$$0\leq Y(t)\leq Y(0)e^{-C_1t}\longrightarrow 0_{t\to\infty}$$

Donc $Y(t)\longrightarrow 0$ ce qui implique $\|v\|^2\longrightarrow 0$ et $v\longrightarrow 0$.

Chapitre 4

Equations avec la force extérieure

Nous allons considérer le système d'équations similaire au système d'équations précédent (2.12), (2.13) et (2.14) mais avec un terme qui représente la force extérieure

Puis nous allons transformer ce dernier système aux type de système analogue aux système d'équations (2.17)-(2.18). On a donc

$$dv_i = [\frac{\eta}{\delta^2}(e^{\sigma_{i+1}}v_{i+1} - (e^{\sigma_{i+1}} + e^{\sigma_i})v_i + e^{\sigma_i}v_{i-1}) - \frac{h}{\delta}((e^{\sigma_{i+1}})^\gamma - (e^{\sigma_i})^\gamma) + f_i]dt \tag{4.1}$$

Pour qu'on arrive à démontrer l'existence et l'unicité de ce système d'équations nous allons ajouter la même condition initiale (3.13), en effet nous considérons une fonction ψ, et puis nous appliquons quelques calcules nous obtiendrons quelques égalités similaires de (3.17) mais bien sur avec le terme de la force comme ce qui convient

Quant on ajoute à notre fonction le terme f_i le problème devient :

$$G_i = \frac{\eta}{\delta^2}(e^{\sigma_{i+1}}v_{i+1} - (e^{\sigma_{i+1}} + e^{\sigma_i})v_i + e^{\sigma_i}v_{i-1}) - \frac{h}{\delta}((e^{\sigma_{i+1}})^\gamma - (e^{\sigma_i})^\gamma) + f_i$$

Donc

$$\frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{N-1}(v_i(t))^2+\frac{h}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}\delta(e^{\sigma_i(t)})^{\gamma-1}+\eta\int_0^t\sum_{i=1}^{N}\frac{e^{\sigma_i}}{\delta}(v_i-v_{i-1})^2dt' \tag{4.2}$$

$$+\int_0^t h\varepsilon\sum_{i=1}^{N}\delta((e^{\sigma_i})^{\gamma}-(e^{\sigma_i})^{\gamma-1})dt'\leq\frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{N-1}(v_{0i})^2+\frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}(e^{\sigma_{0i}})^{\gamma-1}+$$

$$+\int_0^t\delta\sum_{i=1}^{N-1}v_if_idt'$$

Donc on va voir quelle type de condition faut supposé pour que notre problème admet toujour la solution dans tout intervalle. Si N impair

$$\delta\sum_{i=1}^{N-1}v_if_i=\delta\sum_{i=1}^{(N-1)/2}v_if_i+\delta\sum_{i=(N+1)/2}^{N-1}v_if_i=$$

$$=\delta\sum_{i=1}^{(N-1)/2}\sum_{j=1}^{i}(v_j-v_{j-1})f_i+\delta\sum_{i=(N+1)/2}^{N-1}\sum_{j=i}^{N-1}(v_{j+1}-v_j)f_i\leq$$

$$\leq\delta\sum_{i=1}^{(N-1)/2}\Big(\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{e^{\sigma_j}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=1}^{i}e^{\sigma_j}(v_j-v_{j-1})^2\Big)^{\frac{1}{2}}f_i$$

$$+\delta\sum_{i=(N+1)/2}^{N-1}\Big(\sum_{j=i}^{N-1}\frac{1}{e^{\sigma_{j+1}}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=i}^{N-1}e^{\sigma_{j+1}}(v_{j+1}-v_j)^2\Big)^{\frac{1}{2}}f_i$$

$$\leq\delta\Big(\sum_{i=1}^{(N-1)/2}\Big(\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{e^{\sigma_j}}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{i}e^{\sigma_j}(v_j-v_{j-1})^2\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{(N-1)/2}(f_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\delta\Big(\sum_{i=(N+1)/2}^{N-1}\Big(\sum_{j=i}^{N-1}\frac{1}{e^{\sigma_{j+1}}}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{N-1}e^{\sigma_{j+1}}(v_{j+1}-v_j)^2\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=(N+1)/2}^{N-1}(f_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 4\eta\frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{(N-1)/2}\Big(\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{e^{\sigma_j}}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{i}e^{\sigma_j}(v_j-v_{j-1})^2\Big)+\frac{1}{4\eta}\frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{(N-1)/2}(f_i)^2$$

$$+4\eta\frac{\delta}{2}\sum_{i=(N+1)/2}^{N-1}\Big(\sum_{j=i}^{N-1}\frac{1}{e^{\sigma_{j+1}}}\Big)\Big(\sum_{j=i}^{N-1}e^{\sigma_{j+1}}(v_{j+1}-v_j)^2\Big)+\frac{1}{4\eta}\frac{\delta}{2}\sum_{i=(N+1)/2}^{N-1}(f_i)^2$$

On remarque que

$$\frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{(N-1)/2}(f_i)^2+\frac{\delta}{2}\sum_{i=(N+1)/2}^{N-1}(f_i)^2=\frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{N-1}(f_i)^2,$$

$$\delta\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{e^{\sigma_j}}\leq\delta\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{e^{\sigma_j}}=1,$$

$$\delta\sum_{j=i}^{N-1}\frac{1}{e^{\sigma_{j+1}}}\leq\delta\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{e^{\sigma_{j+1}}}=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{e^{\sigma_j}}=1,$$

$$\frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{(N-1)/2}\Big(\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{e^{\sigma_j}}\Big)\sum_{j=1}^{i}e^{\sigma_j}(v_j-v_{j-1})^2\leq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{(N-1)/2}\sum_{j=1}^{i}e^{\sigma_j}(v_j-v_{j-1})^2\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{(N-1)/2}\sum_{j=1}^{(N-1)/2}e^{\sigma_j}(v_j-v_{j-1})^2=\frac{1}{2}\frac{N-1}{2}\sum_{j=1}^{(N-1)/2}e^{\sigma_j}(v_j-v_{j-1})^2=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{(N-1)/2}e^{\sigma_j}\frac{(v_j-v_{j-1})^2}{\delta}$$

Analoguement

$$\frac{\delta}{2}\sum_{i=(N+1)/2}^{N-1}\Big(\sum_{j=i}^{N-1}\frac{1}{e^{\sigma_{j+1}}}\Big)\sum_{j=i}^{N-1}e^{\sigma_{j+1}}(v_{j+1}-v_j)^2\leq$$

$$<\frac{1}{4}\sum_{j=(N+1)/2}^{N-1}e^{\sigma_{j+1}}\frac{(v_{j+1}-v_j)^2}{\delta}$$

On en déduit que

$$\frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{(N-1)/2}\Big(\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{e^{\sigma_j}}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{i}e^{\sigma_j}(v_j-v_{j-1})^2\Big)+$$

$$+\frac{\delta}{2}\sum_{i=(N+1)/2}^{N-1}\Big(\sum_{j=i}^{N-1}\frac{1}{e^{\sigma_{j+1}}}\Big)\Big(\sum_{j=i}^{N-1}e^{\sigma_{j+1}}(v_{j+1}-v_j)^2\Big)\leq$$

$$\leq\frac{1}{4\delta}\sum_{j=1}^{(N-1)/2}e^{\sigma_j}(v_j-v_{j-1})^2+\frac{1}{4\delta}\sum_{j=(N+1)/2}^{N-1}e^{\sigma_{j+1}}(v_{j+1}-v_j)^2\leq\frac{1}{4\delta}\sum_{i=1}^{N}e^{\sigma_i}(v_i-v_{i-1})^2$$

De ces inégalités on déduit que

$$\delta\sum_{i=1}^{N-1}v_if_i\leq\eta\sum_{i=1}^{N}\frac{e^{\sigma_i}}{\delta}(v_i-v_{i-1})^2+\frac{\delta}{8\eta}\sum_{i=1}^{N-1}(f_i)^2$$

Si nous introduisons l'intégralle ne change rient

$$\int_0^t\delta\sum_{i=1}^{N-1}v_if_idt'\leq\int_0^t\eta\sum_{i=1}^{N}\frac{e^{\sigma_i}}{\delta}(v_i-v_{i-1})^2dt'+\int_0^t\frac{\delta}{8\eta}\sum_{i=1}^{N-1}(f_i)^2dt'$$

Donc si nous routournons à notre problème (4.2) on trouve

$$\frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{N-1}(v_{0i})^2+\frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}(e^{\sigma_{0i}})^{\gamma-1}+\int_0^t\delta\sum_{i=1}^{N-1}v_if_idt'\leq$$

$$\leq\frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{N-1}(v_{0i})^2+\frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}(e^{\sigma_{0i}})^{\gamma-1}+\int_0^t\eta\sum_{i-1}^{N}\frac{e^{\sigma_i}}{\delta}(v_i-v_{i-1})^2dt'+\int_0^t\frac{\delta}{8\eta}\sum_{i=1}^{N-1}(f_i)^2dt'$$

Donc

$$\frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{N-1}(v_i(t))^2+\frac{h}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}\delta(e^{\sigma_i(t)})^{\gamma-1}+\int_0^t h\varepsilon\sum_{i=1}^{N}\delta((e^{\sigma_i})^{\gamma}-(e^{\sigma_i})^{\gamma-1})dt' \quad (4.3)$$

$$\leq\frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{N-1}(v_{0i})^2+\frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}(e^{\sigma_{0i}})^{\gamma-1}+\int_0^t\frac{\delta}{8\eta}\sum_{i=1}^{N-1}(f_i)^2dt'$$

Le type de condition qu'il faut supposér pour obtenir la résultat de ces énégalités est que $\int_0^t\frac{\delta}{8\eta}\sum_{i=1}^{N-1}(f_i)^2dt'<\infty$.

On a $\delta=\frac{1}{N}$ et N est un nombre finis donc δ est finis, et η est le coefficient de viscosité alors finis, et f est la force extérieure donc le terme $\int_0^t\frac{\delta}{8\eta}\sum_{i=1}^{N-1}(f_i)^2dt'$ est finis.

Donc on déduit que $\int_0^t \delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i f_i dt'$ est borné.

Avec cette démonstration et avec résultat précédente de l'existence de la solution sans le terme f_i on peut dire que la solution existe toujours dans tout l'intervalle $[0, \infty[$.

Bibliographie

[1] M.Z. Aissaoui, H. Fujita Yashima : *Fluides newtoniens*, Cours, Univ. Guelma, 2012-2013.

[2] Antontsev, S. N., Kazhikhov, A. V., Monakhov, V. N. : *Boundary value problems in mechanics of non homogeneous fluids* (translated from Russian). North-Holland, 1990.

[3] Belhireche, H., Aissaoui, M.Z., Fujita Yashima, H. : Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. A paraître sur *Sciences et Technologie, Univ. Constantine.*

[4] Benabidallah, R., Taleb, L., Fujita Yashima, H. : Existence d'une solution stationnaire d'un système d'équations d'un fluide visqueux compressible et calorifère modélisant la convection. *Bollettino U.M.I.* vol. (8) 10-B (2007), pp. 1101-1124

[5] Benseghir R., Fujita Yashima, H. : Mesure invariante pour l'équation stochastique du mouvement d'un gaz visqueux en une dimension avec la discrétisation du domaine. *Revue Roumaine Math. Pures Appl.*. vol. **58** (2013), pp. 149-162.

[6] Benseghir R. : Equation stochastique d'un gaz visqueux. *Thèse de doctorat*, Univ. Annaba, 2013.

[7] Buccellato, S., Fujita Yashima, H. : Système d'équations d'un gaz visqueux modélisant l'atmosphère avec la force de Coriolis et la stabilité de l'état d'équilibre. *Ann. Univ. Ferrara - Sez. VII - Sc. Mat.* vol. 49 (2003), pp. 127–159.

[8] Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z. : Systeme d'equations d'un modele du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphere. A paraître sur *Annales Math. Africaines.*

[9] Kantorovitch, L. V., Akilov, G. P. : *Analyse fonctionnelle, tome 2* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1981.

[10] A. V. Kazhikhov : Correction globale des problèmes aux limites mixtes pour le système d'équations du modèle d'un gaz visqueux (en russe). *Dinamika Sploshnoi Sredy*, vol. **21** (1975), pp. 18-47.

[11] Kazhikhov, A. V., Shelukhin, V. V. : Résolubilité unique globale dans le temps du problème aux conditions initiales et aux limites pour les équations monodimensionnelles d'un gaz visqueux (en russe). *Prikl. Mat. Mekh.*, vol. **41** (1977), pp. 282-291.

[12] Kikoïne, A. K., Kikoïne, I. K. : *Physique moléculaire* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1979.

[13] Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'tseva, N. N. : *Linear and quasi-linear equations of parabolic type* (translated from Russian). Amer. Math. Soc., 1968.

[14] Landau, L. L., Lifchitz, E. M. : *Mécanique des fluides (Physique théorique, tome 6)* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1989.

[15] Martchouk, G. I., Dymnikov, V. P., Zalesnii, V. B., Lykosov, V. N., Galin, V. Ya. : *Modellizzazione matematica delle circolazioni generali dell'atmosfera e dell'oceano* (in russo). Gidrometeoizdat, Leningrad, 1984.

[16] Matveev, L. T. : *Fisica dell'atmosfera* (in russo). Gidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg, 1965, 1984, 2000.

[17] Peyron, M. : Les chutes de neige dans l'Atlas marocain. *Revue Géogr. Alpine*, vol. **68** (1980), pp. 237-254.

[18] Rozhdestvenskii, B. L., Yanenko, N. N. : *Systèmes d'équations quasi-linéaires et leur applications à la dynamique des gaz.* Nauka (Moscou), 1978.

[19] Selvaduray, S., Fujita Yashima, H. : Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido. *Quaderno Dip. Mat. Univ. Torino*, No. 16 (2010).

[20] E. Tornatore, H. Fujita Yashima : *Equazione stocastica monodimensionale di un gas viscoso barotropico.* Ricerche Mat., vol. 46, pp. 255-283, 1997.

[21] A. V. Kazhikhov : Sur la stabilisation de la solution du problème aux conditions initiales et aux limites pour les équations d'un gaz visqueux barotropique (en russe). Diff. Uravn., vol. 15, pp. 662-667, 1979.

[22] Sheng, P.-X., Mao, J.-T., Li, J.-G., Zhang, A.-C., Sang, J.-G., Pan, N.-X. : *Fisica dell'atmosfera* (in cinese). Publ. Univ. Beijing, Beijing, 2003.