République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques Appliquées**

Par :

Melle. MERABTI Sarra

Intitulé

Généralisations de quelques inégalités intégrales de type Greonwell-Bihari à une variable aux échalles de temps

Dirigé par : Dr. BOUKERRIOUA Khaled

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. DEBBAR Rabeh**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. BOUKERRIOUA Khaled**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Mme. N. BENDJAZIA**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2016

Remerciements

C'est avec un grand plaisir que je réserve ces lignes en signe de gratitude et de reconnaissance à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

En tout premier lieu, je tiens à remercier mon encadreur Dr. Khaled Boukerrioua d'avoir encadré ce travail, tout au long de ce mémoire, ses conseils m'ont été très précieux.

Je remercie vivement le docteur Débbar Rabah ,de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury. Je remercie également le docteur bendjazia Nassima membre de jury de l'honneur qu'elle m'a accordé en acceptant de juger mon travail.

Enfin, j'adresse également mes remerciements envers mes amis et mes collègues pour leur soutien.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire :

A mes très chers parents pour leurs soutiens. Leurs aides et leurs patiences m'ont été, tout au long de ma vie et de mes études, un réconfort et un encouragement surtout dans les moments opportuns.

A mes Frères : Ala et Tamer

A toute ma famille et spécialement à mes tantes et mes cousins.

A tous mes collègues sans exception qui m'ont encouragé pour la réalisation de ce travail.

A mes amies : Liyou, chama, fifi,mira, imen, missou,loubna et miya

Et les autres collègues de ma promotion et du département.

A tous qui m'ont apporté du soutien toute ma vie.

A tous mes enseignants

Sarra

Table des matières

0.1 Introduction

Les inégalités apparaissent partout et dans toutes les disciplines, elles jouent un rôle important et significatif dans toutes les branches de Mathématiques. Durant ces dernières années, les inégalités ont attiré l'attention de plusieurs mathématiciens et une intense littérature est apparue sur ce sujet. En particulier les inégalités intégrales ont connues un grand développement et des nouvelles idées et techniques sont apparues ce qui a contribué à la résolution de nombreux problèmes importants en théorie de l'approximation et en analyse numérique où l'estimation des erreurs d'approximation est exigée.

La théorie des inégalités intégrales joue un rôle important dans l'étude des équations différentielles et intégro-différentielles, les applications dans ce domaine ont été développées d'une façon très remarquables au cours de ces dernières années dans l'étude de l'existence, l'unicité, la dépendance continue de la solution par rapport aux données initiales, l'existence globale, la stabilité de la solution et l'erreur d'estimation dans les problèmes d'approximation. La littérature dans ce sens est très riche et connaît une croissance explosive en théorie et aux applications, pour plus de détails on peut consulter le livre de Pachpatte $[1-6]$,$[9-12]$ et $[17-20]$.

Il s'avère que l'utilisation des inégalités intégrales donne des bornes explicites pour les fonctions inconnues. Pour ces raisons l'introduction des inégalités intégrales dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles est indispensable. Une des inégalités intégrales la plus connue est celle de Gronwall (1919) qui a été appliquée à la résolution de quelques problèmes concernant les équations différentielles ordinaires.

Le but de ce travail est de développer un résultat obtenu dans [16] autour de l'étude des propriétés des solutions des équations dynamiques ordinaires aux échelles de temps.

Une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un sous ensemble fermé non vide de $\mathbb{R}$. Par exemple, les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et l'ensemble triadique de Cantor sont des échelles de temps. On sous-entend que la topologie de $\mathbb{T}$ est induite par celle de $\mathbb{R}$. La théorie des équations dynamiques aux échelles de temps a été introduite en 1988 par Stefan Hilger [13, 14] dans sa thèse de doctorat où il a notamment définie la Δ-dérivée de la façon suivante.

Définition 0.1 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$, f est dite $\Delta-$différentiable en t s'il existe un vecteur $f^\Delta(t) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage U de t tel que*

$$\left\| f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s) \right\| \leq \epsilon \mid \sigma(t) - s \mid,$$

pour tout $s \in U$. On appelle $f^\Delta(t)$ la $\Delta-$dérivée de f en t. Si f est $\Delta-$différentiable en t pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, alors $f^\Delta : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^n$ est dite la $\Delta-$dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

Ici, $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$, $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ et

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T}/\left]\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}\right] & \text{si} \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & \text{si} \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases}.$$

C'est à partir de cette définition qu'ont été introduites les équations aux échelles de temps qui ont la même forme qu'une équation différentielle à l'exception que par exemple, dans une équation du premier ordre, la dérivée d'une fonction x (x') est remplacée par la Δ-dérivée (x^Δ) de cette fonction. Nous verrons plus loin dans le texte que si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la Δ dérivée équivaut à la dérivée au sens classique et les équations aux échelles de temps deviennent des équations différentielles. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, les équations aux échelles de temps deviennent des équations aux différences finies, pour plus de détails, on peut consulter les deux livres [7, 8]. D'ailleurs, l'intérêt pour ce dernier type d'équations a connu un essor considérable au cours des dernières années pour expliquer plusieurs phénomènes discrets notamment en économie, psychologie et génie. La théorie des équations aux échelles de temps vient dans un premier temps unifier ce qui peut être fait dans les domaines des équations différentielles et les équations aux différences finies. En travaillant sous l'angle d'une échelle de temps générale, il est possible de faire progresser simultanément ces deux champs des mathématiques. Dans un deuxième temps, la théorie développée autour des échelles de temps permet l'étude de phénomènes se modélisant d'une façon qui fait appel simultanément au discret et au continu. Ainsi, une équation définie sur une échelle de temps de la forme $\cup_{n=0}^{n=\infty} [2n, 2n+1]$ est très utile pour décrire des phénomènes saisonniers. Par exemple, ce pourrait être pour l'étude d'une population d'insectes qui après un certain temps disparaît, pour réapparaître ultérieurement après avoir été pendant un certain temps sous forme de larve.

Ce travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, on commence par rappeler brièvement quelques notions générales concernant les échelles de temps avec exemples. Ensuite nous présentons quelques résultats préliminaires qui nous seront utiles dans le prochain chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous développons les résultats du travail [11] basés sur l'établissement des inégalités intégrales aux échelles de temps de type Gronwall- Bihari qui sont très utiles dans l'estimation des solutions des équations dynamiques.

Enfin, on termine le chapitre par l'exposition d'une application de ces inégalités intégrales aux équations dynamiques.

Chapitre 1

Notation et préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions, exemples et théorèmes très utiles pour le deuxième chapitre. Nous signalons que les résultats suivants sont tirés du livre [7, 8] .

Définition 1.1 *Une échelle de temps* $\mathbb{T}$ *est un sous ensemble fermé non vide de* $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1 *Les ensembles* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, [0,1] \cup [2,3], [0,1] \cup \mathbb{N}$ *et l'ensemble de cantor sont des échelles de temps.*

Exemple 1.2 *Les ensembles* $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \mathbb{C}, (0,1)$ *ne sont pas des échelles de temps.*

Remarque 1.1 *La topologie de* $\mathbb{T}$ *est induite par celle de* $\mathbb{R}$.

1.1 Operateur de saut

Définition 1.2 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps, pour* $t \in \mathbb{T}$, *on définit l'opérateur de saut avant* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\} . \tag{1.1}$$

Définition 1.3 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps, pour* $t \in \mathbb{T}$, *on définit l'opérateur de saut arrière* $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}. \tag{1.2}$$

Remarque 1.2 *Par convention, on supposera que* $\sigma(t) = t$ *si* t *est le maximum de* $\mathbb{T}$, *et que* $\rho(t) = t$ *si* t *est le minimum de* $\mathbb{T}$.

1.2 Classification des points

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, t un point de $\mathbb{T}$.

Définition 1.4 *On dit que* t *est un point dense à droite de* $\mathbb{T}$, $t < \sup \mathbb{T}$ *(resp. un point* t *dense à gauche de* $\mathbb{T}$*) si* $\sigma(t) = t$ *(resp.* $\rho(t) = t$*).*

Définition 1.5 *On dit que* t *est un point dense s'il est simultanément dense à droite et à gauche.*

Définition 1.6 *On dit que* t *est un point dispersé à droite de* $\mathbb{T}$ *(resp. un point dispersé à gauche de* $\mathbb{T}$*) si* $\sigma(t) > t$ *(resp.* $\rho(t) < t$*).*

Définition 1.7 *On dit que* t *est un point isolé s'il est simultanément dispersé à droite et à gauche.*

Définition 1.8 *Nous définissons les fonctions de granulation* $\mu, \nu : \mathbb{T} \to [0, \infty[$ *par :*

$$\mu(t) = \sigma(t) - t \text{ et } \nu(t) = t - \rho(t) \tag{1.3}$$

Maintenant, nous présentons quelques exemples concernant le calcul de l'opérateur de saut avant et arrière :

Exemple 1.3 *Soit* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

on a

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t, \\ \rho(t) &= t, \end{aligned}$$

donc tous les points de $\mathbb{R}$ *sont denses. Les fonctions de granulation* μ, ν *valles :* $\mu(t) = 0$ *et* $\nu(t) = 0$.

Exemple 1.4 *Soit* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, *pour tout* $t \in \mathbb{Z}$, *on a*

$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf\{t+1, t+2, \ldots\ldots\} = t+1, \rho(t) = t-1,$

ainsi tous les points de $\mathbb{Z}$ *sont isolés. Les fonctions de granulation* μ, ν *valles :* $\mu(t) = 1$ *et* $\nu(t) = 1$.

Exemple 1.5 *Soit* $\mathbb{T} = [0, 1] \cup [2, 3]$ *on a :*

$$\sigma(t) = \begin{cases} t \ si \ t \in [0, 1[\cup [2, 3] \\ 2 \ si \ t = 1 \end{cases},$$

et

$$\rho(t) = \begin{cases} t \ si \ t \in [0, 1] \cup]2, 3] \\ 1 \ si \ t = 2 \end{cases}.$$

Ainsi

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t \in [0, 1[\cup [2, 3] \\ 1 \ si \ t = 1 \end{cases},$$

et

$$\nu(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t \in [0,1] \cup]2,3] \\ 1 \ si \ t = 2 \end{cases}.$$

On définit maintenant l'ensemble $\mathbb{T}^{\mathbf{k}}$.

Définition 1.9 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps*

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} \backslash]\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}] & si \ \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & si \ \sup \mathbb{T} = \infty \end{cases}.$$

Remarque 1.3 *Si le maximum de $\mathbb{T}$ est dispersé à gauche, alors on pose $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} \backslash \sup \mathbb{T}$. Sinon, par convention $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.*

Définition 1.10 *Pour deux points $a, b \in \mathbb{T}$, l'intervalle d'échelle de temps est définie par :*

$$[a,b]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} \ : a \leq t \leq b\}.$$

1.3 $\Delta-$Dérivée

Définition 1.11 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$, une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$, f est dit $\Delta-$différentiable en t s'il existe un vecteur $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$,il existe un voisinage U de t tel que*

$$\left\| f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right\| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|,$$

pour tout $s \in U$. On appelle $f^{\Delta}(t)$ la $\Delta-$dérivée de f en t. Si f est $\Delta-$différentiable en t pour tout $t \in \mathbb{T}$, alors $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^n$ est dite la $\Delta-$dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

Théorème 1.1 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $t \in \mathbb{T}$.*

(i)Si f est $\Delta-$différentiable en t, alors f est continue en t.

(ii)Si f est continue en t et si t est dispersé à droite, alors f est $\Delta-$différentiable en t, de plus on a :

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}. \tag{1.4}$$

(iii)Si t est dense à droite, alors f est $\Delta-$ différentiable en t si et seulement si

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

existe et est finie.

Dans ce cas on a :

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

(iv)Si f est différentiable en t, alors :

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t). \tag{1.5}$$

Maintenant, on donne quelques exemples concernant le calcul de la $\Delta-$dérivée.

Exemple 1.6 *Considérons la fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t^2$ où $\mathbb{T} = \left\{\frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}_0\right\}$.*
Comme $t \in \mathbb{T}$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : t = \frac{n_0}{2}$.
Ainsi

$$\sigma(t) = \frac{n_0 + 1}{2},$$

et comme

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t},$$

alors

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \frac{\left(\frac{n_0+1}{2}\right)^2-\left(\frac{n_0}{2}\right)^2}{\frac{n_0+1}{2}+\frac{n_0}{2}} \\ &= \frac{n_0+1}{2}+\frac{n_0}{2} \\ &= \frac{2n_0}{2}+\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

D'où

$$f^{\Delta}(t)=2t+\frac{1}{2}.$$

Exemple 1.7 *Considérons la fonction $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)=t^2$ où $\mathbb{T}=\{\sqrt{n}, n\in\mathbb{N}_0\}$.*

Pour tout $t\in\mathbb{T}$, $\exists n_0\in\mathbb{N}_0 : t=\sqrt{n_0}$, et donc

$$\sigma(t)=\sqrt{n_0+1},$$

comme

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t},$$

alors

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \frac{\left(\sqrt{n_0+1}\right)^2-\left(\sqrt{n_0}\right)^2}{\sqrt{n_0+1}-\sqrt{n_0}}. \\ &= \sqrt{n_0+1}+\sqrt{n_0}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$f^{\Delta}(t)=\sqrt{t^2+1}+t.$$

Remarque 1.4 *Si $\mathbb{T}=\mathbb{R}$, alors d'après (iii) du théorème précédent la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est $\Delta-$différentiable en $t\in\mathbb{R}$ ssi :*

$$f'(t) = \lim_{t \to s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

existe et de plus $f^{\Delta}(t) = f'(t)$.

Remarque 1.5 *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *d'après* (ii) *la fonction* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *est* $\Delta-$*différentiable en* $t \in \mathbb{Z}$ *et on a*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t).$$

Théorème 1.2 *Si* $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *sont* $\Delta-$*différentiables en* $t \in \mathbb{T}^k$, *alors :*

(i) $f + g$ *est* $\Delta-$*différentiable en* t *de plus*

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

(ii) (αf) *est* $\Delta-$*différentiable en* t *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et on a*

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

(iii) fg *est* $\Delta-$*différentiables en* t *et on a*

$$\begin{aligned} (fg)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t) g(t) + f(\sigma(t)) g^{\Delta}(t) \\ &= f(t) g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t) g(\sigma(t)). \end{aligned}$$

(iv) *Si* $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$, *alors* $\dfrac{f}{g}$ *est* $\Delta-$*différentiable en* t *on a*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t) g(t) - f(t) g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

Définition 1.12 *Une fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *est dit rd-continue si elle est continue en tout point dense à droite de* $\mathbb{T}$ *et si sa limite à gauche existe et finie en tout point dense à gauche de* $\mathbb{T}$.

Remarque 1.6 *L'ensemble de toutes les fonctions rd-continues est noté par* C_{rd} *ou* $C_{rd}(\mathbb{T})$.

Remarque 1.7 *L'ensemble de toutes les fonctions* $\Delta-$*différentiables et rd-continues est noté par* C_{rd}^1 *ou* $C_{rd}^1(\mathbb{T})$.

Théorème 1.3 *Toute fonction rd-continue* $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ *admet une primitive* $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *et on note*

$$\int_s^r f(t)\,\Delta t = F(r) - F(s) \text{ pour tout } r, s \in \mathbb{T},$$

de plus

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\,\Delta\tau = \mu(t) f(t), t \in \mathbb{T}^k.$$

Preuve. On pose $F^{\Delta}(t) = f(t)$ alors

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\,\Delta\tau = F(\sigma(t)) - F(t),$$

on a :

$$F^{\Delta}(t) = \frac{F(\sigma(t)) - F(t)}{\mu(t)},$$

d'où

$$F(\sigma(t)) - F(t) = F^{\Delta}(t)\,\mu(t) \Rightarrow \int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\,\Delta\tau = f(t)\,\mu(t).$$

■

Théorème 1.4 *Soient* $a, b, c \in \mathbb{T}, \lambda \in \mathbb{R}$ *et* $f, g \in C_{rd}(\mathbb{T}^k)$ *alors :*

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(t)+g(t)]\,\Delta t &= \int_a^b f(t)\,\Delta t + \int_a^b g(t)\,\Delta t, && (1.6)\\
\int_a^b (\lambda f(t))\,\Delta t &= \lambda \int_a^b f(t)\,\Delta t,\\
\int_a^b f(t)\,\Delta t &= -\int_b^a f(t)\,\Delta t,\\
\int_a^b f(t)\,\Delta t &= \int_a^c f(t)\,\Delta t + \int_c^b f(t)\,\Delta t.\\
\int_a^a f(t)\,\Delta t &= 0.
\end{aligned}$$

Si

$$|f(t)| \leq g(t)$$

sur $[a,b]_{\mathbb{T}^k}$, *alors*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\,\Delta t.$$

Proposition 1.1 *Pour* $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ *on a*

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Proposition 1.2 *Pour* $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ *on a*

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) \;\; si\ a<b \\ 0\ si\ a=b \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t) \;\; si\ a>b \end{cases}$$

Preuve. Comme $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$, $a<b$ on a $\sigma(t)=t+1$.

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,\Delta t &= \int_a^{a+1} f(t)\,\Delta t + \int_{a+1}^{a+2} f(t)\,\Delta t + \ldots + \int_{b-1}^{b} f(t)\,\Delta t \\
&= \int_a^{\sigma(a)} f(t)\,\Delta t + \int_{a+1}^{\sigma(a+1)} f(t)\,\Delta t + \ldots + \int_{b-1}^{\sigma(b-1)} f(t)\,\Delta t \\
&= \mu(a) f(a) + \mu(a+1) f(a+1) + \cdots + \mu(b-1) f(b-1),
\end{aligned}
$$

comme $\mu(t) = 1$, on obtient

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \sum_{t\in[a,b[} f(t).$$

De la même manière on montre le cas $a > b$.

Le cas $a = b$ est induit directement des propriétés (1.6) du théorème précédent on a :

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^a f(t)\,\Delta t = 0.$$

■

Proposition 1.3 *Si $[a,b]$ contient des points isolés alors :*

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b[} \mu(t) f(t) \ \ si\ a < b \\ 0 \ si\ a = b \\ \sum_{t\in[a,b[} \mu(t) f(t) \ \ si\ a > b. \end{cases}$$

Preuve. On suppose que $[a,b]$ contient uniquement des points isolés, c'est-à-dire $[a,b] = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$. Autrement dit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

D'après le théorème précédent on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\Delta t &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_i+1} f(t)\,\Delta t = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{\sigma(t_i)} f(t)\,\Delta t \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\mu(t_i)\,f(t_i) = \sum_{t\in[a,b[}\mu(t)\,f(t).\end{aligned}$$

Pour le cas $a = b$ on a :

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = 0,$$

par contre dans le cas $b < a$ on obtient

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = -\int_b^a f(t)\,\Delta t.$$

■

1.3.1 Δ−Intégration par partie

Proposition 1.4

$$\begin{aligned}\int_a^b f^\sigma(t)\,g^\Delta(t)\,\Delta t &= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^\Delta(t)\,g(t)\,\Delta t, \\ \int_a^b f(t)\,g^\Delta(t)\,\Delta t &= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^\Delta(t)\,g^\sigma(t)\,\Delta t.\end{aligned}$$

Preuve. D'après les propriétés de la dérivée on a

$$(fg)^\Delta(t) = f(\sigma(t))\,g^\Delta(t) + f^\Delta(t)\,g(t),$$

d'où

$$f(\sigma(t))\,g^\Delta(t) = (fg)^\Delta(t) - f^\Delta(t)\,g(t), \tag{1.7}$$

intégrons les deux membres de l'égalité (1.7) entre a et b, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\sigma(t))\, g^{\Delta}(t)\,\Delta t &= \int_a^b (fg)^{\Delta}(t)\,\Delta t - \int_a^b f^{\Delta}(t)\, g(t)\,\Delta t \\ &= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^{\Delta}(t)\, g(t)\,\Delta t.\end{aligned}$$

■

Définition 1.13 *Soit $p : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$, p est dit régressive si elle vérifie :*

$$1 + \mu(t)\, p(t) \neq 0.$$

Remarque 1.8 *Pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, l'ensemble des fonctions régressives et rd-continues est noté par $\Re$.*

Définition 1.14 *L'ensemble de toutes les fonctions régressives positives est définie par :*

$$\Re^{+} = \left\{p \in \Re : 1 + \mu(t)\, p(t) > 0,\ \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^{K}\right\}. \tag{1.8}$$

Définition 1.15 *Pour $h > 0$, on définit la transformation cylindrique :*

$\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$, *par :*

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h}\log(1 + zh),$$

où log est le logarithme principale,

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_h &= \left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < \operatorname{Im}(z) \leq \frac{\pi}{h}\right\}, \\ \mathbb{C}_h &= \left\{z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{1}{h}\right\}.\end{aligned}$$

Pour $h = 0$, on définit : $\xi_0(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Théorème 1.5 *On suppose que $p \in \Re$ et $t_0 \in \mathbb{T}$ un point fixé, alors le problème à valeur initiale*

$$y^{\Delta}(t) = p(t)\, y(t)\,, y(t_0) = 1, \tag{1.9}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{T}$, donnée par

$$y(t) = e_p(t, t_0)\,,$$

avec

$$e_p(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right).$$

Remarque 1.9 *Il est clair que*

$$e_p(\sigma(t), t_0) = (1 + \mu(t)\, p(t))\, e_p(t, t_0)\,. \tag{1.10}$$

Remarque 1.10 *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la fonction exponentielle est donnée par :*

$$e_p(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,\Delta\tau\right)$$

où $t, t_0 \in \mathbb{R}$ et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Remarque 1.11 *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, la fonction exponentielle est donnée par :*

$$e_p(t, t_0) = \prod_{\tau=t_0}^{\tau=t} [1 + p(\tau)]\,,$$

où $t, t_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 < t$ et, $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est une suite vérifie

$$p(t) \neq -1 \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Théorème 1.6 *Soit $a \in \mathbb{T}^k, b \in \mathbb{T}$ et $L : \mathbb{T} \times \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ est continue en (t, t), pour $t \in \mathbb{T}^k$, $t > a$ et $L^{\Delta}(t, .)$ est rd-continue dans $[a, \sigma(t)]$, on suppose que pour tout $\varepsilon > 0, \exists U$, un voisinage de t indépendant de $\tau \in [a, \sigma(t)]$ tel que :*

$$\left|L(\sigma(t),\tau) - L(s,\tau) - L^{\Delta}(t,\tau)(\sigma(t)-s)\right| \leq \varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|, \qquad \forall s \in U.$$

Où f^{Δ} dénote la dérivée de f par rapport à la $1^{ière}$ variable alors on a :

$$g(t) = \int_a^t L(t,\tau)\,\Delta\tau \Rightarrow g^{\Delta}(t) = \int_a^t L^{\Delta}(t,\tau)\,\Delta\tau + L(\sigma(t),\tau),$$

et

$$h(t) = \int_t^b L(t,\tau)\,\Delta\tau \Rightarrow h^{\Delta}(t) = \int_t^b L^{\Delta}(t,\tau)\,\Delta\tau - L(\sigma(t),\tau).$$

Preuve. On a

$$g(t) = \int_a^t L(t,\tau)\,\Delta\tau, \quad g^{\Delta}(t) = \frac{g(\sigma(t)) - g(t)}{\mu(t)},$$

ce qui donne

$$g^{\Delta}(t) = \frac{1}{\mu(t)}\int_a^{\sigma(t)} L(\sigma(t),\tau)\,\Delta\tau - \frac{1}{\mu(t)}\int_a^t L(t,\tau)\,\Delta\tau. \tag{1.11}$$

D'autre part on a :

$$L^{\Delta}(t,\tau) = \frac{L(\sigma(t),\tau) - L(t,\tau)}{\mu(t)},$$

d'où

$$L(\sigma(t),\tau) = \mu(t)\,L^{\Delta}(t,\tau) + L(t,\tau). \tag{1.12}$$

Remplaçons (1.12) dans l'équation (1.11), on obtient

$$
\begin{aligned}
g^{\Delta}(t) &= \int_{a}^{\sigma(t)} \left(L(t,\tau) + \frac{L(t,\tau)}{\mu(t)} \right) \Delta\tau - \frac{1}{\mu(t)} \int_{a}^{t} L(t,\tau)\,\Delta\tau \\
&= \int_{a}^{\sigma(t)} L(t,\tau)\,\Delta\tau + \int_{a}^{\sigma(t)} \frac{L(t,\tau)}{\mu(t)} \Delta\tau + \int_{t}^{a} \frac{L(t,\tau)}{\mu(t)} \Delta\tau \\
&= \int_{a}^{t} L^{\Delta}(t,\tau)\,\Delta\tau + \int_{a}^{\sigma(t)} L^{\Delta}(t,\tau) + \frac{1}{\mu(t)} \int_{t}^{\sigma(t)} L(t,\tau)\,\Delta\tau,
\end{aligned}
$$

et comme

$$
\int_{t}^{\sigma(t)} L(\tau)\,\Delta\tau = \mu(t)\,L(t),
$$

donc on a

$$
g^{\Delta}(t) = \int_{a}^{t} L^{\Delta}(t,\tau)\,\Delta\tau + \mu(t)\,L^{\Delta}(t,t) + L(t,t),
$$

ainsi

$$
g^{\Delta}(t) = \int_{a}^{t} L^{\Delta}(t,\tau)\,\Delta\tau + L(\sigma(t),\tau). \tag{1.13}
$$

■

Théorème 1.7 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ $\Delta-$différentiable dans $\mathbb{T}^k$, alors $f \circ g$ est $\Delta-$différentiable et on a :*

$$
(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_{0}^{1} f'\left(g(t) + h\mu(t)\,g^{\Delta}(t)\right) dh \right\} .g^{\Delta}(t), \quad t \in \mathbb{T}^k.
$$

1.4 Quelques inégalités importantes

Dans cette section, nous présentons quelques lemmes et définitions utiles dans le deuxième chapitre .

On commence par citer un résultat considéré comme un outil de base dans l'étude des inégalités de type Gronwall, il est donné par le lemme suivant :

Lemme 1.1 *(Comparaison) :*

On suppose que $x, b \in C_{rd}$, $a \in \Re^{+}$. Si

$$x^{\Delta}(t) \leq a(t)\, x(t) + b(t), \quad t \geq t_0, \quad t \in \mathbb{T}^{k}. \tag{1.14}$$

Alors,

$$x(t) \leq x(t_0)\, e_a(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} e_a(t, \sigma(s))\, b(s)\, \Delta s, t \geq t_0, \quad t \in \mathbb{T}^{k}. \tag{1.15}$$

Ce dernier résultat est utille pour les résultats du prochain chapitre , il est donné par le théorème suivant

Lemme 1.2 [3] *Soient $u(t), a(t), b(t) \in C_{rd}$, tel que $b \geq 0$. Alors*

$$u(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)u(s)\Delta s, t \in \mathbb{T}^{k},$$

implque

$$u(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^{t} a(s)b(s)e_b(t, \sigma(s))\Delta s, t \in \mathbb{T}^{k}, \tag{1.16}$$

Définition 1.16 [16]*Soit g une fonction continue positive et non décroissante définie sur $\mathbb{R}^{+}$, g est dite de classe $\mathcal{S}$, si elle vérifie*

$$\frac{1}{a}g(x) \leq g\left(\frac{x}{a}\right) \text{ pour tout } x \geq 0 \text{ et } a \geq 1. \tag{1.17}$$

Remarque 1.12 *Pour une brève discussion sur cette classe S de fonctions, le lecteur est invité à consulter* [4, *Sect.*4].

Définition 1.17 *La fonction $\omega(u)$ est dite subadditive, si elle satisfait*

$$\omega(u+v) \leq \omega(u) + \omega(v) \quad pour\ u, v \geq 0. \tag{1.18}$$

Définition 1.18 *La fonction $\omega(u)$ est dite submultiplicative, si elle satisfait*

$$\omega(uv) \leq \omega(u)\omega(v) \quad pour\ u, v \geq 0. \tag{1.19}$$

Chapitre 2

Sur quelques Généralisations des inégalités intégrales de type Gronwall-Bihari aux échelles de temps

Dans ce chapitre nous énoncons les résultats du travail [16].

On commence par énoncer un Lemme très utile pour les démonstrations des prochains Théorèmes.

Lemme 2.1 Soit $a, b \in \mathbb{T}$,on considère une fonction $\Delta-$différentiable $r : [a,b]_{\mathbb{T}} \rightarrow]0, \infty[$ avec $r^{\Delta}(t) \geq 0$ sur $[a,b]_{\mathbb{T}^k}$. On définit

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{g(s)}, \ x > 0, \ x_0 > 0, \tag{2.1}$$

où $g \in C(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0^+)$ est une fonction positive et croissante sur $]0, \infty[$. Alors, pour chaque $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ on a

$$G(r(t)) \leq G(r(a)) + \int_a^t \frac{r^{\Delta}(\tau)}{g(r(\tau))} \Delta\tau. \tag{2.2}$$

Preuve. Comme g est positive et croissante sur $]0,\infty[$, On a,

$$\begin{aligned}
r(t) &\leq r(t)+h\mu(t)\,r^{\Delta}(t), &(2.3)\\
g(r(t)) &\leq g\left(r(t)+h\mu(t)\,r^{\Delta}(t)\right),\\
\frac{1}{g\left(r(t)+h\mu(t)\,r^{\Delta}(t)\right)} &\leq \frac{1}{g(r(t))},\\
\int_0^1 \frac{1}{g\left(r(t)+h\mu(t)\,r^{\Delta}(t)\right)}dh &\leq \int_0^1 \frac{1}{g(r(t))}dh=\frac{1}{g(r(t))}\\
\left\{\int_0^1 \frac{1}{g\left(r(t)+h\mu(t)\,r^{\Delta}(t)\right)}dh\right\}r^{\Delta}(t) &\leq \frac{r^{\Delta}(t)}{g(r(t))},
\end{aligned}$$

pour tout $t\in[a,b]_{\mathbb{T}^k}$ et $h\in[0,1]$ .La Δ-intégration de la dernière inégalité dans (2.3) de a à t en tenant compte du théorème 1.7,donne

$$\begin{aligned}
(G\circ r)^{\Delta}(t) &= \left\{\int_0^1 G'\left(r(t)+h\mu(t)\,r^{\Delta}(t)\right)dh\right\}r^{\Delta}(t)\\
&= \left\{\int_0^1 \frac{1}{g\left(r(t)+h\mu(t)\,r^{\Delta}(t)\right)}dh\right\}r^{\Delta}(t),
\end{aligned}$$

ce qui conduit au résultat souhaité, sauf au point $t=b$ dans le cas où $\rho(b)<b$. Pour traiter ce cas, nous avons juste besoin d'intégrer la dernière inégalité de (2.3) de a à b et utiliser le Théorème 1.4 .

Théorème 2.1 Soient $u(t)$, $f(t)$, des fonctions rd-continues positives dans les échelles de temps $\mathbb{T}_*:=[a,b]_{\mathbb{T}}$ et $\mathbb{T}_*^k$, respectivement. Soit $k(t,s)$ une fonction définie comme dans dans le théorème 1.6, avec $k(t,s)\geq 0$ et $k^{\Delta}(t,s)\geq 0$ pour chaque $t,s\in\mathbb{T}_*$ avec $s\leq t$ (On suppose que k n'est pas identiquement nul sur $\mathbb{T}_*^k\times\mathbb{T}_*^{k^2}$). Soit $\Phi\in C\left(\mathbb{R}_0^+,\mathbb{R}_0^+\right)$ une fonction croissante, sous additive et sous multiplicative, tel que $\Phi(u)>0$ pour $u>0$ et soit $W\in C\left(\mathbb{R}_0^+,\mathbb{R}_0^+\right)$ une fonction croissante de telle sorte que pour $u>0$ on a $W(u)>0$. Supposons que $a(t)$ est une fonction positive, rd-continue et croissante pour tout $t\in\mathbb{T}_*$. Si

$$u(t)\leq a(t)+\int_a^t f(s)u(s)\Delta s+\int_a^t f(s)W\left(\int_a^s k(s,\tau)\Phi(u(\tau))\Delta\tau\right)\Delta s, \tag{2.4}$$

pour $a \leq \tau \leq s \leq t \leq b, \tau, s, t \in \mathbb{T}_*$, alors pour tout $t \in \mathbb{T}_*$ satisfaisant

$$\Psi(\zeta) + \int_a^{\rho(t)} k(\rho(t), s)\Phi(p(s))\Phi\left(\int_a^s f(\tau)\Delta\tau\right)\Delta s \in Dom\left(\Psi^{-1}\right)$$

on a

$$\begin{aligned} u(t) \leq\ & p(t)a(t) + \\ & p(t)\int_a^t f(s)W\left[\Psi^{-1}\left(\Psi(\zeta) + \int_a^s k(s,\tau)\Phi(p(\tau))\Phi\left(\int_a^\tau f(\theta)\Delta\theta\right)\Delta\tau\right)\right]\Delta s, \end{aligned} \tag{2.5}$$

où

$$p(t) = 1 + \int_a^t f(s)e_f(t, \sigma(s))\Delta s, \tag{2.6}$$

$$\zeta = \int_a^{\rho(b)} k(\rho(b), s)\Phi(p(s)a(s))\Delta s,$$

$$\Psi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\Phi(W(s))} ds, \; x > 0, x_0 > 0, \tag{2.7}$$

et Ψ^{-1} est l'inverse de Ψ.

Preuve. Définissons la fonction $z(t)$ par

$$z(t) = a(t) + \int_a^t f(s)W\left(\int_a^s k(s,\tau)\Phi\left(u(\tau)\right)\Delta\tau\right)\Delta s. \tag{2.8}$$

Alors, (2.4) peut être estimé comme

$$u(t) \leq z(t) + \int_a^t f(s)u(s)\Delta s.$$

Il est clair que $z(t)$ est rd-continue en tout $t \in \mathbb{T}_*$. En utilisant le *Lemme 1.2*, on obtient

$$u(t) \leq z(t) + \int_a^t f(s)z(s)e_f(t, \sigma(s)) \Delta s.$$

De plus, il est facile de voir que $z(t)$ est croissante en $t \in \mathbb{T}_*$. On a

$$u(t) \leq z(t)p(t), \tag{2.9}$$

Où $p(t)$ est défini par (2.6).On définit $v(t)$ comme suit

$$v(t) = \int_a^t k(t,s)\Phi(u(s)) \Delta s, t \in \mathbb{T}_*^k.$$

On utilise (2.9), et les propriétés de Φ, on obtient

$$\begin{aligned}
v(t) &\leq \int_a^t k(t,s)\Phi\left[p(s)\left(a(s) + \int_a^s f(\tau)W(v(\tau))\Delta\tau\right)\right]\Delta s \\
&\leq \int_a^t k(t,s)\Phi(p(s)a(s))\Delta s + \int_a^t k(t,s)\Phi\left(p(s)\int_a^s f(\tau)W(v(\tau))\Delta\tau\right)\Delta s \\
&\leq \int_a^{\rho(b)} k(\rho(b),s)\Phi(p(s)a(s))\Delta s + \int_a^t k(t,s)\Phi\left(p(s)\int_a^s f(\tau)\Delta\tau\right)\Phi(W(v(s)))\Delta s \\
&= \zeta + \int_a^t k(t,s)\Phi\left(p(s)\int_a^s f(\tau)\Delta\tau\right)\Phi(W(v(s)))\Delta s.
\end{aligned}$$

Définissons la fonction $r(t)$ sur $\mathbb{T}_*^k$ par

$$r(t) = \zeta + \int_a^t k(t,s)\Phi\left(p(s)\int_a^s f(\tau)\Delta\tau\right)\Phi(W(v(s)))\Delta s.$$

Comme p et a sont des fonctions positives, alors $\Phi(p(s)a(s)) > 0$ pour tout $s \in \mathbb{T}_*$. Puisque $k^{\Delta_1} \geq 0$, nous devons avoir $\zeta > 0$, Par conséquent $r(t)$ est une fonction positive sur $\mathbb{T}_*^k$. de plus elle est Δ dérivable sur $\mathbb{T}_*^{k^2}$, donc

$$
\begin{aligned}
r^{\Delta}(t) &= k(\sigma(t), t)\,\Phi\left(p(s)\int_a^t f(\tau)\Delta\tau\right)\Phi(W(v(t))) + \\
&\quad \int_a^t k^{\Delta_1}(t,s)\Phi\left(p(s)\int_a^s f(\tau)\Delta\tau\right)\Phi(W(v(s)))\,\Delta s \\
&\leq \Phi(W(r(s))) \\
&\quad \left[k(\sigma(t), t)\,\Phi\left(p(s)\int_a^t f(\tau)\Delta\tau\right) + \int_a^t k^{\Delta_1}(t,s)\Phi\left(p(s)\int_a^s f(\tau)\Delta\tau\right)\Delta s\right].
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

En divisant les deux membres de l'inégalité (2.10) par $\Phi(W(r(s)))$, on obtient

$$
\frac{r^{\Delta}(t)}{\Phi(W(r(s)))} \leq \left[\int_a^t k(t,s)\Phi\left(p(s)\int_a^s f(\tau)\Delta\tau\right)\Delta s\right]^{\Delta}.
$$

Considérons la fonction Ψ défini par (2.7). La $\Delta-$ intégration de cette dernière inégalité de a à t et l' utilisation du *lemme* 2.1 nous permet d'avoir l'inégalité suivante

$$
\Psi(r(t)) \leq \Psi(r(a)) + \int_a^t k(t,s)\Phi\left(p(s)\int_a^s f(\tau)\Delta\tau\right)\Delta s,
$$

d'où il résulte que

$$
r(t) \leq \Psi^{-1}\left(\Psi(\zeta) + \int_a^t k(t,s)\Phi(p(s))\,\Phi\left(\left(\int_a^s f(\tau)\Delta\tau\right)\Delta s\right), t \in \mathbb{T}_*^k. \tag{2.11}
$$

Combinant (2.11), (2.9) et (2.8), on obtient l'inégalité désirée dans (2.5).

Remarque 2.1 *Si on suppose $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, on obtient le résultat suivant :*

Corollaire 2.1 Soient $u(t)$, $f(t)$ sont des fonctions positives sur $\mathbb{T}_* := [a,b]_{\mathbb{Z}}$ et $[a, b-1]_{\mathbb{Z}}$, respectivement. Soit $K(t,s)$ une fonction définie comme dans le *Théorème*1.6 de telle sorte que $K(t,s)$ et $K^{\Delta_1}(t,s) = k(\sigma(t), s) - k(t,s)$ sont positives pour tout $t, s \in \mathbb{T}_*$ avec $s \leq t$ pour lequel elles sont définies (On suppose que k n'est pas identiquement nul sur $[a, b-1]_{\mathbb{T}_*} \times [a, b-2]_{\mathbb{T}_*}$). Soit $\Phi \in C(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0^+)$ une fonction croissante, sous additive et sous multiplicative tel que $\Phi(u) > 0$ pour $u > 0$ et soit $W \in C(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0^+)$ une fonction croissante tel que pour $u > 0$ on a $W(u) > 0$. Supposons que $a(t)$ est une fonction positive et croissante pour $t \in \mathbb{T}_*$. Si

$$u(t) \leq a(t) + \sum_{s=a}^{t-1} f(s)u(s) + \sum_{s=a}^{t-1} f(s)W\left(\sum_{\tau=a}^{s-1} k(s,\tau)\Phi(u(\tau))\right),$$

pour $a \leq \tau \leq s \leq t \leq b, \tau, s, t \in \mathbb{T}_*$, alors pour tout $t \in \mathbb{T}_*$ satisfaisant

$$\Psi(\zeta) + \sum_{s=a}^{t-2} k(t-1,s)\Phi(p(s))\,\Phi\left(\sum_{\tau=a}^{s-1} f(\tau)\right) \in Dom\left(\Psi^{-1}\right)$$

on a

$$u(t) \leq p(t)\left\{a(t) + \sum_{s=a}^{t-1} f(s)W\left[\Psi^{-1}\left(\Psi(\zeta) + \sum_{\tau=a}^{s-1} k(s,\tau)\Phi(p(\tau))\,\Phi\left(\sum_{\theta=a}^{\tau-1} f(\theta)\right)\right)\right]\right\},$$

où

$$\begin{aligned} p(t) &= 1 + \sum_{s=a}^{t-1} f(s)e_f(t, s+1), \\ \zeta &= \sum_{s=a}^{b-1} k(b-1,s)\Phi(p(s)a(s)), \\ \Psi(x) &= \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\Phi(W(s))} ds, x > 0, x_0 > 0, \end{aligned}$$

et Ψ^{-1} est l'inverse deΨ.

Pour le cas particulier $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, le Théorème qui suit généralise le résultat obtenu par Oguntuase dans $[19, Th.2.3, 2.9]$.

Théorème 2.2 Supposons que $u(t)$ est une fonction positive, rd-continue sur l' échelles de temps $\mathbb{T}_* = [a, b]_{\mathbb{T}}$ et soient $h(t)$, $f(t)$ sont des fonctions positives, rd-continues sur l' échelle de temps $\mathbb{T}_*^k$. Supposons aussi que $b(t)$ est une fonction positive, rd-continue et n'est pas identiquement nul sur $\mathbb{T}_*^{k^2}$. Soit $\Phi(u)$, $W(u)$ et $a(t)$ les fonctions définis dans le Théorème 2.1. Si

$$u(t) \leq a(t) + \int_a^t f(s)u(s)\Delta s + \int_a^t f(s)h(s)W\left(\int_a^s b(\tau)\Phi(u(\tau))\Delta\tau\right)\Delta s,$$

pour $a \leq \tau \leq s \leq t \leq b, \tau, s, t \in \mathbb{T}_*$, alors pour tout $t \in \mathbb{T}_*$ satisfaisant

$$\Psi(\zeta) + \int_a^{p(t)} b(\tau)\Phi(p(\tau))\Phi\left(\int_a^\tau f(\theta)h(\theta)\Delta\theta\right)\Delta\tau \in Dom\left(\Psi^{-1}\right)$$

on a

$$u(t) \leq p(t)a(t)+p(t)\int_a^t f(s)h(s)W\left[\Psi^{-1}\left(\Psi(\xi) + \int_a^s b(\tau)\Phi(p(\tau))\Phi\left(\int_a^\tau f(\theta)h(\theta)\Delta\theta\right)\Delta\tau\right)\right]\Delta s,$$

où $p(t)$ est donnée par (2.6), Ψ est donnée par (2.7), et

$$\zeta = \int_a^{p(b)} b(s)\Phi(p(s)a(s))\Delta s.$$

Preuve. La preuve est similaire à celle du *théorème*2.1.

Dans la suite de cette section, nous introduisons les fonctions de classe S.

Théorème 2.3 Soient $u(t)$, $f(t)$, $k(t,s)$, Φ, W sont les fonctions définis dans le Théorème 2.1 et supposons que $g \in S$ et que $a(t)$ est une fonction positive, rd-continue et croissante. Si

$$u(t) \leq a(t) + \int_a^t f(s)g(u(s))\Delta s + \int_a^t f(s)W\left(\int_a^s k(s,\tau)\Phi(u(\tau))\Delta\tau\right)\Delta s, \qquad (2.12)$$

pour $a \leq \tau \leq s \leq t \leq b, \tau, s, t \in \mathbb{T}_*$, alors pour tout $t \in \mathbb{T}_*$ satisfaisant

$$G(1) + \int_a^t f(\tau)\Delta\tau \in Dom\left(G^{-1}\right)$$

et

$$\Psi\left(\bar{\zeta}\right)+\int_a^{\rho(t)} k(\rho(t),\tau)\Phi(q(\tau))\Phi\left(\int_a^{\tau} f(\theta)\Delta\theta\right)\Delta\tau \in Dom\left(\Psi^{-1}\right),$$

on a

$$\begin{aligned} u(t) \;\le\;& q(t)max\left\{a(t),1\right\}+ \\ & q(t)\int_a^t f(s)W\left[\Psi^{-1}\left(\Psi\left(\bar{\zeta}\right)+\int_a^{s} k(s,\tau)\Phi(q(\tau))\Phi\left(\int_a^{\tau} f(\theta)\Delta\theta\right)\Delta\tau\right)\right]\Delta s, \end{aligned}$$

où Ψ est définie par (2.7) et

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_\delta^x \frac{ds}{g(s)}, x>0, \delta>0, \qquad (2.13)\\ q(t) &= G^{-1}\left(G(1)+\int_a^t f(\tau)\Delta\tau\right), \\ \bar{\zeta} &= \int_a^{\rho(b)} k(\rho(b),s)\Phi\left(q(s)max\left\{a(s),1\right\}\right)\Delta s, \end{aligned}$$

et G^{-1} est la fonction inverse de G.

Preuve. Définissons la fonction $z(t)$ par

$$z(t)=max\{a(t),1\}+\int_a^t f(s)W\left(\int_a^s k(s,\tau)\Phi(u(\tau))\Delta\tau\right)\Delta s.$$

D' après (2.12), on a

$$u(t)\le z(t)+\int_a^t f(s)g(u(s))\Delta s.$$

Il est clair que $z(t)\ge 1$ est rd-continue et croissante. Puisque $g\in S$, on a

$$\frac{u(t)}{z(t)}\le 1+\int_a^t f(s)g\left(\frac{u(s)}{z(s)}\right)\Delta s,$$

d'où

$$x(t)\le 1+\int_a^t f(s)g(x(s))\Delta s, \qquad (2.14)$$

avec $x(t) = u(t)/z(t)$. Si nous désignons par $v(t)$ le côté à droite de l'inégalité (2.14), nous avons $v(a) = 1$ et

$$v^{\Delta}(t) = f(t)g(x(t)),$$

et puisque g est croissante, on conclut que

$$v^{\Delta}(t) \leq f(t)g(v(t)),$$

d'où

$$\frac{v^{\Delta}(t)}{g(v(t))} \leq f(t). \tag{2.15}$$

Comme $v^{\Delta}(t) \geq 0$, une $\Delta-$intégration de (2.15) de a à t et l' application du $lemme$2.1, nous permet d' obtenir

$$G(v(t)) \leq G(1) + \int_a^t f(\tau)\Delta\tau,$$

ce qui implique que

$$v(t) \leq G^{-1}\left(G(1) + \int_a^t f(\tau)\Delta\tau\right).$$

Nous venons de prouver que $x(t) \leq q(t)$ qui est équivalent à

$$u(t) \leq q(t)z(t).$$

En suivant les mêmes arguments que dans la démonstration du $Théorème$2.1, on obtient l'inégalité désirée.

Si on considère l'échelle de temps $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in Z\}$, où $h > 0$, Nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 2.2 Soit $a, b \in h\mathbb{Z}$, $h > 0$. Supposons que $u(t), f(t), k(t,s), \Phi$ et W sont définis comme dans le Théorème 2.1 et supposons que $g \in S$ et que $a(t)$ est une fonction positive et croissante. Si

$$u(t) \le a(t) + \sum_{s\in[a,t)_{\mathbb{T}_*}} f(s)g(u(s))h + \sum_{s\in[a,t)_{\mathbb{T}_*}} f(s)W\left(\sum_{\tau\in[a,s)_{\mathbb{T}_*}} k(s,\tau)\Phi(u(\tau))h\right)h.$$

pour $a \le \tau \le s \le t \le b, \tau, s, t \in \mathbb{T}_* = [a,b]_{h\mathbb{Z}}$, alors pour tout $t \in \mathbb{T}_*$ satisfaisant

$$G(1) + \sum_{\tau\in[a,t)_{\mathbb{T}_*}} f(\tau)h \in Dom\left(G^{-1}\right)$$

et

$$\Psi\left(\overline{\zeta}\right) + \sum_{\tau\in[a,t-h)_{\mathbb{T}_*}} k(t-h,\tau)\Phi(q(\tau))\Phi\left(\sum_{\theta\in[a,\tau)_{\mathbb{T}_*}} f(\theta)h\right)h \in Dom\left(\Psi^{-1}\right)$$

on a

$$u(t) \le q(t)\left\{\begin{array}{c} max\{a(t),1\}+ \\ \sum_{s\in[a,t)_{\mathbb{T}_*}} f(s)W\left[\Psi^{-1}\left(\Psi\left(\overline{\zeta}\right) + \sum_{\tau\in[a,s)_{\mathbb{T}_*}} k(s,\tau)\Phi(q(\tau))\Phi\left(\sum_{\theta\in[a,\tau)_{\mathbb{T}_*}} f(\theta)h\right)h\right)\right]h \end{array}\right\}$$

où Ψ est définie par (2.7),

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{\delta}^{x} \frac{ds}{g(s)}, x>0, \delta>0, \\ q(t) &= G^{-1}\left(G(1) + \sum_{\tau\in[a,t)_{\mathbb{T}_*}} f(\tau)h\right), \\ \overline{\zeta} &= \sum_{s\in[a,b-h)_{\mathbb{T}_*}} k(b-h,s)\Phi(q(s)max\{a(s),1\})h, \end{aligned}$$

et G^{-1}est la fonction inverse de G.

Théorème 2.4 Soient $u(t), f(t), b(t), h(t), \Phi$ et W sont définies comme dans le *Théorème* 2.2 et supposons que $g \in S$ et que $a(t)$ est une fonction positive, rd-continue et croissante. Si

$$u(t) \leq a(t) + \int_a^t f(s)g(u(s))\Delta s + \int_a^t f(s)h(s)W\left(\int_a^s b(\tau)\Phi(u(\tau))\Delta\tau\right)\Delta s,$$

pour $a \leq \tau \leq s \leq t \leq b, \tau, s, t \in \mathbb{T}_*$, alors pour tout $t \in \mathbb{T}_*$ satisfaisant

$$\Psi\left(\bar{\zeta}\right) + \int_a^{\rho(t)} b(\tau)\Phi(q(\tau))\Phi\left(\int_a^\tau f(\theta)h(\theta)\Delta\theta\right)\Delta\tau \in Dom\left(\Psi^{-1}\right),$$

on a

$$\begin{aligned} u(t) \leq\ & q(t)max\{a(t),1\} + \\ & q(t)\int_a^t f(s)h(s)W\left[\Psi^{-1}\left(\Psi\left(\bar{\zeta}\right) + \int_a^s b(\tau)\Phi(q(\tau))\Phi\left(\int_a^\tau f(\theta)h(\theta)\Delta\theta\right)\Delta\tau\right)\right]\Delta s, \end{aligned}$$

où Ψ est définie par (2.7), $q(t)$ est définie par (2.13) et

$$\bar{\zeta} = \int_a^{\rho(b)} b(s)\Phi(q(s)max\{a(s),1\})\Delta s,$$

Preuve. La preuve est similaire à celle du *Théorème* 2.3.

2.1 Application

Dans cette section, nous utilisons le résultat du *Théorème* 2.2 pour l'étude qualitative d'une équation dynamique non linéaire.

Exemple 2.1 *Soit $a, b \in \mathbb{T}$ et considérons le problème à valeur initiale*

$$u^\Delta(t) = F\left(t, u(t), \int_a^t K(t, u(s))\Delta s\right),\ t \in \mathbb{T}_*^k,\ u(a) = u_a, \tag{2.16}$$

où $\mathbb{T}_* = [a,b]_{\mathbb{T}}$, $u \in C_{rd}^1(\mathbb{T}_*)$, $F \in C_{rd}(\mathbb{T}_* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $k \in C_{rd}(\mathbb{T}_* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Dans ce qui suit, nous supposerons que le problème (2.16) a une solution unique, que nous noterons $u_*(t)$.

Théorème 2.5 Soient les fonctions F et K définis dans (2.16) satisfaisants les conditions

$$|K(t,u)| \leq h(t)\Phi(|u|), \tag{2.17}$$

$$|F(t,u,v)| \leq |u| + |v|, \tag{2.18}$$

où h et Φ sont définis comme dans le *Théorème* 2.2. Alors, pour tout $t \in \mathbb{T}_*$ tel que

$$\Psi(\zeta) + \int_a^{\rho(t)} \Phi(p(\tau))\Phi\left(\int_a^{\tau} h(\theta)\Delta\theta\right)\Delta\tau \in Dom\left(\Psi^{-1}\right),$$

on a l'estimation

$$|u_*(t)| \leq p(t)\left\{|u_a| + \int_a^t h(s)\,\Psi^{-1}\left(\Psi(\zeta) + \int_a^s \Phi(p(\tau))\Phi\left(\int_a^{\tau} h(\theta)\Delta\theta\right)\Delta\tau\right)\Delta s\right\}, \tag{2.19}$$

où

$$\begin{aligned} p(t) &= 1 + \int_a^t e_1(t,\sigma(s))\Delta s, \\ \zeta &= \int_a^{\rho(b)} \Phi(p(s)|u_a|)\Delta s, \\ \Psi(x) &= \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\Phi(s)} ds,\ x > 0,\ x_0 > 0. \end{aligned}$$

Preuve. Soit $u_*(t)$ la solution du problème (2.16). Alors, on a

$$u_*(t) = u_a + \int_a^t F\left(s, u_*(s), \int_a^s K(s, u_*(\tau))\Delta\tau\right)\Delta s. \tag{2.20}$$

Substituant (2.17) et (2.18) dans (2.20), on trouve

$$\begin{aligned} |u_*| &\leq |u_a| + \int_a^t \left(|u_*(s)| + \int_a^s |k(s, u_*(\tau))|\Delta\tau\right)\Delta s \\ &\leq |u_a| + \int_a^t \left(|u_*(s)| + h(s)\int_a^s \Phi(|u_*(\tau)|)\Delta\tau\right)\Delta s \end{aligned} \tag{2.21}$$

Une application appropriée du *théorème*2.2 à (2.21), avec $a(t) = |u_a|$, $f(t) = b(t) = 1$ et $W(u) = u$, donne (2.19).

Conclusion

Les inégalités traitées dans ce mémoire, nous permet d'étudier certaines classes d'équation différentielle non linéaire dont la solution ne peut être trouvé explicitement. Ces inégalités intégrales non linéaires à une variable de type Gronwall-Bihari , nous permettent d'établir les propriétés qualitatives les plus importantes des solutions des équations dynamiques ordinaires telle que l'estimation.

Bibliographie

[1] **R. Agarwal, M. Bohner, D. O'Regan and A. Peterson**, Dynamic equations on time scales : a survey, J. Comput. Appl. Math. 141 (2002), no. 1-2, 1–26.

[2] **R. Agarwal, M. Bohner and A. Peterson**, Inequalities on time scales : a survey, Math. Inequal. Appl. 4 (2001), no. 4, 535–557.

[3] **E. Akin-Bohner, M. Bohner and F. Akin**, Pachpatte inequalities on time scales, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 6 (2005), no. 1, Article 6, 23 pp. (electronic).

[4] **P. R. Beesack**, On some Gronwall-type integral inequalities in n independent variables, J. Math. Anal. Appl. 100 (1984), no. 2, 393–408.

[5] **B. Ben Nasser, K. Boukerrioua, and M. A. Hammami**, On the stability of perturbed time scale systems using integral inequalities. Appl. Sci. 16 (2014), 56–71.

[6] **B. Ben Nasser, K. Boukerrioua, and M. A. Hammami**, On stability and stabilization of perturbed time scale systems with Gronwall inequalities. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 11(3) (2015), 207-235.

[7] **M. Bohner and A. Peterson**, Dynamic equations on time scales, Birkh¨auser Boston, Boston, MA, 2001.

[8] **M. Bohner and A. Peterson**, Advances in dynamic equations on time scales, Birkh¨auser Boston, Boston, MA, 2003.

[9] **K.Boukerrioua, and A. Guezane-Lakoud**, Some nonlinear integral inequalities arising in differential equations. Electronic Journal of Differential Equations, 2008.

[10] **K.Boukerrioua**, Note on Some Nonlinear Integral Inequalities and Applications to Differential Equations. International Journal of Differential Equations, 2011.

[11] **K.Boukerrioua**, Note on some nonlinear integral inequalities in two independent variables on time scales and applications.Int.J. Open Problems Comput. Math, 5(3) (2012).

[12] **K.Boukerrioua**, Note on some nonlinear integral inequalities on time scales and applications to dynamic equations. Journal of Advanced Research in Applied Mathematics, 5(2)(2013).

[13] **S. Hilger**, Analysis on measure chains—a unified approach to continuous and discrete calculus, Results Math. 18 (1990), no. 1-2, 18–56.

[14] **S. Hilger**, Differential and difference calculus—unified!, Nonlinear Anal. 30 (1997), no. 5, 2683–2694.

[15] **Hugues Gilbert**, Thèse de doctorat,Théorèmes d'existence pour des systèmes d'équations différentielles et d'équations aux échelles de temps,2009.

[16] **R.A. Ferreira, D.F. Torres**, Generalizations of Gronwall-Bihari Inequalities on Time Scales, arxiv :0805.2673v1.2008.

[17] **Pachpatte,B.G.**, Inequalities for Differential and integral equation, Academic Press, New York, 1998.

[18] **S. A. Ozgöun, A. Zafer and B. Kaymakçalan**, Gronwall and Bihari type inequalities on time scales, in Advances in difference equations (Veszpr´em, 1995), 481–490, Gordon and Breach, Amsterdam, 1997.

[19] **J. A. Oguntuase**, On an inequality of Gronwall, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 2 (2001), no. 1, Article 9, 6 pp. (electronic).

[20] **F.-H. Wong, C.-C. Yeh and C.-H. Hong**, Gronwall inequalities on time scales, Math. Inequal. Appl. 9 (2006), no. 1, 75–86.