République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option: **Mathématiques appliquées**

Par: **Khalla Ilhem**

Intitulé

Existence et unicité de la solution d'un problème fractionnaire avec des conditions intégrales fractionnaire

Dirigé par : **Pr. Ellagoune Fateh**

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Debbar Rabah	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Sellami Nabil	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2016

Dédicaces

Je dédie cette thèse …

A mes très chers parents

Maman, vous m'avez mise au monde, et depuis vous n'avez pas cessé de me chérir, de m'encourager, de vous occuper de moi, de mettre à ma portée ce qu'il y'a de meilleur; vous n'avez épargné aucun effort pour me rendre heureuse.

Papa, vous m'avez toujours aimée, soutenue, conseillée. Vous avez été le premier à m'encourager à aller si loin dans les études, toujours vous avez été présent dans ma vie.

Alors aucune dédicace n'est assez forte, aucun mot n'est assez éloquent pour exprimer ce que je ressens.

A mes très chers frères : Ali Charaf e t Mohmed Amine

A mon fiancé : Othman Chettibi

Tout au long de l'élaboration de cette thèse, vous étiez présents, vous m'avez aidée, encouragée à travers elle, vous allez trouver dans ce travail l'expression de mon respect le plus profond et mon affection la plus sincère.

Puisse dieu vous accorder longue vie, santé et bonheur.

A ma très chère amie: Ghanya (Mouna).

En souvenir de notre sincère et profonde amitié et des moments agréables que nous avons passés ensemble à la résidence.

A mon beau père Lyamine Chettibi.
A ma belle sœur Samira et sa fille Rofaida et son fils Ahmed Othman.

A touts les membres de ma famille Que je ne suis pas cité, mais qui n'en demeurent pas moins chères.

☺ Khalla Ilhem ☺

Remerciements

Tous d'abord, je tiens à remercier Allah, le Tout Puissant, de m'avoir donnée la santé,
la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.
Je remercie du fond de mon cœur, mes parents qui m'ont soutenue, encouragée et
motivée tout au long de mes études.
Je remercie monsieur Ellaggoune Fateh qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et m'a
guidée de ses précieux conseils et suggestions.
De même je remercie Ms Debbar Rabeh et Ms Sellami bien voulu faire partie du jury.
Sans oublier Ms Guebbai Hamza, Ms Cahoui
Ms Debouche et Ms Dida
Et enfin j'adresse mes s'incères remerciements à mes frères mon fiancé, et à touts mes
amies.

Table des matières

Introduction

Les mathématiques sont l'art de donnée les choses trompantes des noms. La belle mystérieuse appellation (à première vue) "le calcul fractionnaire" est juste un de ces termes mal appropriés qui sont l'essence des mathématiques.

Qu'est ce qu'un calcul fractionnaire ?

Le calcul fractionnaire ne signifie pas le calcul des fractions, il ne signifie pas non plus une fraction de n'importe quel calcul différentiel, intégrale ou calcul des variations. Le calcul fractionnaire est un nom pour la théorie d'intégrales et de dérivées d'ordre arbitraire, qui unifient et généralisent les notions de différentiation d'ordre entier et d'intégration répétées $n - fois$.

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier constitue l'une des plus belles aventures de l'esprit humain dans laquelle se sont engagées plusieurs générations de mathématiciens et de physiciens. Elle s'étale de la fin du 17ème siècle jusqu'à nos jours. Le nombre de publications et de rencontres scientifiques dans la période récente qui lui sont dédiées témoigne de l'importance des problèmes que cette notion a soulevés, aussi bien théoriques qu'appliqués. On peut dire que c'est devenu une discipline à part entière. Les spécialistes s'accordent pour faire remonter le début de cette histoire à la fin de l'année 1695 quand Leibniz, dans une lettre à l'Hospital, voulut engager une ré‡exion sur une possible théorie de la dérivation non entière d'une fonction. Dans sa réponse, l'Hospital s'est intérrogé sur la signification qu'on pourrait donner à la dérivée d'ordre 1/2. En effet, 1/2 est à égale distance de l'ordre 0 qui est sensé désigner la continuité et l'ordre 1 sensé désigner la dérivabilité classique. La réponse de Leibniz contenait à peu près cette phrase : "...cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on pourra tirer des conséquences utiles". Il aura fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières "conséquences utiles".

Les premières travaux dux à Liouville entre 1832 et 1837. Indépendamment, Rimann propose une approche qui s'est avéré celle de Liouville essentiellement. Depuis, cette théorie porte le nom de la théorie de Rimman-Liouville. Plus tard d'autres théories connues celles de Grunwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo, ...

Les premières applications ont commencé à voir le jour dans les années 1990, en particulier en contrôle et en géométrie fractale. Les ingénieurs ont trouvé dans la dérivée fractionnaire un outil commode pour proposer des modèles qui décrivent d'une façon plus précise les phénomènes physiques.

Au cours des dernières années un intérêt considérable est attribué aux applications des dérivées fractionnaires (d'ordre non-entier) dans le champ des interdisciplinaires beaucoup des systèmes peuvent être d'écrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire, Par exemple

– La dérivée d'ordre $1/2$ s'introduit naturellement quand on cherche à calculer un flux de chaleur à l'aide de la loi de Fourier ainsi que les dérivées fractionnaires ont été utilisées largement dans le modèle mathématique de la viscoélasticité des matières.

– Les problèmes électromagnétiques peuvent être décrits en utilisant les équations intégro-différentiels fractionnaires.

– En biologie, il a été déduit que les membranes de cellules d'organisme biologique on la conductance électrique d'ordre fractionnaire.

– En économie, quelques systèmes de la finance peuvent afficher une dynamique d'ordre fractionnaire.

L'objectif principal de cette thèse est l'étude de l'existence et l'unicité de solutions de certaines équations différentielles fractionnaire par l'utilisation des théorèmes de point fixe.

Nous commençons par rappeler, dans le chapitre 1, le concept de dérivation et d'intégration fractionnaire et certaines de leurs principale propriétés.

Dans le deuxièume chapitre, nous étudions quelques théorèmes du point fixe.

Dans le dernier chapitre, nous établissons des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de solutions pour un système d'équations différentielles non linéaires fractionnaires avec des conditions intégrales fractionnaires.

Chapitre 1

La dérivation fractionnaire

Dans ce chapitre, nous introduisons les espaces fonctionnels, le concept de dérivation et d'intégration fractionnaire et certaines de leurs principales propriétés. Nous noterons α l'ordre de la dérivation $D^{(\alpha)}$, l'opérateur de dérivation non entière d'ordre α, et $I^{(\alpha)}$ l'opérateur d'intégration non entière d'ordre α.

Ainsi, serons vus, les fonctions Gamma et Beta, qui sont principalement utilisées en dérivation non entière avant de rappeler les différentes des opérateurs d'ordre non entière. Des exemples des fonctions usuelles pour clarifier les diverses approches de la dérivation non entière ainsi que leurs propriétés seront données.

1.1 Outils de base

1.1.1 Espaces topologiques et ensembles convexes

Soit E un espace topologique et $(\vartheta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'ouvert de E et Λ un ensemble de E.

Définition 1.1 *On dit que $(\vartheta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est un recouvrement ouvert de E si $E = \cup_{\lambda\in\Lambda}\vartheta_\lambda$,ce qui signifie que $\forall x \in E$, il existe au moins $\lambda_0 \in \lambda$ tel que $x \in \vartheta_{\lambda_0}$.*

Définition 1.2 *On dit que l'ensemble A est convexe de E si et seulement si*

$$\forall x, y \in A \quad et\ \forall t \in [0,1] \ alors\ tx + (1-t)y \in A$$

Lemme 1.1 *Si $\{C_i\}_{i\in I}$ sont des ensembles convexes de E, alors $\cap_{i\in I}$ est un ensemble convexe de E.*

Preuve. Si $\{C_i\}_{i\in I}$ est convexe de E, alors C_i est convexe $\forall i \in I$. Ainsi $\cap_{i\in I} C_i$ est convexe de E. ∎

Définition 1.3 *On dit que E est un espace topologique compacte si et seulement si quel que soit le recouvrement ouvert de E ; on peut extraire un recouvrement fini.*

Plus précisément, si $(\vartheta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est un recouvrement ouvert de E, il existe Λ_0 partie fini de Λ telle que $E = \cup_{\lambda\in\Lambda_0} \vartheta_\lambda$.

Définition 1.4 *Soit A une partie de E, on dit que A est relativement compacte dans E si $\bar{A}$ et compact.*

Définition 1.5 *Soit X un espace de Banach de norme $\|.\|$.et $f : X \to X$.*

On dit que f est lipchitzienne s'il existe $k \geq 0$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Soit $(E, d), (F, d)$ deux espaces métriques.

Notons par $\beta_0(E, F)$ l'ensemble des fonctions continues, bornées sur E et à valeurs dans F et H un sous ensemble de $\beta_0(E, F)$.

Définition 1.6 *Soit $x_0 \in E$, H est équicontinue en x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : d(x, x_0) \leq \alpha \Longrightarrow d'(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon, \forall f \in H$$

L'équicontinuité en x_0 signifie que α ne dépend pas du choix de f dans H :

Définition 1.7 *On dit que H est équicontinue sur E si H est équicontinue en tout point de E.*

1.1.2 Espaces des Fonctions Intégrables, Fonctions Continues et Absolument Continues

Espace $\mathbf{L}_p$

Les espaces L_p sont des espace de fonctions dont la puissance $p-i\grave{e}me$ de la fonction est intégrable, au sens de Lebesgue.

Soit $\Omega = [a, b](-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$.

Définition 1.8 *On note par $L_p(a, b)(1 \leq p \leq +\infty)$l'espace des fonctions f mesurables intégrables au sens de Lebesgue a valeurs réelles dans Ω telle que la norme $\|f\|_p < +\infty$, où*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p \leq +\infty$$

Et pour $p = +\infty$ on a

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Et $L^\infty(a, b)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur $(a; b)$

Proposition 1.1 $\left(L_p(a, b), \|.\|_{L_p(a,b)}\right)$ *est un espace de Banach.*

En particulier, si $p = 2$ alors :

$$L_2(a, b) = \left\{ f : \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}$$

$\left(L_2(a, b), \langle ., . \rangle_{L_2(a,b)}\right)$ *est un espace de Hilbert; où $\langle ., . \rangle_{L_2(a,b)}$ est le produit scalaire définit comme suite :*

$$\langle f, g \rangle_{L_2(a,b)} = \int_a^b f(t).g(t)dt \quad \forall f, g \in L_2(a, b)$$

Espaces $\mathbf{C}_{\gamma}^{n}[a, b]$

Définition 1.9 *[1] Soit $\Omega = [a, b]$ $(-\infty \leq a \leq b \leq \infty)$ et $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, ..\}$.*

Soit C^n l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à n continues sur Ω,muni de la norme

$$\|f\|_{C^n} = \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_C = \sum_{k=0}^{n} \max_{x \in \Omega} |f^{(k)}(x)|, n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $n = 0, C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme

$$\|f\|_{C_\gamma} = \max_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Définition 1.10 *[1] Soit $\Omega = [a; b]$ un intervalle fini et soit $\gamma \in \mathbb{C}(0 \leq \Re < 1)$ on introduit $C_\gamma[a, b]$ l'espace des fonctions f définies sur [a ; b] telle que la fonction $(x - a)^\gamma f(x) \in C[a, b]$, et*

$$\|f\|_{C_\gamma} = \|(x - a)^\gamma f(x)\|_C$$

L'espace $C_\gamma[a, b]$ est appelé l'espace des fonctions continues avec poids. En particulier, $C_0[a; b] = C[a; b]$.

Définition 1.11 *[1] On note par $C([a; b], \mathbb{R})$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de $[a, b]$ dans R muni de la norme*

$$\|y\|_\infty = \sup\{|y(t)| : t \in [a, b]\}$$

Définition 1.12 *[1] Pour $n \in \mathbb{N}$ on note par $C_\gamma^n[a, b]$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues différentiables à l'ordre $n - 1$ sur $[a; b]$ et ont la dérivée $f^n(x)$ d'ordre n, telle que $f^n(x) \in C_\gamma[a, b]$:*

$$C_\gamma^n[a, b] = \left\{ f : \|f\|_{C_\gamma^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \|f^{(k)}\|_C + \|f^{(n)}\|_C \right\}, \; C_\gamma^0[a, b] = C_\gamma[a, b]$$

Le lemme suivant nous donne une caractérisation pour l'espace $C_{\gamma}^{n}[a,b]$

Lemme 1.2 *[1] Soit $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ et $\gamma \in \mathbb{C}\,(0 \leq \Re(\gamma) < 1)$.Alors $C_{\gamma}^{n}[a,b]$ est l'espace de fonctions f qui peut être écrit sous la forme :*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-1}\varphi(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1}c_k(x-a)^k$$

Où $\varphi(t) \in C_{\gamma}[a,b]$ et $c_k(k=0,1,...,n-1)$ sont des constantes arbitraires tel que

$$\varphi(t) = f^{n}(t),\ \ c_k = \frac{f^{k}(a)}{k!},(k=0,1,...,n-1)$$

En particulier, si $\gamma = 0$ alors $C^{n}[a,b]$ est l'espace de fonctions f qui peut être écrit sous la forme précédente où $\varphi(t) \in C[a,b]$.

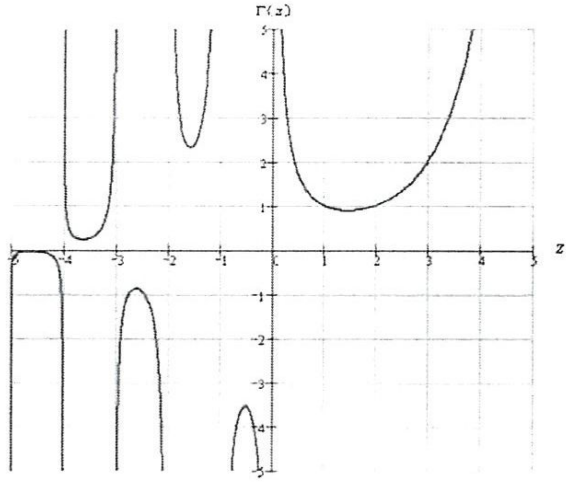
1.1.3 La fonction Gamma

Définition 1.13 *[2] [3] Soit z une variable réelle et strictement positive, la fonction gamma continue en z est définit par :*

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

Propriétés de la fonction Gamma

1. L'allure de la fonction gamma est donnée par la figure 1



2. Ainsi nous avons :

$\Gamma'(z) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z}\left(t^{z-1}\right) e^{-t} dt = \int_0^\infty t^{z-1} \ln(t)\, e^{-t} dt.$

$\Gamma''(z) = \int_0^\infty t^{z-1} (\ln(t))^2 e^{-t} dt.$

$\Gamma^{(n)} = \int_0^\infty t^{z-1} (\ln(t))^n e^{-t} dt.$

La relation de récurrence de la fonction $\Gamma(z)$ est obtenue par l'intégration par partie de la formule d'Euler. En effet, si on pose $u = e^{-t}$ et $dv = t^{z-1}dt$ on aura :

$$\Gamma(z) = \left[e^{-t}\frac{t^z}{z}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{t^z}{z} e^{-t} dt$$

Avec $\int_0^\infty \frac{t^z}{z} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$.

Ainsi, nous avons :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Cette relation de récurrence va permettre de définir $\Gamma(z)$ pour les valeurs négatives de z.

Si nous supposons $-1 < z < 0$ soit $0 < z+1 < 1$, $\Gamma(z+1)$ est bien définie par la formule d'Euler, mais pas $\Gamma(z)$.

Ainsi pour $-(n+1) < z < -n$ avec n entier positif ou nul, on aura :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

Les valeurs particulières de $\Gamma(z)$ sont :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}t^{1-1}dt = 1$$

La fonction gamma s'appelle aussi fonction factorielle généralisée :

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Pour $z = 1/2$,

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Pour $z = n + 1/2, n$ entier positif :

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

1.1.4 La fonction beta

Définition 1.14 *[4] La fonction Beta d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}t^{y-1}dt, \qquad (\mathrm{Re}\, x > 0,\ \mathrm{Re}\, y > 0)$$

1.1.5 La relation entre la fonction Beta et Gamma

La relation entre la fonction Beta d'Euler el la fonction Gamma d'Euler est donné par :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

1.1.6 La fonction Digamma

Définition 1.15 *La fonction $\psi(z)$ d'Euler aussi appelée fonction digamma est la dérivée logarithmique de $\Gamma(z)$:*

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

1.2 Intégration fractionnaire

1.2.1 Théorie de Rimann-Liouville

La dérivée fractionnaire au sens de Rimann-Liouville est la plus connue et répandue. Nous allons définir d'abord l'intégrale de Rimann-Liouville [5].

Intégrale d'ordre arbitraire

Ont peut commencer par examiner une formule (unique) qui donne des primitives successives d'une fonction continue par exemple.

Soit $f : [a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ (ou à valeurs vectorielles) une fonction continue, b pouvant être fini ou infini.

Une primitive de f est donnée par :

$$\left(I_a^1 f\right)(x) = \int_a^x f(t)dt$$

pour une primitive seconde on aura

$$\left(I_a^2 f\right)(x) = \int_a^x \left(\int_a^s f(t)dt\right) ds$$

le théorème de Fubini nous ramène cette intégrale double à une intégrale simple

$$\left(I_a^2 f\right)(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt$$

puis une itération donne

$$\left(I_a^n f\right)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$$

cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factorielle par la fonction Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$; Rimann rendu compte que le second membre pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 1.16 *si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, l'opérateur I^α définit sur $L^1[a,b]$ par*

$$\left(I_{a^+}^{(\alpha)} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt; \text{ telle que } a \in \mathbb{R}$$

pour $x \in [a,b]$ est appelé opérateur d'intégration fractionnaire (à gauche) de Rimann-Liouville d'ordre α. Et l'intégrale :

$$\left(I_{b^-}^{(\alpha)} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt, \text{ telle que } b \in \mathbb{R}$$

est appelée l'intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α.

$(a=0,\ b=+\infty)$ *Riemann,* $(a=-\infty,\ b=+\infty)$ *Liouville.*

Théorème 1.1 *[7] Pour $f \in \mathbb{C}[a,\ b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-liouville possède la propriété de semi-groupe*

$$I^{(\alpha)}[I^{(\beta)}f(x)] = I^{(\alpha+\beta)}f(x)\,, \ \textit{pour } \alpha > 0,\ \beta > 0$$

Preuve. La preuve découle directement de la définition

$$I^{(\alpha)}\left[I^{(\beta)}f(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\int_a^t \frac{f(u)}{(t-1)^{1-\beta}}du$$

or $f \in \mathbb{C}[a,\ b]$, d'après le théorème de Fubini, et par le changement de variable $t = u + s(x-u)$, on obtient

$$I^{(\alpha)}\left[I^{(\beta)}f(x)\right] = \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\beta}}du = I^{(\alpha+\beta)}f(x).$$

ou $B(\alpha,\beta)$ désigne la fonction Beta. ■

Propriétés

1. Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on a $I^{(\alpha)} \circ I^{(\beta)} = I^{(\beta)} \circ I^{(\alpha)} = I^{(\alpha+\beta)}$.
2. $I^{(0)}f(x) = I_d f(x) = f(x)$.
3. L'opérateur intégral I_0^{α} est linéaire.

Exemple 1.1 *Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^{\beta}$. Alors*

$$I_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)}(t-a)^{\beta}\,dt$$

pour évaluer cette intégrale on pose le changement $t = a + (x-a)\tau$, d'ou

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta}d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha} \end{aligned}$$

on voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 1$ ou on a

$$I_a^1(x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)}(x-a)^{\beta+1} = \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\beta+1}$$

1.3 Dérivées fractionnaires

Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire [6], nous allons siter les approches aui sont fréquemment utilisées dans les applications.

1.3.1 Approche de Grunwald-Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraire.

La dérivée d'ordre 1 d'une fonction f au point x est définie par :

$$D^{(1)}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

le calcul des dérivées successives de la fonction f donne la généralisation de cette formule à l'ordre n ou n est un nombre entier positif ou nul.

$$\begin{aligned} D^{(n)}f(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{j=0}^{n}(-1)\binom{n}{j}f(x-jh) \\ \text{avec :} \quad \binom{n}{j} &= \frac{n!}{(n-j)!j!} \end{aligned}$$

cette formule représente la dérivée d'ordre entier n si n est positif et l'intégrale répétée $-n$ fois si n est négatif.

En utilisant la fonction gamma telle que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ donnant $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout n entier positif ou nul, on peut écrire l'expression suivante généralisée aux entiers négatifs ou nul :

$$(-1)^j \binom{n}{j}) = \frac{-n(1-n)(2-n)\dots\dots\dots(j-n-1)}{j!}$$

en remplaçant n par un réel α non entier on aura :

$$\frac{-\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\dots\dots\dots(j-\alpha-1)}{j!} = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-\alpha)}$$

on définit donc la dérivée d'ordre non entier α telle que :

$$D^{(\alpha)}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-\alpha)}f(x-jh)$$

et

$$\begin{aligned} D^{(-\alpha)}f(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{-\alpha}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(j+\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha)}f(x-jh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Cette relation correspond à la définition de Grunwald-Letnikov.

Si f est de classe $\mathbb{C}^k$ alors, en utilisant l'intégration par parties, on obtient :

$$D^{(\alpha)}f(x) = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{k-\alpha-1}f^{(k)}(\tau)\,d\tau$$

et

$$D^{(-\alpha)}f(x) = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k+\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{k+\alpha-1}f^{(k)}(\tau)\,d\tau$$

Propriétés

Notons que, à travers cette définition, on voit déjà apparaitre l'une des propriétés de la dérivation d'ordre non entier. Elle prend en compte le passé global de la fonction et donc l'ensemble de ses dynamiques contrairement à la dérivée usuelle d'ordre $\alpha = 1$ et qui ne dépend que de ce qui se passe au voisinage immédiat du point de calcul.

Composition avec les dérivées d'ordre entier

Proposition 1.2 *pour n un nombre entier et α un nombre non entier on a :*

$$\frac{d^n}{dx^n}(D^{(\alpha)}f(x)) = D^{(n+\alpha)}f(x)$$

et

$$D^{(\alpha)}\left(\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right) = D^{(n+\alpha)}f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha-1}}{\Gamma(j-\alpha-n+1)}$$

Composition avec les dérivées d'ordre non entier

Proposition

1. Si $\beta < 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$D^{(\alpha)}(D^{(\beta)}f(x)) = D^{(\alpha+\beta)}f(x)$$

2. Si $0 \leq m-1 < \beta$, $\alpha < 0$ et $f^{(j)}(a) = 0$ pour $j = 0, 1, 2, ...m-2$

$$D^{(\alpha)}(D^{(\beta)}f(x)) = D^{(\alpha+\beta)}f(x)$$

3. Si $0 \leq m-1 < \beta < m$, $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $f^{(j)}(a) = 0$ pour $j = 0, 1, 2, ...r-2$:

$$D^{(\alpha)}(D^{(\beta)}f(x)) = D^{(\beta)}(D^{(\alpha)}f(x)) = D^{(\alpha+\beta)}f(x)$$

où n et m sont deux nombre entiers ; $r = max(m, n)$; et α, β non entiers

Exemple de calcul de la dérivée des fonctions au sens de Grunwald-Letnikov

La dérivée d'une fonction constante : La dérivée d'une fonction constante au sens de **Grunwald-Letnikov** n'est ni nulle ni constante. Pour un ordre de dérivation non entier α la dérivée de la fonction constante $f(x) = C$ est donnée par :

$$D^{(\alpha)}f(x) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{k-\alpha-1} f^{(k)}(\tau) d\tau$$

où

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} = 0$$

et

$$\frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{k-\alpha-1} f^{(k)}(\tau) d\tau = 0$$

alors :

$$D^{(\alpha)}f(x) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$$

La dérivée de la fonction $f(x) = (x-a)^p$ a l'ordre α, au sens de Grunwald-Letnikov, est :

$$D^{(\alpha)}(x-a)^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} \int_a^x (x-a)^{n-\alpha+1}(x-a)^{p-n} d\tau$$

en procédant au changement de variable en faisant $\tau = a + s(x-a)$ on a :

$$Pour\ \tau = a,\ s = 0$$

et

$$Pour\ \tau = x,\ s = 1$$

$$
\begin{aligned}
D^{(\alpha)}(x-a)^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}\int_0^1 (x-a)^{p-\alpha}ds \\
&= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)\Gamma(p-\alpha+1)}(x-a)^{p-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}(x-a)^{p-\alpha}
\end{aligned}
$$

pour

$$\alpha = \frac{1}{2}, a = 0, p = 1$$

on a :

$$D^{(\frac{1}{2})}(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

1.3.2 Approche de Riemann-Liouville

Soit f une fonction intégrable sur $[a, x]$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre α avec $(n-1 \leq \alpha < n)$ au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha-1}f(\tau)d\tau \\
&= \frac{d^n}{dt^n}(I^{n-\alpha}f(x))
\end{aligned}
$$

Remarque 1.1 *si f est de classe $\mathbb{C}^k$, alors on faisant des intégrations par parties et des différentiations répétées on obtient :*

$$D^{(\alpha)}f(x) = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{k-\alpha-1}f^{(k)}(\tau)\,d\tau$$

dans ce cas l'approche de Grunwald-Letnikov et l'approche de Rimann-Liouville sont équivalentes.

Propriétés

Composition avec l'intégrale non entière L'opérateur de différentiation au sens de Rimann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire :

$$D^{(\alpha)}(I^{(\alpha)}f(x)) = f(x)$$

et en générale

1. Si $\alpha - \beta < 0$ alors

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)}(I^{(\beta)}f(x)) &= D^{(\alpha-\beta)}f(x) \\ D^{(\alpha-\beta)}f(x) &= I^{(\beta-\alpha)}f(x) \end{aligned}$$

de plus, la différentiation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas :

$$D^{(-\alpha)}(D^{(\beta)}f(x)) = D^{(\beta-\alpha)}f(x) - \sum_{j=1}^{m}[D^{(\beta-j)}f(x)]_{x=a}\frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}$$

avec

$$m-1 \leq \beta < m$$

Composition avec les dérivées d'ordre entier Pour n un nombre entier et α non entier, on a :

$$\frac{d^n}{dx^n}(D^{(\alpha)}f(x)) = D^{(n+\alpha)}f(x)$$

et

$$D^{(\alpha)}(\frac{d^n}{dx^n}f(x)) = D^{(n+\alpha)}f(x) - \sum_{j\ 0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha-n}}{\Gamma(j-\alpha-n+1)}$$

on déduit que la differentiation non entiere et la différentiation entiére ne commutent que si

$$f^{(j)}(a) = 0 \text{ pour } j = 0, 1, 2, ..., n-1$$

Composition avec les dérivées d'ordre non entier Pour α et β deux nombre non entiers tel que :

$$n-1 \leq \alpha < n \quad \text{et} \quad m-1 \leq \beta < m$$

on a :

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)}(D^{(\beta)}f(x)) &= D^{(\alpha+\beta)}f(x) - \sum_{j=1}^{n}[D^{(\alpha-j)}f(x)]_{x=a}\frac{(x-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(-\alpha-j+1)} \\ D^{(\beta)}(D^{(\alpha)}f(x)) &= D^{(\beta+\alpha)}f(x) - \sum_{j=1}^{m}[D^{(\beta-j)}f(x)]_{x=a}\frac{(x-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(-\beta-j+1)} \end{aligned}$$

les opérateurs de dérivations fractionnaires $D^{(\alpha)}$ et $D^{(\beta)}$ ne commutent que si

$$\alpha = \beta \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n}[D^{(\alpha-j)}f(x)]_{x=a} = 0 \quad \text{pour } j = 1, 2, ..., n$$

et

$$\sum_{j=1}^{m}[D^{(\beta-j)}f(x)]_{x=a} = 0 \quad \text{pour } j = 1, 2, ..., m$$

Exemple 1.2 *comme premier exemple de dérivée non entière d'une fonction constante $f(t) = C$ au sens de Rimann-Liouville, nous avons :*

$$D^{(\alpha)}f(x) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$$

Exemple 1.3 *comme deuxième exemple de dérivée d'une fonction $f(x) = (x-a)^p$ au sens de Rimann-Liouville, nous avons :*

Soit α un nombre non entier $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $p > -1$

$$D^{(\alpha)}(x-a)^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^p d\tau$$

en faisant un changement de variable : $\tau = a + s(x-a)$

$$Pour\ \tau = a \qquad s = 0$$

$$Pour\ \tau = x \qquad s = 1$$

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)}(x-a)^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n+p-\alpha}\int_0^1(1-s)^{n-\alpha-1}s^p ds \\ &= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n+p-\alpha+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-\alpha+1)\Gamma(n+p-\alpha+1)}(x-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}(x-a)^{p-\alpha} \end{aligned}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2},\ \ a = 0,\ \ p = \frac{1}{2}$

$$D^{(\frac{1}{2})}(x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \Gamma(\frac{1}{2})$$

1.3.3 Approche de Caputo

Dans l'approche de Caputo, celui-ci a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire définie par :

$$\begin{aligned} D_a^{(\alpha)}f(x) &= I^{(n-\alpha)}D^{(n)}f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{f^n(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau \end{aligned}$$

avec n est un entier positif vérifiant l'inégalité $(n-1) < \alpha < n$.

La relation avec la dérivée de Rimman-liouville

La relation est effectuée de la façon suivante :

1. Si $f(x)$ est une fonction dont les dérivées d'ordre α de Rimann-Liouville et de Caputo existent et si α un nombre non entier positif ou nul tel que : $n-1 \leq \alpha < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la relation reliant la dérivée au sens de Caputo à celle de Rimann est

donnée par :

$$D^{(\alpha)}f(x)\mid_{Caputo}= D^{(\alpha)}f(x)\mid_{Riemann-Liouville} - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)}$$

2. Si $f^{(j)}(\alpha) = 0$ pour $j = 0, 1, 2, ..., n-1$ alors la dérivée d'ordre α de $f(x)$ au sens de Caputo est égale à celle de Riemann-Liouville.

Propriétés

La composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire En posant une fonction $f(x)$ continue, la composition est définie telle que :

$$D^{(\alpha)}\left(I^{(\alpha)}f(x)\right) = f(x)$$

et

$$I^{(\alpha)}(D^{(\alpha)}f(x)) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j}}{j!}$$

Exemple de calcul des dérivées au sens du Caputo

1. La dérivée d'une fonction constante $f(x) = C$ au sens du Caputo est nulle

$$D^{(\alpha)}f(x) = 0$$

2. La dérivée d'une fonction $f(x) = (x-a)^p$ au sens se Caputo est, si α un nombre non entier $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $p > n-1$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}(x-a)^{p-n}$$

d'où

$$D^{(\alpha)}(x-a)^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} \int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{p-n} d\tau$$

on faisant un changement de variable : $\tau = a + s(x-a)$

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)}(x-a)^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n-1)}(x-a)^{p-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{p-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n-1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n-1)\Gamma(p-\alpha-1)}(x-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}(x-a)^{p-\alpha} \end{aligned}$$

1.4 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires

1.4.1 Linéarité

La différentiation fractionnaire est une opération linéaire [7] :

$$D^\alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D^\alpha f(x) + \mu D^\alpha g(x)$$

où D^p désigne n'importe quelle approche de dérivation considérée dans ce mémoire.

1.4.2 Règle de Leibniz

Pour n entier on a :

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(x).g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

la généralisation de cette formule nous donne :

$$D^{\alpha}(f(x).g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(x) D^{\alpha-k} g(x) - R_n^{\alpha}(x)$$

où $n \geq \alpha + 1$ et

$$R_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{-\alpha-1} g(\tau) d\tau \int_{\tau}^{t} f^{(n+1)}(\xi)(\tau - \xi)^n d\xi$$

On a $\lim_{n \to +\infty} R_n^{\alpha}(x) = 0$.

Si f et g avec toutes ses dérivées sont continues dans $[a,\ x]$ la formule devient :

$$D^{\alpha}(f(x).g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(t) D^{\alpha-k} g(x)$$

D^{α} est la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et au sens de Riemann Liouville.

Chapitre 2

Quelques résultats de la théorie du point fixe

Le but de ce chapitre est l'étude de quelques théorèmes du point fixe. Ces théorèmes consistent à prouver l'existence et l'unicité d'un point fixe pour un certain opérateur. On s'intéresse au théorème du point fixe de Banach qui assure l'existence et l'unicité. Le théorème de Schauder n'assure que l'existence seulement. On présente différents théorèmes d'existence et d'unicité basés sur les théorèmes classiques qui affirment l'existence et l'unicité des points fixes de certains opérateurs. On utilisera des définitions et des notions connues de l'analyse fonctionnelle. On commence par présenter le théorème du point fixe de Brouwer, puis de Schauder qui détermine seulement l'existence d'un point fixe sans l'unicité.

2.1 Théorème de point fixe de Brouwer(1910)

Historique : Le mathématicien Luitzen Egbertus Jan Brouwer remarquait, en mélangeant son café au lait, que le point central de la surface du liquide, au milieu du tourbillon créé par le mouvement rotatoire de la cuillère, restait immobile. Il examina le problème de cette façon :

A tout moment, il y a un point de la surface qui n'a pas changé de place.

Nous allons examiner le problème en dimension n suivant Brouwer.

Soit

$$\bar{B}_m = \{x \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } \|x\| \leq 1\}$$

La boule unité fermée de R muni de la norme euclidienne usuelle, et $S^{m-1} = \partial \bar{B}_m$ la sphère qui est sa frontière.

Lemme 2.1 *Soit $T : A \longrightarrow B$ un opérateur continue et compact dans A ; où A est un ensemble fermé de l'espace normé B. Si l'équation*

$$x = Tx$$

Est résoluble approximativement dans A. alors il existe une solution dans A.

Preuve. Il existe une suite (x_n)dans$A$ avec $x_n - Tx_n \longrightarrow 0$.La suite $(y_n) = (Tx_n)$ admet une sous suite convergente dans A puisque $T(A)$ est relativement compact.

Si on note encore cette sous suite par (yn) pour simplifier la notation, alors $y_n = Tx_n \longrightarrow y \in B$ et que $x_n = y_n + (x_n - Tx_n) \longrightarrow y$.

Sachant que A est fermé, alors $y \longrightarrow A$. Ainsi d'après la continuité de $T, Tx_n \longrightarrow Ty$, pour laquelle on obtient que $y = Ty$. ■

Théorème 2.1 ***(Théorème de Brouwer)***

Toute application continue f de $\bar{B}_m$ dans $\bar{B}_m$ admet au moins un point fixe.

Preuve. On peut montrer, pour tout $\xi > 0$, qu'il existe un polynôme P avec $\|f - p\| < \xi$.

Utilisons la norme maximum sur $\bar{B}_m$ définie par

$$\|f\| = max\{|f| : x \in \bar{B}_m$$

Pour avoir $\|P\| \leq 1 + \xi$, alors $Q(x) = \frac{P(x)}{1+\xi}$ est une application régulière de $\bar{B}_m$ dans $\bar{B}_m$. Il est clair que $\|f - Q\| < 2\xi$.

Supposons maintenant que x est un point fixe de Q, alors x est un point fixe d'approximation de f vérifiant $|x - f(x)| = |Q(x) - f(x)| < 2\xi$. Ainsi, lemme précédent montre que f admet un point fixe si toute application régulière de $\bar{B}_m$ dans $\bar{B}_m$ admet un point fixe. ■

Définition 2.1 *On dit qu'un ensemble A d'un espace de Banach a la propriété de point fixe si toute application continue de A dans A admet un point fixe.*

Soit X, Y deux espaces de Banach ou bien, en générale deux espaces topologiques, et A et B sont deux ensembles tel que $A \in X$ et $B \in Y$.

Corollaire 2.1 *Si les ensembles A et B sont homéomorphe et A a la propriété de point fixe, alors B aussi a la propriété de point fixe.*

Corollaire 2.2 *Soit $A \in \mathbb{R}^n$ un ensemble compact. Et supposons qu'il existe une application continue $P : R^n \to A$ avec $P\backslash_A = Id_A$, (i.e) $P(x) = x, \forall x \in A$. Alors l'ensemble A a la propriété de point fixe.*

Preuve. Soit B A une boule fermée et $f : A \to A$ continue, alors $F = f \circ P$ est une application continue de B dans B. Ainsi d'après le théorème de point fixe de Brouwer, F admet un point fixe ζ, et comme $F(B) \subset A$, alors ce point fixe appartient à A, d'où $\zeta = f(\zeta)$. ■

2.2 Théorème du point fixe de type Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Le Théorème du Point fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Et nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.2 *[7] Soit K un sous ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach E et supposons $T : K \to K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.*

Preuve. Soit $T : K \to K$ une application continue. Comme K est compact, T est uniformément continue ; donc, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout x, $y \in K$,

On a

$$\|x - y\| \leq \delta \Longrightarrow \|T(x) - T(y)\| \leq \varepsilon$$

De plus de plus, il existe un ensemble fini de points $\{x_1, x_2, ..., x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon centrées δ aux x_i recouvrent K ; i.e. $K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta)$.

Si on désigne $L = Vec(T(x_j))_{1 \leq j \leq p}$ alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie. Pour$1 \leq j \leq p$, on définie la fonction continue $\psi_j : E \to R$ par :

$$\psi_j = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ & 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} \end{array} \right\},$$

Il est clair que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle en dehors. On a donc, pour tout $x \in K$, $\sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$, on peut définir sur K les fonctions continues positives φ_i par

$$\varphi_i = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{j=1}^{p} \psi_j(x)},$$

Pour les quelles on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$ pour tout $x \in k$.

Posant, pour $x \in K$,

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) T(x_j)$$

La fonction g est continue (car elle est la somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans K^* (car $g(x)$ est un barycentre des $T(x_j)$).

Si on prend la restriction $g_{/K^*} : K^* \to K^*$, (d'après théorème de Brouwer) g possède un point fixe $y \in K^*$.

De plus :

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) T(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) [T(y) - T(x_j)]. \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| < \delta$, et par suite $\|T(y) - T(x_j)\| < \varepsilon$.
a pour tout j

$$\begin{aligned} \|f(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) [T(y) - T(x_j)] \\ &\leq \sum_{j-1}^{p} \varepsilon \varphi_j(y) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour tout entier m,on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que $\|T(y_m) - y_m\| \leq 2^{-m}$. Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous suite(y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in K$. Alors Tétant continue, la suite $(T(y_{m_k}))$ converge vers $T(y^*)$, et on conclut que$T(y^*) = y^*$, i.e. y^* est un point fixe de T sur K. ■

Remarque 2.1 *De nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir des théorèmes précités, en réduisant le problème d'existence à un problème de point fixe citent à titre d'exemple le théorème de Peano.*

Théorème 2.3 *(théorème de Peano)*

Soit $(a;b)$*un point de* $R^n \times R^n$ *, et* $f(t;y)$ *une fonction continue dans le voisinage de* $(a;b)$*, alors le problème suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t,(t)) \\ y(a) = b \end{array} \right\}$$

Admet au moins une solution dans un voisinage de a.

Ici le problème revient à étudier l'existence d'un point fixe de l'opérateur $U : K \to K$ *définit par :*$Ux(t) = b + \int_a^t f(s, x(s))ds$,

où $K \subset E$ *compact et* E*l'espace des fonctions continues définies dans un certain voisinage de a.*

Théorème 2.4 *(Schauder 1930)*

Soit K *un convexe, fermé, borné et non vide,*$K \subset X$ *tel que*X *est un espace de Banach.Soit* $T : K \to K$ *une application compacte. Alors, T admet un point fixe.*

Théorème 2.5 *[8] (Théorème de l'alternative non linéaire de Leray Schauder)*

Soit X *un espace de Banach,* Ω *un sous ensemble ouvert borné de* X*, avec* $0 \in \Omega$ *et* $T : \bar{\Omega} \to X$ *une application compacte. Alors*

1) T *a un point fixe sur* $\bar{\Omega}$*, où bien*

2) Il existe $\lambda \in (0,1)$ *et* $u \in \partial\Omega$ *tel que :* $x = \lambda T(x)$.

On a vu plus haut deux théorèmes principaux de la théorie du point fixe à savoir le théorème de Schauder et le principe de l'application contractante de Banach, Krasnoselski a combiné ces deux théorèmes.

2.3 Théorème du point fixe de Krasnoselski

Théorème 2.6 *Soit* X *un espace de Banach et* D *un ensemble non vide de* X *fermé, borné et convexe.*U, V *Sont deux applications de* D *dans* X *telles que :*

U Est une contraction (de constante k) et V est compacte et continue.

$$Ux + Vy \in D \quad \forall\, x,\ y \in D$$

Alors il existe $x \in D$ tel que

$$Ux + Vx = x.$$

2.4 Théorème du point fixe du type Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver, qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante, s'applique aux espaces complets et qui possède de nombreuses applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existence de solution pour les équations différentielles ou les équations intégrales et l'étude de la convergence de certaines méthodes numériques.

2.4.1 Théorème de l'application contractante

Définition 2.2 *Soit $(M; d)$ un espace métrique complet et l'application $T : M \to M$, On dit que Test une application Lipchitzienne s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments x, y de M, l'inégalité*

$$d(T(x), T(y)) \leq k(d(x; y)\ ).$$

$k > 1$, l'application Test appelée non expansive.
$k < 1$, l'application Test appelée contraction.

Théorème 2.7 *(théorème du point fixe de Banach* (1922)*Soit (M, d) un espace métrique complet et soit $T : M \to M$ une application contractante avec la constante de contraction* *k, alors T a un unique point fixe $x \in M$. De plus on a*

$$\begin{aligned} si \quad x_0 \quad &\in \quad M \quad et \quad x_n = T(x_{n-1}) \\ \lim_{n\to\infty} x_n \quad &= \quad x \quad et \quad d(x_n, x) \leq k^n(1-k)^{-1}d(x_1, x_0) \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

x étant un point fixe de T.

Remarque 2.2 *Si T est une application Lipchitizienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées T^p est une contraction, alors T a un seul point fixe.*

En effet, soit x l'unique point fixe de T^p on a

$$T^p(T(x)) = T(T^p(x)) = T(x)$$

ce qui convient à dire que $T(x)$ est aussi un point fixe de T^p et grâce à l'unicité $T(x) = x$.

Ce résulta est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

Remarque 2.3 *Il se peut que T ne soit pas une contraction sur tout l'espace M mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant :*

Soit (M, d) un espace métrique complet et $T : B \longrightarrow M$ telle que

$$d(T(x), T(y)) \leq k.d(x, y) \quad \forall\ x,\ y \in B \quad et \quad k < 1$$

où

$$B = \{x \in M,\ d(x, y) < \varepsilon\} \qquad z \in M \quad et \quad \varepsilon > 0$$

Si $d(z, T(z)) < \varepsilon(1-k)$, alors T possede u unique point fixe $x \in B$.

Chapitre 3

Quelques résultats d'existence et d'unicité

Dans ce chapitre, en appliquant les théorèmes de point fixe de Schauder, alternatif non linéaire de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach, nous établissons des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de solutions pour un système d'équations différentielles non linéaires fractionnaires avec des conditions intégrales fractionnaires, impliquant la dérivé fractionnaire de Caputo. Quelques exemples sont donnés pour illustrer les résultats.

Considérons le système couplé d'équations différentielles non linéaires fractionnaires avec des conditions intégrales fractionnaires, suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha_1}u(t) = f_1(t, u(t), v(t), {}^{C}D_{0^+}^{\rho_1}u(t), {}^{C}D_{0^+}^{\rho_2}v(t)), & t \in [0,1], \\ {}^{C}D_{0^+}^{\alpha_1}v(t) = f_2(t, u(t), v(t), {}^{C}D_{0^+}^{\rho_1}u(t), {}^{C}D_{0^+}^{\rho_2}v(t)), & t \in [0,1], \\ u(\xi_1) = 0, \quad u(1) = I_{0^+}^{\theta_1}u(\eta_1), \\ v(\xi_2) = 0, \quad v(1) = I_{0^+}^{\theta_2}u(\eta_2), \end{cases} \tag{3.1}$$

où ${}^{C}D_{0^+}^{\alpha_i}u(t)$ et ${}^{C}D_{0^+}^{\rho_i}u(t)$ désignes la dérivée fractionnaire au sens du Caputo, $I_{0^+}^{0_i}$ représente l'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville, avec $1 < \alpha_i < 2$, $f_i \in C([0.1] \times \mathbb{R}^4, \mathbb{R})$, $0 < p_i < 1$, $0 < \xi_j < 1$, $0 \leq \eta_i \leq 1$, $\theta_i > 0$, $i = 1, 2$.

Récemment, Guezane-Lakoud et Khaldi [9] ont étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème fractionnaire à valeur limite avec la condition intégrale fractionnaire

$$\begin{cases} {}^C D^q_{0^+} u(t) = f(t, u(t), {}^C D^\sigma_{0^+} u(t)), \ t \in (0,1), \\ u(0) \ = 0, \ u'(1) = I^\sigma_{0^+} u(1), \end{cases} \tag{3.2}$$

où $f : [0, \ 1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée, $1 < q < 2, \ 0 < \sigma < 1$.

D'autre part, l'étude d'un système couplé d'ordre fractionnaire est également très importante parce que ce type de système peut souvent se produire dans diverses applications.

Dans [18], les auteurs ont étudié un système couplé des équations différentielles non linéaires fractionnaires avec des conditions aux limites de trois points

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = f(t, v(t), D^p v(t)), t \in (0,1), \\ D^\beta v(t) = g(t, u(t), D^q u(t)), t \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = \gamma u(\eta), \\ v(0) = 0, \quad v(1) = \gamma v(\eta), \end{cases} \tag{3.3}$$

où $1 < \alpha, \ \beta < 2, \ \ p, q, \gamma > 0, \ \ 0 < \eta < 1, \alpha - q \geq 1, \ \ \beta - p \geq 1, \gamma\eta^{\alpha-1} < 1, \gamma\eta^{\beta-1} < 1$. D est la dérivée fractionnaire standard de Riemann-Liouville et $f, \ g \ [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues données. En appliquant le théorème du point fixe de Schauder, on montre un résultat d'existence qui a améliore le travail [10].

Dans [19], en appliquant quelques théorèmes standards de point fixe, les résultats d'existence sont obtenus pour le système couplé d'équations différentielles fractionnaires avec les conditions à limites intégrantes non-local :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}u(t) = f(t, v(t), D^{p}v(t)), {}^{C}D^{\beta}v(t) = g(t, u(t), D^{q}u(t)), \ t \in (0,1) \\ au'(0) + u(\eta_1) = \int_0^1 \phi(s, v(s))ds, \quad bu'(1) + u(\eta_2) = \int_0^1 \psi(s, v(s))ds, \\ cv'(0) + v(\xi_1) = \int_0^1 \varphi(s, u(s))ds, \quad dv'(1) + v(\xi_2) = \int_0^1 \rho(s, v(s))ds, \end{cases} \tag{3.4}$$

avec $1 < \alpha, \ \ \beta < 2, \ \ 0 < p, \ q < 1$ et $\alpha - p - 1 \geq 0, \ \ \beta - q - 1 \geq 0, 0 \leq \eta 1 < \eta_2 \leq 1, \ \ 0 \leq \xi_1 < \xi_2 \leq 1.$ $f, \ g, \ \phi. \ \psi, \ \varphi, \ \rho,$ sont des fonctions donnés satisfaire certains hypothèses.

Dans[20], l'existence et l'unicité des solutions pour un problème aux limites de premier ordre des équations différentielles fractionnaires avec les conditions aux limites intégrantes Rieman-Liouville est étudiée :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}_{0^+}u(t) = f(t, u(t), v(t)), \ t \in [0,1], \\ {}^{C}D^{\beta}_{0^+}v(t) = g(t, u(t), v(t)), \ t \in [0,1], \\ u(0) = \gamma I^{p}_{0^+}u(\eta), \quad 0 < \eta < 1, \\ v(0) = \delta I^{q}_{0^+}v(\xi), \quad 0 < \xi < 1, \end{cases} \tag{3.5}$$

Où ${}^{C}D^{\alpha}_{0^+}$ et ${}^{C}D^{\beta}_{0^+}$ désignent la dérivée fractionnaire du Caputo, $I^{p}_{0^+}$ et $I^{q}_{0^+}$ dénotent l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, $0 < \alpha, \quad \beta < 1$, $f, g \in C([0,1] \times R^2, R)$,et $p, q, \gamma \ , \delta \in R$.

Tout d'abord, par rapport à $[10-20]$, le système que nous discutons ici est couplé non seulement dans le système différentiel, mais aussi à travers les termes non linéaires f_1, f_2, qui impliquait deux fonctions inconnues u, v et les dérivés fractionnaires des fonctions inconnues u, v,et le cas est plus compliqué et difficile que les termes non linéaires impliqués seulement une fonction inconnue et la dérivé fractionnaire d'une fonction inconnue.

3.1 Présentation du problème

Lemme 3.1 *Pour* $\alpha > 0$, *et* $u(t) \in C[0;1]$, *l'équation différentielle fractionnaire homogène*

$$^{C}D_{0^+}^{\alpha} u(t) = 0$$

Possède une solution générale

$$u(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \cdots + c_n t^{n-1}$$

Où $c_i \in R, i = 1, 2, ...N$, *et* $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 3.2 *Soit* $1 < \alpha < 2, 0 \leq \xi < 1, 0 \leq \eta \leq 1$, $\theta > 0, \Delta_2 - \Delta_1 \xi \neq 0$. *Pour tout* $y(t) \in C[0,1]$, *l'unique solution du problème de valeur limite fractionnaire*

$$\begin{cases} ^{C}D_{0^+}^{\alpha} u(t) = y(t), \quad t \in [0,1], \\ u(\xi) = 0, u(1) = I_{0^+}^{\theta} u(\eta), \end{cases} \tag{3.6}$$

est donnée dans U_α *par*

$$u(t) = \Delta_3(\xi - t) I_{0^+}^{\alpha} y(1) + \Delta_3(t - \xi) I_{0^+}^{\alpha+\theta} y(\eta) + \triangle_3(\triangle_1 t - \triangle_2) I_{0^+}^{\alpha} y(\xi) + I_{0^+}^{\alpha} y(t), \tag{3.7}$$

où $\triangle_1 = (1 - \frac{\eta^\theta}{\Gamma(\theta+1)})$, $\triangle_2 = (1 - \frac{\eta^{\theta+1}}{\Gamma(\theta+2)})$, $\triangle_3 = \frac{1}{\Delta_2 - \Delta_1 \xi}$.

Preuve. Application lemme 3.1, l'équation$^{C}D_{0^+}^{\alpha} u(t) = y(t)$ veut dire

$$u(t) = c_1 + c_2 t + I_{0^+}^{\alpha} y(t) \tag{3.8}$$

En utilisant la condition $u(\xi) = 0$ et (3.8), nous avons

$$c_1 + c_2 \xi = -I_{0^+}^{\alpha} y(\xi).$$

par intégration fractionnaire de (3.8), on obtient

$$I_{0^+}^{\theta}u(t) \ = c_1\frac{t^{\theta}}{\Gamma(\theta+1)} + c_2\frac{t^{\theta+1}}{\Gamma(\theta+2)} + I_{0^+}^{\alpha+\theta}y(t)$$

En outre, la condition intégrale fractionnelle $u(1) = I_{0+}^{\theta}u(\eta)$ nous donne

$$c_1 + c_2 + I_{0^+}^{\alpha}y'(1) = c_1\frac{\eta^{\theta}}{\Gamma(\theta+1)} + c_2\frac{\eta^{\theta+1}}{\Gamma(\theta+2)} + I_0^{\alpha+\theta}y(\eta),$$

C'est

$$\Delta_1c_1 + \Delta_2c_2 = I_{0^+}^{\alpha+\theta}y(\eta) - I_{0^+}^{\alpha}y(1). \tag{3.9}$$

La combinaison de $(3,9)$ avec $(3,10)$, on obtient

$$\begin{aligned} c_1 &= \Delta_3[\xi I_{0^+}^{\alpha}y(1) - \Delta_2 I_{0^+}^{\alpha}y(\xi) - \xi I_{0^+}^{\alpha+\theta}y(\eta)], \\ c_2 &= \Delta_3[1_{0^+}^{\alpha+\theta}y(\eta) + \Delta_1 I_{0^+}^{\alpha}y(\xi) - I_{0^+}^{\alpha}y(1)]. \end{aligned}$$

En remplaçant c_1 et c_2 à $(3,8)$, on obtient (3.7). La preuve est terminée. ■

Soit $X = \{u(t)|u(t) \in C[0,1]$et ${}^{C}D^{\rho_1}u(t) \in C[0,1]\}$ un espace de Banach muni de la norme $\|u\|_x = \max_{t\in J}|u(t)| + \max_{t\in J}|{}^{C}D^{\rho_1}u(t)|$, et soit $Y = \{v(t)|v(t) \in C[0,\ 1]$ et ${}^{C}D^{p_1}v(t) \in C[0,\ 1]\}$ un espacede Banach muni de la norme $\|v\|_Y = \max_{t\in J}|v(t)| + \max_{t\in J}|{}^{C}D^{\rho_2}v(t)|$. L'espace produit $(X \times Y,\ \|(u,\ v)\|_{X\times Y})$est également un Banach avec la norme $\|(u,\ v)\|_{X\times Y} = \|u\|x + \|v\|_Y$.

On définie l'opérateur $T : X \times Y \to X \times Y$ par :

$$T(u,\ v)(t) = (T_1(u,\ v)(t),\ T_2(u,\ v)(t)). \tag{3.10}$$

où

$$\begin{aligned}
T_i(u,\ v)(t) &= \Delta_{i3}(\xi_i - t)T_{0+}^{\alpha i} f_i(1,\ u(1),\ v(1\ ),^C D^{p_1}u(1),^C D^{\rho_2}v(1)) \\
&\quad + \Delta_{i3}(t-\xi_i) I_{0^+}^{\alpha_i+\theta_j} f_i(\eta_i,\ u(\eta_i),\ v(\eta_i),^C D^{p_1}u(\eta_i),^C D^{\rho_2}v(\eta_i)) \\
&\quad + \Delta_{i3}(\triangle_{i1}t - \Delta_{i2}) I_{0+}^{\alpha_i} f_i(\xi_i,\ u(\xi_i), v(\xi_i),\ {}^C D^{p_1}u(\xi_i),^C D^{\rho_2}v(\xi_i)),
\end{aligned}$$

$$+I_{0+}^{\alpha_i} f_i(t,\ u(t),\ v(t),^C D^{p_1}u(t),^C D^{\rho_2}v(t)), i = 1, 2.$$

et

$$\Delta_{i1} = (1 - \frac{\eta_i^{\theta_i}}{\Gamma(\theta_i + 1)}),\ \Delta_{i2} = (1 - \frac{\eta_i^{\theta_i+1}}{\Gamma(\theta_i + 2)}),$$

$$\Delta_{i3} = \frac{1}{\triangle_{i2} - \Delta_{i1}\xi_i},\ \Delta_{i2} - \triangle_{i1}\xi_i \neq 0,\ i = 1, 2$$

Remarque 3.1

$$\begin{aligned}
T_i(u,\ v)'(t) &= -\Delta_{i3} I_{0+}^{\alpha_i} f_i(1,\ u(1),\ v(1),^C D^{\rho_1}u(1),^C D^{\rho_2}v(1)) \\
&\quad + \triangle_{i3}(t-\xi_i) I_{0+}^{\alpha_i+0_i} f_i(\eta_i,\ u(\eta_i),\ v(\eta_i),^C D^{\rho_1}u(\eta_i),^C D^{\rho_2}v(\eta_i)) \\
&\quad + \Delta_{i3}\Delta_{i1} I_{0+}^{\alpha_i} f_i(\xi_i,\ u(\xi_i),\ v(\xi_i),^C D^{\rho_1}u(\xi_i),^C D^{\rho_2}v(\xi_i))
\end{aligned}$$

$$+I_{0+}^{\alpha_i - 1} f_i(t,\ u(t),\ v(t),^C D^{\rho_1}u(t),^C D^{\rho_2}v(t)),\ i = 1, 2.$$

avcc $U_{\alpha_1} = \{u(t)|u(t) \in C[0.1]$ *et* ${}^C D^{\alpha_1}u(t) \in C[0,\ 1]\}$, $U_{\alpha_2} - \{v(t)|v(t) \in C[0,\ 1]$ *et* ${}^C D^{\alpha_2}u(t) \in C[0,\ 1]\}$.

Lemme 3.3 *Soit* $f_1,\ f_2 \in C([0,1] \times \mathbb{R}^4,\ \mathbb{R})$. *On dit que* $(u,\ v) \in U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2}$ *une solution de* $FDE(3.1)$ *si et seulement si* $(u,\ v) \in X \times Y$ *est une solution des équations opérateurs* $T(u.\ v) = (u,\ v))$.

Preuve. Soit $(u,\ v) \in U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2}$ une solution de FDE(3.1). Appliquant le lemme 3.2 et (3.11), on peut obtenir immédiatement que $(u,\ v) \in X \times Y$ est une solution des équations opérateur $T(u,\ v) = (u,\ v)$.

Inversement, soit $(u,\ v)\in X\times Y$ est une solution des équations opérateurs $T(u,\ v) = (u,\ v)$. C'est,

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \Delta_{13}(\xi_1 - t)I_{0+}^{\alpha_1}f_1(1, u(1), v(1), {}^C D^{p_1}u(1), {}^C D^{p_2}v(1)) \\
&\quad +\triangle_{13}\ (t\ -\xi_1)I_{0+}^{\alpha_1+\theta_1}f_1\ (\eta_1,\ u(\eta_1),\ v(\eta_1), {}^C D^{\rho_1}u(\eta_1), {}^C D^{\rho_2}v(\eta_1)) \\
&\quad +\Delta_{13}(\triangle_{11}t - \Delta_{12})I_{0+}^{\alpha_1}f_1(\xi_1,\ u(\xi_1),\ v(\xi_1), {}^C D^{\rho_1}u(\xi_1), {}^C D^{\rho_2}v(\xi_1)) \\
&\quad +I_{0+}^{\alpha_1}f_1(t,\ u(t),\ v(t), {}^C D^{p_1}u(t), {}^C D^{p_2}v(t)). \\
v(t) &= \Delta_{23}(\xi_2 - t)I_{0+}^{\alpha_2}f_2(1, u(1), v(1), {}^C D^{p_1}u(1), {}^C D^{p_2}v(1) \\
&\quad +\triangle_{23}\ (t\ -\xi_2)I_{0+}^{\alpha_2+\theta_2}f_2(\eta_1,\ u(\eta_1),\ v(\eta_1), {}^C D^{p_1}u(\eta_1), {}^C D^{\rho_2}v(\eta_1)) \\
&\quad +\Delta_{23}(\triangle_{21}t - \Delta_{22})I_{0}^{\alpha_2}f_2(\xi_1.\ u(\xi_1),\ v(\xi_1), {}^C D^{\rho_1}u(\xi_1), {}^C D^{\rho_2}v(\xi_1)) \\
&\quad +I_{0+}^{\alpha_2}f_2(t,\ u(t),\ v(t), {}^C D^{p_1}u(t), {}^C D^{p_2}v(t)).
\end{aligned}
$$

Aperçoive ${}^C D^{\alpha_i}t^{\alpha_i - m} = 0, m = 1, 2, ...N$, où N est le plus petit nombre entier supérieure ou égale à α_i. Donc, nous avons

$$
\begin{aligned}
{}^C D^{\alpha_1}u(t) &= {}^C D^{\alpha_1}[I_{0+}^{\alpha_1}f_1(t,\ n\ (t),\ v(t), {}^C D^{p_1}u(t), {}^C D^{\rho_2}v(t))] \\
&= f_1(t,\ u(t),\ v(t), {}^C D^{p_1}u(t), {}^C D^{\rho_2}v(t) \\
{}^C D^{\alpha_2}v(t) &= {}^C D^{\alpha_2}[I_{0+}^{\alpha_1} + f_2(t,\ u(t),\ v(t), {}^C D^{p_1}u(t), {}^C D^{\rho_2}v(t) \\
&= f_2(t,\ u(t),\ v(t), {}^C D^{p_1}u(t), {}^C D^{\rho_2}v(t)
\end{aligned}
$$

par un calcul direct, on peut vérifier facilement que

$$u(\xi_1) = 0,\ u(1) = I_{0+}^{\theta_1}u(\eta_1),\ v(\xi_2) = 0,\ v(1) = I_{0+}^{\theta_2}v(\eta_2)$$

par conséquent, $(u,\ v)\in U_{\alpha 1}\times U_{\alpha 2}$ est une solution de $FDE(3.1)$. La preuve est terminée.

■

3.2 Résultats d'existence et d'unicité

Dans le paragraphe suivant, nous établissons nos résultats principaux pour EDF (3.1) en utilisant un variété de théorèmes de point fixe. Pour plus de commodité, nous avons mis :

$$\begin{aligned}
A_i &= \frac{|\Delta_{i3}|(\xi_i+1)+|\Delta_{i3}|(|\Delta_{i1}|+|\Delta_{i2}|)\xi_i^{\alpha_i}+1}{\Gamma(\alpha_i+1)}+\frac{|\Delta_{i3}|(\xi_i+1)\eta_i^{\alpha_i+\theta_i}}{\Gamma(\alpha_i+\theta_i+1)},\ i=1,2,\\
B_i &= \frac{1}{\Gamma(2-\rho_i)}\left(\frac{|\Delta_{i3}|+|\Delta_{i3}\Delta_{i1}|\xi_i^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}+\frac{|\Delta_{i3}|\eta_i^{\alpha_i+\theta_i}}{\Gamma(\alpha_i+\theta_i+1)}\right),\ i=1,2,\\
C_{ik} &= (A_i+B_i)a_{ik},\ i=1,2,\ k=1,2.3,4,5,\\
D_{ik} &= (A_i+B_i)b_{ik},\ i=1,2,\ k=1,2,3,4,5,\\
E_i &= \max\{D_{i1},\ D_{i2},\ D_{i3},\ D_{i4},\ D_{i5}\},\ i=1,2,\\
F_{ik} &= (A_i+B_i)c_{ik},\ i=1,2,\ k=1,2,3,4.
\end{aligned}$$

Le premier résultat est basé sur le théorème de point fixe de Schauder

Théorème 3.1 *On suppose qu'il existe des constantes positives* $a_{ik}\in(0,+\infty)(i=1,2,$ $k=1,2,3,4,5)$ *de telle sorte que la condition suivante est satisfaite*

$$(H_1)|f_i(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)|\leq\sum_{k=1}^{4}a_{ik}|x_k|^{\tau_{ik}}+a_{i5},0<\tau_{t_{ik}}<1.$$

Alors $FDE(3.1)$ *admet au moins une solution.*

Preuve. D'abord, on définie une boulle dans l'espace de Banach $X\times\ Y$ comme suit

$$B_R-\{(u,\ v)|(u,\ v)\in X\times Y,\ \|(u,\ v)\|_{X\times Y}\leq R\},\tag{3.11}$$

Où $R\geq\max\{(10C_{i1})^{\frac{1}{1-\tau_{i1}}},\ (10C_{i2})^{\frac{1}{1-\tau_{i2}}},\ (10C_{i3})^{\frac{1}{1-\tau_{i3}}},\ (10C_{i4})^{\frac{1}{1-\tau_{i4}}},\ 10C_{i5},\ i=1,\ 2\}$.

Maintenant, nous prouvons que $T : B_R \rightarrow B_R$. pour tout $(u,v) \in B_R$, appliquant l'intégrale fractionnaie de Riman-Liouville et la condition de la relation $(H1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&|T_1(u,\ v)(t)| \\
&\leq \ |\Delta_{13}(\xi_1 - t)| I_{0^+}^{\alpha_1} |f_1(1,\ u(1),\ v(1\ ),^C D^{\rho_1}u(1),^C D^{\rho_2}v(1))| \\
&+|\Delta_{13}(t - \xi_1)| I_{0^+}^{\alpha_1+\theta_1} |f_1(\eta_1,\ u(\eta_1),\ v(\eta_1),^C D^{\rho_1}u(\eta_1),^C D^{\rho_2}v(\eta_1))| \\
&+|\Delta_{13}(\Delta_{11}t - \Delta_{12})| I_{0^+}^{\alpha_1} |f_1(\xi_1,\ u(\xi_1),\ v(\xi_1),^C D^{\rho_1}u(\xi_1),^C D^{\rho_2}v(\xi_1))| \\
&+I_{0^+}^{\alpha_1} |f_1(t,\ u(t),\ v(t),^C D^{\rho_1}u(t),^C D^{\rho_2}v(t))|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq \ & [\frac{|\Delta_{13}|(\xi_1+1)}{\Gamma(\alpha 1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_1-1} ds + \frac{|\Delta_{13}|(\xi_1+1)}{\Gamma(\alpha_1+\theta_1)} \int_0^{\eta_1} (\eta_1 - s)^{\alpha_1+\theta_1-1} ds \\
&+\frac{|\Delta_{13}|(|\Delta_{11}|+|\Delta_{12}|)}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{\xi_1} (\xi_1 - \xi_2)^{\alpha_1-1} ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} ds] \\
&\times (\sum_{k=1}^{4} a_{1k} R^{\tau_{1k}} \ + a_{15})
\end{aligned}$$

$$\leq A_1(\sum_{k=1}^{4} a_{1k} R^{\tau_{1k}} + a_{15}) \tag{3.12}$$

d'autre part, on a

$$^C D^{\rho_1} T_1(u,v)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-p_1)} \int_0^t \frac{T_1(u,v)'(s)}{(t-s)^{\rho_1}} ds. \tag{3.13}$$

par la remarque (3.1), en utilisant un calcul similaire que l'obtenue (3.13), nous avons

$$\begin{aligned}
&|T_1(u,\ v)'(t)| \\
\leq\ & [\frac{|\triangle_{13}|}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_1-1}ds + \frac{|\triangle_{13}|}{\Gamma(\alpha_1+\theta_1)}\int_0^{\eta_1}(\eta_1-s)^{\alpha_1+\theta_1-1}ds \\
&+\frac{|\triangle_{13}\Delta_{11}|}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^{\xi_1}(\xi_1-s)^{\alpha_1-1}ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-2}ds] \\
&\times(\sum_{k=1}^{4} a_{1k}R^{\tau_{1k}} + a15)
\end{aligned}$$

$$\leq (\frac{|\triangle_{13}-| + |\triangle_{13}\triangle_{11}|\xi_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha 1+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha 1)} + \frac{|\triangle_{13}|\eta_1^{\alpha_1+\theta_1}}{\Gamma(\alpha 1+\theta_1+1)}) \times (\sum_{k=1}^{4} a_{1k}R^{\tau_{1k}} + a_{15}). \quad (3.14)$$

à partir de (3.13) et (3.16), nous avons

$$\begin{aligned}
|^C D^{\rho_1} T_1(u,\ v)(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(1-\rho_1)}\int_0^t (t-s)^{-\rho_1}ds \times (\frac{|\triangle_{13}| + |\triangle_{13}\triangle_{11}|\xi_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \\
&+\frac{|\triangle_{13}|\eta_1^{\alpha_1+\theta_1}}{\Gamma(\alpha_1+\theta_1+1)}) \times (\sum_{k=1}^{4} a_{1k}R^{\tau}1k + a_{15}) \\
&\leq B_1(\sum_{k=1}^{4} a_{1k}R^{\tau_{1k}} + a_{15}). \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

à partir de (3.13) et (3.16), nous avons

$$\begin{aligned}
||T_1(u,v)||_Y\ &\leq\ \sum_{k=1}^{4} C_{1k}R^{\tau_{1k}} + C_{15} \\
&\leq\ \frac{1}{10}R + \frac{1}{10}R + \frac{1}{10}R + \frac{1}{10}R + \frac{1}{10}R \\
&=\ \frac{R}{2}
\end{aligned}$$

de la même façon, on peut obtenir

$$\begin{aligned}||T_2(u,v)||_Y &\leq \sum_{k=1}^{4} C_{2k}R^{\tau_{1k}} + C_{25}\\ &\leq \frac{1}{10}R + \frac{1}{10}R + \frac{1}{10}R + \frac{1}{10}R + \frac{1}{10}R\\ &= \frac{R}{2}.\end{aligned}$$

alors

$$||T(u,\ v)||_{X\times Y} = ||T_1(u,\ v)||_X + ||T_2(u,\ v)||_Y \leq R.$$

Ainsi, nous avons $T : B_R \to B_R$.

On remarque que $T_1(u,\ v)(t), T_2(u,\ v)(t), {}^C D^{\rho_1}T_1(u,v)(t), {}^C D^{\rho_2}T_2(u,v)$ sont continues sur $[0,1]$. Ainsi, l'opérateur T est également continu.

Maintenant, nous montrons que T est équicontinu. Pour cela nous avons fixé

$$M_i = \max_{t\in[0,1]}\{|f_i(t,\ u(t),\ v(t), {}^C D^{\rho_1}_{0^+}u(t), {}^C D^{\rho_2}_{0^+}v(t))|\}.\ i = 1, 2.$$

Pour tout $(u,v) \in B_R$. Soit $t_1, t_2 \in [0,1]$ tel que $t_1 < t_2$,on a

$$\begin{aligned}&|T_1(u,\ v)(t_2) - T_1(u,\ v)(t_1)|\\ \leq\ & M_1[\frac{|\Delta_{13}|(t_2-t_1)}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_1-1}ds + \frac{|\Delta_{13}|(t_2-t_1)}{\Gamma(\alpha_1+\theta_1)}\int_0^{\eta 1}(\eta_1-s)^{\alpha_1+\theta_1-1}ds\\ &+\frac{|\Delta_{13}\Delta_{11}|(t_2-t_1)}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^{\xi_1}(\xi_1-s)^{\alpha_1-1}ds]\\ &+M_1[\frac{1}{\Gamma(\alpha 1)}\int_0^{t_1}[t_2-s]^{\alpha_1-1}-(t_1-s)^{\alpha_1-1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_1-1}ds]\end{aligned}$$

$$\leq M_1|\Delta_{13}|[\frac{1+\xi_1^{\alpha_1}|\Delta_{11}|}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \frac{\eta_1^{\alpha_1+\theta_1}}{\Gamma(\alpha_1+\theta_1+1)}](t_2-t_1) + \frac{M_1}{\Gamma(\alpha_1+1)}(t_2^{\alpha_1} - t_1^{\alpha_1}|) \tag{3.16}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&|^C D^{\rho_1} T_1(u,\ v)(t_2) -^C D^{\rho_1} T_1(u,\ v)(t_1)| \\
= &\ \frac{1}{\Gamma(1-\rho_1)} |\int_0^{t_2} \frac{T_1(u,v)'(s)}{(t_2-s)^{\rho_1}} ds - \int_{t_1}^{t_2} \frac{T_1(u,v)'(s)}{(t_1-s)^{\rho_1}} ds|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1-\rho_1)} [\int_0^{t_1} \frac{(t_2-s)^{\rho_1}-(t_1-s)^{\rho_1}}{(t_1-s)^{\rho_1}(t_2-s)^{p_1}} |T_1(u,\ v)'(s)| ds + \int_{t_1}^{t_2} \frac{|T_1(u,v)'(s)|}{(t_2-s)^{p_1}} ds] \quad (3.17)$$

où

$$|T_1(u,v)'(s)| \leq (\frac{|\Delta_{13}| + |\Delta_{13}\Delta_{11}|\xi_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} + \frac{|\Delta_{13}|\eta_1^{\alpha_1+\theta_1}}{\Gamma(\alpha_1+\theta_1+1)}) M_1$$

par (3.17) et (3.18), on a

$$\begin{aligned}
&|^C D^{\rho 1} T_1(u,\ v)(t_2) - DT_1(u,\ v)(t_1)| \\
\leq &\ (\frac{|\Delta_{13}| + |\Delta_{13}\Delta_{11}|\xi_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha 1+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha 1)} + \frac{|\Delta_{13}|\eta_1^{\alpha_1+\theta_1}}{\Gamma(\alpha_1+\theta_1+1)}) \frac{M_1}{\Gamma(1-\rho_1)} \\
&\times [\int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\rho_1}-(t_1-s)^{\rho_1}}{(t_2-s)^{p_1}(t_1-s)^{p_1}} ds + \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{(t_2-s)^{\beta 1}} ds] \\
&\leq B_1 M_1 [2(t_2-t_1)^{1-\rho_1} + t_2^{1-\rho_1} - t_1^{1-p_1}] \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

de manière analogue, on peut prouver que

$$\begin{aligned}
|T_2(u,\ v)(t_2) - T_2(u,\ v)(t_1)| &\leq M_2|\Delta_{23}| [\frac{1+\xi_2^{\alpha_2}|\Delta_{21}|}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \frac{\eta_2^{\alpha_2+\theta_2}}{\Gamma(\alpha_2+\theta_2+1)}] \\
&\times (t_2-t_1) + \frac{M_2}{\Gamma(\alpha_2+1)} (t_2^{\alpha_2} - t_1^{\alpha_2}), \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

$$|D^{p_2} T_2(u,\ v)(t_2) - D^{\rho_2} T_2(u,\ v)(t_1)| \leq B_2 M_2 [2(t_2-t_1)^{1-\rho_2} + t_2^{1-p_2} - t_1^{1-\rho_2}]. \quad (3.20)$$

Dans $(3.17), (3.19), (3.16)$ et (3.21), soit $t_1 \to t_2$,alors

$$\begin{aligned}
|T_1(u.\ v)(t_2) - T_1(u,\ v)(t_1)| &\to 0,\ |^C D^{\rho_1} T_1(u,\ v)(t_2) - DT_1(u,\ v)(t_1)| \to 0, \\
|T_2(n,\ v)(t_2) - T_2(u,\ v)(t_1)| &\to 0,\ |^C D^{\rho 2} T_2(u,\ v)(t_2) -^C D^{\rho 2} T_2(u,\ v)(t_1)| \to 0.
\end{aligned}$$

Alors

$$||T_1(u,\ v)(t_2) - T_1(u,\ v)(t_1)||_X \ \rightarrow\ 0,$$
$$||T_2(u.\ v)(t_2) - T2(u,\ v)(t_1)||_Y \ \rightarrow\ 0$$

autrement dit, comme $t1 \rightarrow t2$

$$||T(u,\ v)(t_2) - T(u,\ v)(t_1)||_{X\times Y} \rightarrow 0$$

par conséquent, il ressort de la preuve ci-dessus que $T(B_R)$ est un ensemble équicontinu. Aussi, il est uniformément bornée comme $T(B_R) \subset B_R$. par le théorème d' Ascoli-Arzela, on déduit que T est un opérateur complètement continue. Appliquant le théorème du point fixe de Schauder, il résulte que EDF (3.1)a au moins une solution $(u,\ v)$ dans B_R. ■

Remarque 3.2 *La condition* (H_1) *peut être remplacée par la condition suivante*

$$(H_2)|f_i(t,\ x_1,\ x_2, x_3, x_4)| \leq \sum_{k=1}^{4} a_{ik}|x_k|^{\tau_{ik}},\ \tau_{ik} > 1$$

et la conclusion du théorème 3.1 *reste vrai. Remarquant, une certaine restriction supplémentaire à propos de R dans* (3.12) *devrait être remplacée par la restriction suivante*

$$0 < R < \min\{(\frac{1}{8C_{i1}})^{\frac{1}{\tau_{i1}-1}},\ (\frac{1}{8C_{i2}})^{\frac{1}{\tau_{i2}-1}},\ (\frac{1}{8C_{i3}})^{\frac{1}{\tau_{i3}-1}},\ (\frac{1}{8C_{i4}})^{\frac{1}{\tau_{i4}-1}},\ i = 1,\ 2\}.$$

Donc, en répétant des arguments similaires à la preuve du théorème (3.1), *nous pouvons obtenir la même conclusion.*

Le second résultat est basé sur l'alternatif non-linéaire de Leray-Schauder.

Théorème 3.2 *Supposons qu'il existe des constantes positives* $b_{ik} \in (0,\ +\infty))(i = 1, 2,$ $k = 1, 2, 3, 4, 5$) *et des fonctions* $\phi_{ik} \in C([0,\ +\infty),\ (0,\ +\infty))(i = 1, 2, k = 1, 2, 3.4)$ *(non* *décroissantes sur* $[0, +\infty)$ *et* $L > 0$ *tel que les conditions suivantes sont satisfaites*

$$(H_3) \quad |f_i(t,\ x_1, x_2,\ x_3,\ x_4)| \leq \sum_{k=1}^{4} b_{ik}\phi_{ik}(|x_k|) + b_{i5}\ .\ i\ = 1, 2$$

$$(H_4) \quad E_1(\sum_{k=1}^{4} \phi_{1k}(L) + 1]\ ) + E_2(\sum_{k=1}^{4} \phi_{2k}(L)\ + 1\ ) < L$$

alors EDF (3.1) *a au moins une solution.*

Preuve. Premièrement on a prouvé que T est complètement continue. il est évident que T est continue car f_ι sont continues.

Pour un nombre positif $L > 0$, soit

$$B_L = \{(u,\ v)|(n,\ v) \in X \times Y,\ \|(u,\ v)\|_{X\times Y} \leq L\}$$

une boulle bornée dans $X \times Y$. Il faut prouver que $T(BL)$ est relativement compact.

Pour $(u,\ v) \in T(B_L)$, un calcul similaire comme (3.13)et (3.16) les rendements

$$|T_1(u.v)(t)| \leq A_1(\sum_{k=1}^{4} b_{1k}\phi_{1k}(L) + b_{15}), \tag{3.21}$$

$$|^C D^{p1} T_1(u,\ v)(t)| < B_1(\sum_{k--1}^{4} b_{1k}\phi_{1k}(L) + b_{15}) \tag{3.22}$$

par conséquent

$$||T_1(u,\ v)||_X \leq (A_1 + B_1)(\sum_{k=1}^{4} b_{1k}\phi_{1k}(L) + b_{15}) = \sum_{k--1}^{4} D_{1k}\phi_{1k}(L) + D_{15} \tag{3.23}$$

de la même façon, on peut obtenir

$$||T_2(u, v)||_Y \leq \sum_{k=1}^{4} D_{2k}\phi_{2k}(L) + D_{25} \tag{3.24}$$

la combinaison de (3.24) avec (3.25), nous donne

$$||T(u,v)||_{X\times Y} = ||T_1(u,\ v)||_X + ||T_2(u,\ v)||_Y \leq (\sum_{k=1}^{4} D_{1k}\phi_{1k}(L) + D_{15})$$

$$+(\sum_{k=1}^{4} D_{2k}\phi_{2k}(L) + D_{25}) \tag{3.25}$$

Par conséquent, $T(B_L)$ est uniformément bornée à (3.26). Suivant que le calcul similaire comme (3.17) – (3.21) les rendements que $T(B_L)$ est un ensemble équicontinu. Au moyen du théorème d'Arzela-Ascoli, nous concluons que T est un opérateur complètement continu.

Maintenant, nous appliquons l'alternative non-linéaire de Leray - Schauder pour prouver que T a au moins une solution dans $X \times Y$.Pour tout $(u,\ v) \in \partial B_L$, tel que $(u,\ v) = \lambda T(u,\ v),\ 0 < \lambda < 1$. de (3.22) et (3.23), on a

$$|u(t)| = \lambda|T_1(u,\ v)(t)| \leq |T_1(u.\ v)(t)| \leq A_1[\sum_{k=1}^{4} b_{1k}\phi_{1k}(L) + b_{15}],$$

$$|^C D^{\rho_1}(u.\ v)(t)| = \lambda|^C D^{\rho_1} T_1(u,\ v)(t)| \leq |^C D^{\rho_1} T_1(u,\ v)(t)|$$

$$\leq B_1[\sum_{k=1}^{4} b_{1_1 k}\phi_{1k}(L) + b_{15}]$$

par conséquent

$$||u||_X \leq (A_1 + B_1)[\sum_{k=1}^{4} b_{1k}\phi_{1k}(L) + b_{15}] = \sum_{k=1}^{4} D_{1k}\phi_{1k}(L) + D_{15}$$

$$\leq E_1[\sum_{k=1}^{4} \phi_{1k}(L) + 1] \tag{3.26}$$

ensuite FDE (3.1) présente au moins une solution.

De la même façon, on peut obtenir

$$||v||_Y \leq E_2[\sum_{k=1}^{4} \phi_{2k}(L) + 1] \tag{3.27}$$

la combinaison de (3.27), (3.28) avec la condition (H4), nous donne

$$\|(u,\ v)\|Y = ||u||_X + ||v||_Y \leq E_1(\sum_{k=1}^{4} \phi_{1k}(L) + 1) + E_2(\sum_{k=1}^{4} \phi_{2k}(L) + 1) < L \tag{3.28}$$

Cela contredit le fait $(u,\ v) \in \partial B_L$. D'après l'alternative non-liniaire de Lary-Shauder nous concluons que T a un point fixe $(u,\ v) \in \overline{B}_L$ ce qui implique que EDF (3.1) a au moins une solution dans $X \times Y$. ■

Corollaire 3.1 *Supposons qu'il existe des constantes positives* $b_{ik} \in (0,\ +\infty))(i = 1, 2,\ k = 1, 2, 3, 4, 5)$ *de telle sorte que les conditions suivantes sont satisfaites*

$$(H_5)|f_l(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)| \leq \sum_{k=1}^{4} b_{ik}|x_k| + b_{i5},\ i = 1, 2$$

$$(H_6)(E_1 + E_2)(4L + 1) < L$$

Alors $EDF(3.1)$ *a au moins une solution.*

Remarque 3.3 *Nous avons obtenu l'existence de solutions pour l'EDF non linéaire* (3.1) *par le théorème* (3.1) *et le théorème* (3.2). *Des conditions de croissance*

$$|f,\ (t,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)| \leq \sum_{k=1}^{4} a_{ik}|x_k|^{\tau_{ik}} + a_{i5}$$

Sont données par trois cas : dans (H_1), $0 < \tau_{ik} < 1$, *dans* (H_2), $\tau_{ik} > 1$, *par un souci de simplicité, ici* $a_{i5} = 0$ *; dans* (H_5), $\tau_{ik} = 1$, *et une certaine restriction supplémentaire (H6) est donné. De toute évidence, il est facile de savoir que la conclusion du théorème (3.2) contient le résultat du théorème (3.1), mais la condition du théorème (3.1) est* *facilement vérifiée et plus commode d'appliquer, voir l'exemple* (3.1).

L'unicité de solution est basée sur le principe de la contraction de Banach.

Théorème 3.3 *Supposons qu'il existe des constantes positives* $c_{ik} \in (0,\ +\infty))(i = 1, 2,$ $k = 1, 2, 3, 4$) *de telle sorte que les conditions suivantes sont satisfaites, pour tout* $t \in [0,\ 1]$ *et* $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4 \in \mathbb{R}$.

$$(H_7)\ \ |f_i(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) - f_i(t,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)| \leq \sum_{k=1}^{4} c_{ik}|x_k - y_k|,\ i = 1, 2,$$

$$(H_8)H = \sum_{k=1}^{4}(F_{1k} + F_{2k}) < 1$$

alors l'EDF a une unique solution.

Preuve. On définie $\sup_{t\in[0,1]} f_i(t,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) = G_i < \infty,\ i = 1, 2$ et on prend

$$r \geq \frac{G'_1 + G'_2}{1 - H},$$

Avec $G'_i = (A_i + B_j)G_i,\ i = 1, 2$.tout d'abord on montre que $T(B,.) \subset B_r$, où $B_r = \{(u,\ \iota^1)|(u,\ v) \in X \times Y : ||(u,\ \iota^1)||_{X\times Y} \leq r\}$. pour tout $(u,\ v) \in B_r$,on a

$$\begin{aligned}
|T_1(u,\ v)(t)| \ \leq\ & |\Delta_{13}|(\xi_1 + 1)I_{0+}^{\alpha_1}[|f_1(1,\ u(1),\ v(1),^C D^{p_1}u(1),^C D^{p_2}v(1)) \\
& -f_1\ (1,\ 0, 0, 0,\ 0)| + |f_1(1,\ 0, 0, 0,\ 0)|] \\
& +|\Delta_{13}|(\xi_1 + 1)I_{0+}^{\alpha_1+\theta_1}[|f_1(\eta_1,\ u(\eta_1),\ v(\eta_1),^C D^{p_1}u(\eta_1),^C D^{p_2}v(\eta_1) \\
& -f_1\ (\eta_1,\ 0, 0, 0,\ 0)| \\
& +|f]\ (\eta_1, 0,\ 0)|] + |\Delta_{13}|(|\Delta_{11}| \\
& +|\Delta_{12}|)I_{0+}^{\alpha_1}[|f_1(\xi_1,\ u(\xi_1),\ v(\xi_1),^C D^{p_1}u(\xi_1),^C D^{p_2}v(\xi_1) \\
& -f_1\ (\xi_1, 0, 0, 0,\ 0)| + |f_1(\xi_1, 0, 0.0,\ 0)|] \\
& +I_{0+}^{\alpha_1}[|f_1(t,\ u(t),\ v(t),^C D^{p_1}u(t),^C D^{p_2}u(t)
\end{aligned}$$

$$-f_1\ (t,\ 0,0,0,\ 0)| + |f_1(t,\ 0,0,0,\ 0)|]$$

$$\leq [\tfrac{|\Delta_{13}|(\xi_1+1)}{\Gamma(\alpha 1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_1-1}ds + \tfrac{|\Delta_{13}|(\xi_1+1)}{\Gamma(\alpha_1+\theta_1)} \int_0^{\eta_1} (\eta_1 - s)^{\alpha_1+\theta_1-1}ds$$

$$+\frac{|\Delta_{13}|(|\Delta_{11}| + |\Delta_{12}|)}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{\xi_1} (\xi_1 - s)^{\alpha_1-1}ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1}ds]$$

$$\times[(c_{11} + c_{13})||u||_X + (c_{12} + c_{14})||v||_Y + G_1]$$

$$\leq A_1[(c_{11} + c_{13})||u||_X + (c_{12} + c_{14})||v||_Y + G_1] \tag{3.29}$$

d'autre part

$$|T_1(u,\ v)'(t)| \leq (\frac{|\triangle_{13}| + |\triangle_{13}\triangle_{11}|\xi_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} + \frac{|\triangle_{13}|\eta_1^{\alpha_1+\theta_1}}{\Gamma(\alpha_1+\theta_1+1)})$$

$$\times[(c_{11} + c_{13})||u||_X + (c_{12} + c_{14})||v||_Y + G_1] \tag{3.30}$$

utilisant (3.14) et (3.31), on obtient

$$|^C D^{p_1} T_1(u,\ v)(t)| \leq B_1[(c_{11} + c_{13})||u||_X + (c_{12} + c_{14})||v||_Y + G_1] \tag{3.31}$$

combinant (3.30) avec (3.32), on obtient

$$||T_1(u,\ v)||_X \leq (F_{11} + F_{13})||u||_X + (F_{12} + F_{14})||v||_Y + G_1' \leq r\sum_{k=1}^{4} F_{1k} + G_1'$$

de même façon

$$||T_2(u,\ v)||_Y \leq (F_{21} + F_{23})||u||_X + (F_{22} + F_{24})||v||_Y + G_2' \leq r\sum_{k=1}^{4} F_{2k} + G_2'$$

par conséquent

$$||T(u,\ v)||_{X\times Y} = ||T_1(u,\ v)||_X + ||T_2(u,\ v)||_Y \leq Hr + G_1' + G_2' \leq r$$

maintenant, pour tout (u_2, v_2), $(u_1, v_1) \in B_r$.on a

$$|T_1\ (u_{2,}\ v_2)(t) - T_1\ (u_1,\ v_2\ )(t)| \leq [\frac{|\triangle_{13}|(\xi_1+1)}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_1-1}ds + \frac{|\triangle_{13}|(\xi_1+1)}{\Gamma(\alpha_1+\theta_1)}\int_0^{\eta_1}(\eta_1-s)^{\alpha_1+\theta_1-1}ds$$

$$+\frac{|\triangle_{13}|(|\triangle_{11}|+|\triangle_{12}|)}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^{\xi_1}(\xi_1-s)^{\alpha_1-1}ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_1-1}ds]$$

$$\times[(c_{11}+c_{13})||u_2-u_1||_Y+(c_{12}\ +c_{1\ 4})||v_2-v_1\ ||_Y]$$

$$\leq A_1[(c_{11}+c_{13})||u_2-u_1||_X+(C_{12}+c_{14})||v_2-v_1||_Y], \tag{3.32}$$

et

$$|^C D^{p_2}T_1(u_2,\ v_2)(t) -^C D^{\rho_2}T_1(u_1,\ v_1)(t)|$$

$$\leq B_1[(c_{11}+c_{13})||u_2-u_1||_X+(c_{12}+c_{14})||v_2-v_1||_Y] \tag{3.33}$$

combinant (3.33) avec (3.34), on obtient

$||T_1(u_2,\ v_2)-T_1(u_1,\ v_1)||_X \leq (F_{11}+F_{13})||u_2-u_1||_X+(F_{12}+F_{14})||v_2-v_1||_Y.$

De même

$||T_2(u_2,\ v_2)-T_2(u_1,\ v_1)||_Y \leq (F_{21}+F_{23})||u_1-u_2||_Y+(F_{22}+F_{24})||v_2-v_1||_Y.$

Donc

$$||T(u_2,\ v_2)-T(u_1,\ v_1)||_{X\times Y} \leq H[||u_2-u_1||_X+||v_2-v_1||_Y].$$

Comme $H < 1$,T est un opérateur de contraction. Ainsi, en utilisant le principe de contraction Banach on trouve que T a un unique point fixe qui est l'unique solution de l'EDF. ■

3.2.1 Quelques exemples

Dans cette section, afin d'illustrer nos résultats, nous considérons les trois exemples suivants.

Exemple 3.1 *Considérant le système couplé d'EDF non linéaire avec des conditions intégrales fractionnaires, suivant :*

$$\begin{cases} {}^C D_{0^+}^{\frac{3}{2}} u(t) = a_{11}(u(t))^{\tau_{11}} + a_{12}(v(t))^{\tau_{12}} + a_{13}({}^C D_{0^+}^{\frac{1}{4}} u(t))^{\tau_{13}} + a_{14}({}^C D_{0^+}^{\frac{1}{3}} v(t))^{\tau_{14}} \\ +a_{15}, t \in (0,1), \\ {}^C D_{0^+}^{\frac{5}{4}} v(t) = a_{21}(u(t))^{\tau_{21}} + a_{22}(v(t))^{\tau_{22}} + a_{23}({}^C D_{0^+}^{\frac{1}{4}} u(t))^{\tau_{23}} + a_{24}({}^C D_{0^+}^{\frac{1}{3}} v(t))^{\tau_{24}} \\ +a_{25}, t \in (0,1), \\ u(\frac{1}{10}) = 0, \ u(1) = I_{0^+}^{\frac{5}{4}} u(\frac{1}{5}), \\ v(\frac{1}{16}) = 0, \ v(1) = I_{0^+}^{\frac{1}{3}} v(\frac{1}{8}), \end{cases} \tag{3.34}$$

où $0 < \tau_{ij} < 1 (i = 1, 2; \ j = 1.2, 3, \ 4)$ *et* $a_{ik} (i = 1, 2; \ k = 1.2, 3, 4, \ 5)$ *sont des constantes positives. d'aprés le théorème 3.1 'EDF* (3.35)*admet au moins une solution..*

Exemple 3.2 *Considérons le système couplé d'EDF non linéaire avec des conditions intégrales fractionnaires, suivant :*

$$\begin{cases} {}^C D_{0^+}^{\frac{3}{2}} u(t) = \frac{u^2}{200} + \frac{v^2}{100(1+|v|)} + \frac{1}{50}({}^C D_{0^+}^{\frac{1}{2}} u(t)) + \frac{t}{500}({}^C D_{0^+}^{\frac{1}{2}} v(t))^2 + \frac{(1-t)^2}{100}, t \in (0,1) \\ 7^C D_{0^+}^{\frac{5}{4}} v(t) = \frac{(1-t)u^4}{100(1+u^2)} + \frac{v^2}{200} + \frac{t^2}{200}({}^C D_{0^+}^{\frac{1}{2}} u(t))^3 + \frac{1}{200}({}^C D_{0^+}^{\frac{1}{2}} v(t)) + \frac{(1+t)^2}{400}, t \in (0,1) \\ u(\frac{1}{4}) = 0, u(1) = I_{0^+}^{\frac{1}{3}} u(\frac{1}{2}), \\ v(\frac{1}{2}) = 0, v(1) = I_{0^+}^{\frac{5}{4}} v(\frac{1}{3}), \end{cases} \tag{3.35}$$

Où $\alpha_1 = \frac{3}{2}, \ \alpha_2 = \frac{5}{4}, \ \rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2}, \ \xi_1 = \frac{1}{4}, \ \xi_2 = \frac{1}{2}, \ \eta_1 = \frac{1}{2}, \ \eta_2 = \frac{1}{3}, \ \theta_1 = \frac{1}{3}, \ \theta_2 = \frac{5}{4}.$ *Par* (3.35), *on a* $|f_1(t, \ x_1, \ x_2, \ x_3, x_4)| = \frac{x_1^2}{200} + \frac{x_2^2}{100(1+|x_2|)} + \frac{x_3}{50} + \frac{t x_4^2}{500} + \frac{(1-t)^2}{100}$

$$\leq \frac{|x_1|^2}{200} + \frac{|x_2|}{100} + \frac{|x_3|}{50} + \frac{|x_4|^2}{500} + \frac{1}{100} = a_{11}\phi_{11}(|x_1|)$$

$$+a_{12}\phi_{12}(|x_2|) + a_{13}\phi_{13}(|x_3|) + a_{14}\phi_{14}(|x_4|) + a_{15},$$

$$|f_2(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)| = \tfrac{(1-t)x_1^4}{100(1+x_1^2)} + \tfrac{x_2^2}{200} + \tfrac{t^2|x_3|^3}{100} + \tfrac{x_4}{200} + \tfrac{(1+t)^2}{400}$$

$$\leq \frac{x_1^2}{100} + \frac{x_2^2}{200} + \frac{|x_3|^3}{100} + \frac{|x_4|}{200} + \frac{1}{100} = a_{21}\phi_{21}(|x_1|)$$

$$+a_{22}\phi_{22}(|x_2|) + a_{23}\phi_{23}(|x_3|) + a_{24}\phi_{24}(|x_4|) + a_{25},$$

où $b_{11} = \frac{1}{200}$, $b_{12} = \frac{1}{100}$, $b_{13} = \frac{1}{50}$, $b_{14} = \frac{1}{500}$. $b_{15} = \frac{1}{100}$, $\phi_{11}(|x_1|) = |x1|^2$, $\phi_{12}(|x_2|) = |x_2|$, $\phi_{13}(|x_3|) = |x_{-3}|$, $\phi_{14}(|x_4|) = |x_4|^2$, $b_{21} = \dfrac{1}{100}$. $b_{22} = \dfrac{1}{200}$, $b_{23} = \dfrac{1}{100}$, $b_{24} = \dfrac{1}{200}$, $b_{25} = \frac{1}{100}$, $\phi_{21}(|x_1|) = |x_1|^2$, $\phi_{22}(|x_2|) = |x_2|^2$, $\phi_{23}(|x_3|) = |x_3|^3$, $\phi_{24}(|x_4|) = |x_4|$. *Évaluons* $[E_1(\sum_{k=1}^4 \phi_{1k}(L) + 1) + E_2(\sum_{k=1}^4 \phi_{2k}(L) + 1) - L]$.

Par un calcul direct, on obtient :

$$\Delta_{11} = 0.1110,\ \Delta_{12} = 0.6666,\ \Delta_{13} = 1.5653,$$

$$\Delta_{21} = 0.7764,\ \Delta_{22} = 0.9669,\ \Delta_{23} = 1.7280,$$

$$A_1 = 1.9047,\ A_2 = 3.4556,\ B_1 = 2.9083,$$

$$B_2 = 3.5656,\ C_{11} = 0.0241.\ C_{12} = 0.0482,$$

$$D_{13} = 0.0964,\ D_{14} = 0.0096,\ D_{15} = 0.0482,$$

$$D_{21} = 0.0702,\ D_{22} = 0.0351,\ D_{23} = 0.0702,$$

$$D_{24} = 0.0351,\ D_{25} = 0.0702,\ E_1 = 0.0964,\ E_2 = 0.0702.$$

Alors $E_1(\sum_{k=1}^4 \phi_{1k}(L) + 1) + E_2(\sum_{k=1}^4 \phi_{2k}(L) + 1) - L = 0.0964 \times 5 + 0.0702 \times 5 - 1 = -0.167 < 0$ *Pour* $L = 1$. *Le théorème 3.2 implique que l'EDF* (3.30)*a au moins une solution.*

Exemple 3.3 *Considérant le système couplé d'EDF non linéaire avec des conditions* *intégrales fractionnaires, suivant :*

$$\begin{cases} {}^C D_{0^+}^{\frac{3}{2}} u(t) = \frac{1}{40} u(t) + \frac{3}{50} v(t) + \frac{3}{100} {}^C D_{0^+}^{\frac{1}{2}} u(t) + \frac{7}{100} {}^C D_{0^+}^{\frac{1}{2}} v(t) + \sin t, t \in (0,1) \\ {}^C D_{0^+}^{\frac{5}{4}} v(t) = \frac{1}{300} u(t) + \frac{1}{600} v(t) + \frac{3}{200} {}^C D_{0^+}^{\frac{1}{2}} u(t) + \frac{3}{100} {}^C D_{0^+}^{\frac{1}{2}} v(t) + \frac{t}{10}, t \in (0,1) \\ \qquad u(\frac{1}{4}) = 0, u(1) = I_{0^+}^{\frac{1}{3}} u(\frac{1}{2}), \\ \qquad v(\frac{1}{2}) = 0, v(1) = I_{0^+}^{\frac{5}{4}} v(\frac{1}{3}), \end{cases} \tag{3.36}$$

$\alpha_1 = \frac{3}{2}$, $\alpha_2 = \frac{5}{4}$, $\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2}$, $\xi_1 = \frac{1}{4}$, $\xi_2 = \frac{1}{2}$, $\eta_1 = \frac{1}{2}$, $\eta_2 = \frac{1}{3}$, $\theta_1 = \frac{1}{3}$, $\theta_2 = \frac{5}{4}$.
À partir de (3.37), *on a*

$$f_1\ (t,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = \frac{1}{40} x_1 + \frac{3}{50} x_2 + \frac{3}{100} x_3 + \frac{7}{200} x_4 + \sin t,$$

$$f_2(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = \frac{1}{300} x_1 + \frac{1}{600} x_2 + \frac{3}{200} x_3 + \frac{3}{100} x_4 + \frac{t}{10},$$

et

$$|f_1(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) - f_1(t,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)|$$

$$\leq \frac{1}{40}|x_1 - y_1| + \frac{3}{50}|x_2 - y_2| + \frac{3}{100}|x_3 - y_3| + \frac{7}{200}|x_4 - y_4|,$$

$$|f_2(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3) - f_2(t,\ y_1, y_2, y_3,\ y_4)|$$

$$\leq \frac{1}{300}|x1 - y_1| + \frac{1}{600}|x_2 - y_2| + \frac{3}{200}|x_3 - y_3| + \frac{3}{100}|x_4 - y_4|$$

une combinaison avec les résultats calculés de (3.36) *; et par un calcul direct, on obtient :*

$$F_{11} = 0.1001,\ F_{12} = 0.2404,\ F_{13} = 0.1201,\ F_{14} = 0.1401,$$

$$F_{21} = 0.0234,\ F_{22} = 0.0117,\ F_{23} = 0.1053,\ F_{24} = 0.2106.$$

Par conséquent, $\Pi = 0.9517 < 1$. *Le théorème 3.3 implique que l' EDF* (3.37) *admet une unique solution.*

Bibliographie

[1] A.Anatoly Kilbas, M. Hari Srivastava and Juan J. Trujillo., Theory and Aplications of Fractional Diférential Equations, North-Holland Mathematics Stadies 204, Jan van Mill, Elsevier 2006.

[2] S. Abd Elouahab ; les systemes chaotiques à dérivation non entiere, mémoire de magistere en mathématiques, mars 2009, l'université de Constantine.http ://www.efunda.com/math/gamma/findgamma.cfm.

[3] A. Nakib, Oulhadj H., Youcef F., P. Siarry, Segmentation d'image par dérivation d'ordre non entier. 1ére Conférence Natonale surles systemes d'ordre fractionnaire et leurs applications. le 1-19 Mai 2010, Skikda, Algérie.

[4] M.S. ABD ELOUAHAB, Les systemes chaotiques àndériées Fractionnaires (2009).

[5] K. Belakroum, Existance et positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire (2013).

[6] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, MATHEMATICS in SCIENCE and ENGINERING, volume 198, 1999.

[7] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.

[8] D.R. Smart, Fixed point theory, Combridge Uni. Press, Combridge 1974.

[9] A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi, · Solvability of a fractional boundary value problem with fractional integral condition. Nonlinear Anal. 75(4), 2692–2700 (2012)

[10] X. Su, : Boundary value problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations.Appl. Math. Lett. 22(1), 64–69 (2009)

[11] C. Bai, J. Fang, : The existence of a positive solution for a singular coupled system of nonlinear fractional differential equations. Appl. Math. Comput. 150(3), 611–621 (2004)

[12] Y. Li, Z. Wei, : Positive solutions for a coupled systems of mixed higher-order nonlinear singular differential equations. Fixed Point Theory. 15(1), 167–178 (2014)

[13] Y. Zhang, Z. Bai, T. Feng, : Existence results for a coupled system of nonlinear fractional three-point boundary value problems at resonance. Comput. Math. Appl. 61(4), 1032–1047 (2011)

[14] C. Yuan, : Multiple positive solutions for (n-1,1) type semipositone conjugate boundary value problems for coupled systems of nonlinear fractional differential equations. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2011(13), 1–12 (2011)

[15] Y. Zhao, S. Sun, Z. Han, W. Feng, : Positive solutions for for a coupled system of nonlinear differential equations of mixed fractional orders. Adv. Differ. Equ. 2011(1), 64–69 (2011)

[16] Y. Chen, D. Chen, Z. Lv, : The existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with multi-point boundary conditions. Bull. Iranian Math. Soc. 38(3), 607–624 (2012)

[17] X. Zhang, C. Zhu, Z. Wu, : Solvability for a coupled system of fractional differential equations with impulses at resonance. Bound. Value Probl. 2013(1), 1–23 (2013)

[18] B. Ahmad, J.J. Nieto, : Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions. Comput. Math. Appl. 58(9), 1838–1843 (2009)

[19] C. Zhu, X. Zhang, Z. Wu, : Solvability for a coupled system of fractional differential equations with integral boundary conditions. Taiwanese J. Math. 17(6), 2039–2054 (2013)

[20] S. Ntouyas, M. Obaid : A coupled system of fractional differential equations with nonlocal integral boundary conditions. Adv. Differ. Equ. 2012(1), 1–8 (2012)