République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques Appliquées**

Par :

Melle. HANNACHI Massaouda

Intitulé

Etude de quelques problèmes non locaux

Dirigé par : **Mme .BENDJAZIA Nassima**

Devant le jury

PRESIDENT	Mme .TABOUCHE Nora	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Mme .BENDJAZIA Nassima	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr .CHAOUI Abderrzak	Univ-Guelma

Session Juin 2016

Dédicaces

C'est avec une très grande émotion et un immense plaisir que je dédie ce modeste travail à :

Mes parents, tous deux ont su m'apprendre le respect ,la volonté et tant d'autres valeurs importantes .

A mon frère :Mohamed Elmokhtare et mes sœurs :Loubna ,Asma , Ikram ,Khlouloud qui m'aidé et soutenu dans mes études.

A la mémoire de mon beau père et mère celui qui m'à implante le courage et l'amour du travail.

A tous les membres de ma famille paternelle et maternelle .

A mes chères amies Samira ,Besma ,Newal ,Sara,Noussa ,fifi ,Sara et loubna qui m'ont beaucoup aidé durant ces années d'étude sans oublier les bons souvenirs avant le reste du groupe .

Mes collègues de département je remercie chacun de vous pour le soutien et l'aide qu'il m'a apporté .

Remerciement

Je tiens avant tout à remercier **Allah** pour la force et la volonté qu'il m'a donnée pour pouvoir achever ce travail et Mm **BENDJAZIA** Nassima ,qui m'a encadré ,tout au long de ce mémoire ,Je lui apporte aussi toute ma reconnaissance pour son attention ,ses conseils et son qui ont été nécessaires pour la bonne réussite de ce travail .J'ai grand plaisir à travailler avec lui .

J'adresse tout particulièrement mes remerciements à Mes Professeurs.

J'exprimé également ma gratitude à monsieur le chef de département qui été toujours disponible pour nous, et nous a vraiment aidé dans tous les domaines.

Enfin , je ne saurai oublier de remercier tous mes enseignants du département de mathématique ,qui m'ont accompagnés et aidés à m'améliorer durant mon cursus de formation

Merci à tous et toutes

Table des matières

Résumé Le but de ce mémoire est l'étude un problème non local pour une équation de télégraphe avec une condition intégrale. Par les estimations à priori et la méthode de Galerkin, on a établi l'existence et l'unicité de la solution analytique de ce problème.

Mots clés : Problèmes non locaux, Conditions intégrales, Méthode de Galerkin, Equation de télégraphe.

Abstract The aim of this memory is to study a nonlocal problem for a telegraph with integral condition. By using the Galerkin method, we have established the existence and uniqueness of a generalized solution for this problem.

Key words : Nonlocal problem, Integral condition, Galerkin method, Telegraph equations.

0.1 Introduction

Les problèmes aux limites sont rencontrés dans presque toutes les applications des mathématiques, car ils modélisent des phénomènes de la physiques, la chimie, la mécaniques, économie, sciences naturelles et sociales. Au cours des ces dernières années, de nombreux phénomènes en physique ont été modélisés par des problèmes aux limites non classiques qui exigent la présence de termes intégraux sur le domaine spatial. Le terme intégral peut apparaître dans les conditions aux limites, dans ce cas, les conditions sont appelées non locales ou intégrales, ou dans l'équation différentielle elle-même, qui est alors considérée comme une équation intégro-différentielle.

La signification physique de base des conditions intégrales (moyenne, flux total, énergie totale, masse totale, moment, . . .) a été la raison essentielle de l'intérêt croissant aux problèmes avec des conditions intégrales. Par conséquent, ce type de problème peut être rencontré dans divers contextes tels que la diffusion chimique, les processus de conduction thermique, la dynamique des populations, et aussi dans les problèmes de vibrations dynamiques des réacteurs nucléaires, le problème inverse, la théorie de contrôle, les sciences médicales, la biochimie et dans certains processus biologiques, voir [1 ; 2 ;4 ;5 ;6 ;7 ;9 ;10]. Par exemple, le problème non local suivant modélise les problèmes de diffusion chimique et des processus de conduction de la chaleur :

$$\begin{aligned} u_t &= a\, u_{xx}\ , \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T) \\ u(x,0) &= f(x), \qquad u_x(1,t) = g(x) \\ \int_0^b u(x,t)dx &= E(t)\,, \quad ; 0 < b < 1; t \in (0,T], \end{aligned}$$

où les fonctions f, g sont données, a et b sont des constantes, la fonction u représente la concentration du produit chimique et $E(t)$ désigne la masse de la substance chimique qui se trouve dans la région $0 < x < b$ à l'instant t. Dans un problème de conduction thermique, la fonction u représente la température et $E(t)$ désigne l'énergie interne contenu dans la région $0 < x < b$ à l'instant t.

Un autre exemple montrant la signification des conditions intégrales est le travail de Bahuguna and Dabas [1] où ils ont considéré une équation différentielle avec une condition intégrale appliquée à la dynamique des population

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x,t,u,u_t), & (x,t) \in (0,1) \times (0,T) \\ u(x,t) = \varphi(x,t), & t \in [-\tau, 0] \\ u(x,0) = f(x), & u_x(0,t) = 0 \\ \int_0^b u(x,t)dx = 0 \;, & t \in (0,T], \end{cases}$$

où la fonction $u(x,t)$ est la densité de la population à l'instant t ; le terme u_{xx} décrit la migration interne, la fonction F peut désigner les taux de mort et de natalité, le paramètre τ représente le retard dû à la grossesse, la condition intégrale peut être considérée comme un contrôle sur la taille moyenne de la population à l'instant t, et la fonction φ repésente l'historique sur la période $[-\tau, 0]$.

Les conditions intégrales avaient apparu pour la première fois dans le travail de Cannon [6]. Plusieurs problèmes mixtes avec des conditions intégrales ont été étudiés ultérieurement par de nombreux auteurs, on peut également citer ici les travaux [5; 19; 20; 24]. Plus précisément, Beilin [4] a considéré l'équation des ondes avec une condition intégrale en utilisant la méthode de séparation de variables et la série Fourier. Pulkina [24] a traité un problème hyperbolique avec deux conditions intégrales et a établi l'existence et l'unicité de solutions généralisées en utilisant la méthode de point fixe.

L'objectif de ce mémoire est l'étude théorique d'un problème aux limites avec des conditions intégrales . Plus précisément, à l'aide de la méthode de Galerkin, on a prouvé le théorème d'existence de la solution analytique d'une équation de télégraphe.

À l'aide de la méthode de Galerkin, plusieurs auteurs ont étudié divers problèmes aux limites avec conditions intégrales, par exemple

Beilin [5] a considéré l'équation des ondes avec une condition intégrale :

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_t + c(x,t)u &= f(x,t); (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) &= \phi(x); u_t(x,0) = \psi(x) \\ \left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{(x,t)\in \partial\Omega \times I} + \int_0^t \int_\Omega k(x,\xi,\tau)\, u(\xi,t)\, d\xi d\tau &= 0, \quad \forall x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\partial\Omega$; les fonctions f, ϕ, ψ et k sont données. Par la méthode de Galerkin, l'auteur a démontré l'existence et l'unicité de la solution faible $u \in W_2^1(\Omega \times (0,T))$.

Pulkina [24] a étudié l'équation

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

dans le domaine $D = \{(x,t) : 0 < x < l; 0 < t < T\}$; avec les conditions initiales de Cauchy

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \phi(x); u_t(x,0) = \psi(x) \\ u_x(0,t) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

et la condition intégrale

$$\int_0^1 u(x,t)dx = 0,$$

où les fonctions ϕ et ψ sont données. L'existence et l'unicité de la solution généralisée sont établies par les estimations à priori et la méthode de Galerkin.

Par la méthode de Galerkin, Guezane-Lakoud, Daba et Bahuguna dans [14] ont étudié l'équation du télégraphe multidimensionnelle :

$$lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial u}{\partial t} + bu - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \ (x,t) \in Q = \Omega \times I, \tag{3}$$

sous réserve les conditions initiales (2) avec la condition intégrale du type

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{(x,t)\in\partial\Omega\times I} + \int\limits_{\Omega} K(x,\xi)\, u(\xi,t)\, d\xi = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega. \tag{4}$$

Guezane-Lakoud et Boumaza dans [15], ont examiné le cas unidimensionnel engendré par l'équation (3) avec les conditions initiales (2) et la condition intégrale de type

$$\int_0^1 xu(x,t)dx = 0. \tag{5}$$

Ce mémoire se compose de deux chapitres :

Dans le premier chapitre on introduit quelques notions de la théorie des espaces fonctionnels. On cite aussi les inégalités utilisées dans ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, on traite un problème mixte pour une classe d'équations hyperboliques. On considère l'équation :

$$lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x,t)u = f(x,t),$$

pour tout $(x,t) \in Q = (0,1) \times (0,T)$, avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) &= 0, \end{aligned}$$

et la condition intégrale

$$\int_0^1 x u_t(x,t)dx = 0,$$

où f, φ, ψ, a, c sont des fonctions donnés.

Puis on démontre l'existence et l'unicité de la solution faible par la méthode de Galerkin.

Enfin, ce mémoire est clôturée par une bibliographie.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

Résumé

Les outils d'analyse fonctionnelle sont essentiels à l'étude des équations aux dérivées partielles, Dans ce chapitre, on rappelle les résultats fondamentaux, les définitions et les notions élémentaires qui seront utilisées dans l'étude du problème posé dans ce mémoire.

1.1 Espaces de Hilbert

Définition 1.1 *Un espace de Hilbert réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire, noté $\langle x, y\rangle$, qui est complet pour la norme associée $\|x\|$, tel que $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.*

Théorème 1.1 ***(Projection sur un convexe)*** *Soit V un espace de Hilbert. Soit $K \subset V$ un convexe fermé non vide. Pour tout $x \in V$, il existe un unique $x_K \in K$ tel que*

$$\|x - x_K\| = \min_{y \in K} \|x - y\|$$

De façon équivalente, x_K est caractérisé par la propriété

$$x_K \in K, \langle x_K - x, x_K - y\rangle \leq 0 \ \forall \ y \in K$$

x_K s'appelle la projection orthogonale de x sur K.

Définition 1.2 *Une partie G de H est dite dense dans H si*

$$\forall h \in H, \forall \epsilon > 0, \exists g \in G; \|g - h\| < \epsilon$$

ou de manière équivalente si tout h de H est limite d'une suite d'éléments g_n de G : $\|g_n - h\| \to 0$.

Définition 1.3 *Une partie F de H est dite totale ou fondamentale si l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de F est dense dans H.*

Définition 1.4 *Une famille $\{e_i, i \in I\}$ d'éléments de H est dite orthonormée si*

$$\forall i \in I, \ \forall j \in I, \ (e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \ \text{si } i = j, \\ 0 \ \text{si } i \neq j \ . \end{cases}$$

Base Hilbertienne

Définition 1.5 *Une base hilbertienne de H ou base orthonormée est une famille orthonormée totale dans H.*

Proposition 1.1 *Soit H un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(\, , \,)$. Soit $\{e_n\}_{n\geq 1}$ une base hilbertienne de H . Pour tout élément x de H, il existe une unique suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de réels telle que la somme partielle $\sum\limits_{n=1}^{n=p} x_n e_n$ Converge vers x quand p tend vers l'infini, et cette suite est définie par $x_n = (x, e_n)$. De plus on a*

$$\| x \|^2 = (x, x) = \sum_{n\geq 1} | (x, e_n) |^2$$

on écrit alors

$$x = \sum_{n\geq 1} (x, e_n) e_n$$

L'existence d'une base hilbertienne dénombrable n'est pas garantie pour tous les espaces de Hilbert. La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une base hilbertienne dénombrable.

Proposition 1.2 *Soit H un espace de Hilbert séparable (i.e il existe une famille dénombrable dense dans H), alors il existe une base hilbertienne dénombrable de H.*

1.2 Espaces L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\|u\|_{L^1} = \int_\Omega |u(x)| \, dx$$

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$, on définit l'espace des classes de fonctions $L^p(\Omega)$ par

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, \, f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\}$$

et équipé de la norme

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

On définit aussi l'espace $L^\infty(\Omega)$

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable},\ \exists c > 0,\ \text{ telle que } |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega \}.$$

Il sera muni de la norme du sup-essentiel

$$\|u\|_{L^\infty} = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf \{ c;\ |u(x)| \leq c \quad \text{p.p sur } \Omega \}$$

Remarque 1.1 *L'espace L^2muni du produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f g dx, \quad f, g \in L^2(\Omega)$$

*est un espace de **Hilbert**.*

1.3 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.6 *Soit Ω un domaine non vide de $\mathbb{R}^p$, et m un entier naturel et p un réel de $[1, +\infty[$ On définit les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) \ \text{ tel que } D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha, |\alpha| < m \}$$

où $\alpha = (\alpha_1, .., ., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ la langueur de α et $D^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n}$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{0 < |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p} \right)^{1/p}.$$

Par convention, on note $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Dans cette définition, les dérivées partielles de u sont prises au sens faible.

Si $p = 2$, alors $W^{m,2}(\Omega)$ est noté $H^m(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert pour sa norme naturelle.

1.4 Quelques inégalités utiles

Pour obtenir les estimations à priori, nous avons besoin de quelques inégalités auxiliaires.

Inégalité intégrale de Cauchy-Schwarz

$$\int_Q |f\ (t)\, g\,(t)|\, dt \leq \left(\int_Q (f\,(t))^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q (g\,(t))^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Inégalité de Cauchy

$\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$|ab| \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2.$$

Inégalité de Cauchy avec ε

Soit ε un nombre strictement positif, alors $\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2.$$

Inégalité de Poincaré [3]

$$\|u\|_{L^2} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2}\,,\ \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

où $C_\Omega$une constante positive qui dépend que de Ω

Lemme de Gronwall

Soit $T > 0, \lambda \in L^1(0,T), \lambda \geq 0$ p.p. et $C_1, C_2 \geq 0$. Soit $\phi \in L^1(0,T)$, $\phi \geq 0$ p.p, telque $\lambda\phi \in L^1(0,T)$ et

$$\phi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \lambda(s)\,\phi(s)ds \ , \text{ pour presque tout } t \in (0,T) .$$

Alors on a

$$\phi(t) \leq C_1 \exp\left(C_2 \int_0^t \lambda(s)\ ds\right) \ , \text{ pour presque tout } t \in (0,T) .$$

Preuve On pose

$$\psi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \lambda(s)\,\phi(s)ds \ , \text{ pour } t \in (0,T) ,$$

$\psi(t)$ est dérivable presque partout (car absolument continue), on a

$$\psi'(t) \leq C_2\ \lambda(t)\,\phi(t)\ \leq C_2\ \lambda(t)\,\psi(t) \text{ p.p.sur } (0,T) ,$$

par conséquent,

$$\frac{d}{dt}\left\{\psi(t)\exp\left(-\int_0^t C_2\lambda(s)\ ds\right)\right\} \leq 0,$$

et donc

$$\psi(t) \leq C_1 \exp\left(C_2 \int_0^t \lambda(s)\ ds\right), \text{pour presque tout } t \in (0,T) .$$

D'où le resultat, puisque $\phi \leq \psi$ p.p. ■

Théorème 1.2 *Pour toute forme linéaire continue L sur un espace de Hilbert H il existe un unique élement g de H tel que*

$$\forall f \in H,\ Lf = \langle f, g\rangle_H$$

Théorème 1.3 *(Lax-Milgram). Soient H un espace de Hilbert et $a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue et coércive sur $H \times H$; et $L \in H'$,alors il existe u de H unique tel que :*

$$a(u,v) = L(v) ;\ \forall v \in H$$

De plus, si a est symétrique, u est l'unique solution du problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} u \in H \\ J(u) \leq J(v), \end{cases}$$

où J est définie de H dans $\mathbb{R}^n$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v).$$

1.5 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est un précurseur de la méthode des éléments finis. Bien qu'elle n'ait pas d'intérêt numérique en général, elle est très utile d'un point de vue théorique (notamment pour l'étude des problèmes non-linéaires). Elle rentre dans le cadre de l'approximation variationnelle, l'idée de la méthode est la suivante :

Partant d'un problème variationnel posé dans un espace V de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite de sous-espaces V_i de dimension finie $V_1 \subset V_2 \subset \ldots. \subset \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} V_i \subset V$. On résout ensuite le problème approché dans V_i , ce qui est en géneral plus facile que de résoudre directement en dimension infinie. Finalement, on passe à la limite en faisant tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour obtenir une solution du problème de départ.

Le schéma de la méthode de Galerkin

Soit P le problème exacte pour lequel on cherche à montrer l'existence d'une solution dans un espace de Hilbert séparable V.

Après avoir fait un choix d'une approximation de Galerkin V_m de V, il convient de définir un problème approché P_m dans l'espace de dimension finie V_m ayant une unique solution $u^{(m)}$. Le déroulement de l'étude est alors le suivant :

Etape n°1 : On définit la solution $u^{(m)}$ du problème P_m.

Etape n°2 : On établit des estimations sur u_m (dites estimations à priori sur u) qui traduisent que $\{u^{(m)}\}$ est borné.

Etape n°3 : Par utilisation des résultats de compacité faible de la boule unité d'un espace de Hilbert (resp.d'un espace de Banach). Il est alors possible d'extraire de $\{u^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite $\{u_k^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ qui a une limite. On note u la limite de $\{u_k^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}^*}$.

Etape n°4 : On montre que u est solution du problème P, donc la solution cherchée.

Notre objectif est de construire un procédé d'approximation qui nous donne à la limite, une démonstration de l'existence de la solution, ce procédé revient à approcher $u(x,t)$ comme combinaison linéaire de « fonctions de bases » $w_k(x)$ telle que

$$u^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t)\, w_k(x),$$

où les $\alpha_k(t)$ sont alors solutions d'un système de m équations différentielles linéaires.

Remarque 1.2 *La méthode n'offrirait que peu d'intérêt pratique notament pour le calcul numérique si elle ne permettait d'atteindre la solution u qu'au moyen d'extraction (non constructive) d'une sous-suite.*

Motivation de la Méthode de Galerkin

Soit l'équation $F(u) = 0$ dans l'espace de dimension infini V. On considére la suite $V_{n(n\in\mathbb{N})}$, $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$, $V_n \subset V_{n+1}$ et la famille de projecteurs $P_N : V \longrightarrow V_N$, alors on résout le problème approchée dans V_n .

Soit le système de dimension finie suivant :

$$P_n(F(U_n)) = 0, U_n \in V_n$$

Finalement, on passe à la limite quand $n \to \infty$, pour obtenir la solution exacte

$$u = \lim_{n \to \infty} U_n \in V$$

Dans le cas $V = H$ (espace de Hilbert), on peut prendre une base orthonormale $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans H et l'ensemble

$$H_n = sev\{e_1, ...e_n\}$$

Soit l'ortho-projecteur

$$P_n : H \to H_n$$

$$P_n\ V := \sum_{j=1}^{n} (V, e_j)\, e_j.$$

On approche l'équation $F(u) = 0$ dans H par $P_n(F(U_n)) = 0$ dans H_n, avec

$$U_n = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n \ \in H_n$$

et pour détéminer λ_i, on résout le système de dimension finie suivant :

$$F((\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n), e_i) = 0 \quad ,i = 1, ..., n$$

Chapitre 2

Étude de l'unicité et l'existence de la solution d'une équation de télégraphe par la méthode de Galerkin

Résumé

Dans ce chapitre, on traite un problème mixte pour une classe d'équations hyperboliques. En se basant sur les estimations à priori et la méthode de Galerkin, on établit l'existence et l'unicité de la solution du problème posé.

2.1 Introduction

La méthode de Galerkin est une classe de méthodes permettant de transformer un problème continu en un problème discret, en convertissant l'équation à une formulation faible. Cette approche est attribuée aux ingénieurs russes Ivan Boubnov (1911) et Boris Galerkin (1913).

Dans cette approche, on choisit un système de fonctions linéairement indépendantes satisfaisant des conditions aux limites homogènes données, ce système est dense dans l'espace des fonctions qui contient la solution exacte du problème aux limites.

L'avantage de cette approche est non seulement d'établir l'existence de la solution, mais elle est aussi une méthode très efficace pour l'étude de la solution approchée et sa convergence.

Sous certaines conditions et en se basant sur la méthode de Galerkin, une série de travaux traitant des problèmes aux limites engendrés par différents types d'équations différentielles paraboliques ou hyperboliques d'ordre un, ou d'ordre supérieur a été élaborée dans [8; 11; 22].

2.2 Présentation du problème

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un problème non local pour une équation de télégraphe avec une condition intégrale en utilisant la méthode de Galerkin.

Plus précisément, on applique la méthode de Galerkin pour déterminer une fonction $u = u(x,t)$, $(x,t) \in Q = (0,1) \times (0,T)$, qui satisfait, dans un certain sens approprié, l'équation du télégraphe :

$$lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x,t)u - f(x,t), \tag{2.1}$$

à laquelle sont jointes les conditions initiales

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) &= 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

et la condition intégrale

$$\int_0^1 x u_t(x,t) dx = 0, \tag{2.3}$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(x) \in L_2(0,1)$ et les fonctions $a(x,t)$, $c(x,t)$ satisfont la condition

$$(H) \begin{cases} |a_x, a_t, a_{xx}, a_{xx,x}| \leq A_1, \\ 0 \leq a_0 \leq a(x,t) \leq A_0, \\ 0 \leq c_0 \leq c(x,t) \leq C_0, \\ |c_x, c_t| \leq C_1. \end{cases}$$

2.3 Notations et définitions

Pour l'étude du problème posé, nous avons besoin de quelques espaces fonctionnels. Soit $L^2(0,1)$ l'espace des fonctions à carrées intégrables définies sur $(0,1)$ dont le produit scalaire et la norme seront notés respectivement par $(\ ,\ )$ et $\|\ .\|$.

On note par $H(Q)$ l'espace de Sobolev constitué de toutes les fonctions $u \in L^2(Q)$ ayant des dérivées faibles dans $L^2(Q)$, avec la norme

$$\|u\|^2_{H(Q)} = \int_0^T \int_0^1 \left[\left(\int_x^1 u(\xi,t) d\xi \right)^2 + (u(x,t))^2 + \left(\int_x^1 u_t(\xi,t) d\xi \right)^2 \right] dx dt,$$

et on note aussi par $H_0(0,1)$ l'espace de Sobolev constitué de toutes les fonctions $u \in L^2(0,1)$ ayant dérivées faibles dans $L^2(0,1)$, avec la norme

$$\|w\|^2_{H_0(0,1)} = \int_0^1 \left[\left(\int_x^1 w(\xi) d\xi \right)^2 + w^2(x) \right] dx.$$

On dénote par $H_0(Q), H_T(Q)$ les espaces suivants :

$$H_0(Q) = \{u(x,t) \in H(Q), u(0,t) = 0\}.$$

$$H_T(Q) = \{v(x,t) \in H(Q), v_t(x,T) = 0\}.$$

Introduisant la notion de solution généralisée. Soit u une solution du problème (2.1) - (2.3), multipliant les deux côtés de l'équation (2.1) par $\int_x^1 (\xi - x)\, v_t(\xi,t)\, d\xi$, où $v \in H_T(Q)$; et satisfait les conditions (2.2) - (2.3) intégrant par parties l'équation résultante sur le domaine Q; on obtient

$$\int_Q lu \left(\int_x^1 (\xi - x)\, v_t(\xi,t)\, d\xi \right) dxdt = I_1 - I_2 + I_3,$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_Q u_{tt}(x,t) \left(\int_x^1 (\xi - x)\, v_t(\xi,t)\, d\xi \right) dxdt \\ &= -\int_Q \left(\int_x^1 u_t d\xi \right) \left(\int_x^1 v_{tt}(\xi,t)\, d\xi \right) dxdt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_Q a^2(x,t) u_{xx}(x,t) \left(\int_x^1 (\xi - x)\, v_t(\xi,t)\, d\xi \right) dxdt \\ &= 2\int_Q (aa_x)_x\, u \left(\int_x^1 (\xi - x)\, v_t(\xi,t)\, d\xi \right) dxdt \\ &\quad -\int_Q (4aa_x) u \left(\int_x^1 v_t(\xi,t)\, d\xi \right) dxdt + \int_Q a^2 u v_t\, dxdt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_Q c(x,t) u(x,t) \left(\int_x^1 (\xi - x)\, v_t(\xi,t)\, d\xi \right) dxdt \\ &= -\int_Q c(x,t) \left(\int_x^1 u(\xi,t)\, d\xi \right) \left(\int_x^1 v_t(\xi,t)\, d\xi \right) dxdt \\ &\quad + \int_Q c_x \left(\int_x^1 u(\xi,t)\, d\xi \right) \left(\int_x^1 (\xi - x)\, v_t(\xi,t)\, d\xi \right) dxdt. \end{aligned}$$

les approximations des fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.

En substituant la solution approchée dans l'équation (2.1), en multipliant le résultat par $\int_x^1 (\xi - x)\, w_i(\xi) d\xi$ puis en intégrant par rapport à x sur $[0,1]$, on obtient

$$\int_0^1 (u_{tt}^{(n)}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}^{(n)}(x,t) + c(x,t)u^{(n)}(x,t)) \left(\int_x^1 (\xi - x)\, w_i(\xi) d\xi \right) dx \tag{2.7}$$
$$= \int_0^1 f(x,t) \left(\int_x^1 (\xi - x)\, w_i(\xi) d\xi \right) dx$$

en vertu de (2.5) et (2.6) , l'équation (2.7) devient

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k''(t) \left(w_k(x), \int_x^1 (\xi - x)\, w_i(\xi)\, d\xi \right)_{L_2(0,1)} \tag{2.8}$$
$$+\sum_{k=1}^{n} \beta_k(t) \left[\left(-a^2(x,t) w_k''(x), \int_x^1 (\xi - x)\, w_i(\xi) d\xi \right)_{L_2(0,1)} \right.$$
$$\left. + \left(c w_k(x), \int_x^1 (\xi - x)\, w_i(\xi)\, d\xi \right)_{L_2(0,1)} \right]$$
$$= \int_0^1 f(x,t) \int_x^1 (\xi - x)\, w_i(\xi) d\xi dx.$$

En intégrant par parties dans $[0,1]$ le membre gauche de (2.8), on trouve

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k''(t) \left(\int_x^1 w_k(\xi)\, d\xi, \int_x^1 w_i(\xi)\, d\xi \right)_{L_2(0,1)} \tag{2.9}$$
$$+\sum_{k=1}^{n} \beta_k(t) \left(2\,(aa_x)_x\, w_k(x), \int_x^1 (\xi - x)\, w_i(\xi) d\xi \right)_{L_2(0,1)}$$
$$- \left((4aa_x) w_k(x), \int_x^1 w_i(\xi) d\xi \right)_{L_2(0,1)}$$
$$-a^2 \left(w_k(x), w_i(x) \right)_{L_2(0,1)} - \left(c \int_x^1 w_k(\xi)\, d\xi, \int_x^1 w_i(\xi) d\xi \right)_{L_2(0,1)}$$
$$+ \left(c_x \int_x^1 w_k(\xi)\, d\xi, \int_x^1 (\xi - x)\, w_i(\xi)\, d\xi \right)_{L_2(0,1)}$$
$$= \int_0^1 f(x,t) \int_x^1 (\xi - x)\, w_i(\xi) d\xi dx.$$

Notant

$$\theta_{k,i} = \left(\int_x^1 w_k(\xi)\, d\xi, \int_x^1 w_i(\xi)\, d\xi \right)_{L_2(0,1)}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{k,i} &= \left(2\,(aa_x)_x\, w_k(x)\,, \int_x^1 (\xi - x)\, w_i(\xi) d\xi \right)_{L_2(0,1)} \\
&- \left((4aa_x) w_k(x)\,, \int_x^1 w_i(\xi) d\xi \right)_{L_2(0,1)} \\
&- a^2 \delta_{k,i} - \left(c \int_x^1 w_k(\xi)\, d\xi, \int_x^1 w_i(\xi) d\xi \right)_{L_2(0,1)} \\
&+ \left(c_x \int_x^1 w_k(\xi)\, d\xi, \int_x^1 (\xi - x)\, w_i(\xi)\, d\xi \right)_{L_2(0,1)}
\end{aligned}$$

$$F_i(t) = \left(f(x,t), \int_x^1 (\xi - x)\, w_i(\xi) d\xi \right)_{L_2(0,1)}$$

alors (2.9) peut s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} (\theta_{k,i}\ \beta_k''(t) + \sigma_{k,i}\ \beta_k(t) \\
= \ & F_i(t),\ i\ (1, ..., n)\ , \quad \beta_k(0) = \varphi_k, \beta_k'(0) = \psi_k.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient un système de Cauchy d'équations différentielles linéaires du second ordre en β_k qui admet une unique solution.

Ainsi, il existe une solution unique $u^{(n)}$ satisfaisant (2.7). ∎

Lemme 2.1 *La suite* $(u^{(n)})$ *est bornée dans* $H(Q)$.

Preuve Multiplions (2.7) par $\beta_i'(t)$ et sommons par rapport à i de 1 à n, on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(u_{tt}^{(n)}(x,t) - a^2(x,t) u_{xx}^{(n)}(x,t) + c(x,t) u^{(n)}(x,t) \right) \qquad (2.10) \\
&\qquad \times \left(\int_x^1 (\xi - x)\, u_t^{(n)}(\xi, t) d\xi \right) dx \\
&= \int_0^1 f(x,t) \int_x^1 (\xi - x)\, u_t^{(n)}(\xi, t) d\xi dx
\end{aligned}$$

Remarque 2.1 *On a prouvé que la suite* $\{u^{(n)}\}$*est bornée, donc on peut extraire une sous suite que l'on note* $\{u^{(n_k)}\}$, *qui est faiblement convergente, maintenant, on va montrer que sa limite est la solution souhaitée du problème (2.1) - (2.3).*

Lemme 2.2 *La limite de* $\{u^{(n_k)}\}$ *est la solution du problème (2.1)-(2.3).*

Preuve On va démontrer que la limite de$\{u^{(n_k)}\}$ satisfait l'identité (2.4) pour tout $v \in H_T(Q)$. Soit $\theta_k(t) \in C^2(0,T)$, telle que $\theta'_k(T) = 0$. En multipliant (2.10) par $\theta'_k(t)$, en sommant selon k de 1 à n, puis en intégrant sur $[0,T]$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_Q \Bigg[-\left(\int_x^1 u_t^{(n_k)} d\xi\right)\left(\int_x^1 v_{tt}(\xi,t)\, d\xi\right) \\
&-(4aa_x)u^{(n_k)} \int_x^1 v_t(\xi,t)\, d\xi \\
&-a^2 u^{(n_k)} v_t - c\int_x^1 u^{(n_k)}(\xi,t)\, d\xi \int_x^1 v_t(\xi,t)\, d\xi \\
&+2\,(aa_x)_x\, u^{(n_k)} \int_x^1 (\xi - x)\, v_t(\xi,t)\, d\xi \\
&+c_x\left(\int_x^1 u^{(n_k)}(\xi,t)\, d\xi\right)\left(\int_x^1 (\xi - x)\, v_t(\xi,t)\, d\xi\right)\Bigg] dxdt \\
&- \int_Q f(x,t)\left(\int_x^1 (\xi - x)\, v_t(\xi,t)\, d\xi\right) dxdt
\end{aligned} \tag{2.16}$$

On note par u la limite faible de sous suite $\{u^{(n_k)}\}$ lorsque n_k tend vers l'infini, et par passage à la limite dans (2.16) ,lorsque n_k tend vers l'infini, on trouve que la limite u satisfait (2.4) pour tout $v(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \theta_k(t) w_k(x)$.

Pour tout $n \geq 1$; introduisant l'ensemble S_n suivant :

$$S_n = \left\{ v(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \theta_k(t) w_k(x),\ \theta_k(t) \in C^2(0,T), \theta'_k(T) = 0 \right\}$$

Comme l'ensemble $\cup_{n=1}^{\infty} S_n$ est dense dans $H_T(Q)$, alors u satisfait pour tout $v \in H_T(Q)$.

Par conséquent la solution du notre probléme est existe. ■

2.5 Unicité de la solution généralisée

Maintenant, on démontre que la solution généralisée du problème (2.1) - (2.3) est unique.

Théorème 2.2 *Sous les hypothèses du théorème 2.1, la solution généralisée du problème (2.1) - (2.3) est unique.*

Preuve On suppose qu'il existe deux solutions généralisées différentes u_1 et u_2 du problème (2.1) - (2.3), alors $u = u_1 - u_2$ est une solution généralisée du problème (2.1)-(2.3) avec $\varphi = \psi = 0$ et le second membre $f = 0$. On démontre que $u = 0$ dans Q. On denote $Q^\tau = \{(x,t) \in Q, 0 < x < 1, 0 < t \leq \tau\}$.

On définit la fonction $v \in H_T(Q)$ par

$$v(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \tau \leq t \leq T. \end{cases}$$

Alors l'identité (2.4) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} &\int_Q \Big[-\int_x^1 u_t d\xi \int_x^1 u_{tt}(\xi,t)\, d\xi - (4aa_x) u \int_x^1 u_t(\xi,t)\, d\xi \\ &-a^2 u u_t - c\int_x^1 u(\xi,t)\, d\xi \int_x^1 u_t(\xi,t)\, d\xi \\ &+2(aa_x)_x u \int_x^1 (\xi - x) u_t(\xi,t)\, d\xi \\ &+c_x \left(\int_x^1 u(\xi,t)\, d\xi\right)\left(\int_x^1 (\xi - x) u_t(\xi,t)\, d\xi\right)\Big] dxdt = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Des intégrations par parties de chaque terme du membre gauche de (2.17) donnent

$$\int_0^1 \left[\left(\int_x^1 u_t(\xi,\tau)\, d\xi \right)^2 + (a(x,\tau))^2 (u(x,\tau))^2 \right. \tag{2.18}$$

$$\left. +c(x,\tau)\left(\int_x^1 u(\xi,\tau)\, d\xi\right)^2 \right] dx = \int_{Q^\tau} \left[c_t \left(\int_x^1 u(\xi,t) d\xi\right)^2 + 2aa_t (u(x,t))^2 \right.$$

$$-(8aa_x)u\int_x^1 u_t(\xi,t)\,d\xi$$
$$-4(aa_x)_x u\int_x^1 (\xi-x)\,u_t(\xi,t)\,d\xi$$
$$\left.+2c_x\left(\int_x^1 u(\xi,t)\,d\xi\right)\left(\int_x^1 (\xi-x)\,u_t(\xi,t)\,d\xi\right)\right]dxdt$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy et l'$\varepsilon-$ inégalité avec $\varepsilon=1$,au membre droit de (2.18) et utilisant la condition (H), on obtient

$$\int_0^1\left[\left(\int_x^1 u_t(\xi,\tau)\,d\xi\right)^2+a_0^2\,|u(x,\tau)|^2+c_0\left(\int_x^1 u(\xi,\tau)d\xi\right)^2\right]dx\leq \tag{2.19}$$

$$\int_{Q^\tau}\left[\left(10A_0A_1+A_0^2+4A_1^2\right)\right]|u(x,t)|^2$$
$$+\left[\left(3C_1+4A_0A_1+4A_1^2\right)\right]\left(\int_x^1 u_t(\xi,t)d\xi\right)^2$$
$$\left.+3C_1\left(\int_x^1 u(\xi,t)d\xi\right)^2\right]dxdt.$$

On note

$$\begin{aligned} M &= \max\left(10A_0A_1+A_0^2+4A_1^2, 3C_1+4A_0A_1+4A_1^2, 3C_1\right)\\ m &= \min\left(1,a_0^2,c_0\right), L=\frac{M}{m}, \end{aligned}$$

alors l'équation (2.19) devient

$$\int_0^1\left[\left(\int_x^1 u_t(\xi,\tau)\,d\xi\right)^2dx+|u(x,\tau)|^2+\left(\int_x^1 u(\xi,\tau)d\xi\right)^2\right]dx\leq \tag{2.20}$$

$$L\int_{Q^\tau}\left[\left(\int_x^1 u_t(\xi,t)d\xi\right)^2+|u(x,t)|^2+\left(\int_x^1 u(x,t)\,d\xi\right)^2\right]dxdt.$$

Finalement, une application du lemme de Gronwall, donne :

$$\int_0^1\left[\left(\int_x^1 u_t(\xi,\tau)\,d\xi\right)^2dx+|u(x,\tau)|^2+\left(\int_x^1 u(\xi,\tau)d\xi\right)^2\right]dx\leq 0,$$

par conséquent $u(x,\tau)=0$, pour tout $x\in(0,1)$ et $\tau\in(0,T)$. Alors $u=0$ dans Q. ■

Exemple 2.1 *Maintenant, on présente un exemple pour démontrer les applications des résultats établis dans les sections précédentes. On considére l'équation :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t) = \tag{2.21}$$

$$-\left(36\, x^3 e^{x^3} + 27x^5 e^{x^3} - 8\right)\cos t,$$

avec les conditions initiales

$$u(x,0) = 3\, x\, e^{x^3} - 4x^2, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{2.22}$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{2.23}$$

et la condition intégrale

$$\int_0^1 x u_t(x,t)dx = 0. \tag{2.24}$$

Il est facile de voir que les hypothèses des théorèmes 2.1 et 2.2 sont satisfaisantes alors on déduit que le problème (2,21) - (2,24) possède une unique solution faible au sens de la définition 2.1. En outre, la fonction $u(x,t) = \left(3\, x\, e^{x^3} - 4x^2\right)\cos t$ *est la solution de ce problème.*

Bibliographie

[1] D. Bahuguna, J. Dabas, Existence and uniqueness of a solution to a semilinear partial delay differential equation with an integral condition, Nonlinear Dynam. Syst. Theory 8 (1) (2008) 7 19.

[2] D. Bahuguna, S. Abbas, J. Dabas, Partial functional differential equation with an integral condition and applications to population dynamics, Nonlinear Anal, TMA 69 (2008), 2623–2635.

[3] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle Et Applications, Dunod, 1999.

[4] S. A Beilin, On a Mixed nonlocal problem for a wave equation, Electron. J. Diferential Equations 103, (2006), 1-10.

[5] S.A. Beilin, Existence of solutions for one dimensional wave equations with nonlocal conditions, Electronic J. of Differential Eqns 76 (2001) 1-8.

[6] J. R. Cannon, John van der Hoek, *Diffusion subject to the specification of mass* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 115,(1986), 517–529.

[7] J.R. Cannon, The solution of heat equation subject to the specification of energy. Quart. Appl. Math. 1963, Vol 21, N 2, 155-160.

[8] J.R. Cannon, Y. Lin, A Galerkin procedure for difusion equations subject to specification of mass, SIAM J. Numer. Anal. 24 (1987) 499–515.

[9] V. Capasso and K.Kunisch, A reaction-difusion system arising in modelling manenvironment dieases, Quart. Appl. Math. 46 (1988), no. 3, 431-450.

[10] W. A. Day, Extensions of a property of the heat equation to linear thermoelasticity and other theories, Quart. Appl. Math.,41, 319–330 (1983).

[11] G. Fairweathe, J. C. Lopez-Marcos, Galerkin methods for a semilinear parabolic problem with nonlocal boundary conditions, Adv. Comput. Math., 6, 243–262 (1996).

[12] A. Guezane-Lakoud, M. S. Jasmati, A. Chaoui, Rothe's method for an integro-differential equation with integral conditions, Nonlinear Analysis. 72 (2010) 1522-1530. (2010) .

[13] A. Guezane-Lakoud, D. Belakroum, Time-discretization schema for an integrodifferential Sobolev type equation with integral conditions, Applied Mathematics and Computation, 218 (2012) 4695–4702.

[14] A. Guezane-Lakoud, J. Dabas, and D. Bahuguna, Existence and uniqueness of generalized solutions to a telegraph equation with an integral boundary condition via Galerkin method, Int. J. Math. Math. Sc, Vol 2011 (2011), Art ID 451492, 14pp.

[15] A. Guezane-Lakoud, N. Boumaza, Galerkin method applied to non local problem ; Int. J. Appl. Math. Stat, 19, (2010), 72-89.

[16] A. Guezane-lakoud, N. Bendjazia, Galerkin method for solving a telegraph equation with a weighted integral condition. Int. J. Open Problems Comput. Math. Vol. 5, No. 1, March, 2012.

[17] A. Guezane-lakoud, N. Bendjazia, R. Khaldi, Galerkin method applied to telegraph integro-differential equation with a weighted integral condition. Boundary Value Problems 2013, 2013 :102.

[18] Hillon, Les solutions mathématiques des populations, Presses Universitaire de France (1986).

[19] N.I. Ionkin, Solutions of boundary value problem in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions, Differents. Urav. 13 (1977) 294-304.

[20] L.I. Kamynin, A boundary value problem in the theory of the heat conduction with nonclassical boundary condition, Z. Vychisl. Mat. Fiz. 6 (1964), 1006–1024.

[21] J.L. Lions, Quelques Méthodes De Résolution Des Problèmes Aux Limites Non Linéaires, Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[22] S. Mesloub, F.Mesloub, On the higher dimension Boussinesq equation with a non classical condition, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Volume 34, Issue 5, pages 578586, 30 March 2011.

[23] L.S. Pulkina, A nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equation, Difer. Uravn., (2004), Vol 40, N 7, 887-892.

[24] L. S. Pulkina, A Mixed problem with integral conditions for the hyperbolic equation, Zametki, (2003), Vol 74, N 3, 435-445.

[25] P. A. Raviart et V. Girault, finite element approximation of theNavier-Stokes equation, lectures notes in Mathematics, Vol 749, E.D.A sold et Beckmann, Springer-Verlag, Balin (1979).

[26] Samarskii, Some problems in diferential equations theory, different-sial'nye Uraveniya, Vol 16, No. 11,1221-1228, (1980).