République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques Appliqués**

Par :

M^r. BOUCHEMELLA Chems-Eddine

Intitulé

Contrôle Moyen des EDO

Dirigé par :

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.AZOUZA N.E	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.BERRAHAIL Amel	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.MENACEUR Amor	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2016

Contrôle Moyen des EDO

Bouchemella Chems Eddine
Mémoire de master de mathématiques
Université 8 Mai 1945 Guelma

15 juin 2016

Table des matières

Dédicaces

Je dédie ce modest travail à ma mère et ma père en témoignage de leur affection, leur sacrifices et de leurs précieux conseils qui m'on conduit à la réussite dans tous ce que je fait ;

À ma sœur et mon frère en leur souhaitant la réussite dans leur vie,

À mon encadreur pour tous qu'elle a fait pour la réussite de ce travail,

À tous me proches

À tous ceux qui m'ont aidé afin de réaliser ce travail,

Et à tous ce que j'aimes et m'aiment.

Remerciements

Premièrement je remercie Dieu source de toute connaissance.

Au terme de ce travail, j'adresse mes remerciements les plus sincère à mon encadreur M^{me} Amel BERRAHAIL pour m'avoir permis de bénéficer de leur grand savoir dans différents sujets tout au long de la réalisation de ce travail, pour leur pédagogie, leur compétences, leur modestie et leur aide précieuse tout au long de ce projet même pendant les moments les plus difficiles, Vraiment merci pour une qualité d'encadrement si sérieuse et si consistant...

N'oubliez pas les membres de jury M^rNour eddine AZOUZA et M^rAmor Menaceur pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger mon travail.

Un immense merci à M^{me} Saliha BOUCHEMELLA méritant tous le respect pour leur encouragements, et pour leur aide qu'elle m'a offerte tout au long de semestre.

Je remercie tous les personnes qui m'a soutenus ,d'une façons ou d'une autre, j'épreuve incessamment leur éstime et amabilité, je salue réellement cette trés haute bienveillance que vous portez a mon égard et qui restera pour toujours une image de marque pour moi.

Je termine ces remerciements en saluant vivement mes amis les étudiants en master 1 et je les souhaitent la réussite pendant ces chemins d'études.

" Ce que j'aime dans les mathématiques appliqués, c'est qu'elle ont pour ambition de donner du monde des systèmes une représentation qui permette de comprendre et d'agir, et de toute la représentation mathématique, lorsqu'elle est possible est la plus souple et la meilleure du coup ce qui m'interesse, c'est de savoir jusqu'au on peut aller, c'est d'atteindre les limites"

Jacques- Louis Lions.

" Un mathématicien est une personne qui peut trouver des analogies entre les théorèmes, un meilleur mathématicien est celui qui peut voir des analogies entre les démonstrations. Les trés bons mathématiciens sont ceux qui peuvent déceler des analogies entre les théories. Mais on peut supposer que le meilleur des mathématiciens, est celui qui peut voir des analogies entre les analogies."

Stefan Banach

" Dans les mathématiques vous ne comprenez pas des choses. Vous habituez juste à elles"

John Von Neumann

" Ce qui important ce sont les notions pas les notations"

Gaus

RESUME

Les problèmes de la contrôlabilité moyenne consistent à choisir un contrôle qui serait fonctionner de manière optimale dans un sens moyen c'est a dire de contrôler la moyenne de l'état, par rapport à un paremètre réel. La condition nécessaire et suffisante pour confirmer la contrôlabilité moyenne d'un système à paramètre est la condition de rang moyenne qui est équivaut à la condition de rang de Kalman pour la contrôlabilité classique.

Mots clés : Contrôlabilité moyenne, Observabilité moyenne, contrôle optimal, contrôle moyen, condition de rang.

ABSTRACT

In the problems of the average controllability ,We look for controls ensuring the controllability of the averages of the states with respect to the parameter. The necessary and sufficient condition to confirm the average controllability of a parameter system is the average rank condition which is equivalent to the rank condition for classical Kalman controllability.

Keywords : average controllability, average observability, optimal control, average control, rank condition.

Introduction

Il est bien connu que l'air et l'eau constituent de véritables sources de la vie de la flore, de la faune et de l'homme. Ainsi, dés lors que leurs natures sont corrompues par des attaques environnements, ils deviennent des dangers pour les êtres vivants. Il peut s'agir notamment de troubles végétatifs pour la flore et d'intoxication voire des cas de maladies pour l'homme. Les scientifiques s'activent à déterminer les meilleurs palliatifs pour la protection et l'assainissement des dites ressources naturelles. Ils ne sauraient, en conséquence, réussir leur pari sans une coopération interdisciplinaire.
La modélisation de ces problèmes consiste à la possibilité de la compréhension du phénomène et de l'influence des différents paramètres, souvent, on cherche à étudier la possibilité d'agir sur un système afin qu'il fonctionne dans un but désiré en utilisant la théorie de contrôle.
Cette théorie a vue le jour dans les années 50, principalement mise au point par Bellman, Bertran et Kalman suivis par les travaux de Butkovskii. Donc, elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine d'aéronautique et de la dynamique de vol.
L'objectif général de la théorie de la commande optimal est d'améliorer le fonctionnement des systèmes de commande, c'est-à-dire d'obtenir des systèmes plus fiables, plus économiques ou plus rapides, par exemple, pour un système biologique, le but du système de commande peut être de réduire la doleur et de prolonger la vie, c'est-à-dire on étudie un régulateur de pression sanguine destiné à maintenir cette pression à un niveau constant et convenable, on peut aussi contrôler une épidémie comme l'étude de la thérapie des

tumeurs au cerveau ou réaliser une opération chirugicale au laser.

L'objectif de notre travail est l'étude de la contrôlabilité moyenne des systèmes linéaires de dimension fini introduite par Enrique Zuazua [24] où on va choisir un contrôle moyen qui serait fonctionner de manière optimale c'est a dire de contrôler la moyenne de l'état, par rapport à un paremètre réel et pas l'état tout entier comme dans la contrôlabilité classique [14]. Alors, ce travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous donnons un rappel sur quelques définitions et propriétés du système contrôlable qui soit la base de la théorie des contrôle classique : les notions de contrôlabilité, observabilité et contrôle optimal avec quelques théorèmes nécessaires. **Le chapitre 2,** introduit la problèmatique des systèmes contrôlé moyennnement où on va présenter une nouvelle notion qui est " la contrôlabilité moyenne" où on va donner une condition nécessaire et suffisante pour confirmer la contrôlabilité d'un système -lié a un paramètre réel- au sens moyen. Pour ce but, on va utiliser l'inégalité d'observabilité moyenne. **Le troisième chapitre** est basé sur la comparaison entre la contrôlabilité classique de J.L. Lions et la contrôlabilité moyenne de E.Zuazua.

Chapitre 1

Contrôlabilité et Observabilité

La théorie de contrôle (ou commande) analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Dans ce chapitre, on va donner quelques notions liée a la théorie du contrôle des systèmes linéaires : la contrôlabilité, l'observabilité,... Pour expliquer et motiver cette théorie, nous allons commencé par quelques exemples.

1.1 Quelques exemples

Dans cette section, nous donnons quelques exemples typiques de la théorie du contrôle d'importance pratiques ou théoriques.

1- Contrôle d'un four électrique

Soit le problème du four électrique, donnée comme suit :

$$\begin{cases} c_1T_1'(t) = -a_1r_1(T_1 - T_2)(t) - a_2r_2(T_2 - T_0)(t) + u(t), \\ c_2T_2'(t) = a_1r_1(T_1 - T_2)(t), \end{cases}$$

où

T_0 = la température extérieure,

T_1 = la température dans la "jacket" du four,

T_2 = la température de l'intérieur du four,

u = l'intensité de la chaleur produite par la bobine,

a_i = les surfaces,

c_i = les capacités de chaleur,

r_i = les coefficients de radiation.

Le problème du four : Peut-on "s'aranger" pour que quelque soit la température du four à l'instant initial "$t = 0$", la température intérieure du four soit égale, à l'instant $t = t_0$ donné, à une valeur désirée $T_2 = \overline{T}_0$?

Le problème mathématique : Peut-on trouver, pour toutes les valeurs de $(T_1(0), T_2(0))$, u pour que la solution du système d'équations différentielles ci-dessus satisfasse $T_2 = \overline{T}_0$?

On peut remarquer qu'on peut écrire le système d'équations sous forme d'un système différentiel. Pour cela, faisons un changement de variables

$$y_1 = T_1 - T_0, y_2 = T_2 - T_0.$$

et le système s'écrit sous la forme

$$y'(t) - Ay(t) + Bu(t).$$

tel que les matrices A et B sont données comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{r_1a_1 + r_2a_2}{c_1} & \dfrac{r_1a_1}{c_1} \\ \dfrac{r_1a_1}{c_2} & -\dfrac{r_1a_1}{c_2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} c_1^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

2- Chauffer un barreau métallique

Soit un barreau métallique rectiligne de longueur L que l'on chauffe par une source de chaleur localisée sur une portion du barreau. On désigne par $\theta(t,x)$ la température du barreau à l'instant t et au point x (on fixe un repére dont l'axe des abscisses est porté par le barreau et on fixe l'origine à une de ses extrémités, l'autre étant le point de coordonnées $(L,0)$).

On effectue le bilan d'énergie sur la portion du barreau située entre les points d'abscisse x et $x+\delta x$ et les instants de temps t et $t+\delta t$. La variation de la température est à peu prés égale à $\delta x(\theta(t+\delta t,x)-\theta(t,x))$ et elle doit étre égale à la variation du flux de chaleur dans cette portion du barreau : $\delta t(q(t,x+\delta x)-q(t,x)+\delta x f(t,x))$, où f est la source de chaleur localisée, de la forme $f(t,x)=b(x)u(t,x)$. Par la loi de Fourier, le comportement du flux de chaleur est proportionnel à la variation de la températeure, il est donné par

$$q(u)(x)=k(x)\partial_x\theta,$$

où k est le coeffcient de conductivité de la chaleur. On en déduit donc

$$\partial_t\theta(t,x)=\partial_x(k(x)\partial_x\theta(t,x))+b(x)u(t,x)),$$

on maintient les extrémités du barreau à une température constante, et on suppose connue la température initiale. Ceci qui conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t\theta(t,x)=\partial_x(k(x)\partial_x\theta(t,x))+b(x)u(t,x)), t\geq 0, x\in(0,L) \\ \theta(t,0)=\alpha, \theta(t,L)=\beta, & t>0 \\ \theta(0,x)=\theta_0(x), & x\in(0,L) \end{cases}$$

1.2 Système contrôlé

Du point de vue mathématique, un système contrôlé est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle, habituellement soumis à des contraintes. Un système contrôlé est un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(\cdot)), \\ u(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}, x(t) \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.1}$$

En général, le vecteur des états $x(t) \in \mathbb{R}^n$, et les contrôles $u(\cdot)$ appartiennent à un ensemble de contrôles admissibles U_{ad}, qui est un ensemble de fonctions localement intégrables définies sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans U de $\mathbb{R}^m$. On suppose le champ de vecteur f suffisament régulier, de sorte que pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout contrôle admissible $u(\cdot) \in U_{ad}$ le système (1.1) admet une unique solution $x(t)$, et que cette solution soit définie sur $[0, +\infty[$. On notera cette solution par $x_f(t, x_0, u(\cdot))$. Le système (1.1) est dit en boucle ouverte et est représenté par le diagramme suivant

$$u(input) \to \boxed{\dot{x} = f(x,u)} \to x(output)$$

Parmi les objectifs principaux de la théorie du contrôle qui seront abordés dans ce travail, les notions de la contôlabilité et l'observabilité. On se propose de définir ces notions et de rappeler les principaux résultats.

Soit $T > 0$ considérons un système différentiel linéaire défini sur $[0, T]$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

où A est une matrice carré $n \times n$ appelée matrice d'état et B une matrice $n \times m$ appelée matrice de commande ou du contrôle, $x(t)$ est l'état du système et x_0 la condition initiale. La solution de (1.2) est données par :

$$x(t, x_0, u(\cdot)) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds. \tag{1.3}$$

Dans le cas des systèmes linéaires général le système (1.2) est définit comme suit :

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. Pour $T > 0$ fixé, on défini $Q = \Omega \times [0, T]$, $\sum = \partial\Omega \times]0, T[$. On considère le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t}(t) = Ax(t) + Bu(t) & Q, \\ x = 0 & \sum, \\ x(0) = x_0 & \Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

où A et B sont des opérateurs de $L(\mathbb{R}^n, X = H^1(\Omega))$ et la fonction u dite "*contrôle*" appartient à l'espace $U = L^2(0, T, \mathbb{R}^n)$. Alors la solution de ce système dépend de la donnée initiale et du second membre et peut s'exprimer par la formule :

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds.$$

tel que S est une application, dite " Semi groupe", définit de $[0, +\infty[$ dans L(X) satisfait les propriétés suivantes :

(i $S(0) = Id$,

(ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$, pour tout (t, s) positives.

(ii) Pour tout y dans X, l'application $S(.)y$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Il faut noter que certains problèmes pratiques sont mieux modélisés par des équations aux dérivées partielles ou bien par des systémes à événements discrets.

1.3 Contrôlabilité

La contrôlabilité est une propriété de base dans l'analyse des systèmes dynamiques. Il s'agit d'imposer à un système un comportement souhaité, c'est-à-dire amener (en temps fini) un système d'un état initial arbitraire à un état désiré au moyen d'un contrôle. Alors, cette propriété donne la réponse au problème suivant : étant donnée un état initial imposé et un état final désiré, exicte-il au moins une commande qui amène le système d'un état vers l'autre ? Plus précisément on pose la définition suivante :

Définition 1.3.1. *[17] On dira que le contrôle* $\boldsymbol{u}$ *transfère un état* $\boldsymbol{a}$ *à un état* $\boldsymbol{b}$ *au temps* $T > 0$ *si*

$$x(T; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{b}.$$

On dit aussi que l'état $\boldsymbol{b}$ *est atteignable à partir de* $\boldsymbol{a}$ *au temps* T.

Définition 1.3.2. *[17] On dit que le système (1.1) (resp.(1.2)) est contrôlable si pour tous les états* x_0, x_1 *dans l'espace d'état, il existe un temps fini* T *et un contrôle admissible* $u(\cdot) : [0, \mathrm{T}] \rightarrow U$ *tel que* $x_1 = x(\mathrm{T}, x_0, u(\cdot))$.

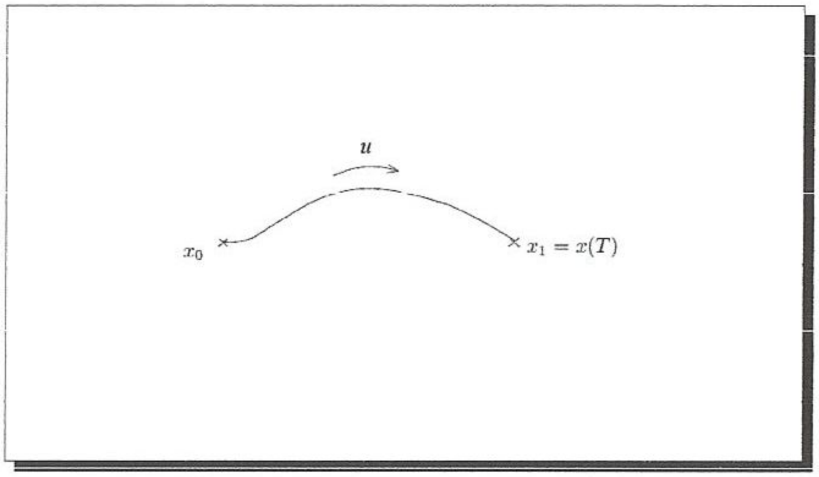


FIGURE 1.1 – Contrôlabilité

Remarques :

1- Cette définition est traduit que le contrôle u conduit le système de l'état x_0 vers x_1 à l'instant T.

2- Dans le cas où $x_1 = 0$, on dit que le système est " nulle-contrôlable" ou on a une contrôlabilité à zéro.

L'application de la définition précédente est un peut difficile pour l'étude de la contrôlabilité d'un système pour cela on va proposer un critère facile a appliquer .

1.3.1 Critère de Contrôlabilité de Kalman

Il existe une caractérisation algébrique de la contrôlabilité d'un système linéaire due à Kalman.

Théorème 1.3.1. *[20] Le système linéaire (1.2) est contrôlable si et seulement si*

$$rang M = rang\,[B, AB, \cdots, A^{n-1}B] = n. \tag{1.5}$$

On dit alors que la paire (A, B) est contrôlable.

Démonstration 1. *L'essentiel de la preuve est contenu dans le lemme suivant :*

Lemme 1.3.1. *[20] La matrice M est de rang n si et seulement si l'application linéaire*

$$H_t : \begin{cases} L^2(0, T, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n \\ u \to \displaystyle\int_0^T e^{(T-t)A} Bu(t)dt \end{cases}$$

est surjective.

Démonstration 2. *(de lemme) :*

Supposons tout d'abord que $rangM < n$, et montrons qu'alors H_t n'est pas surjective. L'application H_t étant non surjective, il existe un vecteur $\tau \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, que l'on supposera être un vecteur ligne, tel que $\tau M = 0$. Par conséquent,

$$\tau B = \tau AB = ... = \tau A^{n-1} B = 0.$$

Or d'après le théorème d'Hamilton-Cayley, il existe des réels $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ tels que

$$A^n = a_0 I + ... + a_{n-1} A^{n-1}.$$

On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout entier k,

$$\tau A^k B = 0,$$

et donc pour tout $t \in (0, T)$,

$$\tau e^{tA} B = 0.$$

Par conséquent, pour tout contrôle u, on a

$$\tau \int_0^T e^{(T-t)A} Bu(t)dt = 0 \Rightarrow \tau H_t(u) = 0,$$

ce qui montre que H_t n'est pas surjective.

***Réciproquement**, si H_t n'est pas surjective, alors il existe un vecteur ligne $\tau \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tel que pour tout contrôle u on ait.*

$$\tau \int_0^T e^{(T-t)A} Bu(t)dt = 0.$$

Ceci implique que, pour tout $t \in (0, T)$,

$$\tau e^{(T-t)A} B = 0.$$

En $t = T$ on obtient $\tau B = 0$. Ensuite, en derivant par rapport à t, puis en prenant $t = T$, on obtient $\tau AB = 0$. Ainsi, par derivations successives, on obtient finalement

$$\tau B = \tau AB = ... = \tau A^{n-1} B = 0 \Rightarrow \tau M = 0,$$

et donc $rangM < n$.

Ce lemme permet maintenant de montrer facilement le théorème (1.3.1). Si la matrice M est de rang n, alors d'après le lemme l'application H_t est surjective, i.e. $H_t(L^2) = \mathbb{R}^n$. Or, pour tout controle u, l'extrémité au temps T de la trajectoire associée à u est donnee par

$$x(T) = e^{TA} x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A} Bu(t)dt,$$

de sorte que l'ensemble accessible en temps T depuis un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est

$$Acc(T, x_0) = \mathbb{R}^n,$$

ce qui montre que le système est contrôlable.

Réciproquement *si le système est contrôlable, au point x_0 l'ensemble accessible en temps T s'écrit :*

$$Acc(T, x_0) = H_t(L^2),$$

et le système étant contrôlable cet ensemble est égal à $\mathbb{R}^n$. Cela preuve que H_t est surjective, et donc, d'après le lemme, que la matrice M est de rang n.

Remarques :

1- La matrice M est appelée « Matrice de Kalman » et la condition (1.5) est appelée « Condition de Kalman. »

2- Cette condition ne dépend ni de temps ni de la donnée initiale. Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T depuis x_0 alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

Exemple 1.3.1. :

1-On considère un système dynamique décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

tel que les matrices A et B sont données comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que ce système est contrôlable ?

Le système est contrôlable si la Matrice de contrôlabilité $M = [B; AB]$ est de rang maximale (i.e. rang M=2), on a $detM = 1 \neq 0$ c'est à dire $rangM = 2$. Donc le système est contrôlable.

2-Le problème de four electrique donné précédement est contrôlable car

$$detM = -\frac{r_1 a_1 . r_2 a_2}{c_2^2} \neq 0.$$

Donc

$$rangM = rang[B, AB] = 2.$$

On donne ci-aprés deux résultats permettant de donner une caractérisation de la contrôlabilité :

1.3.2 Caractérisation de la Contrôlabilité

La solution (1.3) peut s'écrire pour tout $t \in [0, T]$ sous la forme :

$$x(t, x_0, u(.)) = X_0 + H_t u,$$

où $H_t u$ est l'opérateur linéaire borné défini par :

$$H_t : \begin{cases} L^2(0, T, U) \to \mathbb{R}^n \\ u \to \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s) ds \end{cases}$$

et

$$X_0 = e^{tA} x_0.$$

Pour simplifier les calculs, prenons $X_0 = 0$.

Proposition 1.3.1. *[17] Le système (1.2) est contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si l'opérateur H_t est surjectif i.e*

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, \exists u \in U, x(x_0, u)(t_1) = x_1.$$

Démonstration 3. *Soit $a, b \in R^n$ deux états quelconques. L'équation en u :*

$$x(T, a, u) = b;$$

a une solution dans $L^2(0, T; U)$ si et seulement si l'équation

$$H_T u = b - S(T)a,$$

a une solution dans $L^2(0, T; U)$. L'équivalence des deux équations entraine la proposition.

1.4 Observabilité

Dans beaucoup de situations pratiques, une partie seulement de l'état du système, appelée la sortie ou la variable observée, est mesurée. Un système commandé-observé est un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ \\ y = h(x), \end{cases} \tag{1.7}$$

où le vecteur x est le vecteur des états du système, le vecteur u celui des contrôles (entrées) et le vecteur y celui des variables observées (sorties). Ce système est dit en boucle ouverte et est représenté par le diagramme suivant.

$$u \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \dot{x} = f(x; u) \\ y = h(x) \end{array}} \longrightarrow y$$

1.4.1 Observabilité d'un système linéaire

On considére un système linéaire donné comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ \\ \quad y = Cx \end{cases} \tag{1.8}$$

où A est une matrice carré $n \times n$ appelée matrice d'état et B une matrice $n \times m$ appelée matrice de commande ou du contrôle , C est une matrice carré $n \times n$ appelée matrice d'oservation. $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système et $u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m)$ est le contrôle.

Définition 1.4.1. *[17] On dit que le système linéaire (1.8) est observable si pour tout état $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un temps fini T et un contrôle admissible $u(\cdot) : [0, T] \to U$ tel que la connaissance de $x(t)$ pour $t \in [0, T]$ permet de déterminer x_0.*

1.4.2 Critère d'observabilité de Kalman

Dans cette section, on va donner une caractérisation algébrique de l'observabilité d'un système linéaire

Théorème 1.4.1. *[17] Le système linéaire (1.8) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité de Kalman*

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang n. On dit alors que la paire (A, C) est observable.

1.4.3 Dualité (Contrôlabilité, Observabilité)

Soit le systèmes (S) :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.9}$$

et le système adjoint (S*) :

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = -A^*\varphi, \\ \\ \varphi(T) = \varphi_0 \end{cases} \tag{1.10}$$

où A^* est l'adjoint de A. On a le résultat suivant :

i) Le système (S) est observable si et seulement si le système adjoint (S*) est contrôlable.

ii) Le système (S) est contrôlable si et seulement si le système adjoint (S*) est observable.

Remarque 1.4.1. *Le système (S) est observable si et seulement le système (S*) est contrôlable, c'est la dualité contrôlabilité /observabilité. Ce fait, trés important, permet de transférer au système observés tous les résultats établis sur les systèmes contrôlés. On aurait pu prouver cette équivalence directement en utilisant l'application entré-sortie et en remarquant qu'une application linéaire est surjective si et seulement si l'application adjointe est injective.*

Avec la définition de l'opérateur H_T on considère l'adjoint

$$H_t^* : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to L^2(0,T,U) \\ z \to H_t^*(z) = B^* e^{(T-\cdot)} z \end{cases}$$

tel que

$$(H_t^*(z), u)_{L^2} = (z, H_t u)_{\mathbb{R}^n}, \forall u \in L^2(0,T;U), \forall z \in R^n;$$

et on définit la matrice

$$\mathcal{C}_{\mathrm{T}} = H_T H_T^* = \int_0^{\mathrm{T}} e^{sA} B B^t e^{sA^t} ds;$$

tel que A^t et B^t désignent les matrices transposées des matrices A et B.

On a la caractérisation suivante :

Corollaire 1.4.1. *[9] Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *La paire (A, B) est contrôlable au temps $T > 0$.*
2. *L'opérateur H_t est surjectif.*
3. *L'opérateur H_t^* est injectif.*
4. *L'opérateur $\mathcal{C}_{\mathrm{T}}$ est inversible*

Remarque : L'opérateur H_t^* est injectif si

$$|\varphi^0|^2 \leq C \int_0^T |B^*\varphi(t)|^2 \, dt, \tag{1.11}$$

pour tout $\varphi \in \mathbb{R}^n$ tel que B^* est l'adjoint de B.
En d'autres termes, le problème de la controlabilité revient a répondre a la question suivante :
" Pour $T > 0$ donnée, exist-il un constant $C > 0$ tel que la solution du système adjoint (S^*) vérifié l'inégalité ci-dessus pour tous $\varphi^0 \in \mathbb{R}^n$." Cette inégalité s'appelle "Inégalité d'observabilité".

1.5 Contrôle Optimal

On se donne à présent un système dont l'état est décrit par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = f(t, u(t)) & t \in]0, +\infty[, \\ x(0) = x_0. \\ u \in U_{ad} \end{cases} \tag{1.12}$$

L'équation (1.12) a une solution supposée unique (cf Théorème de Cauchy-Lipschitz) notée $x[u, x_0](.)$. Désormais on fixe x_0. On se donne alors une fonctionnelle coût J (ou objectif), et on cherche une fonction de contrôle qui rend minimale cette fonctionnelle. On choisit J par de la forme :

$$J(x, u) = \int_0^T \Phi(x(t), u(t))dt,$$

et on cherche à résoudre le problème

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min J(x, u) \\ x = x[u, x_0](.) & \text{Equation d'état} \\ u \in U_{ad} \subset \mathcal{U} & \text{Contraintes sur le contrôle.} \end{cases}$$

Deux questions se posent alors :

— Prouver l'existence d'un contrôle optimal

— Trouver un moyen de le calculer c'est à dire décrire une méthode constructive de calcul d'un contrôle. Pour cela, on va écrire des conditions d'optimalité.

Remarque :

Dans le cas où la paire (A,B) est contrôlable, il existe une infinité de contrôles. Il est intéressant de pouvoir en construire un qui "consomme le moins d'énergie". La fonctionnelle d'énergie que l'on choisit ici est

$$J(u) = \int_0^T \|u(s)\|^2 \, ds.$$

On notera

$$U_{ad}(x_0, x_1) = \{u \in U, x(T, x_0, u) = x_1\}.$$

Le théorème suivant définit l'unique $u \in U_{ad}(x_0, x_1)$ qui minimise la fonctionnelle J sur $U_{ad}(x_0, x_1)$.

Théorème 1.5.1. *[9] Le contrôle $u(\cdot)$ qui transfère x_0 en $x_1 = x(T; x_0; u(.))$ est simplement donné par :*

$$u(s) = B^t e^{(\mathrm{T}-s)A^t} \mathcal{C}_{\mathrm{T}}^{-1}(x_1 - e^{\mathrm{T}A} x_0).$$

comme on peut le vérifier en utilisant la formule (1.3).

Chapitre 2

Contrôle Moyen

Dans ce chapitre, on va contrôler des systèmes linéaires dépendant d'un paramètre réel. On va introduire la notion du contrôle moyen dans laquelle la quantité d'intérét est la moyenne des états par rapport au paramètre. Nous considérons le problème de contrôlabilité pour les systèmes linéaires de dimensions finis, et on va montrer que la condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité moyenne est une condition de rang moyenne a partir de la condition de rang classique pour les systèmes linéaire contrôlé en utilisant des impulsions moyennes de tout ordre des matrices générant la dynamique du système et représentant l'action de contrôle.

2.1 Formulation du problème

Dans cette section, on s'interesse a contrôler un système linéaire de dimension fini lié a un paramètre rèel où on va donner une condition necessaire qui confirme la contrôlabilité moyenne. On considére le système linèaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\nu)x(t) + B(\nu)u(t), \quad 0 < t < T, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

où l'état de système $x(t)$ est un vecteur donné comme suit :

$$x(t,\nu) = (x_1(t,\nu), ..., x_n(t,\nu))^t \in \mathbb{R}^n,$$

$A(\nu)$ est une matrice carée $n \times n$ et $u = u(t)$ une fonction de commande dans $\mathbb{R}^m$ avec $m \leqslant n$, entrant et agissant sur le système par la matrice du contrôle $B(\nu)$ de $n \times m$. Les matrices A et B sont supposées dépend d'un paramètre réel ν.

Nous allons supposer que $\nu \in \mathbb{R}$, bien une analyse similaire peut être développé quand ν est un paramètre de valeur multiples ou même un paramètre aléatoire, dans un espace de probabilité.

Dans ce travail, pour simplifier les calculs, nous supposerons que le paramètre ν varie dans l'intervalle (0,1) et que les matrices A et B sont uniformément bornées par rapport à ν, afin d'assurer (par le théorème de convergence dominée de Lebesgue), l'intégrabilité des solutions de (2.1) (et le système adjoint correspondant) par rapport à ν.

Notez toutefois que la donnée initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ soit contrôlée et indépendant du paramètre ν. Mais l'état du système $x(t,\nu)$ dépend de ν.

2.2 Contrôlabilité moyenne

Nous nous adressons à la contrôlabilité de système (2.1) dont la donnée initiale est connue et entièrement déterminée. Cependant, la dynamique de l'état est régie par un opérateur paramètrisé $A(\nu)$, de même que l'opérateur de contrôle $B(\nu)$, la valeur du paramètre ν étant inconnu. Notre objective est de choisir un contrôle qui serait fonctionner de manière optimale dans un sens moyen c'est a dire de contrôler la moyenne de l' état, par rapport à ν. Plus précisément, le problème de la Contrôlabilité moyenne peut être formulé comme suit :

Définition 2.2.1. *Etant donné un temps de contrôle $T > 0$, x_0 est un données initiale arbitraire et $x_1 \in \mathbb{R}^n$ est l'état final. On chereche un contrôle u tel que la solution de (2.1) vérifie la condition*

$$\int_0^1 x(T,\nu)d\nu = x_1. \tag{2.2}$$

Cette définition est traduit que le contrôle u conduit le système de l'état x_0 vers x_1 à l'instant T.

La condition finale (2.2) doit être considérée pour toutes les cibles possibles x_1. On va étudier deux cas :

• A **indépendant de** ν **:**

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(\nu)u(t), \quad 0 < t < T, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

où A est indépendant de ν mais B depend de ν et l'état $x = x(t,\nu)$ dépend de ν. Donc, la notion de la contrôlabilité moyenne (2.2) semble raisonnable.

On pose

$$y(t) = \int_0^1 x(t,\nu)d\nu;$$

On intégrons l'équation d'état du systéme précédent par rapport à ν, on obtient :

$$\int_0^1 x'(t,\nu)d\nu = \int_0^1 Ax(t,\nu)d\nu + \int_0^1 B(\nu)u(t)d\nu,$$

ce qui donne :

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}x(t,\nu)d\nu = A\int_0^1 x(t,\nu)d\nu + u(t)\int_0^1 B(\nu)d\nu.$$

Posons :

$$\hat{B} = \int_0^1 B(\nu)d\nu,$$

donc :

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 x(t,\nu)d\nu = Ay(t) + \hat{B}u(t).$$

D'autre part on a :

$$y(0) = \int_0^1 x_0 d\nu = x_0\int_0^1 d\nu = x_0,$$

donc $y(t)$ est la solution du système

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + \hat{B}(\nu)u(t), & 0 < t < T, \\ y(0) = x^0. \end{cases} \tag{2.3}$$

avec $\hat{B}$ est la moyenne de l'opérateur de contrôle.

Comme $A(\nu) = A$ pour tout ν, la propriété de la controlabilité moyenne est vérifié si et seulement si le couple

$$\left(A, \hat{B} - \int_0^1 B(\nu)d\nu\right);$$

vérifie la condition de rang :

$$rang\left[\hat{B}, A\hat{B}, ...; A^{n-1}\hat{B}\right] = n,$$

qui est équivaut à

$$rang\left[A^j\int_0^1 B(\nu)d\nu : \ 0 \leq j \leq n-1\right] = n. \tag{2.4}$$

- **A dépend de ν :**

Dans le cadre général, la propriété de contrôlabilité moyenne sera caractérisée par une condition de rang dans le même sens de la contrôlabilité classique, mais en utilisant les moyennes de A et de tous ses puissances, avec l'opérateur de contrôle B, par rapport à ν.

Cependant, comme nous le verrons, en général, contrairement au cas où A est indépendant de ν, cette condition sera impliquer les puissances d'ordre arbitraire, et non seulement un nombre finis de puissance jusqu'à l'ordre $n-1$ comme en (2.4).

Théorème 2.2.1. *[24]*
Le système (2.1) satisfait la propriété de la contrôlabilité moyenne (2.2)(ou le système est moyennement contrôlable) si et seulement si la condition de rang suivant est vérifié :

$$rang\left[\int_0^1 [A(\nu)]^j B(\nu)d\nu : \ \ j \geq 0\right] = n. \tag{2.5}$$

Remarque :

La condition de rang moyenne peut simplifié lorsque toutes les matrices $A(\nu)$, $B(\nu)$ sont des multiples des même matrices constantes c'est-à-dire

$$A(\nu) = \alpha(\nu)A, B(\nu) = \beta(\nu)B.$$

Dans ce cas,

$$\int_0^1 [A(\nu)]^k B(\nu)d\nu = \int_0^1 [\alpha(\nu)]^k \beta(\nu)d\nu A^k B, \ \ \forall k \geq 0$$

et

$$\left[\int_0^1 B(\nu)d\nu, \int_0^1 A(\nu)B(\nu)d\nu, ...\right] = \left[\int_0^1 \beta(\nu)d\nu B, \int_0^1 \alpha(\nu)\beta(\nu)d\nu AB, ...\right]$$

donc :

$$rang\left[A^jB\int_0^1 \alpha(\nu)^j\beta(\nu)d\nu,\ j\geqslant 0\right]=n.$$

Ainsi, sous l'hypothèse supplémentaire

$$\int_0^1 [\alpha(\nu)]^k\beta(\nu)d\nu\neq 0, k=1,...,n-1, \tag{2.6}$$

la condition de rang moyen (2.5) est équivalente à la condition classique :

$$rang[B,AB,...,A^{n-1}B]=n,$$

impliquant seulement les puissances de A jusqu'à l'ordre $n-1$. Note toutefois, que si certains des intégrales (2.6) disparaissent, alors la condition est différent du condition classique (1.5).

2.3 Observabilité moyenne

Dans cette section, on va montrer que la contrôlabilité moyenne est équivalent à l'observabilité moyenne du système adjoint, et les deux propriétés sont équivalentes à la condition de rang moyenne ci-dessus.
Notre analyse est basée sur le principe de la dualité classique qui permettant de transférer le problème de contrôlabilité d'un système donnée vers un système d'observabilité adjoint et d'obtenir, parmi tous les contrôles admissibles, celui de la norme minimale $L^2(0;T,\mathbb{R}^m)$.

Bien entendu, le système adjoint de notre système dépend aussi du paramètre ν :

$$\begin{cases}\dot{\varphi}(t)=-A^*(\nu)\varphi(t), & t\in(0,T),\\ \varphi(T)=\varphi_0\end{cases} \tag{2.7}$$

Notez que, pour toutes les valeurs du paramètre ν, nous prenons la même donnée pour φ à $t = T$.

La solution du système adjoint $\varphi = \varphi(t, \nu)$ dépend également du paramètre ν, même si sa donnée au moment $t = T$ est indépendant de ν, puisque la matrice $A^*(\nu)$ produisant la dynamique du système depend de (ν).

2.3.1 Inégalité d'observabilité moyenne

L'inégalité d'observabilité moyenne pour le système adjoint (2.7) est donnée par :

$$|\varphi_0|^2 \leq C \int_0^T \left| \int_0^1 B^*(\nu)\varphi(t,\nu)d\nu \right|^2 dt, \tag{2.8}$$

pour tout $\varphi \in \mathbb{R}^n$ tel que B^* est l'adjoint de B. En d'autres termes, le problème de la controlabilité moyenne revient a répondre a la question suivante :

" Pour $T > 0$ donnée, exist-il un constant $C > 0$ tel que la solution du système adjoint (2.7) vérifié l'inégalité (2.8) ci-dessus pour tous $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$."

2.3.2 Caractérisation du contrôle optimal moyen

Dans cette section, on va caracteriser le contrôle optimal moyen, a partir du théorème suivant

Théorème 2.3.1. *Le système (2.1) vérifié la propriété de la contrôlabilité moyenne (2.2) si et seulement le système adjoint (2.7) satisfait l'inégalité d'observabilité moyenne (2.8) et les deux sont équivalentes aù condition de rang (2.5). Dans ce cas, le contrôle moyen optimal de $L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ est donné par*

$$u(t) = \int_0^1 B^*\hat{\varphi}(t,\nu)d\nu, \tag{2.9}$$

où $\hat{\varphi}$ est la solution du système adjoint (2.7) correspondant à la donnée φ^0 minimisant la fonction

$$J(\varphi_0) = \frac{1}{2}\int_0^T \left| \int_0^1 B^*(\nu)\varphi(t,\nu)d\nu \right|^2 dt - \langle x_1, \varphi_0 \rangle + \left\langle x_0, \int_0^1 \varphi(0,\nu)d\nu \right\rangle \tag{2.10}$$

Ici et dans la suite on note par $|\cdot|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^m$.

Démonstration :

Prenons le produit scalaire (notée par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à la fois dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$) de $\varphi = \varphi(t,\nu)$ avec l'équation (2.1) satisfait par $x = x(t,\nu)$ et on intègre par rapport à $t \in (0,T)$ et $\nu \in (0,1)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\langle u(t), \int_0^1 B^*\varphi(t,\nu)d\nu \right\rangle dt &= \int_0^T \int_0^1 \langle u(t), B^*\varphi(t,\nu) \rangle \, d\nu dt \\
&= \int_0^T \int_0^1 \langle B(\nu)u(t), \varphi(t,\nu) \rangle \, d\nu dt \\
&= \int_0^1 \langle x(T,\nu), \varphi_0 \rangle \, d\nu - \int_0^1 \langle x_0, \varphi(0,\nu) \rangle \, d\nu \\
&= \left\langle \int_0^1 x(T,\nu)d\nu, \varphi_0 \right\rangle - \left\langle x_0, \int_0^1 \varphi(0,\nu)d\nu \right\rangle
\end{aligned}$$

Ici, nous avons utilisé d'une manière essentielle que, compte tenu de l'équation satisfaite par l'état $x(t,\nu)$ et l'adjoint $\varphi(t,\nu)$.

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^1 \langle B(\nu)u(t),\varphi(t,\nu)\rangle\, d\nu dt &= \int_0^T\int_0^1 \langle [\dot{x}-A(\nu)x],\varphi\rangle\, d\nu dt\\ &= \int_0^T\int_0^1 \langle [\dot{x}-A(\nu)x],\varphi\rangle\, dt d\nu\\ &= \int_0^1 \langle x(T,\nu),\varphi_0\rangle\, d\nu - \int_0^1 \langle x_0,\varphi(0,\nu)\rangle\, d\nu\\ &+ \int_0^T\int_0^1 \langle x,[-\dot{\varphi}+A^*(\nu)\varphi]\rangle\, dt d\nu.\\ &= \int_0^1 \langle x(T,\nu)d\nu,\varphi_0\rangle\, d\nu - \int_0^1 \langle x_0,\varphi(0,\nu)\rangle\, d\nu\end{aligned}$$

En d'autres termes, nous avons l'identité de la dualité :

$$\left\langle \int_0^1 x(T,\nu)d\nu,\varphi_0\right\rangle = \int_0^T \left\langle u(t),\int_0^1 B^*(\nu)\varphi(t,\nu)d\nu\right\rangle dt + \left\langle x_0,\int_0^1 \varphi(0,\nu)d\nu\right\rangle$$

En conséquence, la condition de contrôlabilité (2.2) peut être reformulée comme suit :

$$\langle x_1,x_0\rangle = \int_0^T \left\langle u(t),\int_0^1 B^*(\nu)\varphi(t,\nu)d\nu\right\rangle dt + \left\langle x_0,\int_0^1 \varphi(0,\nu)d\nu\right\rangle \forall\varphi_0\in\mathbb{R}^n \tag{2.11}$$

Suite à la théorie classique de la contrôlabilité (voir [13], [14], [15]) cette identité peut être considérée comme l'équation d'Euler Lagrange associé à la minimisation d'une fonctionnelle quadratique appropriée sur la classe des solutions du système adjoint. Dans ce cas, la fonctionnelle est donnée par :

$$J(\varphi_0) = \frac{1}{2}\int_0^T \left|\int_0^1 B^*(\nu)\varphi(t,\nu)d\nu\right|^2 dt - \langle x_1,\varphi_0\rangle + \left\langle x_0,\int_0^1 \varphi(0,\nu)d\nu\right\rangle$$

On va résoudre le problème

$$(\mathcal{P}) : \{min J(\varphi_0),\varphi_0\in\mathbb{R}^n\}.$$

Donc le problème se réduit à preuver l'existence du minimiseur de J

• **Existence du minimum de J :**

La fonctionnelle $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue et convexe, il reste de preuver la coercivité de la fonctionnelle J, en d'autres termes l'existence d'une constante positive $C > 0$ tel que l'inégalité d'observabilité (2.8) satisfaite. Donc, il faut prouver que

$$\int_0^1 B^*(\nu)\hat{\varphi}(t,\nu)d\nu = 0 \quad \forall t \in [0,T] \Rightarrow \varphi_0 \equiv 0. \tag{2.12}$$

Pour étudier ce problème unique, en utilisant la forme explicite de la solution du problème adjoint :

$$\varphi(t,\nu) = exp[A^*(\nu)(T-t)]\varphi_0.$$

Donc

$$\int_0^1 B^*(\nu)\hat{\varphi}(t,\nu)d\nu = 0 \Rightarrow \int_0^1 B^*(\nu)exp[A^*(\nu)(T-t)]\varphi_0 = 0$$

A partir de ce moment l'analyse des exponentielles de la matrice, et l'argument classique consiste à prendre consécutivement les dérivés à l'instant $t = T$, ce qui équivaut à

$$\int_0^1 B^*(\nu)[A^*(\nu)]^k d\nu\varphi_0 = 0 \qquad \forall k \geq 0. \tag{2.13}$$

Alors, (2.13) est vérifié si et seulement si la condition de rang moyen est vérifié, c'est à dire

$$\int_0^1 B^*(\nu)[A^*(\nu)]^k d\nu \neq 0,$$

on conclut que $\varphi^0 = 0$ c'est-à-dire la fonctionnelle J est coercive.

• Condition d'optimalité :

La fonctionnelle J a un minimiseur $\hat{\varphi}_0$ qui est la solution correspondant du système adjoint au point T. Ce minimiseur est caractérisé par l'équation d'Euler Lagrange :

$$\nabla J(\hat{\varphi}_0) = 0;$$

peut voir que le contrôle donné par :

$$u(t) = \int_0^1 B^*(\nu)\hat{\varphi}(t,\nu)d\nu$$

$\hat{\varphi}$ est la solution du système adjoint paramétrisé associé au minimiseur $\hat{\varphi}^0$, qui assure la condition finale (2.2).

Remarques :

• Comme nous l'avons vu, l'état adjoint est représenté par la moyenne

$$\psi(t) = \int_0^1 \varphi(t,\nu)d\nu,$$

c'est à dire la moyenne de tous les états adjointes, pour toutes les valeurs de le paramètre ν, dont la dynamique ne peut pas être générée par une matrice donné.

• Le contrôle que nous avons construit en (2.9) est une moyenne des fonctions de la forme $B^*\varphi(t,\nu)$ pour chaque valeur du parametre ν ce qui constitue un contrôle mais pas nécessairement une trajectoire de la donnée initiale x_0 vers l'état finale x_1. En d'autres termes, lors de la résolution du système (2.1) pour une valeur donnée de ν avec $B^*\hat{\varphi}(T,\nu)$ que le contrôle que nous obtiendrions une valeur finale qui ne coïncide pas avec x_1. Le contrôle a été construit de telle sorte que la moyenne par rapport à ν des états a coïncidé avec x_1.

La preuve et la construction de la section précédente conduit au contrôle du norme minimal $L^2(0,T,\mathbb{R}^m)$ dans la catégorie de ceux admissibles. Nous pourrons également envisager des contrôles du norme minimal dans l'espace $L^1(0,T,\mathbb{R}^m)$ ou $L^\infty(0,T,\mathbb{R}^m)$ et cela conduirait à des contrôles de la forme bang-bang. En particulier, les dispositions suivantes est vérifiée :

Théorème 2.3.2. *[24]*
Sous la condition de rang moyenne (2.5) le contrôle moyenne du système (2.1) du norme minimal $L^2(0,T,\mathbb{R}^m)$ satisfaisante (2.2) est caractérisée par (2.9) où $\hat{\varphi}$ est la solution de système adjoint paramétrisé (2.7) associé au minimiseur $\hat{\varphi}$ de la fonctionnel J dans (2.10).
Dans les mêmes conditions, le contrôle de la norme minimale $L^\infty(0,T,\mathbb{R}^m)$ peut être construit en minimisant la fonctionnelle :

$$J_\infty(\varphi_0) = \frac{1}{2}\left|\int_0^T \left|\int_0^1 B^*(\nu)\varphi(t,\nu)d\nu\right| dt\right|^2 \tag{2.14}$$

et prend la forme bang-bang suivante :

$$u(t) = \int_0^T \left|\int_0^1 B^*(\nu)\hat{\varphi}(t,\nu)d\nu\right| dt signe\left[\int_0^1 B^*(\nu)\hat{\varphi}(t,\nu)d\nu\right]$$

.

2.4 Nulle-contrôlabilité moyenne

Dans le cadre du contrôle des systèmes avec des matrices (A, B) dépendente d'un paramètre réel, la propriétée de la contrôlabilité est équivalente à la notion plus faible de null-contrôlabilité dans lequel le cible est supposée être $x_1 = 0$; à cause de la linéarité et la solvabilité de l'équation d'état. Mais ce n'est pas le cas dans le cadre du contrôle moyen.

En effet, lorsque $x_1 = 0$, la fonctionnel à minimiser est réduite à

$$J_0(\varphi_0) = \frac{1}{2}\int_0^T \left| \int_0^1 B^*(\nu)\varphi(t,\nu)d\nu \right|^2 dt - \left\langle x_0, \int_0^1 \varphi(0,\nu) \right\rangle d\nu \tag{2.15}$$

La coercivité de la fonctionnelle, l'existence de son minimiseur et, en conséquence, la propriété de contrôlabilité moyenne nulle, serait alors garantie par la plus faible inégalité d'observabilité moyenne suivante :

$$\left| \int_0^1 \varphi(0,\nu)d\nu \right| \leq C \int_0^T \left| \int_0^1 B^*(\nu)\varphi(t,\nu)d\nu \right|^2 dt \tag{2.16}$$

pour tout $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$.

Mais celui-ci ne signifie pas nécessairement l'inégalité de coercivité plus fort (2.8). En effet, une estimation de $\int_0^1 \varphi(0,\nu)d\nu$ ne donne pas nécessairement une estimation sur φ_0.

Exemple :

Lorsque le paramètre ν prend deux valeurs arbitraires ν_1, ν_2 et les systèmes adjointes correspondants sont des oscillateurs harmoniques de sorte que les solutions correspondantes sont

$$\varphi_1(t) = \varphi_0 \cos(t - T);$$

et

$$\varphi_2(t) = \varphi_0 \cos(\pi/T + 1)(t - T).$$

Puis leur moyen à $t = 0$ disparaît indépendamment de la valeur de φ_0.

Ainsi, dans ce contexte moyenne, la contrôlabilité nulle ne signifie pas la contrôlabilité exacte du système.

Telles situations se produisent dans un cadre plus général dans lequel, par des considérations de symétrie et en raison de la dépendance même du système en ce qui concerne le paramètre ν, l'application

$$\varphi_0 \to \int_0^1 \varphi(0,\nu)d\nu;$$

est non réversible. Dans ces cas, il est logique d'analyser la contrôlabilité des moments supérieurs des solutions en ce qui concerne le paramètre ν.

Remarque :

La condition plus faible de la contrôlabilité nulle où la seule cible considéré est celle, $x_1 = 0$, est équivalente à l'inégalité d'observabilité plus faible (2.18).

2.5 Condition Initiale dépend de ν

Dans l'hypothèse (2.5) un résultat plus fort de contrôlabilité moyenne peut également être preuvée. On peut considérer les données initiales $x_0 = x_0(\nu)$ en fonction de ν de manière mesurable et bornée dans le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\nu)x(t) + B(\nu)u(t), \quad 0 < t < T, \\ x(0,\nu) = x_0(\nu). \end{cases} \tag{2.17}$$

Le problème de la contrôlabilité moyenne a un sens dans ce cas. La fonction à minimiser a ensuite être modifié face à la dependence de la donnée initiale avec ν. La fonction J qui doit être examiné est la suivante :

$$J(\varphi_0) = \frac{1}{2}\int_0^T \left|\int_0^1 B^*(\nu)\varphi(t,\nu)d\nu\right|^2 dt - \langle x_1, \varphi_0\rangle + \int_0^1 \langle x_0(\nu), \varphi(0,\nu)\rangle\, d\nu \tag{2.18}$$

La condition (2.5) étant complètement satisfaite, et l'inégalité d'observabilité (2.8) est vérifié , en conséquence, cette nouvelle fonctionnel est également coercive, assurer la propriété de la contrôlabilité moyenne pour ces données initiales plus générales. C'est le cas où une estimation sur φ_0 assure l'uniformité, par rapport au paramètre ν, estimant en $\varphi(t,\nu)$ et ce pour tout $0 \leq t \leq T$. Par conséquent, nous pouvons estimer $\int_0^1 \varphi(0,\nu)d\nu$ aussi.

De cette façon, nous pouvons considérer que la données initiale $x_0(\nu)$ est contrôlée en fonction de ν. Mais nous contrôlons seulement la moyenne des solutions par rapport à ν et pas l'état $x(T,\nu)$ pour chaque valeur du paramètre ν, tel qu'il survient dans le contexte de la contrôlabilité simultanée. Compte tenu les données initiales qui dépendent de ν peut-être pertinente dans les cas où les données initiales de système ne soit pas complètement connue.

Le fait que la quantité d'intérêt pour le contrôle est la moyenne de l'état et qui lié au système adjoint correspondant, de sorte que sa valeur φ_0 à l'instant $t = T$ est la même, indépendamment de ν.

Chapitre 3

Comparaison entre le contrôle simultané et le contrôle moyen

Notez également que le concept de contrôlabilité moyenne est plus faible de celle de contrôlabilité simultanée dont on est intéressé sur le contrôle de tous les états en même temps et non seulement sa moyenne. Donc, la notion de contrôle moyen est considéré plus faible au contrôle simultané d'une famille des équations différentielles ordinaires (ODE) dépendant de paramètres réel.

3.1 Position du problème

Soit $T > 0$, on considère le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

où A est la matrice d'état $n \times n$, B la matrice du contrôle $n \times m$, $u \in U$ est le contrôle avec $x(t)$ est l'état du système et x_0 la condition initiale.

Dans le cas du contrôle simultané, tous les composants du système sont destinés à contrôler avec le même contrôle, et pas seulement leur moyenne c'est à dire on cherche a résoudre le problème :
Pour tous les états x_0, x_1 dans l'espace d'état, existe il un temps fini T et un contrôle admissible $u(\cdot) : [0, \mathrm{T}] \to U$ tel que

$$x_1 = x(\mathrm{T}, x_0, u(\cdot)).$$

Remarque :

La contrôlabilité simultanée ne peut se produire dans des hypothèses assez restrictives sur la dépendance du système par rapport au paramètre inconnu.

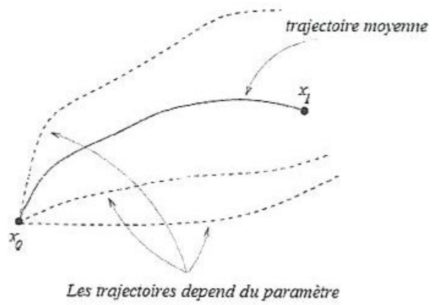
Pour la contrôlabilité moyenne, on considére le système linèaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\nu)x(t) + B(\nu)u(t), \quad 0 < t < T, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

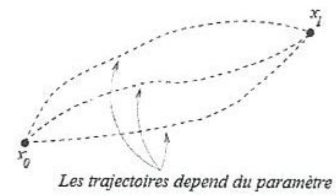
où ν est un paramètre réel et les matrices A et B sont supposées dépend de ν ; on va résoudre le problème :
Etant donné un temps de contrôle $T > 0$, x_0 est la données initiale et $x_1 \in \mathbb{R}^n$ est l'état final. On cherche un contrôle u tel que la solution de (3.2) vérifie la condition

$$\int_0^1 x(T, \nu) d\nu = x_1. \tag{3.3}$$

Dans la section suivante, on va comparer entre la contrôlabilité simultané -classique- de J.L.Lions [15] et la contrôlabilité moyennne de Enrique Zuazua [24].



La controlabilité moyenne.



La controlabilité simultané.

3.2 Cas d'un paramètre ν discret

Pour mieux comprendre la différence entre la contrôlabilité simultané et la contrôlabilité moyenne, nous considérons un cas simple dans lequel le paramètre ν est discret et prend deux valeurs, de sorte que le système considéré est

$$\begin{cases} \dot{x}_j(t) = A_j x_j(t) + B_j u(t), \quad 0 < t < T \\ x_j(0) = x_j^0. \end{cases} \tag{3.4}$$

avec $j = 1, 2$.

Pour rendre les choses encore plus simples, nous considérons un cas particulier dans lequel les deux opérateurs de commande coïncident :

$$B = B1 = B2.$$

Donc, on s'interesse au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_j(t) = A_j x_j(t) + B u(t), \quad 0 < t < T \\ x_j(0) = x_j^0. \end{cases} \tag{3.5}$$

avec $j = 1, 2$. On notera que ici les données initiales du système dépendent aussi de j.

Plus précisement, supposons que le cible x_1 est null c'est à dire $x_1 = 0$. Dans ce contexte, le problème de la commande simultanée est formulé comme suit : On cherche un contrôle $u = u(t)$ de telle sorte que la solution correspondante satisfait

$$x_1(T) = x_2(T) = 0.$$

Ce problème est appelé contrôle simultané tel que la même fonction u est supposé contrôler les deux composants x_j du système ; $j = 1, 2$.

De toute évidence, la commande simultanée est équivalente à la superposition de la propriété du contrôle moyen tel que la différence des deux états soit nulle :

$$x_1(T) - x_2(T) = 0$$

En conséquence, les deux notions peuvent être reliés par relaxer la condition sur le contrôle de la différence des deux ètats au

$$\|x_1(T) - x_2(T)\| \leq \varepsilon;$$

avec $\varepsilon > 0$.

1- **Lorsque** $\varepsilon \to 0$; cela conduit à un contrôle simultané chaque fois que les contrôles correspondants sont uniformément borné. Bien sûr, ce processus peut être réalisé sauf, lorsque le système considéré satisfait la condition de contrôlabilité simultanée.

2- **Lorsque** $\varepsilon \to \infty$, on retrouve la propriétée du contrôle moyen.

L'analyse du problème de contrôle simultané nécessite l'etude du système adjoint, mais avec différents données possibles à $t = T$ pour ses différentes composantes $j = 1, 2$

$$\begin{cases} -\dot{\varphi}_j(t) = A_j^* \varphi_j(t), \quad t \in [0, T] \\ \varphi_j(T) = \varphi_j^0. \end{cases} \tag{3.6}$$

En d'autres termes, la commande simultanée nécessite de considérer toute la classe des solutions du système adjoint. Alors, le problème d'observabilité correspondant verifie l'inegalité de l'energie

$$\left|\varphi_1^0\right|^2 + \left|\varphi_2^0\right|^2 \leq C \int_0^T \left|B^*(\varphi_1 + \varphi_2)\right|^2 dt \tag{3.7}$$

pour toutes $\varphi_1^0, \varphi_2^0 \in \mathbb{R}^N$. En d'autres termes, la contrôlabilité simultanée est vérifie si et seulement si l'inégalité d'observabilité (3.7) est satisfaite.

Remarque

Même si nous observons la moyenne des solutions de l'état adjoint par l'opérateur B^*, nous visons à récupérer la norme des données des deux composantes de l'état adjoint à le temps final $t = T$.

3.3 Condition de rang

La condition de la contrôlabilité moyenne est plus faible car il ne concerne que la sous classe des solutions du système adjoint dans lequel les données à le temps final $t = T$ sont indépendants du paramètre ν, qui, dans cet exemple particulier, serait correspondre au système (3.6) avec $\varphi_1^0 = \varphi_2^0$.

Théorème 3.3.1. *L'inégalité d'observabilité simultané (3.7) (et donc la contrôlabilité simultanée) satisfaite si et seulement si les deux paires $(A_1; B)$ et (A_2, B) satisfont à la condition de rang en vertu de la condition supplémentaire que les spectres des deux matrices A_1 et A_2 ne croisent pas.*

Preuve :Voir [24].

Remarque : Si les spectres des deux matrices A_1 et A_2 ne croisent pas, il faut que l'ensemble

$$[Ker(A_1 - \lambda I) \oplus Ker(A_2 - \lambda I)] \cap Ker(B)$$

est réduit à l'état nul. Mais, en particulier, la propriété d'observabilité simultanée nécessite l'observabilité de chacun des systèmes et par conséquent, la condition de rang à pourvoir par chacun des systèmes (A_j, B), $j = 1, 2$ et cette resultat ce reduit à partir de la condition de rang moyenne en (2.5).

On peut résumer la différence entre le contrôle moyen et le contrôle simultané dans ce tableau :

Contrôle moyen	**Contrôle simultané**
1- Contrôler la moyenne de l'état.	1- Contrôler tout les composantes de l'état.
2- L'observation est nécessaire uniquement pour les états adjoints tels que chaque composante écarte de la même donnée.	2- L'observation est nécessaire pour tous les états adjoints.
3 La minimisation est effectuée sur une sous-classe de solutions du système adjoint	3- La minimisation est effectuée sur toute la classe des solutions du système adjoint.

Exemple 1 :

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (1+\nu)x(t) + u, \\ \qquad x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec $\nu \in \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$, Ce système peut s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\nu)x(t) + Bu(t), \quad 0 < t < T, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.8}$$

tel que

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{\frac{1}{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1+\frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{\frac{1}{n}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Avec : $A = \begin{pmatrix} 1+1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1+\frac{1}{n} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors la matrice de kalman pour ce système est donnée par :

$$M = \left[B, AB, \dots A^{n-1}B\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1+1 & \dots & (1+1)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1+\frac{1}{n} & \dots & (1+\frac{1}{n})^{n-1} \end{pmatrix},$$

On remarque que cette matrice est la matrice de vondermonde, on sait que le determinant de cette matrice est donnée par :

$$detM = \prod_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right) \neq 0,$$

donc le système est contrôlable. Mais quand n tend vers ∞ ce determinant tend vers 0 , alors ce système avec l'ensemble du paramètre $\nu, \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

n'est pas contrôlable simultanément.

Exemple 2 :

Consédirons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu A x + B u, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; et \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; et \quad \nu \in \{1, 2\}$$

Fixons l'état final par $x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ et le temps T par 1.

Pour $\nu = 1$, on obtient le système

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + B u, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Pour $\nu = 2$, on obtient le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 2A x + B u, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Alors le système sera reformulé comme suit :

$$\begin{cases} \dot{y} = \nu \hat{A} y + \hat{B} u, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

Où

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \hat{B} = \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

et

$$y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1- Le système est-il contrôlable simultanement ? c'est à dire exist-il un contrôle u tel que : $x(1, \nu) = 0$.

Pour étudier la contrôlabilité simultanée du système ; Utilisons la condition de rang de Kalman i. e. $rangM = 4$?

la matrice de contrôlabilité sera donné par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $detM \neq 0$ donc $rangM = 4$, ce qui implique que le système est contrôlable (au sens classique).

2- Le système est-il contrôlable moyennement ? c'est à dire exist-il un contrôle u tel que :

$$\int_0^1 x(1, \nu) d\nu = 0.$$

Donc, pour contrôler le système moyennemennt il suffit de contrôler la moyenne :

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_3, x_2 + x_4)^t.$$

On va utiliser la condition de rang moyenne :

$$rang \left[\int_0^1 [A(\nu)]^j B(\nu) d\nu : \ j \geq 0 \right] = 4.$$

On a $A(\nu) = \nu.A, B(\nu) = B$. Dans ce cas,

$$rang \left[A^j B \int_0^1 \nu^j d\nu, \ j \geqslant 0 \right] = 4.$$

on obtient

$$rang\left[\frac{1}{1+j}A^jB,\ \ j \geqslant 0\right] = 4.$$

Donc la condition de rang moyen est équivalente à la condition classique :

$$rang[B, AB, A^2B, A^3B] = 4;$$

Conclusion

Ce travail est consacrée à aborder le problème du contrôle des systèmes dynamiques dépendant de paramètres réel. Nous utilisons la notion de contrôle en moyen de Enrique Zuazua selon laquelle la moyenne des Etats par rapport au paramètre d'incertitude est la quantité d'intérêt. Nous observons que cette propriété est équivalente à une observabilité moyenne appropriée selon laquelle la donnée initiale de la dynamique doit être déterminée au moyen des observations faites.

Nous allons d'abord présenté la notion du contrôle classique de J.L.Lions dans le contexte des systèmes de dimension finie et puis la notion du contrôle moyen. Enfin, nous allons comparé entre les deux notions dans un cas simple dans lequel le paramètre ν est discret et prend deux valeurs. La concept de contrôlabilité moyenne est plus faible de celle de contrôlabilité simultanée dont on est intéressé sur le contrôle de tous les états en même temps et non seulement sa moyenne. Donc, la notion de contrôle moyen est considéré plus faible au contrôle simultané d'une famille des équations différentielles ordinaires (ODE) dépendant de paramètres réel.

Bibliographie

[1] L. BADRAOUI, T. I. SEIDMAN, Some regional controllability issue for the heat equation, DRAFT, 1999.

[2] A. V. BALAKRISHNAN, Applied Functional Analysis, Springer, 1976.

[3] S. BARNETT, R. G. CAMERON, Introduction to Mathematical control theory, Second Edition Calendon Press, OXFORD, 1985.

[4] A. BOUTOULOUT, A El. JAI, E. ZERRIK, Actuators and Regional Boundary Controlability of Parabolic Systems, 1989.

[5] H. BREZIS, Analyse Fonctionnelle, Théorie et application, Masson, 1983.

[6] E. F. F. CARA, E. ZUAZUA, On the null controllability of the one-dimensional heat equation with non-smooth coefficients, 1996.

[7] A. El JAI, M. C. SIMON, E. ZERRIK, A. J. PRITCHARD, Regional Controlability of Distributed Parameter Systems. Int J Control, Vol 62, No 6, pp. 1351-1365, 1995.

[8] A. El JAI, E. ZERRIK, K. ZTOT, Systèmes dynamiques, Analyse et contrôle des systèmes localisés. Presses Universitaires de Perpignan, 2008.

[9] F.A.Khodja, A. Benabdallah, Une introduction à la théorie du contrôle, Note de Cours, 2005.

[10] J. KLAMKA, Controlability of dynamical systems, Kluwer, Academic Publishers, 1990.

[11] J. L. LIONS, Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Dunod. Paris, 1968.

[12] J. L. LIONS, Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbation des systèmes distribuès, Vol 1. Masson, 1988.

[13] J. L. LIONS, Controllability, penalty and stiffness, Anal, Scie, Nor, Serie 4, Tome 25, N 3-4, pp. 597-610, 1997.

[14] J. L. LIONS, Sur la théorie du contrôle, Canadian Mathematical Congress, 1975.

[15] J. L. LIONS, Quelques notions dans l'analyse et le contrôle de systèmes à données incomplètes, in Proceeding of the 11 th Congress on Differential Equations and Applications, Univ Màlaga, Spain, pp. 43-54, 1990.

[16] Y. LIU, Analyse et contrôle de quelques problèmes d'interaction. Fluide-Structures, Thèse de Doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy I, 2011.

[17] C. Lobry, T Sari, Introduction à la théorie du contrôle, Note de Cours, l'école du CIMPA, 2003.

[18] O. NAKOULIMA, Controlabilité à zéro avec contraintes sur le contrôle. C. R. Acad. Sci. Serie. I, 339, pp. 405-410, 2004.

[19] J. P. PUEL. Contrôlabilité approchée et contrôlabilité exacte, Notes de cours de D.E.A., Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2001.

[20] E. TRELAT, Contrôle optimal : Théorie et applications. Note de Cours, 2005.

[21] P. K. C. WANG, Control of distributed parameter systems. Advances in control systems. Academic press. Vol 11, 1964.

[22] E. ZERRIK, A. AFIFI, A. El JAI, Systèmes dynamiques, Analyse régionale des systèmes linéaires distribués. Tome 2, Presses Universitaires de Perpignan, 2008, Université de Paris-sud, 2000.

[23] E. ZERRIK, Analyse Régionale des systèmes distribués. Thèse doctorat. Université Mohamed.V. Rabat, Maroc, 1993.

[24] E. Zuazua, Averaged Control. J. Automatica, 2014.

[25] E. Zuazua,Q.Lu, Averaged controllability for parameter-dependent Evolution Partial Differential Equations. J. Automatica, 2014.

[26] E. Zuazua, M. Lazar, Averaged control and observation of parameter-depending wave equations. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. 2014.

[27] E. Zuazua,J. Lohéac,, From averaged to simultaneous controllability of parameter dependent finite-dimensional systems, Advanced Grants of the European Research Council. 2015