République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de L'informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par : **MADI Nour Elhouda & ZERGUINE Imene**

Intitulé

Théoreme de Krasnoselskii et Schaeffer et leur aplication

Dirigé par :
Dr. Zankoufi Leila
Devant le jury

PRESIDENT	Dr. DEBBOUCHE Amar	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. ZANKOUFI Leila	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEU	Dr. REZGUI Nassima	MCA	Univ-Guelma

Session Juillet 2019

Table des matières

Remerciements

"Le succès est un voyage pas une destination, l'accomplissement est souvent plus important que le résultat". Ces cinq années d'étude nous ont permis de bien comprendre la signification de cette phrase toute simple. Ce parcours, en effet, ne s'est pas réalisé sans défis et sans soulever de nombreuses questions pour lesquelles les réponses nécessitent de longues heures de travail.

Tout d'abord, nous remercions ALLAH, le tout puissant qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces langues années d'étude.

En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreur **Mme L. ZENKOUFI**, Pour son soutien, ses conseils et son aide précieuse, merci infniment.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Comme nous rendons un vibrant hommage à nos parents et à nos sœurs et frères pour nous avoir inculqué le goût d'apprendre, et nous avoir encouragé sans cesse pour aller plus loin.

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à tous les professeurs qui nous ont enseigné et qui par leurs compétences nous ont soutenu dans la poursuite de nos études.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

NOUR EL HOUDA MADI

C'est avec un grand plaisir que je dédie ce travail à :

Mes parents, qui ont consacré leur existence à bâtir la mienne, quoi que je dise ou que je fasse, je ne saurai point vous remercier comme il se doit. votre affection me couvre, votre bienveillance me guide et votre présence à mes cotés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles. Que ce travail traduit ma gratitude et mon affection.

Mes trés chers fréres AMINE et ABDERAHMEN et mes plus belles soeurs LYNA et ROA avec qui j'ai partagé les plus beaux moments, pour leur soutien infinis et leures aide incessantes, puisse ALLAH vous donne santé, bonheur, courage et surtout réussite.

Mon ame soeur MYRA et mes amies de toujours : WISSEM, BICHA, SARRA et KHOULOUD, pour leur sincère et profonde amitié, leur confiance, leur encouragement et pour les moments agréables que nous avons passés ensemble. Et j'espère conserver à jamais les souvenir et les lies qui nous unissent.

Mon binôme et sa famille.

Tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation.

Tous ceux qui me sont chers et que j'ai omis de citer.

Dédicaces

IMENE ZERGUINE

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leur prières tout au long de mes études.

A mes chères soeurs Amel et Halima, pour leur encouragement permanents, et leur soutien moral.

A mon frère Ahmed, pour son encouragement.

A toute ma famille, pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

Que ce travail soit l'accomplissement de vos voeux tant allégués, et le fuit de votre soutien infaillible.

Merci d'être toujours la pour moi.

Résumé

Dans ce memoire, on va présenter quelques théorèmes de point fixe tels que, le théorème de Banach, de Brower, de Schauder et le théorème de schaeffer et on accordera plus d'importance aus théorème de Krasnoselskii.

On va commencer par rappelé quelques notions de base de l'analyse fonctionnelle et des résultats connus qu'on va utiliser dans la suite de notre travail, en suite on va étudier quelques théorèmes de point fixe, et on va parler aussi d'un théorème qui est un mélange du théorème de **Krasnoselskii**, de **Schaeffer** et celui de Boyd et Wong qu'on va appeler Théorème de **Krasnoselskii-Schaeffer**, finalement on va presenter une application du dernier théorème.

ملخص

في هذه المذكرة، سنقدم بعض نظريات النقطة الصامدة، مثل نظرية باناخ، وبروير، ونظرية شودر ونظرية شيفر، وسنولي الأهمية لنظرية كراسنوسيلسكي.

سنبدأ أولا بالتذكير ببعض المفاهيم الأساسية للتحليل الدالي ونتائج معروفة سيتم استخدامها في بقية عملنا، بعدها سنقوم بدراسة بعض نظريات النقطة الصامدة، وسنتحدث أيضًا عن نظرية مهمة والتي هي مزيج من نظرية كراسنوسيلسكي، ونظرية شيفير وبويد و ونغ، والتي سوف نطلق عليها نظرية كراسنوسيلسكي شيفر، و في الأخير سنقدم تطبيقًا للنظرية الأخيرة.

Introduction

La plupart des phénomènes naturels de la vie réelle (en physique, en chimie, en mécaniques, en économie...) s'expriment mathématiquement sous forme d'équation différentielle non linéaire. De nombreuses questions liées à l'existence et à l'unicité de solution de certains types d'équation peuvent être ramenées à la question d'existence et d'unicité d'un point fixe définie sur un espace métrique.

La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude de l'existence de solution, et de nombreux théorèmes d'existence sont obtenus a partire des théorèmes de Banach et Schauder en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe.
En analyse, un théorème de point fixe est un résultat qui affirme, qu'une fonction f possède au moins un point fixe, avec quelques conditions sur f. Un point fixe d'une fonction f qui est définie dans un espace métrique X vers lui même, est un élément $x \in X$ qui vérifie $f(x) = x$. Ces théorèmes présente un outil très utile en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

Dans ce mémoire, on va étudier quelques théorèmes du point fixe de Banach, de Brouwer, de Schauder et le théorème de krasnoselskii et quelques-unes de leurs applications, on va parler aussi du théorème de **Krasnoselskii-Schaeffer** qui est un mélange du théorème de **Krasnoselskii**, de **Schaeffer** et celui de Boyd et Wong.

Ces résultats théoriques nous permettent de résoudre certains problèmes comme par exemple, trouver les zéros d'un polynôme, ou prouver que certaines équations différentielles admettent des solutions.

Le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922 dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique.

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

En 1955, et pour la première fois, Krasnoselskii a élaboré son théorème du point fixe. Krasnoselski a joint les deux résultats de Banach et de Schauder afin d'entirer son théorème qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractane et l'autre compacte admet un point fixe. Ce théorème est très efficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires, il apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité.

De cette théorie découlent plusieurs applications qui constituent un domaine très actif de la rechèrche....

Ce travail est réparti en quatres chapitres :

Le premier chapitre se compose notament des rappels de quelques résultats théoriques, et notions de base de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisées dans les chapitres qui suivent.

Dans le deuxième chapitre, on va présenter quelques résultats de la théorie du point fixe, où on va étudier le théorème de Banach, le théorème de Brower et le théorème Schauder.

Dans le troisième chapitre, on va présenter le théorème de **Schaeffer**, de **Krasnoselskii** et le théorème de **Krasnoselskii-Schaeffer** qui est un mélange du théorème de **Krasnoselskii**, de **Schaeffer** et celui de Boyd et Wong.

Dans le quatrième chapitre, on donnera une application du théorème de **Krasnoselskii-Schaeffer,** et comme application on va démontrer en utilisant des fonctions L^1-caratheodory, l'existence de solutions pour des equations intégrales de type

$$x\,(t) := q(t) + \int_0^{\mu(t)} v\,(t,s)\,x\,(\theta\,(s))\,ds + \int_0^{\sigma(t)} k\,(t,s)\,g\,(s,x\,(\eta\,(s)))\,ds,\;\; t \in J = [0,,1],$$

avec

$$q : J \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v\ et\ k : J \times J \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

et

$$\mu, \theta, \sigma, \eta : J \longrightarrow J.$$

Chapitre 1

Rappels

Résumé

Dans ce chapitre on va rappeler des définitions de quelques notions de base de l'analyse fonctionnelle et des résultats connus qu'on va utiliser dans la suite de notre travail.

1.1 Introduction

Les espaces de base de l'analyse fonctionnelle sont les espaces vectoriels normé complets sur le corps des nombres réels ou des nombres complexes. De tels espaces sont appelés les espaces de Banach. Les espaces de Hilbert constituent un cas particulier important, ou la norme est issue d'un produit scalaire.

1.1.1 Quelques rappels

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé (e.v.n) sur un sous-corps $\Bbbk$ (en général $\Bbbk = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.), complet pour la distance issue de sa norme.

Soit V un e.v normé.

Définition 1.1 *(ouvert).*

Un ensemble $O \subset V$ est ouvert dans V si $\forall x \in O$, $\exists\ \epsilon$ tel que $B(x, \epsilon) \subset O$ avec $B(x, \epsilon) = \{y \in V;\ ||x - y||_V < \epsilon\}$ boule ouverte de centre x et de rayon ϵ.

Définition 1.2 *(fermé).*

Un ensemble $F \subset V$ est fermé dans V si $V \backslash F$ est ouvert dans V.

Définition 1.3 *(convergence).*

Soit u_n une suite de V. On dit que u_n converge vers $l \in V$ si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$; $\|u_n - l\|_V \leq \epsilon$

Définition 1.4 *(convexe).*

On dit qu'une partie A de V est convexe si pour tout $x, y \in A$, on a pour tout $t \in [0,\ 1]$, $tx + (1 - t)y \in A$.

ce qui signifie que le segment joignant x et y est entrièrement contenu dans A.

Définition 1.5 *(espace metrique complet)*

On dit que l'espace métrique (V, d) est complet si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de V converge dans V.

Définition 1.6 *Soit* $I \subset \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *On dit que l'intervalle* I *est* ***stable*** *par la fonction* f *lorsque* $f(I) \subset I$.

Définition 1.7 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur I. On dit que* x *est un point fixe de* f *lorsque* $f(x) = x$.
En d'autres termes, les points fixes de f *sont les solutions, lorsqu'elles existent de l'équation* $f(x) = x$.

Proposition 1.1

1) Toute suite convergente est de Cauchy.

2) Toute suite extraire d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

3) Toute suite de Cauchy est bornée.

4) Toute suite de Cauchy qui possède une suite extraire convergente est converge.

Proposition 1.2 *Tout espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *normé de dimension finie est complet.*

Définition 1.8 *Une norme est une application définie sur* V *(ev) réel, à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$, *notée* $||.||_V$, *et satisfaisant les trois propriétés suivantes :*

(i) $\|v\|_V = 0 \Longleftrightarrow v = 0$,

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V$, $\|\lambda v\|_V = |\lambda| \ \|v\|_V$.

(iii) Inégalité triangulaire: $\forall v, w \in V$, $\|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V$.

Définition 1.9 *Un ensemble* $A \subset V$ *est compact si de toute suite d'élements de* A, *on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de* A.

Proposition 1.3

1) Si V *est compact et si* A *est une partie fermée de* V, *alors* A *est compacte.*

2) Si A *est une partie compacte de* V *; alors* A *est fermée et bornée.*

Proposition 1.4 *Si* V *est de dimension finie, alors* A *est compact si et seulement si* A *est fermé et borné.*

Définition 1.10 *Soit V un espace topologique séparé.*

Un sous-ensemble F de V est relativement compact si son adhérence $\overline{F}$ est compacte.

Le sous-ensemble F est dit précompact si son complété est compact.

Evidemment, lorsque V est lui-même complet, les deux notions sont équivalentes.

Définition 1.11 *Soit $||.||_{V,1}$, et $||.||_{V,2}$ deux normes sur V. On dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe c_1 et c_2 strictement positives telles que*

$$\forall v \in V, c_1 \|.\|_{V,2} \leq \|.\|_{V,1} \leq c_2 \|.\|_{V,2} .$$

Si $\|.\|_{V,1}$, et $\|.\|_{V,2}$ sont deux normes équivalentes sur V, on a l'équivalence :

$$u_n converge\ vers\ l\ suivant\ \ \|.\|_{V,1} <=> u_n\ converge\ vers\ l\ suivant\ \ \|.\|_{V,2} .$$

Proposition 1.5 *Si V est de dimension finie, alors toutes les normes sont équivalentes.*

Proposition 1.6 *Soit V un e.v normé.*

La norme sur V est ***une application continue****, autrement dit la fonction $\varphi : v \in V \longmapsto \|.\|_V \in \mathbb{R}$ est continue.*

En effet on a $\|\varphi(v) - \varphi(w)\| \leq \|v - w\|_V$ et φ est lipschitzienne donc continue.

1.1.2 Applications continues d'un espace compact

Rappelons que toute fonction numérique continue sur un intervalle fermé borné atteint ses bornes inférieure et supérieure. Cette propriété implique que $f([a, b]) = [m, M]$ lorsque $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Définition 1.12 ***(Continuité en un point).***

Soient I un intervalle, f une fonction définie sur I et $a \in I$.

On dit que f est continue en a lorsque f admet une limite en a égale à $f(a)$.

Définition 1.13 ***(Continuité sur un intervalle).***

Soient I un intervalle, f une fonction définie sur I.

On dit que f est continue sur I lorsque f admet une limite en tout point de I.

Définition 1.14 ***(Continuité absolue)***

Soit I un intervalle réel, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est absolument continue si,

$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ *tel que pour toute suite finie $([a_n, b_n])_{n \leq N}$ de sous intervalle de I d'interieurs disjoints,*

$$\sum_{n \geq 0} (b_n - a_n) < \eta \implies \sum_{n \geq 0} | f(b_n) - f(a_n) | < \epsilon.$$

Propriètés :

♣ F absolument continue sur I alors, elle est continue sur I.

♣ F est absolument continue sur I si et seulement s'il existe une fonction integrale f sur I (au sens de Lebesgue) telle que :

$$\forall x \in I : F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt.$$

Définition 1.15 ***(Continuité uniforme).***

Soit I un intervalle réel, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue si,

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \ \exists y \in I, \ | y - x | \leq \eta \implies | f(y) - f(x) | \leq \epsilon.$$

Théorème 1.1 (Théorème des valeurs intermédiaires) *: Soient I un intervalle, a et b inclu dans I avec $a < b$, f une application continue sur l'intervalle I, et λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.*

Alors : il existe (au moins) un réel c dans $[a,b]$ tel que : $f(c)=\lambda$.
(Autrement dit : l'équation $f(x)=\lambda$ admet au moins une solution dans $[a,b]$)

***Théorème 1.2** (**théorème des accroisements finis**) :*
Si f est une fonction $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe c de $]a,b[$ tel que

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

1.1.3 Théorème d'Arzéla-Ascoli

On va rappeler le théorème d'Ascoli qui concerne les compacts, qui constitue un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle [7].

Définition 1.16 *une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur un interval $I=[a,b]$ est uniformément bornée s'il existe un nombre M tel que*

$$|f_n(x)|\leq M, \quad x\in I.$$

Pour toute fonction f_n appartenant à la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et pour tout $x,y\in[a,b]$, la suite est équicontinue si pour tout $\varepsilon>0$, il existe un $\delta>0$

$$\text{tel que} \quad |x-y|<\delta;\ \text{alors,}\ |f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon.$$

Définition 1.17 *(**Equicontinuité**).*

Soit $\mathcal{F}$ une famille d'applications $X\longrightarrow Y$ où X est un espace topologique et Y un espace métrique. On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue si, pour tout $\epsilon>0$ et tout $x\in X$ il existe un voisinage V_x de x dans X tel que :

$$d(f(x),f(y))<\epsilon \text{ pour tout } f\in F \text{ et tout } y\in V_x.$$

Si X est aussi métrique, $\mathcal{F}$ est dite uniformément équicontinue si pour tout $\epsilon>0$ il *existe $\alpha > 0$ tel que pour tous x, y vérifiant*

$$d(x, y) < \alpha,$$

et tout $f \in \mathcal{F}$, on ait

$$d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Enoncé

Théorème 1.3 *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et supposons que X compact. Alors, une partie $\mathcal{F}$ incluse dans $C(X, Y)$ est relativement compacte (i.e, d'adhérence compact) pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si on a les deux conditions suivantes :*

- La famille $\mathcal{F}$ est équicontinue en tout point de X.

- Pour tout $x \in X$ l'ensemble des $f(x)$ pour $f \in \mathcal{F}$ est relativement compact ; i.e, $\mathcal{F}(x) := \{f(x), \quad f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact pour tout $x \in X$.

Définition 1.18 *(Boyd Wong [2]) Soit X un espace de Banach, l'application $A : X \longrightarrow X$ est dite contraction non linéaire (ou $\phi-$contraction) s'il existe une application $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que*

$$\|Ax - Ay\| \leq \phi(\|x - y\|)$$

pour tout x, $y \in X$, avec $\phi(r) < r$, $\forall r > 0$. En particulier si $\phi(r) = \alpha r$, $0 < \alpha < 1$, A est dite contraction de constante α.

Définition 1.19 [9] *Soit X un espace normé, l'application $A : X \longrightarrow Y$ est dite compacte si elle satisfait les conditions suivantes*

i. A est continue.

ii. A transforme tout ensemble borné de X en un ensemble relativement compact (i.e. ensemble de fermeture compacte).

Il est clair que la condition $ii.$ est équivalente à dire : Si $\{u_n\}$ est une suite bornée de X, alors il existe une sous suite $\{u'_n\}$ de $\{u_n\}$ telle que $\{Au'_n\}$ converge dans Y.

Chapitre 2

Résultats de la théorie du point fixe

Résumé

Dans ce chapitre, on va présenter quelques résultats de la théorie du point fixe, on va étudier le théorème de Banach, le théorème de Brower et le théorème Schauder.

2.1 Théorèmes du point fixe

Présentons maintenant quelques résultats de la théorie du point fixe.

Définition 2.1 *Soient (E, d_E) et (F, d_F) des espaces métriques, $f : E \to F$ une application et k un réel positif.*
*On dit que f est **lipschitzienne** si :*

$$\forall : (x, y) \in E^2, \ d_F\left(f(x), f(y)\right) \leq k \ d_E(x, y).$$

Définition 2.2 *Une application **contractante** est une application lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$.*

Théorème 2.1 *(**Théorème de point fixe**).*

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$.

Si $f(I) \subset I$ (I stable par f), alors f admet (au moins) un point fixe sur I. (C'est-à-dire : il existe (au moins) un réel x de I tel que $f(x) = x$).

Preuve. *Considérons la fonction g définie sur $I = [a, b]$ par*

$$g(x) = f(x) - x$$

Montrons que $0 \in g(I)$. On a

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - a \in g(I) \\ g(b) &= f(b) - b \in g(I) \end{aligned}$$

Or, comme $f(I) \subset I$, on a

$$f(a) \geq a \quad et \quad f(b) \leq b,$$

c'est -à-dire

$$g(a) \geq 0 \quad et \quad g(b) \leq 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $x \in I$ *tel que*

$$g(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = x.$$

■

2.1.1 Un Théorème du Point Fixe Métrique.

Ce théorème donne **l'existence** et **l'unicité** d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

Théorème 2.2 ***(Banach).***

Soient $(E; d)$ *un espace métrique complet et* $f : E \longrightarrow E$ *une application contractante,* $i.e$; *Lipschitzienne de rapport* $k < 1$.

Alors, f *admet un unique point fixe* $a \in E$.

De plus, pout tout point initial $x_0 \in E$, *la suite itérée* $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$, *avec* $x_0 \in E$ *quelconque et* $x_{p+1} := f(x_p)$ *converge vers* a.

Preuve.

1. Existence :

Soit x_0 un point initial quelconque et (x_p) la suite itérée associée. On a

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(f(x_{p-1}), f(x_p)) \quad p \geq 1.$$

On va prouver que (x_p) est une suite de Cauchy dans E. pour $p < q$, on utilise l'inigalité triangulaire

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + ... + d(x_{q-1}, x_q).$$

Puisque f est une contraction, on a

$$\begin{aligned} d(x_p, x_{p+1}) &= d\left(f(x_{p-1}), f(x_p)\right) \\ &\leq kd(x_{p-1}, x_p), \quad p \geq 1. \end{aligned}$$

En répétant cette inégalité, on obtient

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq \left(k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &\leq k^p \left(1 + k + ... + k^{q-p-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &\leq k^p \left(\frac{1}{1-k}\right) d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

On en déduit alors que (x_p) est une suite de Cauchy. Comme (E, d) est complet, la suite (x_p) converge vers un point limite $a \in E$.

Par ailleurs puisque f est continue, on a :

$$a = \lim_{p\to\infty} x_p = \lim_{p\to\infty} f(x_{p-1}) = f\left(\lim_{p\to\infty} x_{p-1}\right) = f(a).$$

Donc a est un point fixe de f (i.e, $f(a) = a$).

2. Unicité :

Supposons qu'il existe $a, b \in E$, $a \neq b$, tels qu'on ait $f(a) = a$ et $f(b) = b$.

Alors, on a

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a, b)$$

ce qui implique que : $d(a, b) = 0,$ i.e. $a = b.$ (puisque $k < 1$) . ■

Nous allons montrer que les hypothèses du théorème de point fixe de Banach sont essentielles : si nous en négligeons seulement une, alors le point fixe n'existe pas.

Exemple 2.1 *Les exemples suivant montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire : si nous négligeons seulement une, alors le point fixe n'existe pas.*

(**1**).

X ***n'est pas stable par*** f **:** $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ *sur* $X = [0,1]$.

Or X *est fermé dans* $\mathbb{R}$, *et complet car* $\mathbb{R}$ *est complet.*

De plus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \\ \sup_{x\in X}\left|f'(x)\right| &< 1 \Longrightarrow f \quad \textit{est contractante.} \end{aligned}$$

Mais f *n'a pas de point fixe car*

$$f([0,1]) = \left[1, \sqrt{2}\right],$$

i.e; X *n'est pas stable par* f.

(**2**).

f ***n'est pas contractante :***

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

sur $X = [0, \infty[$.

Or $f : X \to X$ *et* X *est un fermé de* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ *est complet donc* X *est complet.*

Mais ;

$$\sup_{x\in X}\left|f'(x)\right| = 1$$

$\Longrightarrow f$ *n'est pas contractante.*

$(\mathbf{3})$.

X ***n'est pas complet :***

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

sur $X = \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Or

$$\begin{aligned} f\left(\left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right) &= \left]0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{4}\right], \\ \sup_{x \in X} \left|f'(x)\right| &= \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow f \text{ est contractante.} \end{aligned}$$

Mais X *n'est pas fermé dans* $\mathbb{R}$ *donc n'est pas complet.*

Les théorèmes de point fixe suivants peuvent être trouvé réunis dans le livre de D. R. Smart [8] (voir aussi [9]).

2.1.2 Un Théorème du Point Fixe Topologique

Ce théorème (**de Brouwer**) donne **l'existence** d'un point fixe (mais pas nécessairement l'unicité) pour une fonction continue sur une boule fermé dans un espace de dimension finie

Théorème 2.3 *Soit* K *une partie non vide, compacte et convexe de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : K \to K$ *une fonction continue. Il existe* $x \in K$ *tel que* $f(x) = x$.

Remarque : Les parties convexes et compactes de $\mathbb{R}$ sont les segments.
Le théorème de Brouwer prend donc dans le cas $n = 1$ la forme particulière suivante :

Théorème 2.4 *Si* $f : [a;b] \to [a;b]$ *est continue, alors il existe* $x \in [a;b]$ *tel que* $f(x) = x$.

Preuve. Si f est continue de $[a,b]$ dans lui-même , la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x \geq 0$ est continue, prend en a la valeur $f(a) - a \geq 0$ et en b la valeur $f(b) - b \leq 0$.

Alors : par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule en un point x_0, qui est un point fixe de f. ■

Remarque 2.1 1. *L'hypothèse " I fermé " n'est là que pour assurer que $x_0 \in I$. Si on sait déjà, par ailleurs, que $x_0 \in I$ (en pratique, on a parfois déjà calculé ℓ en résolvant l'équation $f(x_0) = x_0$), cette hypothése devient inutile.*

2. *Le théorème du point fixe ne s'applique pas si l'on remplace l'hypothèse "f contractante sur$I$ " par l'hypothèse "f 1-lipschitzienne sur I ".*

Exemple 2.2 *Voici un **contre-exemple** :*

Soit, $I = [1, +\infty[$ et

$$f : I \to I$$

telle que,

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Soient x et y dans I avec $x < y$.

Comme la fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$, on a :

$$|f(y) - f(x)| \leq f(y) - f(x)$$

donc,

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x + \frac{x - y}{xy}$$

alors,

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x \leq |y - x| .$$

Ce qui prouve que f est 1-lipschitzienne sur I.

Cependant f n'a pas de point fixe sur I. (L'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution)

2.1.3 Le Théorème de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer **l'existence** d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Théorème 2.5 *(Schauder).*

Soient E un espace de Banach et $K \subset E$ convexe et compact. Alors toute application continue $f : K \to K$ possède un point fixe.

Preuve. Soit $f : K \to K$ une application continue. Comme K est compact, f est uniformément continue ; donc, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout x, $y \in K$, on ait

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon, \text{ dès que } \|x - y\| \leq \delta$$

De plus, il existe un ensemble fini des points $\{x_1, ..., x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_j recouvrent K ;

$i.e$,

$$K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq P} B(x_j, \delta).$$

Si on désigne $L := Vect\left(f(x_j)\right)_{1 \leq j \leq P}$, alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq P$, on définit la fonction continue $\psi_j : E \to \mathbb{R}$ par

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinonn} \end{cases}$$

et on voit que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors.

On a donc, pour tout $x \in K$, $\sum\limits_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$, et donc on peut définir sur K les fonctions continues positives φ_j par

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum\limits_{k=1}^{p} \psi_k(x)}$$

pour lesquelles on a $\sum\limits_{i=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$, pour tout $x \in K$.

On pose alors, pour $x \in K$,

$$g(x) := \sum_{i=1}^{p} \varphi_j(x) f(x_j).$$

g est continue (car elle est la somme des fonctions continues), et prend ses valeurs dans K^* (car $g(x)$ est un barycentre des $f(x_j)$).

Donc, si on prend la restriction $g_{/K^*} : K^* \to K^*$, g possède un point fixe $y \in K^*$. De plus,

$$\begin{aligned} f(y) - y &= f(y) - g(y) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_j(y) f(y) - \sum_{i=1}^{p} \varphi_j(y) f(x_j) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \varphi_j(y) (f(y) - f(x_j)) \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$, alors

$$\|y - x_j\| < \delta,$$

et donc

$$||f(y) - f(x_j)|| < \epsilon.$$

Donc, on a pour tout j,

$$\left\|\varphi_j(y) (f(y) - f(x_j))\right\| \leq \epsilon \varphi_j(y),$$

et donc

$$\|f(y) - y\| \leq \sum_{i=1}^{p} \left\|\varphi_j(y) (f(y) - f(x_j))\right\| \leq \sum_{i=1}^{p} \epsilon \varphi_j(y) = \epsilon$$

Donc, pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que

$$\|(f(y_m) - y_m)\| < 2^{-m}$$

Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous-suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in K$.

Alors f étant continue, la suite $(f(y_{m_k}))$ converge vers $f(y^*)$ et on conclut que

$$f(y^*) = y^*,$$

$i.e$, y^* est un point fixe de f sur K. ■

Exemple 2.3 *Etude de la convergence de la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 \in [-1, +\infty[\\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

On utilisant le théorème suivant :

Théorème 2.6 [7] *Soit g une fonction continue définie sur un intervalle I. On suppose de plus que lintervalle I est stable par g.*

Théorème 2.7 *Si la suite récurrente (u_n) converge, c'est nécessairement vers un point fixe de g.*

On peut introduire l'application f définie sur $[-1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = \sqrt{1 + x}$$

***Point fixe** de f :*

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1 + x} = x \Leftrightarrow x \geq 0$$

et

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

On montre facilement que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$, croissante sur $[-1, +\infty[$, puis que :

$$f([-1, +\infty[) = [0, +\infty[\subset [-1, +\infty[$$

L'intervalle $I = [-1, +\infty[$ est donc stable et la suite (u_n) est bien définie.

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \ |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \ \ |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |b-a| .$$

Donc, f *est* $\frac{1}{2}$*-lipschitzienne sur* I*, donc contractante sur* I*.*

En outre :

$$f(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+.$$

Donc, $\mathbb{R}_+$ *est stable par* f *.*

D'après le théorème du point fixe, la suite (u_n) *définie par*

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

converge donc vers λ*.*

Enfin, si $u_0 \in [-1, \infty]$ *alors* $u_1 \in \mathbb{R}_+$ *et d'après ce qui précède* (u_n) *converge encore vers* λ*.*

Chapitre 3

Théorèmes de Krasnoselskii et de Schaeffer

Résumé

Dans ce chapitre on va étudier le théorème de Schaeffer, de Krasnoselskii et et quelques une de ses versions, et le théorème de **Krasnoselskii-Schaeffer** qui est un mélange du théorème de **Krasnoselskii**, de **Schaeffer** et celui de Boyd et Wong.

3.1 Théorèmes de Krasnoselskii et de Schaeffer

Citons maintenant le théorème de **Schaeffer** et le théorème hybride de **Krasnoselskii,** qui est une combinaison comme on va le voir, du théorème de **Schauder** et celui de **Banach**. Il a été l'objet de plusieurs études ces dernières années et on le rencontre sous plusieurs formes.

Nous avons tiré le théorème de **Schaeffer** et le théorème hybride de **Krasnoselskii** de [8] et nous conseillons au lecteur intéressé de le consulter pour plus de détails.

Définition 3.1 *Soit X un espace normé, l'application $A : X \to Y$ est dite compacte si elle satisfait les conditions suivantes :*

i : A est continue.

ii : A transforme tout ensemble borné de X en un ensemble relativement compact (i.e.ensemble de fermeture compacte).

Théorème 3.1 ***(Schaeffer)*** *Soit X un espace de Banach et soit $A : X \longrightarrow X$ une application compacte, alors*
i. L'équation $x = \lambda Ax$ admet une solution pour $\lambda = 1$,
ii. Ou bien, l'ensemble $\varepsilon = \{x \in X,\ x = \lambda Ax,\ \lambda \in (0, 1)\}$ est non borné.

Théorème 3.2 ***(Krasnoselskii)*** *Soit M un convexe fermé et non vide d'un espace de Banach $(X, \|.\|)$. Supposons que A et B sont deux applications de M dans X telles que*
i. $Ax + By \in M, \forall x, y \in M$.
ii. A est continue et AM est contenu dans un ensemble compact.
iii. B est une contraction de constante $\alpha < 1$.
Alors, il existe $x \in M$, avec $Ax + Bx = x$.

Notons, que si $A = 0$, le théorème se résume au théorème de **Banach**. Si $B = 0$, alors le théorème n'est autre que le théorème de **Schauder**.

Preuve. D'après la condition (iii). on a

$$\begin{aligned}\left\|(I-B)(x)-(I-B)(y)\right\| &= \left\|(x-y)-(Bx-By)\right\| \\ &\leq \|x-y\|+\|Bx-By\| \\ &\leq \|x-y\|+\alpha\|x-y\| \\ &\leq (1+\alpha)\|x-y\|\end{aligned}$$

D'aute part,

$$\begin{aligned}\left\|(I-B)(x)-(I-B)(y)\right\| &= \left\|(x-y)-(Bx-By)\right\| \\ &\geq \|(x-y)\|-\|Bx-By\| \\ &\geq \|x-y\|-\alpha\|x-y\| \\ &\geq (1-\alpha)\|x-y\|\end{aligned}$$

En résumé,

$$(1-\alpha)\|x-y\| \leq \left\|(I-B)(x)-(I-B)(y)\right\| \leq (1+\alpha)\|x-y\| \qquad (P.1)$$

Cette inégalité montre que $(I-B): M \longrightarrow (I-B)M$ est continue et bijective. Donc, $(I-B)^{-1}$ existe et est continue.

Posons $U := (I-B)^{-1}A$. Il est clair que U est une application compacte, puisque U est une composition d'une application continue avec une application compacte. En vertu du théorème de **Schauder**, U admet un point fixe, i.e.

$$\exists\, x \in M \ \text{ tel que } \ (I-B)^{-1}Ax = x.$$

Ceci équivaut à dire $Ax + Bx = x$ ■

Remarque 3.1 *Dans le théorème de Krasnoselskii si* $\alpha = 1$ *dans* (iii) *alors on n'a pas de point fixe. En effet voisi un* ***contre-exemple***

Exemple 3.1 *Soit $C_0(R)$ l'espace de Banach de toutes les suites réelles $\xi = \{\xi_i\}_1^\infty$, avec $\lim\limits_{i\to\infty} \xi_i = 0$ et $\|\xi\| = \max\{|\xi_i| \ : i = 1, 2, ...\}$.*

Pour chaque $\xi \in \overline{S}(0,1)$ la fermeture de a boule unité, on définit $A\xi := \eta$ où

$$\begin{cases} \eta_1 = 2^{-1}(1 + \|\xi\|) \ \ et, \\ \eta_i = (1 - 2^{-i-1})\,\xi_{i-1} \ \ pour i = 2, 3, ... \end{cases}$$

Puisque

$$\begin{cases} |\eta_i| \leq 1 \ \ et, \\ |\eta_i| \leq |\xi_i| \leq 1 \end{cases}$$

alors on a

$$A : \overline{S}(0,1) \to \overline{S}(0,1).$$

Aussi, si ξ et ξ' sont deux élément distincts dans $\overline{S}(0,1)$ alors

$$\begin{aligned} \|A\xi - A\xi'\| &= \max\left\{2^{-1}(\|\xi\| - \|\xi'\|), \max\left\{\left(1 - 2^{-i-1}\right)\left|\xi_{i-1} - \xi'_{i-1}\right| \ : i = 2, 3, ...\right\}\right\} \\ &< \|\xi - \xi'\|. \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe un $\xi \in \overline{S}(0,1)$ tel que

$$A\xi = \xi \Rightarrow \xi_1 = 2^{-1}(1 + \|\xi\|) > 0.$$

De plus, pour $i \geq 2$,

$$\begin{aligned}
|\xi_i| &= \left|\left(1-2^{-i-1}\right)\xi_{i-1}\right| \\
&= \left|\left(1-2^{-i-1}\right)\left(1-2^{-i}\right)\xi_{i-2}\right| \\
&= \ldots = \left|\prod_{k=0}^{i-2}\left(1-2^{-i-1+k}\right)\xi_1\right| \\
&\geq \left[1-\sum_{k=0}^{i-2}2^{-i-1+k}\right]|\xi_1| \\
&\geq 2^{-1}|\xi_1|
\end{aligned}$$

Ainsi

$$|\xi_i| \geq 2^{-1}|\xi_1| > 0 \text{ pour tout } i \geq 2,$$

ceci est imposible puisque $\xi_i \to 0$ quand $i \to \infty$.

Il s'en suit que A n'a pas de point fixe.

Remarque 3.2 ** Le Théorème de **Krasnoselskii** a été utilisé pour prouver l'existence de la solution des équations différentielles et les équations intégrales non linéaires.*

** T. A. Burton [4] nota que **Krasnoselkii**, n'a pas remarqué que sa preuve n'a besoin que de ceci :*

[$y \in M$ étant fixé, si x est le point fixe de l'application contractante $x \to Bx + Ay$, alors $x \in M$].

Cette remarque est en vérité une chose fondamentale en pratique.

** Toujours dans [4], Burton obtient de $(P.1)$ l'inégalité*

$$(1-\alpha)\|x\| \leq \|(I-B)(x)\| \leq (1+\alpha)\|x\|$$

et nota qu'un resserrement de cette dernière inégalité permet de confirmer que [$x =$

$Bx + Ay,\ y \in M$ implique $x \in M$].

Il établit le théorème suivant.

Théorème 3.3 [4]

Soit M un convexe fermé, borné et non vide d'un espace de Banach $(X, \|.\|)$. Supposons que A et B sont deux de M dans X telles que

i. $[x = Bx + Ay,\ y \in M] \Longrightarrow x \in M.$

ii. A est continue et AM contenu dans un compact.

iii. B est une contraction de constant $\alpha < 1$.

Alors, il existe un point $y \in M$ tel que $Ay + By = y$.

Preuve. Nous avons déjà vu dans la preuve du *Théorème* 3.2 de **Krasnoselskii** que $(I - B)$ était un homéomorphisme de M dans $(I - B)\, M$ si B est une contraction de M dans X.

D'autres part, pour tout y fixé dans M, l'application $z \rightarrow Bz + Ay$ est clairement une contraction de X dans X, et admet donc un point fixe unique.

Soit z ce point alors, $z = Bz + Ay$.

La condition i implique $z \in M$.

Ainsi,

$$(I - B)\, z = Ay$$

ou encore

$$z = (I - B)^{-1}\, Ay \in M,$$

pour tout $y \in M$. Comme A et compacte et $(I - B)^{-1}$ est continue, alors $(I - B)^{-1} A$ et aussi compacte.

La conclusion provient par application du théorème de **Schauder.** ■

Voila une situation justifiant *la condition* i. du *Théorème* 3.3, elle sera suivie d'un exemple concret.

Proposition 3.1 *Supposons que les conditions ii. et iii. du Théorème 3.3 sont satisfaites. S'il existe* $r > 0$ *tel que* $M = \{y \in X \ : \ \|y\| \leq r\}$, $AM \subset M$ *et que*

$$\|x\| \leq \|(I - B)(x)\| \tag{P.2}$$

Alors, la condition i. du Théorème 3.3 est satisfaite.

Preuve. Si

$$x = Bx + Ay,$$

alors

$$(I - B)(x) = Ay,$$

d'ou il en découle de (P.2) que

$$\|x\| \leq \|(I - B)(x)\| = Ay \leq r.$$

Comme $y \in M \Longrightarrow Ay \in M \Longrightarrow \|Ay\| \leq r$, alors

$$x \in M.$$

■

Exemple 3.2 *Soit* $0 < \alpha < 1$, *et considérons l'équation intégrale suivante*

$$x(t) = -\alpha \sin^2 \left[\frac{x^3(t)}{1 + 2x^2(t)} \right] + p(t) + \int_{-\infty}^{t} D(t-s)\, g(x(s))\, ds$$

avec p, D *et* g *sont des applications continues et* $p(t + 2\pi) = p(t)$. *Supposons qu'il existe*

$r > 0$ tel que

$$|x| < r \Longrightarrow |g(x)| < r - \|p\|$$

et que

$$\int_{-\infty}^{t} |D(t-s)|\, ds \leq 1 \quad et \quad \int_{-\infty}^{t} |D'(t-s)|\, ds < \infty$$

Alors l'équation intégrale ci-dessus admet une solution $2\pi-$périodique

En effet, posons

$$(Bx)(t) = -\alpha \sin^2 \left[\frac{x^3(t)}{1+2x^2(t)}\right]$$

et

$$(Ay)(t) = p(t) + \int_{-\infty}^{t} D(t-s)\, g(x(s))\, ds$$

et considérons $(X, \|.\|)$ l'espace de Banach des fonctions $2\pi-$périodiques muni de la norme de supremum et $M = \{y \in X \ : \ y \leq r\}$

Il est clair que la condition (P.2) est satisfaite. En effet,

$$\|(I-B)(x) - (I-B)(y)\| \geq (1-\alpha)\|x-y\|$$

d'ou

$$\|(I-B)x\| \geq \|x\|$$

de plus si $y \in M$ avec $\|y\| \leq r$ on a

$$\begin{aligned} \|Ay\| &\leq \|p\| + \int_{-\infty}^{t} |D(t-s)| \left[r - \|p\|\right] ds \\ &\leq \|p\| + r - \|p\| = r, \end{aligned}$$

par conséquent, la condition $i)$ du Théorème 3.3 est satisfaite. La vérification des conditions ii. et iii. est standart. Cette équation, jusqu'à preuve du contraire, n'est résoluble que sur cet M là.

Remarque 3.3 *Burton et Kirk [5] ont pu, par une homotopie intélligente, établir le théorème suivant.*

Théorème 3.4 *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach, et soit A, $B : X \longrightarrow X$, deux applications telles que B une contraction de constante $\alpha < 1$, et A compacte. Alors*

i) Ou bien, $x = \lambda B\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \lambda Ax$ *admet une solution pour* $\lambda = 1$.

ii) Ou bien, l'ensemble $\varepsilon = \left\{x \in X,\ x = \lambda B\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \lambda Ax,\ \lambda \in (0,1)\right\}$ *est non borné.*

Preuve. Remarquons d'abord que $\lambda B\frac{1}{\lambda}$ est une contraction de X dans X avec la même constante de B. En effet

$$\begin{aligned}\left\|\lambda B\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \lambda B\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right\| &\leq \lambda\left\|B\left(\frac{x}{\lambda}\right) - B\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right\| \\ &\leq \lambda\alpha\left\|\frac{x}{\lambda} - \frac{y}{\lambda}\right\| \\ &\leq \alpha\|x - y\|\end{aligned}$$

Par conséquent, $\forall y \in X$ l'application

$$x \longrightarrow \lambda B\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \lambda Ay$$

est aussi une contraction avec une solution unique

$$x = \lambda B\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \lambda Ay,$$

d'ou

$$\frac{x}{\lambda} = B\left(\frac{x}{\lambda}\right) + Ay$$

ou encore

$$(I - B)\left(\frac{x}{\lambda}\right) = Ay.$$

Autrement dit,

$$\frac{x}{\lambda} = (I - B)^{-1} Ay \quad et \quad x = \lambda (I - B)^{-1} Ay.$$

Comme $(I - B)^{-1}$ existe et est continue et A est une application compacte, alors la conclusion s'obtient par application du Théorème 3.1 de **Schaeffer.** ■

3.2 Théorème de Krasnoselskii-Schaeffer

Jusque là les théorèmes qu'on a vus servent à prouver l'existence de la solution pour des équations intégrales non linéaires lorsque celles-ci s'écrivent sous une somme d'une contraction et une application compacte. Mais il arrive parfois que l'opérateur A ne soit pas contractant, mais seulement une itération A^p de A, $p \in \mathbb{N}^*$ est une contraction. Cette situation a été récemment étudiée par B. C. Dhage dans [6]. Dans cet article on trouve le théorème suivant qui est un mélange du théorème de **Krasnoselskii**, de **Schaeffer** et celui de Boyd et Wong qu'on va appeler Théorème de **Krasnoselskii-Schaeffer**.

Théorème 3.5 *Soient* $(X, \|.\|)$ *un espace de Banach et* A, $B : X \longrightarrow X$ *deux applications telles que*

1. A est une application compacte,

2. B est une application linéaire et bornée et il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tels que B^p est une contraction non linéaire, i.e

$$\|B^p x - B^p y\| \leq \phi (\|x - y\|), \quad \forall x, y \in X,$$

(voir la Définition 1.18). Alors
i. Ou bien, l'équation $Bx + \lambda Ax = x$ admet une solution pour $\lambda = 1$,
ii. Ou bien, l'ensemble $\varepsilon = \{u \in X,\ Au + \lambda Bu = u,\ 0 < \lambda < 1\}$ est non borné.

Preuve. Définissons l'application $T : X \to X$ par,

$$T(x) = (I - B)^{-1} Ax.$$

Pour $\lambda \in [0,1]$, l'équation d'opérateur

$$\lambda (I-B)^{-1} Ax = x,$$

est équivalente à

$$Ax + \lambda Bx = x.$$

Par conséquent, la conclusion de ce théorème s'obtient par application du *Théorème* 3.1 de **Schaeffer** si on arrive à démontrer que T est bien défini et complètement continue. Vers cette conclusion, nous avons,

$$(I-B)^{-1} = (I-B^p)^{-1}\left(\sum_{j=0}^{p-1} B^j\right).$$

Comme B^p est une contraction non linéaire, l'opérateur $(I-B^p)^{-1}$ existe dans X. De plus, comme B est linéaire et borné, $\left(\sum_{j=0}^{p-1} B^j\right)$ est aussi un opérateur linéaire et borné de X dans X.

Ainsi, $(I-B^p)^{-1}\left(\sum_{j=0}^{p-1} B^j\right)$ existe aussi.

Par conséquent, T est bien défini de X dans X. La linéarité et la bornitude de B implique la continuité de B, et par conséquent la continuité de B^j, $j = 0, 1, ...$

Donc $(I-B)^{-1}$ est continue sur X.

Ce qui implique que l'application T est compacte, puisqu'elle est composition d'une application continue et une application compacte. ∎

Chapitre 4

Application

Résumé

Maintenant on va présenter une application du *Théorème* 3.5 "de **Krasnoselskii-schaeffer"**. En utilisant des fonctions L^1-caratheodory on va démontrer l'existence de la solution d'un certain type d'équations fonctionnelles intégrales non linéaires mixtes.

Maintenant on va présenter une application du *Théorème* 3.5 "de **Krasnoselskii-schaeffer"**.

Elle illustre la preuve d'existence de la solution d'un certain type d'équations fonctionnelles intégrales non linéaires mixtes.

Considérons l'intervalle $J = [0,1]$ de $\mathbb{R}$. On souhaite étudier l'équation intégrale suivante

$$x(t) := q(t) + \int_0^{\mu(t)} v(t,s)\, x(\theta(s))\, ds + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)\, g(s, x(\eta(s)))\, ds, \quad t \in J, \qquad (4.1)$$

avec

$$q : J \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v \text{ et } k : J \times J \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\text{et}$$

$$\mu, \theta, \sigma, \eta : J \longrightarrow J.$$

On va essayer de rechercher la solution de l'équation (4.1) dans l'espace

$$BM(J, \mathbb{R}) := \{x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : \quad x \text{ bornée et mesurable}\}.$$

Définissons dans $BM(J,\mathbb{R})$ la norme $\|.\|$ par

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)|.$$

Muni d'une telle norme, $BM(J,\mathbb{R})$ est un espace de Banach. Soit $L^1(J,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles mesurables au sens de Lebesgue sur J muni de la norme usuelle $\|.\|_1$ donnée par

$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|\, dt.$$

Définissons les applications L^1-caratheodory comme suit.

Définition 4.1 *L'application $\beta : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite L^1-caratheodory si*

i) $t \longrightarrow \beta(t,x)$ est mesurable pour tout $x \in \mathbb{R}$, *ii)* $x \longrightarrow \beta(t,x)$ *est continue presque pour tout* $t \in J$,

iii) pour tout $r > 0$, *il existe une fonction* $h_r \in L^1(J,\mathbb{R})$ *telle que*

$$|\beta(t,x)| \leq h_r(t) \quad pp\ t \in J \quad et \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad avec \quad |x| \leq r.$$

Nous considérons les hypothèses suivantes

$h_0)$ les fonctions μ, θ, σ, $\eta : J \longrightarrow J$ sont continues,

$h_1)$ la fonction $q : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue,

$h_2)$ les fonctions v, $k : J \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues,

$h_3)$ la fonction $g(t,x)$ est L^1-caratheodory,

$h_4)$ il existe une fonction $\phi \in L^1(J,\mathbb{R})$ et une fonction $\psi : [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ continue et croissante telles que

$$|g(t,x)| \leq \phi(t)\,\psi(|x|), \quad p.p \ \ t \in J \ \ et \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Théorème 4.1 *Supposons que les hypothèses* $h_0) - h_4)$ *sont satisfaites et que* $\mu(t) \leq t$, $\theta(t) \leq t$, $\eta(t) \leq t$ *et* $\sigma(t) \leq t$, $\forall t \in J$. *Supposons aussi que*

$$\int_{\|q\|_\infty}^{\infty} \frac{ds}{s + \psi(s)} > C.$$

Avec $C = \max\{V, K\|\phi\|_{L^1}\}$, $V = \max\limits_{t,\ s\in J} |v(t,s)|$ *et* $K = \max\limits_{t,\ s\in J} |k(t,s)|$. *Alors, l'équation (4.1) admet une solution.*

Preuve. Définissons les opérateurs A, $B : BM(J,\mathbb{R}) \longrightarrow BM(J,\mathbb{R})$, par les expressions,

$$\begin{aligned} Bx(t) &= \int_0^{\mu(t)} v(t,s)\, x(\theta(s))\, ds, \quad t \in J, && (4.2)\\ Ax(t) &= q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)\, g(s, x(\eta(s)))\, ds, \quad t \in J. && (4.3) \end{aligned}$$

Le problème de la recherche de la solution de l'équation (4.1) est équivalent à la recherche de la solution de l'équation $Ax(t) + Bx(t) = x(t)$, $t \in J$.

L'étude du problème se réduit à résoudre l'équation $Ax(t) + \lambda Bx(t) = x(t)$, $t \in J$, pour $\lambda = 1$.

On va montrer que A et B vérifient toutes les condition du Théorème 3.5.

La preuve passe par plusieurs étapes.

Etape 1.

L'opérateur B défini par (4.2) est linéaire et il existe un $p \in \mathbb{N}^*$ tel que B^p est une contraction non linéaitre.

Il est clair que l'opérateur B est linéaire et il reste à prouver qu'il est borné et qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que B^p est une contraction non linéaire. Vers cela, on voit que

$$\begin{aligned} |Bx(t)| &= \left| \int_0^{\mu(t)} v(t,s)\, x(\theta(s))\, ds \right| \\ &\leq \int_0^{\mu(t)} |v(t,s)\, x(\theta(s))|\, ds \\ &\leq V \int_0^t |x(\theta(s))|\, ds, \end{aligned}$$

car v est une fonction continue sur le compact $J \times J$. Par conséquent, on obtient

$$|Bx(t)| \leq V \int_0^1 |x(\theta(s))|\, ds = V \|x\|_1 .$$

En prenant le maximum sur t, il vient

$$\|B\| \leq V \|x\|$$

et donc B est borné. En particulier, on trouve $\|B\| = V$.

Soient, $x, y \in BM(J, \mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
|Bx(t) - By(t)| &= \left| \int_0^{\mu(t)} v(t,s)\, x(\theta(s))\, ds - \int_0^{\mu(t)} v(t,s)\, y(\theta(s))\, ds \right| \\
&= \int_0^{\mu(t)} |v(t,s)\left[x(\theta(s)) - y(\theta(s))\right]| \, ds \\
&\leq \int_0^{\mu(t)} |v(t,s)|\, |x(\theta(s)) - y(\theta(s))| \, ds \\
&\leq \int_0^{t} V \|x - y\| \, ds \\
&\leq V \|x - y\| .
\end{aligned}$$

En prenant le maximum sur t, on arrive à

$$\|Bx - By\| \leq V \|x - y\| .$$

De la même manière on retrouve

$$\begin{aligned}
\left|B^2 x(t) - B^2 y(t)\right| &\leq \int_0^{\mu(t)} V \left(\int_0^{\mu(s)} |v(s,\tau)|\, \|x - y\| \, d\tau \right) ds \\
&\leq \int_0^{t} V \left(\int_0^{s} |v(s,\tau)|\, \|x - y\| \, d\tau \right) ds \\
&\leq \frac{V^2}{2!} \|x - y\| .
\end{aligned}$$

Par induction, on trouve $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|B^n x(t) - B^n y(t)| \leq \frac{V^n}{n!} \|x - y\|$$

Ou encore, en prenant le max sur t,

$$\|B^n x - B^n y\| \leq \frac{V^n}{n!} \|x - y\| .$$

Comme $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{V^n}{n!} = 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$, tel que $\dfrac{V^p}{p!} < 1$. Ainsi, B^p est une contraction non linéaire sur $BM(J, \mathbb{R})$.

Etape 2.

L'application A défini par (4.3) est compacte sur $BM(J, \mathbb{R})$ puisque σ et η sont continues, une manipulation simple montre que A est continue sur $BM(J, \mathbb{R})$.

Soit $\{x_n\}$ une suite bornée de $BM(J, \mathbb{R})$ et telle que $\|x_n\| \leq r$, pour un certain $r > 0$.

Alors, et d'après (h_3), on a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|Ax_n\| &\leq \max_{t \in J} |q(t)| + \max_{t \in J} \int_0^t |k(t,s)| \, g(s, x_n(\eta(s))) \, ds \\
&\leq \|q\| + K \int_0^1 h_r(s) \, ds \\
&= \|q\| + K \|h_r\|_1 .
\end{aligned}$$

Ceci implique que l'ensemble $\{Ax_n : n \in \mathbb{N}\}$ est (uniformément) borné dans $BM(J, \mathbb{R})$.

Montrons que $\{Ax_n : n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble équicontinu. Soient $t, \tau \in J$, alors,

$$
\begin{aligned}
|Ax_n(t) - Ax_n(\tau)| &\leq \left| \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)\, g(s, x_n(\eta(s)))\, ds - \int_0^{\sigma(\tau)} k(\tau,s)\, g(s, x_n(\eta(s)))\, ds \right| \\
&\quad + |q(t) - q(\tau)| \\
&\leq \int_0^{\sigma(t)} \left| k(t,s)\, g(s, x_n(\eta(s)))\, ds - \int_0^{\sigma(t)} k(\tau,s)\, g(s, x_n(\eta(s))) \right| ds \\
&\quad + \left| \int_0^{\sigma(t)} k(\tau,s)\, g(s, x_n(\eta(s)))\, ds - \int_0^{\sigma(\tau)} k(\tau,s)\, g(s, x_n(\eta(s)))\, ds \right| \\
&\quad + |q(t) - q(\tau)| \\
&\leq \left| \int_0^{\sigma(t)} [k(t,s) - k(\tau,s)]\, g(s, x_n(\eta(s)))\, ds \right| \\
&\quad + \left| \int_{\sigma(\tau)}^{\sigma(t)} |k(\tau,s)\, g(s, x_n(\eta(s)))|\, ds \right| + |q(t) - q(\tau)| \\
&\leq \int_0^1 |k(t,s) - k(\tau,s)|\, h_r(s)\, ds + K\,|p(t) - p(\tau)| + |q(t) - q(\tau)| \\
&= \|h_r\|_1 \int_0^1 |k(t,s) - k(\tau,s)|\, ds + K\,|p(t) - p(\tau)| + |q(t) - q(\tau)|.
\end{aligned}
$$

Avec $p(t) = \int_0^{\sigma(t)} h_r(s)\, ds$. Comme p, q et k sont uniformément continues, alors on constate que $|Ax_n(t) - Ax_n(\tau)| \longrightarrow 0$, quand $t \longrightarrow \tau$. Par conséquent $\{Bx_n : n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinu et donc compact d'aprés le Théorème 1.3, d'**Ascoli-Arzela**.

Jusqu'ici on a démontré que l'application A est compacte.

Les hypothèses du Théorème 3.5 sont vérifiées, et en conclusion on a

i. Ou bien, l'équation (4.1) admet une solution.

ii. Ou bien, l'ensemble ε n'est pas borné.

Démontrons que la condition ii. ne peut avoir lieu.

Supposons que x est une solution de l'équation $Ax(t) + \lambda Bx(t) = x(t)$, avec $\lambda \in (0,1)$.

En clair, nous avons

$$x(t) = \lambda q(t) + \int_0^{\mu(t)} v(t,s)\, x(\theta(s))\, ds$$
$$+\lambda \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)\, g(s, x(\eta(s)))\, ds, \quad t \in J, \quad \lambda \in (0,1).$$

Alors,

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |q(t)| + \int_0^{\mu(t)} |v(t,s)|\, |x(\theta(s))|\, ds + \int_0^{\sigma(t)} |k(t,s)|\, |g(s, x(\eta(s)))|\, ds \\ &\leq \|q\| + V \int_0^{\mu(t)} |x(\theta(s))|\, ds + K \int_0^{\sigma(t)} \phi(s)\, \psi(|x(\eta(s))|)\, ds. \end{aligned}$$

Soit $\omega(t) := \max\limits_{s \in [0,t]} |x(s)| = |x(t^*)|$, pour $t^* \in [0,t]$. Il est clair que

$$x(t) \leq \omega(t), \quad \forall t \in J.$$

Par l'inégalité ci-dessus on a

$$\begin{aligned} \omega(t) &= |x(t^*)| \leq \|q\| + \int_0^{\mu(t^*)} V\, |x(\theta(s))|\, ds + \int_0^{\sigma(t^*)} K\phi(s)\, \psi(|x(\eta(s))|)\, ds \\ &\leq \|q\| + \int_0^{t^*} V\omega(s)\, ds + \int_0^{t^*} K\phi(s)\psi(\omega(s))\, ds \\ &\leq \|q\| + V \int_0^{t} \omega(s)\, ds + K\, \|\phi\|_1 \int_0^{t} \psi(\omega(s))\, ds \\ &\leq \|q\| + C \int_0^{t} [\omega(s) + \psi(\omega(s))]\, ds, \end{aligned}$$

avec $C = max\{V,\ K\, \|\phi\|_1\}$. Posons

$$v(t) = \|q\| + C \int_0^t [\omega(s) + \psi(\omega(s))]\, ds, \; t \in J.$$

Alors, $v(0) = \|q\|$, $\omega(t) \leq v(t)$, $t \in J$ et

$$\begin{aligned} v'(t) &= C[\omega(t) + \psi(\omega(t))] \\ &\leq C[v(t) + \psi(v(t))]. \end{aligned}$$

Ou encore,

$$\frac{v'(t)}{v(t)+\psi(v(t))} \leq C,\ t \in J.$$

L'intégration de cette inégalité de 0 à t donne,

$$\int_0^t \frac{v'(s)}{v(s)+\psi(v(s))} ds \leq C \int_0^t ds \leq C.$$

Un changement de variable montre que

$$\int_{\|q\|}^{v(t)} \frac{ds}{s+\psi(s)} \leq C < \int_{\|q\|}^{\infty} \frac{ds}{s+\psi(s)}.$$

Par cette inégalité nous concluons qu' il existe une constante $M > 0$ telle que $v(t) \leq M$ pour tout $t \in J$. Ceci implique que

$$|x(t)| \leq \omega(t) \leq v(t) \leq M,\ t \in J$$

Par conséquent,

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| \leq M.$$

En conclusion la condition *ii.* est impossible. Ainsi l'équation (4.1) admet une solution. ■

Dans [1], Avramescu a fait une remarque importante sur le travail de Dhage [6]. Cette remarque est basée sur l'évidence que si une application n'est pas contractante relativement à une norme donnée $\|.\|$ mais qu'elle est contractante relativement à une autre norme équivalente $\|.\|_\lambda$, alors on peut considérer que l'application en question est tout simplement contractante. Il a fait la remarque suivante.

Remarque 4.1 *On peut directement démontrer l'existence de la solution de l'équation (4.1) par le Théorème 3.2. Autrement dit, on n'utilise pas le fait que B^p est une contraction non linéaire pour un certain $p \in \mathbb{N}$ mais que l'opérateur B est une contraction* *relativement à une norme équivalente à la norme $\|x\|$. En effet, Posons,*

$$\|x\|_\lambda := \sup_{t\in[0,1]} \left\{ |x(t)| e^{-\lambda t}, \lambda > 0 \right\}$$

Il est clair que $\|x\|_\lambda$ est une norme sur $BM(J, \mathbb{R})$. Montrons que $\|x\|$ est équivalente à $\|x\|_\lambda$. On a

$$\forall t \in [0;1], |x(t)| e^{-\lambda t} \leq |x(t)| \leq \|x\|.$$

Donc

$$\|x\|_\lambda \leq \|x\|.$$

D'autre part,

$$|x(t)| = |x(t)| e^{-\lambda t} e^{+\lambda t} \leq \|x\|_\lambda e^\lambda \ \forall t \in J.$$

D'ou

$$e^{-\lambda} \|x\| \leq \|x\|_\lambda$$

Par conséquent les deux normes sont équivalentes.

Montrons maintenant que B est une contraction pour cette nouvelle norme. On sait, par hypothèse, que $\theta(t) \leq t$. Il en découle,

$$\begin{aligned} |x(\theta(t)) - y(\theta(t))| e^{-\lambda t} &\leq |x(\theta(t)) - y(\theta(t))| e^{-\lambda\theta(t)} \\ &\leq \|x-y\|_\lambda. \end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} |(Bx)(t) - (By)(t)| &\leq V \int_0^{\mu(t)} |x(\theta(s)) - y(\theta(s))| e^{-\lambda s} e^{\lambda s} ds \\ &\leq V \|x-y\|_\lambda \int_0^t e^{\lambda s} ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{V}{\lambda}\left\|x-y\right\|_{\lambda}\left(e^{\lambda t}-1\right) \\
&\leq \frac{V}{\lambda}\left\|x-y\right\|_{\lambda}e^{\lambda t}.
\end{aligned}
$$

Par suite

$$\left|(Bx)(t)-(By)(t)\right|e^{\lambda t}\leq\frac{V}{\lambda}\left\|x-y\right\|_{\lambda},\quad\forall t\in[0,1].$$

Ainsi donc

$$\left\|Bx-By\right\|\leq\frac{V}{\lambda}\left\|x-y\right\|_{\lambda}.$$

En choisissant $\lambda>V$, on constate que B est une contraction.

Application.

Comme application nous considérons l'équation différentielle du premier ordre à valeur initial suivante

$$x'(t) = \alpha(t)\,x(\theta(t))+g(t,x(\eta(t))),\quad pp\quad t\in J, \tag{4.4}$$

$$x(0) = x_0\in\mathbb{R}, \tag{4.5}$$

avec $\alpha:J\longrightarrow\mathbb{R}$ une application continue et $g:J\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.

Par une solution de l'équation ci-dessus on veut dire une fonction $x\in AC(J,\mathbb{R})$ qui satisfait (4.4) et (4.5), ou $AC(J,\mathbb{R})$ est l'espace de fonctions absolument continues sur J.

Théorème 4.2 *Supposons que les hypothèses $(h_3)-(h_4)$ sont satisfaites, que $\theta(t)\leq t$, $\eta(t)\leq t$, $\forall t\in J$ et que*

$$\int_{|x_0|}^{\infty}\frac{ds}{s+\psi(s)}>c$$

avec $C=\max\left\{\sup_{t\in J}|\alpha(t)|,\|\phi\|_1\right\}$. Alors le problème (4.4)-(4.5) admet une solution.

Preuve. Le problème (4.4)-(4.5) est équivalent à l'équation intégrale suivante

$$x(t)=x_0+\int_0^t\alpha(s)\,x(\theta(s))\,ds+\int_0^t g(s,x(\eta(s)))\,ds,\quad t\in J.$$

Prenons, $q(t) = x_0$, $\mu(t) = \theta(t) = \sigma(t) = \eta(t) = t$ pour tout $t \in J$, $v(t,s) = \alpha(t)$ et $k(t,s) = 1$. Alors toutes les conditions du Théorème 3.5 sont satisfaites. Donc, la preuve sera achevée si on remarque que $AC(J,\mathbb{R}) \subset BM(J,\mathbb{R})$. $\blacksquare$

Conclusion

Actuellement il y a une grande variété de théorèmes de points fixes. L'objectif commun de ces théorèmes est de chercher des solutions et de résoudre les problèmes d'existence qui se posent en analyse mathématiques et en ingénierie.

De la théorie du point fixe découlent plusieurs applications qui constituent un domaine très actif de la recherche...

Dans notre travail, on a étudie quelques théorèmes du point fixe de Banach, de Brouwer, de Schauder et le théorème de krasnoselskii et quelques-unes de leurs applications, on a parler aussi du théorème de **Krasnoselskii-Schaeffer** qui est un mélange du théorème de **Krasnoselskii**, de **Schaeffer** et celui de Boyd et Wong.

Depuis une dizaine d'années de grands chercheurs (T. A., Burton, B., Zhang, L., Hatvani, T., Furumochi, G., Sefert etc...) se sont rendu compte que la plupart des difficultés qui restent sans réponse dans le domaine de stabilité par la méthode de Lyapunov peuvent être surmontées en appliquant la technique de points fixes. Et nous souhaitons continuer dans ce chemin pour essayer d'autres équations non étudiées jusqu'ici par cette technique.

Bibliographie

[1] **Avermiscu, C** Some remarks on a fixed point theorem of Krasnoselskii, EJQTDE,5(2003),1-15.

[2] **Boyd, D. W. and Wong, J. S. W.**, On nonlinear contractions, Proc. Amer.Math.soc. 20 (1969), 458-464. MR 39 : 916

[3] **H. Brézis,** Analyse fonctionnelles, Théorie et applications. Masson, paris 1983.

[4] **Burton T. A.**, A fixed point theorem of Krasnoselskii, Appl. Math. Lett. 11 (1998), 85-88.

[5] **Burton, T. A., and Kirk, C.**, A fixed point theorem of Krasnoselskii-Schaefer type, Math. Nachr. 189 (1998), 23-31.

[6] **Dhage, B. C.**, On a fixed point of Krasnoselski-Schaeffer type, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, No.6 (2002), 1-9.0

[7] **L.Schwartz**, Analyse-topologie générale et analyse fonctionnelle, Hermann,Paris 1970.

[8] **Smart, D. R.**, Fixed point theorems, Cambridge university. Press, Cambridge, 1980.

[9] **Zeidler, E.**, Nonlinear functional analysis and its applications, I. fixed-point theorems, Springer-Verlage, Berlin, 1993.