République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master en Mathématiques**

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

**Melle Ziaya Samira**

# Intitulé

# Existence et unicité de la solution d'un problème fractionnaire

**Dirigé par : Dr.Boulares hamid**

**Devant le jury**

| | | | |
|---|---|---|---|
| PRESIDENT | Dr.Sellami Nabil | MCB | Univ-Guelma |
| RAPPORTEUR | Dr.Boulares hamid | MCA | Univ-Guelma |
| EXAMINATEUR | Dr.Rezgui Nassima | MCB | Univ-Guelma |

**Session Juin 2019**

# Existence et unicité de la solution d'une problème fractionnaire

A Master Memory,

By Samira Ziaya
Advisor: Dr. Hamid Boulares

# Dedication

Je dédie ce travail en guise d'amour et d'affection à mes très chers parents,qui par leurs prières m'ont éclairé le chemin de la vie

A ma soeur et mes très chèrs frères

A toute ma famille et mes proches

A mes amis (es)

sans exception qui m'ont soutenu dans les moments les plus difficiles

# Remerciements

Après avoir remercié le bon Dieu

Je voudrais remercier et exprimer mà gratitude pour Hamid Boulares

Ce mémoire n'est que l'aboutissement de mes efforts qui ont guidé vos conseils et votre fermeté

Permettez-moi de remercier les membres du jury sans oublier tous les enseignants qui nous ont donné la formation complète que nous utilisons comme outil de travail.

## ملخص

نجد اليوم أن المعادلات التفاضلية الكسرية التي يمكن استخدامها في العديد من الفروع، سواء كانت تقنية أو كيميائية، على سبيل المثال، موجودة في الطب والهندسة والكيمياء الكهربائية والفيزيائية ونظرية التحكم.

وفقًا لهذه المذكرة، نلخص من خلالها الهدف الذي يتمثل في دراسة وجود وتفرد حل مشكلة كسرية، وأساس كل النتائج التي تم الحصول عليها في هذا العمل هي تقنيات النقطة الثابتة، ندرسها معادلة تفاضلية كسرية من نوع Caputo مع الشروط الحدودية، ثم يتم تقديم بعض نتائج الوجود والوحدانية

# Résumé

Aujourd'hui on trouve que les équations différentielles fractionnaires utilisables dans plusieurs branches que se soit technique ou chimique par exemple on les trouve dans la medicine, l'ingénierie, l'électrochimie, la phyisique, la théorie du controle ,.,.;etc.

Alors, d'après ce mémoire on résumé l'objectif qui est étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème fractionnaire, les bases de tous les résultats obtenus dans ce travail sont les techniques du point fixe, on étudier une équation différentielle fractionnaire de type Caputo avec des conditions aux limites, Alors on présente quelques résultats d'existence et d'unicité. enfin dans la conclusion on illustre les exemples.

**Mots clés:**

Dérivée fractionnaire de Caputo, dérivée fractionnaire de Riemann-liouville, point fixe de Banach, point fixe de Scheafer, Leray-Schauder.

# Abstract

Today we find that the fractional differential equations that can be used in several sectors, be they technical or chemical, for example, are found in medicine, engineering, electrochelistry, phyics, the theory of control,ect.

so, after this paper we summarize the objective which is to study the existence and the uniqueness of the solution of a fractional problem.the bases of all the results obtained in this work are the techniques of the fixed point. We study a fractional differential equation. Caputo type with boundary conditions. Then we present some results of existance and uniqueness. Finally in the conclusion we illustrate the examples.

**Key words:**

fractional derivative of Caputo, fractional derivative of Riemann-liouville, fixed point of Banach, fixed point of Scheafer, leray- Scheafer.

# Contents

# Part I

# Introduction

Le calcul fractionnaire connait à l'heure actuelle une grande popularité parmi les chercheurs en sience et en ingénirie,Il à montré son énorme potentiel pour comprendre mieux la nature,d'apprécien le monde merveilleux des mathématique qui se trouve entre les dérivée et lintegrale d'ordre entier.

Quand on introduit la notion de calcule on revientà la question del'hopital ,posée à Leibniz conçernant la singnification $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$,Le concept s'est géniralisé pour differentes applications qui ont donnée de bon résultats.

Le calcul fractionaire est utilisé profond é ment dans les domaines de la viscoélasticité la rhéologie, l'eléctrochimie, la physique et la théorie de la commande $[4, 6, 8, 21, 26, 29, 30]$.

dans les dernières année un interêt considérable est est attribuée à l'étude des équations différentilles d'ordre fractionaire et de nombreuses monographies sont dédiées à ce sujet voir $[1, 3, 7, 18, 20, 28, 31, 32]$.

Les équation différentielle d'ordre fractionnaire et appliquées aussi dans la modilisation quelques phénomènes. tels que en viscoélasticité,électrochimie, contrôle,etc.$[4, 6, 8, 21, 26, 29, 30]$.

Les dérniers publication est traitant la résolution des équation différentielles fractionnaires par différentes méthodes telles que la méthode des sous et sur solutions,les théorèmes du point fixe,etc.$[1, 3, 7, 18, 20, 28, 31, 32]$.

Dans ce mémoire, on s'entéresse seulement l'existence et l'unicité de la solution de l'equation différentielle avec la derivée fractionnaire de type Caputo suivant:

$$^{C}D^{\alpha}x(t) = g(t, x(t)) \text{ pour tout } t \in J = [0, T], \tag{1.1}$$

avec les conditions

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_0^*, \quad x"(T) = x_{T.} \tag{1.2}$$

on à trois résultats, le premier sur l'existence et l'unicité dela solution montrée par le théorème du point fixe de Banach.

Le deuxième résultats conservue l'existence de la solutions est établit par le théorème du point fixe de schaefer.Le derneire résultats conservant l'éxistence est montrée par l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder, on finalisé par un exemple contaui les résultats obtenu.

Ce mémoire est se decompose de:

Le premier chapitre concerne, les rappels des notions et définitions des fonctions spéciales, les dérivées fractionnaires de type Caputo er Riemann-Liouville et l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

on donne quelques théorèmes du point fixe tels que le théorème da Banach, le théorème de Scheafer, L'alternative non linéaire de Leray Svhauder et le théorème de Krasnoselskii dans le deuxième chapitre.

on étudie l'existence et l'unicité de la solution du problème $(1.2)-(1.2)$ par application des théorème du point fixe dans troisième chapitre. Onfinaliser ce chapitre par un exemple est une conclution et clôture par une bibliographie.

**Mots clés:**

Calcule fractionnaire, intégrale fractionnaire au de Riemann-Lioville, dérivée fractionnaire, théorème du point fixe, l'existence et l'unicité de la solution.

# Part II

# Chapitre1:Calcul fractionnaire

## 0.1 Fonctions spéciales

### 0.1.1 Fonction Gamma

Le calcul fractionnaire basé sur la fonction gamma d'euleur. elle généralise le factoriel $n!$,et permet à $n$ de prendre des valeurs réelles ou même complexes.Soit $z \in \mathbb{R}$, possont:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

La fonction $g : t \longrightarrow t^z e^{-t}$est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

$\cdot$Pour tout entier naturel $n \geqslant 2, \Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ et,

$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$.on obtient:

$$\forall n \in N^*, \Gamma(n) = (n-1)!$$

$\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$?possons $u = \sqrt{t}$ et $dt = 2udu$ ce qui implique

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2udu = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}. \\
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

#### Fonction Bêta

Le calcul fractionnaire aussi basé sur la fonction Bêta qui joue un rôle important dans certaine combinaison avec la fonction Gamma.

**Definition 0.1** voir ([28])

La fonction Bêta est définie par:

$$B(z, w) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \ \mathrm{Re}(\mathbf{z}) > \mathbf{0}, \ \mathrm{Re}(\mathbf{w}) > \mathbf{0}.$$

La relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta est:

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

### 0.1.2 Fonction Mittag-Leffler

Les équation différentielles d'ordre entier, basé aussi sur une fonction qui appler la fonction Mittag-Leffler qui joue un rôle très important dans la théorie qui trouvera facilement de l'étude de l'existence des solutions des équations différentielles fractionnaire.

**Definition 0.2** voir ([28]). Pour $x \in C$ tel que $Re(x) > 0$,la fonction Mittag-Leffler est définie comme suit :$M_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{T(\alpha k+1)}$ ,si $\alpha = 1$ nous trouvons la fonction exponentielle:

$$M_1(x) = e^z.$$

La fonction Mittag-Leffler peut être généralisée pour deux paramètres:

$$M_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0.$$

## 0.2 Intégrale fractionnaire de Riemann- Liouville

Soit $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$ fini $g \in L^P(\Omega)$.Les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville $I_{a+}^{\alpha} g$ et $I_{b-}^{\alpha} g$ d'ordre réel $\alpha > 0$ sont définies par:

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} g(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds, \ (t > a, \alpha > 0), \qquad (1.1) \\ I_{b-}^{\alpha} g(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} g(s) ds, \ (t < b, \alpha > 0). \end{aligned}$$

Ou $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma, la formule $I_{a+}^{\alpha} g$ s'appelle intégrale fractonnaire d'ordre $\alpha$ à gauche et $I_{b-}^{\alpha} g$ s'appelle intégrale fractonnaire d'ordre $\alpha$ à droite.

Si $\alpha = n \in N$,l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville (1.1), prend la forme suivant:

$$\begin{aligned} I_{a+}^{n} g(t) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_\alpha^t (t-s)^{n-1} g(s) ds, \ (n \in N) \\ I_{b-}^{n} g(t) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_t^b (s-t)^{n-1} g(s) ds, \ (n \in N). \end{aligned}$$

## 0.3 Dérivée fractionnaire au sens de R-L

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville $D_{a+}^{\alpha} g$ d'ordre réel $\alpha \geq 0$ est définie par:

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} g(t) &= \frac{d^n}{dt^n} (I_{a+}^{n-\alpha} g(t)) \qquad (1.2) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} g(s) ds, \ t > a, \qquad (1) \end{aligned}$$

où $n = [\alpha] + 1$, $[.]$ est la partie entière d'un nombre réel. En particulier si $\alpha = n \in N$,on obtient:

$$D_{a+}^{0}g(t) = g(t),\ D_{a+}^{n}g(t) = g^{(n)}(t), \tag{1.4}$$

où $g^{(n)}(t)$ désigne la dérivée usuelle d'ordre $n$ de $g(t)$.
Si $0 < \alpha < 1$, alors:

$$D_{a+}^{\alpha}g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_{a}^{t}(t-s)^{-\alpha}g(s)ds,\ (t > a). \tag{1.5}$$

### 0.3.1 Propriétés

Si $g$ est continue pour $t > a$, alors l'intégration fractionnaire d'ordre réel arbitraire définie par (1.1) possède la propriété suivante:

$$I_{a+}^{\alpha}(I_{a+}^{\beta}g(t)) = I_{a+}^{\alpha+\beta}g(t),\ (\alpha > 0, \beta > 0), \tag{1.6}$$

évidemment, on peut interchanger $\alpha$ et $\beta$ on formme:

$$I_{a+}^{\alpha}(I_{a+}^{\beta}g(t)) = I_{a+}^{\beta}(I_{a+}^{\alpha} + g)(t) = I_{a+}^{\alpha+\beta}g(t),\ (\alpha > 0, \beta > 0). \tag{1.7}$$

La propriété la plus importante de la dérivée fractionnaire au sens de $R-L$, pour $\alpha > 0$, et $t > a$ est :

$$D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\alpha}g(t) = g(t), \tag{1.8}$$

Si la $\alpha > \beta > 0$, et $g(t) \in L^{p}(a,b), (1 \leq p \leq \infty)$

$$D_{a+}^{\beta}I_{a+}^{\alpha}g(t) = I_{a+}^{\alpha-\beta}g(t), \tag{1.9}$$

presque partout sur $[a,b]$, où

$$L^{p}[a,b] = \left\{ g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}; g \text{ est mesurable dans } [a,b] \text{ et } \int_{a}^{b} |g(t)|^{p}\,dt < \infty \right\}.$$

En particulier, si $\beta = k \in \mathbb{N}$, et $\alpha > k$, alors:

$$D_{a+}^{k}I_{a+}^{\alpha}g(t) = I_{a+}^{\alpha-k}g(t), \tag{1.10}$$

Soient $\alpha \geq 0, m \in \mathbb{N}$ et $D = \frac{d}{dt}$. Si les deux dérivées fractionnaire $D_{a+}^{\alpha}g(t)$, $D_{a+}^{m}g(t)$ existent, on a:

$$D_{a+}^{m}D_{a+}^{\alpha}g(t) = D_{a+}^{\alpha+m}g(t). \tag{1.11}$$

Si la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha, (n-1 \leq \alpha < n)$,d'une fonction $g \in L^{p}(a,b)$. Alors:

$$I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}g(t) = g(t) - \sum_{j=1}^{n}[D^{\alpha-j}_{a+}g(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}. \tag{1.12}$$

Généralement ou abserve que les dérivées fractionnaires et les intégrales fractionaires au sens de $R-L$ de même ordre ne cummutent pas entre elles.

Nous avons aussi les formules de compositions suivantes pour $m-1 \leq \alpha < m$ et $n-1 \leq \beta < n$,

$$D^{\alpha}_{a+}D^{\beta}_{a+}g(t) = D^{\alpha+\beta}_{a+}g(t) - \sum_{j=1}^{n}[D^{\beta-j}_{a+}g(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)}. \tag{1.13}$$

et

$$D^{\beta}_{a+}D^{\alpha}_{a+}g(t) = D^{\alpha+\beta}_{a+}g(t) - \sum_{j=1}^{n}[D^{\alpha-j}_{a+}g(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(1-\beta-j)}. \tag{1.14}$$

D'après (1.13) et (1.14) on peut conclure que les dérivées fractionnaires au sens de $R-L$ ne cummutent pas.

**Example 0.1** On va calculer l'intégrale fractionnaire $I^{\alpha}_{a+}g(t)$ au sens de $R-L$ de la fonction puissance $g(t) = (t-a)^{\beta}$,où $\beta$ est un nombre réel.On utilise la formule (1.1).

$$I^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-a)^{\beta}ds. \tag{1.15}$$

On suppose que $\beta > -1$,pour la convergence de l'intégrale. D'aprés (1.15) le chargement de variable $s = a + \varepsilon(t-a)$ et en utilisant la fonction Bêta on déduit:

$$I^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta}\int_0^1 (t-\varepsilon)^{\alpha-1}\varepsilon^{\beta}d\varepsilon. \tag{1.16}$$

où $\varepsilon = 0$ si $s = a$,$\varepsilon = 1$ si $s = t$ et $\varepsilon = \frac{s-a}{t-a}$.Alors

$$I^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}B(\beta+1,\alpha)(t-a)^{\alpha+\beta}.$$

L'utilisation de la formule $B(x,w) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(w)}{\Gamma(x+w)}$.Trouvons:

$$I^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(t-a)^{\beta+\alpha}, (\alpha > 0, \beta > -1). \tag{1.17}$$

D'aprés (voir[28]) on calcul la dérivée fractionnaire $D^{\alpha}_{a+}g(t)$, au sens de $R-L$ de la fonction $g(t) = (t-a)^{\beta}$ supposons que $0 < n-1 \leq \alpha < n$.et rappelon que la définition de la dérivée fractionnaire au sens de $R-L$ est :

$$D^{\alpha}_{a+}g(t) = \frac{d^n}{dt^n}(I^{n-\alpha}_{a+}g(t)), (n-1 \leq \alpha < n). \tag{1.18}$$

on a besoin supposes $\beta > n$ pour la convergence de l'intégrale (1.1). alors :

$$D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{d^n}{dt^n}(I_{a+}^{n-\alpha}(t-\alpha)^{\beta}). \tag{1.19}$$

pour la formule (1.17) et (1.19) on obtient:

$$D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}\frac{d^n}{dt^n}(t-\alpha)^{\beta+n-\alpha}. \tag{1.20}$$

Conclure aussi:

$$\frac{d^n(x-a)^{\beta+n-\alpha}}{dt^n} = (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)(t-a)^{\beta-\alpha} \tag{1.21}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.22}$$

On utilise le résultat (1.22) dans (1.20) on trouve:

$$D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.23}$$

Alors, on conclu que la dérivée fractionnaire au sens de $R-L$ de la fonction $g(t) = (t-a)^{\beta}$ est :

$$D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.24}$$

$0 \leq n-1 \leq \alpha < n, \beta > n,$

**Corollary 0.1** *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha]+1.(D_{a+}^{\alpha}g)(t) = 0$ est satisfait si,*

$$g(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j(t-a)^{\alpha-j},$$

où $x_j \in R(j = 1, ..., n)$ des constantes arbitaires. En particulier ,si $0 < \alpha \leq 1$ la relation $(D_{a+}^{\alpha}g)(t) = 0$ est satisfaite si et seulement si $g(t) = x(t-a)^{\alpha-1}$, $\forall x \in R$.

**Example 0.2** Dérivée fractionnaire d'une constante.Si on prend $\beta = 0$ avec $\alpha \geq 0$ dans la relation (1.24), on conclu que la dérivée fractionnaire d'une constante au sens de $R-L$ est différente à zéro,c'est a dire:

$$D_{a+}^{\alpha}(x) = \frac{x}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}, (0 < \alpha < 1).$$

D'autre part,pour $j = 1, ..., [\alpha]+1$,on a :

$$D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j} = 0.$$

## 0.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La dérivée fractionnaire de type caputo et ses propriétés.

**Definition 0.3** (voir [32]).la dérivée fractionnaire de Caputo ${}^{c}D^{\alpha}_{a+}g(t)$ d'orde $\alpha \geq 0$ sur un intervalle fini $[a,b]$, peut être définie par aides du dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville par:

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{a+}g(t) = D^{\alpha}_{a+}\left[g(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^{k}\right], \tag{1.25} $$

et

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{b-}g(t) = D^{\alpha}_{b-}\left[g(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^{k}\right]. \tag{1.26} $$

où

$$ n = [\alpha] + 1 \text{ pour } \alpha \notin \mathbb{N}, n = \alpha \in \mathbb{N}. \tag{1.27} $$

Les deux dérivées sont appellées respectivement,la dérivée à gauche et à droite au sens de Caputo.

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{a+}g(t) = D^{\alpha}_{a+}\left[g(t) - g(a)\right], \tag{1.28} $$

et

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{b-}g(t) = D^{\alpha}_{b-}\left[g(t) - g(b)\right] \tag{1.29} $$

**Theorem 0.1** *(voir* [32]) *.Soit $\alpha \geq 0$, et $n$ donné par* (1.27).

Si $g \in AC^{m}[a,b]$ ,la dérivée fractionnaire de caputo existe presque partout sur $[a,b]$, $(a)$ Si $\alpha \notin N,{}^{c}D^{\alpha}_{a+}g(t)$ donnée par:

$$ \begin{aligned} {}^{C}D^{\alpha}_{a+}g(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}g^{(n)}(s)\,ds & (1.30) \\ &= \left(I^{n-\alpha}_{a+}D^{n}_{a+}g\right)(t). & (2) \end{aligned} $$

$$ D = \frac{d}{dt} \text{ et } n = [\alpha]+1,\ AC^{m}[a,b] = \left\{g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ } et \text{ } D^{n-1}g \in AC[a,b]\right\}. $$

Si $0 < \alpha < 1$ et $g \in AC[a,b]$ on obtient:

$$ {}^{C}D_{a+}^{\alpha}g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{a}^{t} (t-s)^{-\alpha} g^{'}(s)\, ds = \left(I_{a+}^{1-\alpha} D_{a+}^{1} g\right)(t). \tag{1.31} $$

$(b)$ Si $\alpha = n \in N$,on obtient:

$$ {}^{C}D_{a+}^{\alpha}g(t) = g^{(n)}(t). \tag{1.32} $$

En particulier

$$ {}^{C}D_{a+}^{0}g(t) = g(t). $$

### 0.4.1 Propriétés

(voir [23] . [28]) sur les dérivées fractionnaires au sens Caputo.

Si $\alpha \notin N$,et $g(a) = g\prime(a) = ... = g^{n-1}(a) = 0, (n = [\alpha]) + 1)$,alors la dérivée de Caputo coïncide avec la dérivée au sens de $R-L$ i.e:

$$ {}^{C}D_{a+}^{\alpha}g(t) =^{R-L} D_{a+}^{\alpha}g(t). \tag{1.33} $$

Si $\alpha \in N$,et la dérivée usuelle $g^{(n)}(t)$ existe, alors la dérivée fractionnaire ${}^{C}D_{a+}^{\alpha}g(t)$ de Caputo d'ordre $n$ coïncide avec $g^{(n)}(t)$ :

$$ {}^{C}D_{a+}^{\alpha}g(t) = g^{(n)}(t). $$

La relation entre l'intégrale fractionnaire de $R-L$ et la dérivée fractionnaire de Caputo.

Soit $\alpha > 0$,et $n$ donné par (1.27).Si $g \in AC^{m}[a,b]$ alors:

$$ I_{a+}^{\alpha C} D_{a+}^{\alpha} g(t) = g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^{k}. \tag{1.34} $$

Si $0 < \alpha < 1$,et $g \in AC[a,b]$ on trouve:

$$ I_{a+}^{\alpha C} D_{a+}^{\alpha} g(t) = g(t) - g(a). $$

**Example 0.3** Soit la fonction $g(t) = (t-a)^{\beta}$on calcul ${}^{C}D_{a+}^{\alpha}g(t)$,au sens de Caputo de la fonction $g$ ce propos,supposons que $0 \leq n-1 \leq \alpha \leq n$,et on rappelle que la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est:

$$ {}^{C}D_{a+}^{\alpha}g(t) = I_{a+}^{n-\alpha} D_{a+}^{n} g(t), \tag{1.35} $$

tq:

$$ \beta > n \text{ et } (n-1 \leq \alpha < n), $$

$$^{C}D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta} = I^{n-\alpha}_{a+}D^{n}_{a+}(t-a)^{\beta}. \tag{1.36}$$

$$D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta} = \frac{d^{n}(x-a)^{\beta}}{dt^{n}} = \beta(\beta-1)....(\beta-n+1)(t-a)^{\beta-n}. \tag{1.37}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n}. \tag{1.38}$$

On substitue le résultat (1.38),dans la formule (1.36) et utilisant la relation (1.17) on trouve:

$$^{C}D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

on conclut que:

$$^{C}D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.39}$$

**Example 0.4** La dérivée fractionnaire d'une canstante ($k \in R$) est zéro c'est-à-dire [32] :

$$^{C}D^{\alpha}_{a+}k = 0 \quad (k \in R, \alpha > 0).$$

**Lemma 0.1** *Linéarité. Soient $n-1 < \alpha < n, n \in N, \alpha, \lambda, \gamma \in C$ et soient $f$ et $g$ deux fonctions telles que $^{C}D^{\alpha}_{a+}f(t)$ et $^{C}D^{\alpha}_{a+}g(t)$ existent.*

$$^{C}D^{\alpha}_{a+}(\lambda f(t) + \gamma g(t)) = \lambda^{C}D^{\alpha}_{a+}f(t) + \gamma^{C}D^{\alpha}_{a+}g(t).$$

**Prouve**

$^{C}D^{\alpha}_{a+}f(t) = I^{n-\alpha}D^{n}f(t)$ (voir(2.11) on obtient alors:

$$\begin{aligned} ^{C}D^{\alpha}_{a+}(\lambda f(t) + \gamma g(t)) &= I^{n-\alpha}D^{n}[\lambda f(t) + \gamma g(t)] \\ &= \lambda I^{n-\alpha}D^{n}f(t) + \gamma I^{n-\alpha}D^{n}g(t) \\ &= \lambda^{C}D^{\alpha}_{a+}f(t) + \gamma^{C}D^{\alpha}_{a+}g(t). \end{aligned}$$

**Lemma 0.2** *Non-commutativité.On soppose que $n-1 < \alpha < n, m, n \in N$,*

$\alpha \in R_{+}$ et $^{C}D^{\alpha}_{a+}g(t)$ existe, alors:

$$^{C}D^{\alpha}_{a+}D^{m}g(t) =^{C} D^{\alpha+m}_{a+}g(t) \neq D^{mC}D^{\alpha}_{a+}g(t).$$

Remarque Aussi la dérivée fractionnaire du $R-L$ Non-commutativité.

$$D^m D^{\alpha}_{a+} g(t) = D^{\alpha+m}_{a+} g(t) \neq D^{\alpha}_{a+} D^m g(t). \tag{1.41}$$

**Lemma 0.3** *La règle de Leibniz pour les dérivée fractionnaire .Soint $f$ et $g$ deux fonction de $C^1[a,b]$ ,alors la régle de Leibniz pour la différentiation fractionnaire sous la forme:*

$$D^{\alpha}_{a+}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} f^{(k)} D^{\alpha-k}_{a+} g(t).$$

## 0.5 Dérivées fractionnaires de quelques fonctions

Dans cette partie on donne quelques exemples sur la fonction constante la fonction exponentielle,la fonction puissance,la fonction sinus et cosinus.

### 0.5.1 La fonction constante

La dérivée fractionnaire d'une constante c'est zéro dans vue physique, mais pour $R-L$ on a:

$$D^{\alpha}_{a+} k = \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha} \neq 0 \ k = const.$$

**Lemma 0.4** *La dérivée fractionnaire d'une constante $k$ au sens de Caputo égale zéro :*

$${}^{C}D^{\alpha}_{a+} k = 0, \ k = const.$$

### 0.5.2 La fonction puissance

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n$, d'une fonction puissance $g(t) = t^p$pour $p \geq 0$ est donné par:

$$D^{\alpha}_{a+} t^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}, \tag{1.42}$$

et

$${}^{C}D^{\alpha}_{a+} t^p = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} = D^{\alpha}_{a+} t^p & (p > n-1) \\ 0, & (p \leq n-1) \end{cases} \tag{1.43}$$

**Example 0.5** On va calculer la dérivée fractionnaire de $g(t) = t^2$et $0 < \alpha < 1$ utilisant la formule (1.42) avec $\alpha \in R_+, \alpha \notin N$,la dérivée fractionnaire de Caputo de la fonction puissance $g(t)$ est :

$$^{C}D^{\alpha}_{a+}t^2 = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\alpha+1)}t^{2-\alpha} = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha}, \quad n-1<\alpha<n<3$$

Si $\alpha = \frac{1}{3}$,alors on trouve

$$^{C}D^{\frac{1}{3}}_{a+}t^2 = \frac{2}{\Gamma(3-\frac{1}{3})}t^{2-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\Gamma(\frac{8}{3})}t^{\frac{5}{3}} \simeq 1.33t^{\frac{5}{3}}.$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$,on a alors

$$^{C}D^{\frac{1}{2}}_{a+}t^2 = \frac{2}{\Gamma(3-\frac{1}{2})}t^{2-\frac{1}{2}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{t^3} \simeq 1.5t^{\frac{3}{2}}.$$

Enfin si $\alpha = \frac{3}{4}$,on obtient

$$^{C}D^{\frac{3}{4}}_{a+}t^2 = \frac{2}{\Gamma(3-\frac{3}{4})}t^{2-\frac{3}{4}} = \frac{2}{\Gamma(\frac{9}{4})}t^{\frac{5}{4}} \simeq 1.77t^{\frac{5}{4}}.$$

on conclut que

$$^{C}D^{\alpha}_{a+}t^2 = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha} \to \{^{2t,\alpha\to 1}_{t^2,\alpha\to 0}$$

### 0.5.3 Fonction exponentielle

soit la fonction $g(t) = e^{\lambda t}$, l'application de l'opérateur de Caputo donne le résultat suivant:

soit $\alpha \in R_+, n-1<\alpha<n, n \in N, \lambda \in \mathbb{C}$.Alors la dérivée fractionnaire de Caputo de la fonction exponentielle est :

$$^{C}D^{\alpha}_{a+}e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+n}t^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+1+n-\alpha)} = \lambda^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(\lambda t). \tag{1.44}$$

### 0.5.4 Les fonction sinus et cosinus

Le comportement des dérivées fractionnaire de Caputo appliquées les fonction sinus et cosinus.

**Theorem 0.2** *Soit $\lambda \in C, \alpha \in R_+, n \in N, n-1<\alpha<n$.Alors*

$$^{C}D^{\alpha}_{a+}\sin\lambda t = -\frac{1}{2}i(i\lambda)^n t^{n-\alpha}(E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t) - (-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t)).$$

Preuve

Tout D'abort On utilise la formule suivante :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in C.$$

En appliquant la formule (3.4) pour la fonction exponentielle, et la propriété de la linéarité de la dérivée fractionnaire de Caputo,on montrer que:

$$\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha}_{a+}\sin\lambda t &= {}^{C}D^{\alpha}_{a+}\frac{e^{i\lambda t}-e^{-i\lambda t}}{2i} \\
&= \frac{1}{2i}({}^{C}D^{\alpha}_{a+}e^{i\lambda t} -{}^{C} D^{\alpha}_{a+}e^{-i\lambda t}) \\
&= \frac{1}{2i}((i\lambda)^n t^{n-\alpha}E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t)-(-i\lambda)^n t^{n-\alpha}E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda t)) \\
&= \frac{-1}{2i}i(i\lambda)^n t^{n-\alpha}(E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t)-(-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda t)).
\end{aligned}$$

**Theorem 0.3** *Soit* $\lambda \in C, \alpha \in R_+, n \in N, n-1 < \alpha < n.Alors$

$${}^{C}D^{\alpha}_{a+}\cos\lambda t = \frac{1}{2}(i\lambda)^n t^{n-\alpha}(E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t)+(-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda t)).$$

## Preuve

On utilisant:

$$\cos z = \frac{e^{izt}+e^{-izt}}{2},\ z \in C.$$

$$\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha}_{a+}\cos\lambda t &= {}^{C}D^{\alpha}_{a+}\frac{e^{i\lambda t}+e^{-i\lambda t}}{2} \\
&= \frac{1}{2}({}^{C}D^{\alpha}_{a+}e^{i\lambda t} +{}^{C} D^{\alpha}_{a+}e^{-i\lambda t}) \\
&= \frac{1}{2}((i\lambda)^n t^{n-\alpha}E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t)+(-i\lambda)^n t^{n-\alpha}E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda t)) \\
&= \frac{1}{2}(i\lambda)^n t^{n-\alpha}(E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t)+(-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda t)).
\end{aligned}$$

# Part III

# Chapitre 2:Théorèmes du point fixe

Voir [6, 7, 19, 34]

**Definition 0.4** Soit $g$ une application d'une ensemble $E$ dans $E$.

On appelle point fixe de $g$ tout point $x \in E$ tel que

$$g(x) = x.$$

**Definition 0.5** Une partie $A$ de $(E, \| \,.\, \|)$ est dite relativement compacte si son adhérence est compacte.

**Definition 0.6** soient $E$ et $G$ deux espaces de Banach et $E \to G, g$ est complétement continue si elle est continue et transforme tout borné de $E$ en un ensemble relativement compact dans $G$.Alors $g$ est compacte si $g(E)$ est relativement compacte dans $G$.

**Definition 0.7** Soit $A \subset (J, R)$.$A$ est dit equicontinue ,si pour tout $\varepsilon > 0$,il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t_2 - t_1| < \delta \Rightarrow |g(t_1) - g(t_2)| \leq \varepsilon$$

pour tout $t_1, t_2 \in J$ et tout $g \in A$.

**Definition 0.8** Soit $(E, \| \,.\, \|)$ un espace de banach . Une application $g : E \to E$, est dite Lipschitzienne de constante $k > 0$ si elle vérifie

$$\forall x, y \in E, \| \, g(x) - g(y) \, \| \leq k \, \| \, x - y \, \| \, .$$

Si $0 < K < 1$,alors on dit $g$ est une contraction.

## 0.6 Quelques théorèmes du point fixe

On s'intérresse au théorème du point fixe de Banach qui assure l'existence et l'unicité du point fixe. Ensuite le théorème du point fixe de Schaefer, le théorème de Schauder, l'alernative non linéaire de Leray Schauder et le théorème du point fixe de Krasnosselskii qui n'assurent que l'existence du point fixe.

### 0.6.1 Théorème de point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach porte le nom le théorème de l'application contractante est un  théorème simple assure l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante, appliqué aussi espaces metrique.

**Theorem 0.4** [23] *Soit* $(E, \|\|)$ *un espace de Banach et* $A : E \to E$, *une contraction. Alors l'opérateure* $A$ *admet un point fixe unique* $x \in E$. *De plus, si* $x_0 \in E$ *et* $x_n = Ax_{n-1}$, *alors:*

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

## Preuve

Soient $k$ la constante de contraction de $A$ et $x_0$ un élément fixe de $E$. On définit$\{x_n\}$ dans $E$ par :

$$x_n = Ax_{n-1}, \ \forall n \geq 1.$$

comme $A$ est un opérateur contractant,on obtient:

$$\| x_n - x_{n+1} \| = \| Ax_{n-1} - Ax_n \| \leq k \| x_{n-1} - x_n \| \ \ \forall n \geq 1,$$

ainsi,

$$\| x_n - x_{n-1} \| \leq k^n \| x_0 - x_1 \| \, \forall n \geq 1.$$

Par conséquent,pour tout $m > n$ on a:

$$\| x_n - x_m \| \leq (k^n + k^{n+1} + ..... + k^{m-1}) \| x_0 - x_1 \| \leq \frac{k^n}{1-k} \| x_0 - x_1 \| .$$

On déduit que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans $E$ qui est un Banach danc $x_n \to x$, $x \in E$.De la continuité de $A$,on a

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} Ax_{n-1} = Ax.$$

Pour montrer l'unicité du point fixe dans $E$, supposons que $x$ et $y$ sont deux points fixes de $A$.Alors

$$\| x - y \| = \| A(x) - A(y) \| \leq k \| x - y \| < \| x - y \|,$$

on déduit que $x = y$.

### 0.6.2 Théorème du point fixe de Schaefer

**Theorem 0.5** [29] *Soit* $X$ *un espace de Banach.Si* $A : X \to X$ *est un opérateur complétement continu et si l'ensemble*

$$\varepsilon = \{x \in X : \lambda Ax = x \text{ pour certain } \lambda \in ]0, 1[\} ,$$

est borné, alors $A$ possèd au moins un point fixe.

### 0.6.3 Théorème du point fixe de type Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder prouve l'existence d'un point fixe pour les fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach et affirme qu'une application continue admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

**Theorem 0.6** [20] *Soit $(E, d)$ un espace métrique complet,soit $X$ une partie convexe et fermé de $E$ ,et soit $A : X \to X$ une application tel que l'ensemble $\{Ax : x \in X\}$ soit relativement compact dans $E$ . Alors $A$ possède au moins un point fixe.*

### 0.6.4 L'alternative non linéaire de Leray Schauder

**Theorem 0.7** [25] *Soit $X$ un espace de Banach, $\Omega$ un sous ensemble ouvert borné de $X$, avec $0 \in \Omega$ et $A : \overline{\Omega} \to X$ une application compacte, alors*

1) $A$ a un point fixe sur $\overline{\Omega}$ ou bien,
2) Il existe $\lambda \in (0, 1)$ et $x \in \partial\Omega$ tel que : $x = \lambda A(x)$.

### 0.6.5 Théorème de Arzèla-Ascoli

**Theorem 0.8** [27] *Soit $A$ un sous ensemble de $C(J, E)$.$A$ est relativement compact dans $C(J, E)$ si et selement si les conditions suivantes sont vérifiées:*

*i)* L'ensemble $A$ est uniformément borné. $i, e$ il existe une constante $k > 0$ :tel que: $\| f(x) \| \leq k$, pour tout $x \in J$ et tout $f \in A$.

*ii)* L'ensemble $A$ est equicontinue.$i.e$ pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que:

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \| f(t_1) - f(t_2) \| \leq \varepsilon,$$

pour tout $t_1, t_2 \in J$ et tout $f \in A$.

### 0.6.6 Théorème de Krasnoselskii

**Theorem 0.9** *Soit $X$ un espace de Banach et $M$ une partie non vide, convexe et fermée de $X$ . On suppose que $A$ et $B$ sont deux opérateures de $X$ dans $X$ satisfaisant :*

*i)* $Ax + By \in M, \forall x, y \in M$.
*ii)* $A$ est une contraction.
*iii)* $B$ est complétement continue.
Alors $\exists x^* \in M$ tel que $Ax^* + Bx^* = x^*$.

# Part IV

# Chapitre 3:Etude d'un problème aut limites d'ordre fractionnaire

On s'intéresse dans ce chapitre a l'existence et unicité de la solution d'une problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Caputo suivant:

$$^{C}D^{\alpha}x(t) = g(t, x(t)), \text{ pour tout } t \in J = [0, T], \tag{2.1}$$

et les condition aux limites

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_0^*, \; x"(T) = x_T \tag{2.2}$$

avec $^{C}D^{\alpha}$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo,$2 < \alpha < 3$, $g : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

est une fonction continue et $x_0, x_0^*, x_T$ sont des constantes réelles.

tout d'abord on commence par la définition de la solution du problème $(2.1) - (2.2)$.suivante :

**Definition 0.9** si $x \in AC^3(J, \mathbb{R})$ est une fonction qui satisfait l'equation (2.1) et les condition (2.2). Alors elle est une solution du problème $(2.1) - (2.2)$.

## lemme:[34, 2, 27]

Soit $v : J \to R$ une fonction continue. Le problème linéaire suivant:

$$^{c}D^{\alpha}x(t) = v(t), t \in J = [0, T], \tag{2.3}$$

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_0^*, \; x"(T) = x_T, \tag{2.4}$$

admet une solution unique $x$ qui est donnée par:

$$\begin{aligned} x(t) \;\; = \;\; & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds - & (2.5) \\ & \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} v(s) ds & (3) \\ & + x_0 + x_0^* t + \frac{x_T}{2} t^2. & (4) \end{aligned}$$

## Preuve

On applique l'intégrale fractionnaire de Riemann-Lioville aux deux membres de l'équation (2.3) on trouve:

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \frac{1}{T(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds. \tag{2.6}$$

La condition $x(0) = x_0$,donne:

$$c_0 = x_0.$$

On dérive l'équation (2.6), on obtient:

$$x'(t) = c_1 + 2c_2 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds$$

$$x'(t) = c_1 + 2c_2 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} v(s) ds. \tag{2.7}$$

La condition $x'(t) = x_0^*$ donne

$$c_1 = x_0^*.$$

On dérive l'equation (2.7), on obtient:

$$x^{''}(t) = 2c_2 + \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-3} v(s) ds.$$

La condition $x''(T) = x_T$ implique

$$c_2 = \frac{x_T}{2} - \frac{1}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} v(s) ds.$$

on substitue $c_0, c_1, c_2$ dans (2.6) on trouve:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + x_0^* t + t^2 (\frac{x_T}{2} - \frac{1}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} v(s) ds) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds. \end{aligned}$$

ce qui donne (2.5).

On transforme le problème $(2.1)-(2.2)$ en un problème du point fixe.On considère l'opérateur

$$G : C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R}).$$

défini par:

$$\begin{aligned} G(x)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds \\ &- \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} g(s, x(s)) ds \\ &+ x_0 + x_0^* t + \frac{x_T}{2} t^2. \end{aligned}$$

Les points fixes de l'opérateur $G$ sont les solution du problème $(2.1)-(2.2)$.

## 0.7 Existence et unicité de la solution

On donne le premier résultat d'existence qui est basé sur le théorème du point fixe de Banach.

**Theorem 0.10** (&) *S'il existe une constante $k > 0$ tel que :*

$$|g(t,x) - g(t,y)| \leq k\,|x-y|\,, \forall t \in J, \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

et

$$kT^{\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)}\right] < 1 \tag{2.9}$$

alors le problème $(2,1)-(2,2)$ admet une solution unique.

### Preuve

On utilise le principe de contraction de Banach pour démontrer que $G$ admet un point fixe. On montre que $G$ est une contraction.Soit $x, y \in C(J, R)$.

Alors pour tout $t \in J$ on a:

$$\begin{aligned}
|G(x)(t) - G(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,|g(s,x(s)) - g(s,y(s))|\,ds \\
&\quad + \frac{T^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}\,|g(s,x(s)) - g(s,y(s))|\,ds \\
&\leq \frac{k\,\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\
&\quad + \frac{T^2 k\,\|x-y\|_\infty}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}ds \\
&\leq \frac{k\,\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{\alpha}T^{\alpha}\right] + \frac{T^2 k\,\|x-y\|_\infty}{2\Gamma(\alpha-2)}\left[\frac{1}{(\alpha-2)}T^{\alpha-2}\right].
\end{aligned}$$

on trouve:

$$\|G(x) - G(y)\|_\infty \leq kT^{\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)}\right]\|x-y\|_\infty\,.$$

En tentant compte de $(2,9)$,on conclut que $G$ est une contraction. D'après le théorème du point fixe de Banach,on déduit que $G$ admet un point fixe qui est la solution du problème $(2,1)-(2,2)$.

## 0.8 Autres résultats d'existence de la solution

Le deuxième résultat est basé sur la théorème de Schaefer.

**Theorem 0.11** $(*)$*On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ tel que:*

$$|g(t,x)| \leq M \text{ pour tout } t \in J \text{ et } x \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Alors le probléme $(2.1) - (2.2)$ admet au moins une solution.

Démonstration:

On va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour démontrer que $G$ admet une point fixe.on distingue La démonstration par plusiers étapes.

Etape 1 : $G$ est continue.Soit $\{x_n\}$ une suite tel que $x_n \to x$ dans $C(J,\mathbb{R})$.Alors pour tout $t \in J$ :

$$\begin{aligned}|G(x_n)(t) - G(x)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|g(s,x_n(s)) - g(s,x(s))\right| ds \\ &+ \frac{T^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}\left|g(s,x_n(s)) - g(s,x(s))\right| ds.\end{aligned}$$

Comme $g$ est continue,on a:

$$\| G(x_n) - G(x) \| \to 0 \text{ quant } n \to \infty.$$

Etape 2 : D'après (2.10) on a pour tout $t \in J$ et $x$ dans $C(J,\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}|G(x)(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (T-s)^{\alpha-1}\left|g(s,x(t))\right| ds \\ &+ \frac{T^2}{\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}\left|g(s,x(s))\right| ds \\ &+ |x_0| + |x_0^*|\,T + \frac{|x_T|}{2}T^2 \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{T^2 M}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3} ds \\ &+ |x_0| + |x_0^*|\,T + \frac{|x_T|}{2}T^2 \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha-1)}T^\alpha + |x_0| + |x_0^*|\,T + \frac{|x_T|}{2}T^2.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\| \ G(x) \| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha-1)}T^\alpha \\ &+ |x_0| + |x_0^*|\,T + \frac{|x_T|}{2}T^2\end{aligned}$$

et par suite $G$ est uniformément borné.

Etape 3 : Equicontinuité.Soient $t_1, t_2 \in J, t_1 < t_2, x \in C(J,\mathbb{R})$.Alors :

$$\begin{aligned}
|G(x)(t_2) - G(x)(t_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}\right] g(s, x(s))ds \right. \\
&\quad \left. + \frac{(t_2 - t_1)^2}{\Gamma(\alpha - 2)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-3} g(s, x(s))ds \right| \\
&\quad + |x_0^*|(t_2 - t_1) + \frac{|x_T|}{2}(t_2 - t_1)^2 \qquad (5) \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}\right] ds \qquad (2.11) \\
&\quad + \frac{M(t_2 - t_1)}{2T(\alpha - 2)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds + \qquad (6) \\
&\quad + |x_0^*|(t_2 - t_1) + \frac{|x_T|}{2}(t_2 - t_1)^2 \qquad (7) \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[(t_2 - t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha\right] \qquad (8) \\
&\quad + \frac{M}{2\Gamma(\alpha + 1)}(t_2 - t_1)^\alpha \qquad (9) \\
&\quad + |x_0^*|(t_2 - t_1) + \frac{|x_T|}{2}(t_2 - t_1)^2. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Si $t_1 \to t_2$ , $(2,11)$ tend vers zéro. D'aprés le théorème de Arzelà-Ascoli que $G$ est complétement continue sur $C(J,\mathbb{R})$.
Etape 4 : On va montrer la bornitude de l'ensemble :

$$\varepsilon = \{x \in C(J,\mathbb{R}) : x = \lambda G(x) \text{ pour } 0 < \lambda < 1\}.$$

Soit $x \in \varepsilon$, alors $x = \lambda G(x)$ pour $0 < \lambda < 1$.On a :

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} g(s, x(s))ds \\
&\quad - \frac{\lambda t^2}{2T(\alpha - 2)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-3} g(s, x(s))ds \\
&\quad + \lambda x_0 + \lambda x_0^* t + \lambda \frac{x_T}{2} t^2.
\end{aligned}$$

De (2.10) on a:

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} ds + \frac{MT^2}{2\Gamma(\alpha - 2)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-3} ds \\
&\quad + |x_0| + |x_0^*| T + \frac{|x_T|}{2} T^2 \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M}{(\alpha - 2)\Gamma(\alpha - 2)} T^\alpha + |x_0| + |x_0^*| T + \frac{|x_T|}{2} T^2
\end{aligned}$$

et par suite on trouve:

$$\| x \| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} T^{\alpha} + \frac{M}{T(\alpha-1)} T^{\alpha} + |x_0| + |x_0^*| T + \frac{|x_T|}{2} T^2$$

Ceci prouve que l'ensemble $\epsilon$ est borné. D'après le théorème du point fixe de Schaefer, $G$ admet un point fixe qui est une une solution du problème $(2.1) - (2.2)$.

**Theorem 0.12** *S'il existe $\phi_g \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$, $\psi : [0, +\infty[ \to (0, +\infty)$ une fonction continue et croissante et une constante $M > 0$ telle que :*

$$|g(t), u)| \leq \phi_g(t) \psi(|u|) \ \ \forall t \in J, \forall u \in \mathbb{R} \tag{2.12}$$

$$\psi(M) I^{\alpha} \phi g(T) + \psi(M) \frac{T^2}{2} I^{\alpha-2} \phi_g(T) + |x_0| + |x_0^*| T + \frac{|x_T|}{2} T^2 < M. \tag{2.13}$$

Alors le problème $(2.1) - (2.2)$ admet au moins une solution.

## Démonstration

Soit

$$\Omega = \{x \in C(J, \mathbb{R}) : \| x \| < M\}.$$

un sous ensemble ouvert borné de $C(J, \mathbb{R})$.D'une façon similaire à celle de la démonstration du théorème $(*)$, on montre que l'opérateur $G : \overline{\Omega} \to C(J, \mathbb{R})$ est complètement continue .Soit $x \in \partial\Omega$ tel que $x = \lambda G(y)$ pour $\lambda \in (0, 1)$. En va de $(2.12)$ on obtient

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \phi_g(s) \psi(|x(s)|) ds \\
&+ \frac{T^2}{2T(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} \phi_g(s) \psi(|x(s)|) ds \\
&+ |x_0| + |x_0^*| T + \frac{|x_T|}{2} T^2 \\
&\leq \psi(\| x \|) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \phi_g(s) ds \\
+\psi( \quad \| \quad & x \|) \frac{T^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} \phi_g(s) ds \\
&+ |x_0| + |x_0^*| T + \frac{|x_T|}{2} T^2 \\
&= \psi(M) I^{\alpha} \phi_g(T) + \psi(M) \frac{T^2}{2} I^{\alpha-2} \phi_g(T) \\
&+ |x_0| + |x_0^*| T + \frac{|x_T|}{2} T^2
\end{aligned}$$

Comme $\psi$ est croissant on obtient:

$$\begin{aligned}|x(t)| &\leq \psi(M)I^{\alpha}\phi_g(T)+\psi(M)\frac{T^2}{2}I^{\alpha-2}\phi_g(T)\\ &\quad +|x_0|+|x_0^*|T+\frac{|x_T|}{2}T^2\\ &< M.\end{aligned}$$

ceci est contradictoire avec $x \in \partial\Omega$, par conséquent $G$ admet un point fixe $x$ dans $\overline{\Omega}$ ,qui est une solution non triviale du problème $(2.1)-(2.2)$.

# 0.9 Exemple

dans cette exemple on va donner des résultats obtenus.On considére le problème fractionnaire qui suit:

$$\begin{aligned}{}^{C}D^{\alpha}x(t) &= \frac{2e^{-t}x^2(t)}{(9+e^t)(1+x^2(t))}, t\in J=[0,1]\,, \alpha=0.25 &(2.14)\\ x(0) &= 0, x'(0)=1, x''(1)=0. &(2.15)\end{aligned}$$

Posons:

$$g(t,y)=\frac{2e^{-t}y^2}{(9+e^t)(1+y^2)}, (t,y)\in J\times\mathbb{R}.$$

Alour pout tout $x,y\in\mathbb{R}$ et $t\in J$,on a:

$$\begin{aligned}|g(t,y)-g(t,x)| &= \frac{2e^{-t}}{(9+e^t)}\left|\frac{y^2}{1+y^2}-\frac{x^2}{1+x^2}\right|\\ &= \frac{2e^{-t}\,|y-x|\,(|y|+|x|)}{(9+e^t)\,(1+y^2)\,(1+x^2)}\\ &\leq \frac{e^{-t}}{9+e^t}\,|y-x|\\ &\leq \frac{1}{10}\,|y-x|\end{aligned}$$

Par suite la condition de contraction est vérifiée avec $k=\frac{1}{10}$.On prouve que la condition $(1,9)$ et satisfaite avec $T=1$.

$$KT^{\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}+\frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)}\right]=\frac{1}{10}\left[\frac{1}{\Gamma(3.5)}+\frac{1}{2\Gamma(1.5)}\right]=8.6509\times10^{-2}<1.$$

Alors du théorème(&), le problème $(2.14)-(2.15)$ admet une solution unique.

Maintenant si on choisit

$$\begin{aligned}
g(t,y) &= \frac{t^2(y+1)}{(9+e^t)(1+|y|)}, (t,y) \in J \times \mathbb{R}. \\
g(t,0) &= \frac{t^2}{9+e^t} \neq 0, t \in J
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|g(t,y)| &\leq t^2(|y|+1) = \phi_g(t)\psi(|y|) \; \forall t \in J, \forall y \in \mathbb{R} \\
\phi_g(t) &= t^2, \psi(y) = y+1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \psi(M)I^\alpha \phi_g(T) + \psi(M)\frac{T^2}{2}I^{\alpha-2}\phi_g(T) + |x_0| + |x_0^*|\,T + \frac{|x_T|}{2}T^2 \\
\leq \; & (M+1)\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5.5)} + (M+1)\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3.5)} + 1 \\
\leq \; & M\left(\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5.5)} + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3.5)}\right) + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5.5)} + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3.5)} + 1. \\
= \; & 0.64001M + 1.63 < M.
\end{aligned}$$

donc si on prend $M > 4.5557$ alors les condition du théorème $(*)$sont satisfaites et par suite le problème $(2.14) - (2.15)$ admet au moins une solution.

# Part V

# Conclution

Les equation differentielles fractionnaires sont une généralisation naturelle des équations différentielles ordinnaires, elle peuvent présente plusieurs phénomènes dans grandes domaines de la sciences de tous genres.

on a présenté qulques resultats d'existence et l'unicité des solution du problèmes aux limités pour des équation d'ordre fractionnaire, En utilisant les techniques du point fixe: point fixe de Banach, Schaefer, et l'alternative non lineaire de Leray-Schauder.

D'après ce travail on peut connaitre l'importance du calcul fractionnaire dans le domaine des mathématique .Nous comptons, dans le futur utilié le calcule fractionnaire à d'autres équations, et dévlopper d'autre facons de résolutions des équations différentielles à dérivée fractionnaires.

# Bibliography

[1] R.Agrawal,M.Benchohra,and S.Hamani. Boundary value problems for fractional differential equations. Georgian Mathematical Journal,Vol.16(2009),Number 3,401-411.

[2] M.Benchohra, J.Henderson,S.K.Ntouyas,and A.ouhab,Existence resultas for fractional order functional order functional differential equations with infinite delay.J.Math.Anal.Appl.338(2008),No. 2, 1340-1350.

[3] M.Benchohra,A.Cabada,D.Seba,An existence result for nonlinear fractional differential equation on Banach spaces, Bound.Value Probl.,Volume 2009 (2009), Article ID 628916,11 pages

[4] L.Debnath,Recent applications of fractional calculus to science and engineering, Imt.J Math-Apg-Sci 54(2003),3413-3442.

[5] K.Diemling, Nonlinear Fractional Analysis, Springer, Berlin, Germany, 1985.

[6] K.Diethelm, A.D.Freed, on the solution of nonlinear fractional order differentiel equation used in the modeling of viscoelasticity, in :Ekeil, W.Mackens, H.Voss, J.werther(Eds),Scientific computing in chemical engeneering II- computational fluid dynamics, reaction engeneering and molecular properties, Springer- Verlag, Heidelberg, 1999,pp.217-307.

[7] K. Diethelm: The Analysis Fractional Differential Equations, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010.

[8] L.Gaul, P. Klein, S. Kempfls, Damping description involving fractional operators, Mech. Syst. Signal process.5(1991) 81-88.

[9] A.Guezane-Lakoud,Initial value problem of fractional order.Gogent Math.2(2015),Art.ID 1004797,6 pp

[10] A.Guezane-Lakoud,R.Khaldi,On a boundary value problem at reonance on the half line.J.Fract. Galc.Appl.8(2017),no.1,159-167.

[11] V. Lakshmikantam and A. S. Vatsala, Basic theory of fractiona differential equations. Nonlinear Anal. 69(2008), No. 8,2677-2682

[12] T.A.Buton,B.Zhang, Fractional equations and generalizations of Scharfer's and Krasnoselskii's fixed point theoremes, Nonlinear Anal. 75(2012)6485-6495.

[13] A.A.Kilbas and S.A. Marzan,Gauchy Problem for Differential Equation with Gaputo Derivative. Fra Gal. App.ISSN (2004) 1311-0454.

[14] Y.Zhou,F.Jiao,J.Li,Existence and uniqueness forfractiional neutral differential equations with infinite delay, Nonlinear Anal. 71(2009)3249-3256.

[15] R.P.Agarwal, V.Lakshmikantham, J.J.Nieto,On the concept of solution for fractional equations with uncertainty, Nonlinear Anal. 72(2009)-2862.

[16] S.Abbas,Existence of solutions to fractional ordinary and delay differential equations and applications,Electronic Journal of Differential Equations 2011(9)(2011) 1-11.

[17] R.P.Agarwal, Y.Zhou, Y.He Existence of fractional differential,Computers and Mathematics with Applications 59(2010)1095-1100.

[18] A.Guezane-Lakoud, A, Kiliçman, A : Unbounded solution for a fractional boun- dart value problem. Adv. Differ. Equ. 2014, Article ID 154 (2014).

[19] A.Granas and J.Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003

[20] J.Hale and S. Verduy Lunel, Introduction to Functionnal Differentiel Equation Applied Mathematical Sciences, 99, Springer -Verlag, New York, 1993.

[21] R. Hlfer, Application of Fractional calculus in physics, world scientific, 2000.

[22] F.Chen, Fixed points and asymptotic stability of nonlinear fractional difference equations, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2011(39)(2011)1-18.

[23] A.A. kilbas, H. M. Srivastava, J.J. Trujillo: Theory and Application of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam (2006).

[24] F.Ge,C.Kou, Asymptotic stability analysis by Krasnoselskii's fixed point theorem for nonlinear fractional differential equations, Applied Mathematics and Computation 257(2015)308-316.

[25] A.A.Kilbas, Hari M.Srivastava, Juan J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Equations, in North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204,Elsevier Science B.V.,Amsterdam,2006.

[26] F.Mainardi, Fractional calculus : some basic problems in continuum and statistical mechanics. Fractals and fractional calculus in continuum mechanics (Udine, 1996), 291-348,CISM Courses and Lectures, 378, Springer, Vienna, 1997.

[27] K.S.Miller,B.Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and DIfferential Equation, John Wiley,New York,1993.

[28] I.Podlubny: Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego 1990

[29] B. Ross, fractionnal Calculus and its Application, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[30] Yu. Rossikhim, M. V. Shitikova, Applications of fractionnal calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids, Appl. Mech. Rev 50 (1) (1997) 15-67.

[31] J. Sabatier, O. P. Agrawal, J. A. Tenreiro Machado . Advances in fractional calculus. Springer (2007).

[32] S. Samko, A. Kilbas, and O. Marichev, Fractional integrals and derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach, London, 1993.

[33] E.Zeidler,Nonlinear Functional Analysis and Application. Fixed point Theorems Spring-Verlag,New York,1986.

[34] S.Zhang,Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations, Electron. J.Differential Equations 2006,No. 36, 12 pp.